7.2 Phương pháp chuỗi Fourier

7.2.1 Chuỗi Fourier dạng lượng giác.

7.2.2 Tính đối xứng của hàm và các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

7.2.3 Chuỗi Fourier dạng mũ (dạng phức) .

7.2.4 Phổ tần số.

7.2.5 Truyền tín hiệu tuần hoàn qua mạch tuyến tính.

7.2.6 Công suất ở mạch tác động không sin.

7.2.7 Các đặc trưng của tín hiệu tuần hoàn.

7.2.1 Chuỗi Fourier dạng lượng giác

- **Chuỗi Fourier dạng lượng giác của tín hiệu tuần hoàn không sin f(t) thoả điều kiện Dirichlet (đơn điệu và bị chặc trên một chu kỳ) có dạng:**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Với : n = 0,1,2 ...

ω_0 = 2π/T = tần số cơ bản

a_0 , a_n , b_n = các hệ số khai triển Fourier .

Các hệ số khai triển Fourier

- **Tín hiệu có chu kỳ T (s)**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

- **Tín hiệu có chu kỳ 2π (rad)**

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)d(\omega t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(n\omega_0 t)d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\sin(n\omega_0 t)d(\omega t)$$

Chuỗi Fourier và hài (harmonic)

- **Từ Phương trình (1) , ta biến đổi :**

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \qquad \textbf{(2)}$$

- **Với :**

d_0 = thành phần DC (trung bình).

$D_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ = Tp hài cơ bản.

$D_k\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ = Tp hài thứ k.

$$\begin{cases} d_0 = a_0 \\ D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -arctg\,\dfrac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

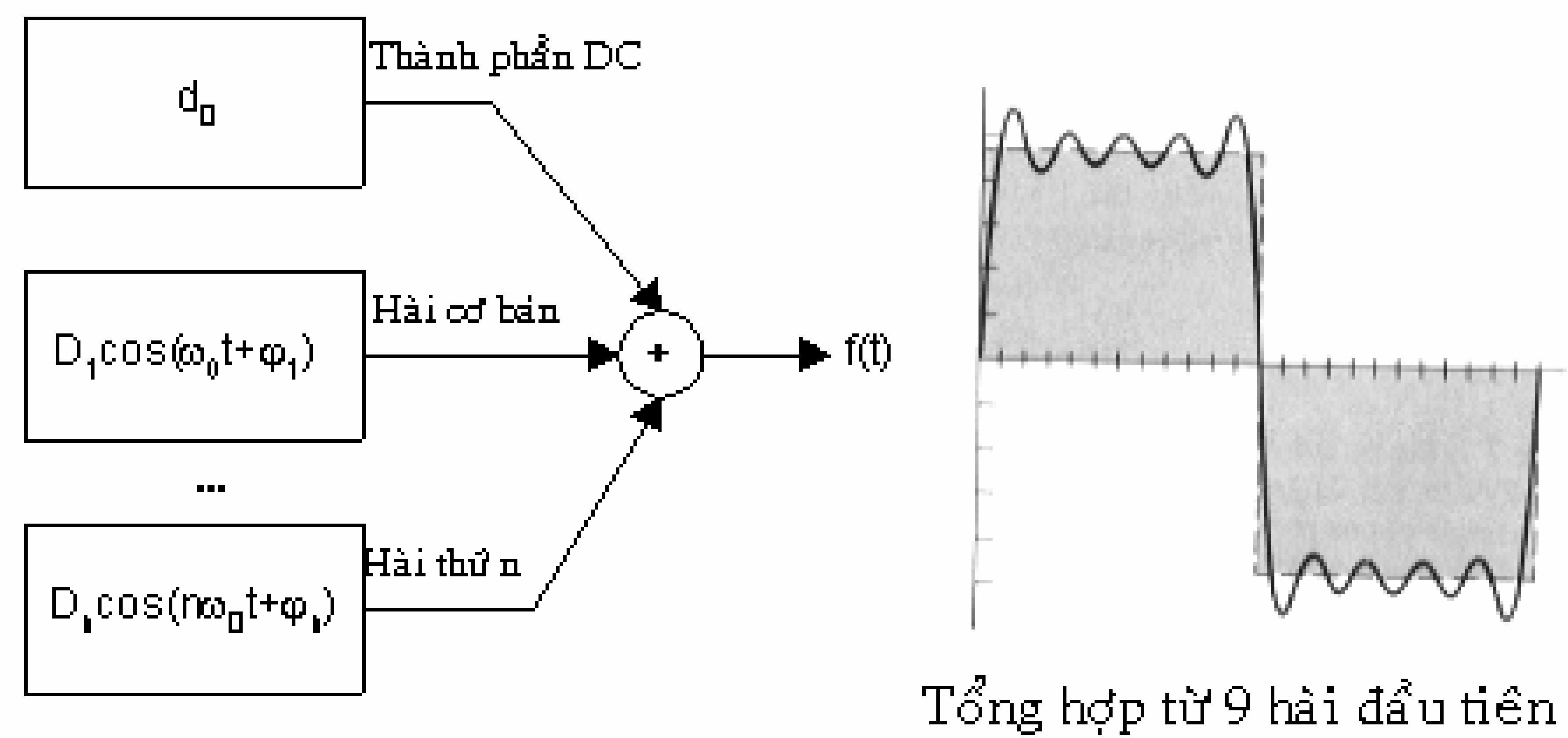
Ứng dụng chuỗi Fourier

1. **Ý nghĩa xếp chồng : tín hiệu tuần hoàn không sin là tổng của tín hiệu DC và các điều hòa , có tần số là bội số của tần số cơ bản.**

$$f(t) = TpDC + \sum_{n=1}^{\infty} har_n$$

2. **Tín hiệu tuần hoàn không sin f(t) có thể tạo ra từ các tín hiệu : tín hiệu DC và các tín hiệu điều hòa , có tần số là bội số của tần số tín hiệu muốn tạo.**

Tạo tín hiệu không sin từ các hài



7.2.2 Tính đối xứng của hàm và các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

- **Hàm chẵn f(t) = f(-t) : Tín hiệu nhận trục tung làm trục đối xứng.**

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = 0$$

- **Hàm lẻ f(t) = - f(-t) : Tín hiệu nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.**

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

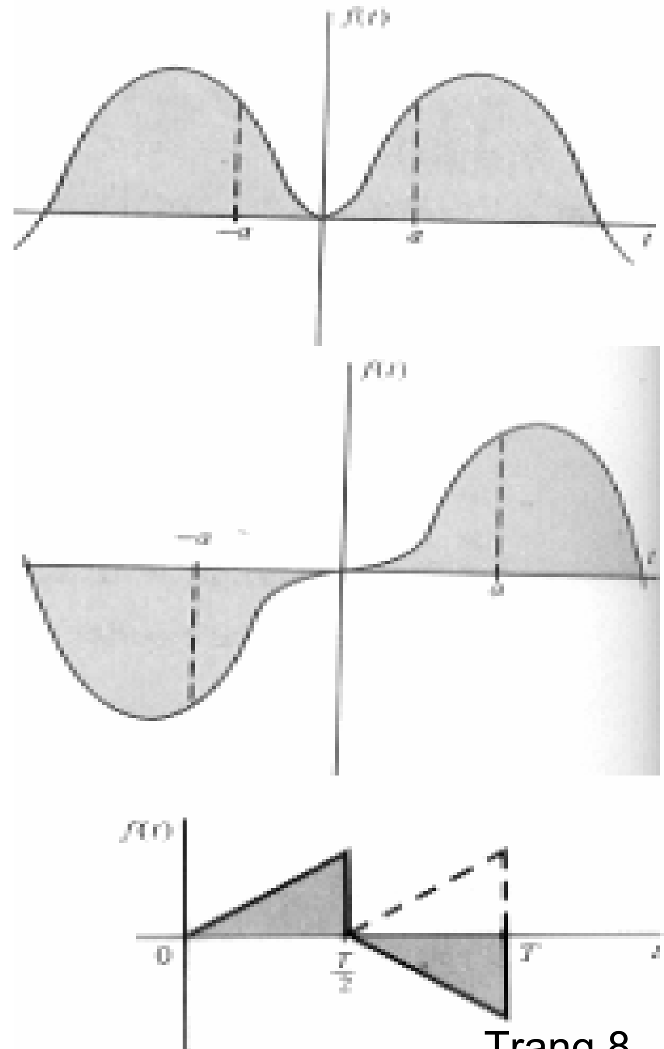
Tính đối xứng của hàm

- **Hàm đối xứng nửa sóng :**

  f(t) = - f(t ± T/2) :
- **Tp DC:** $a_0 = 0$
- **Với n chẵn : $a_n = 0$; $b_n = 0$;**
- **Với n lẻ :**

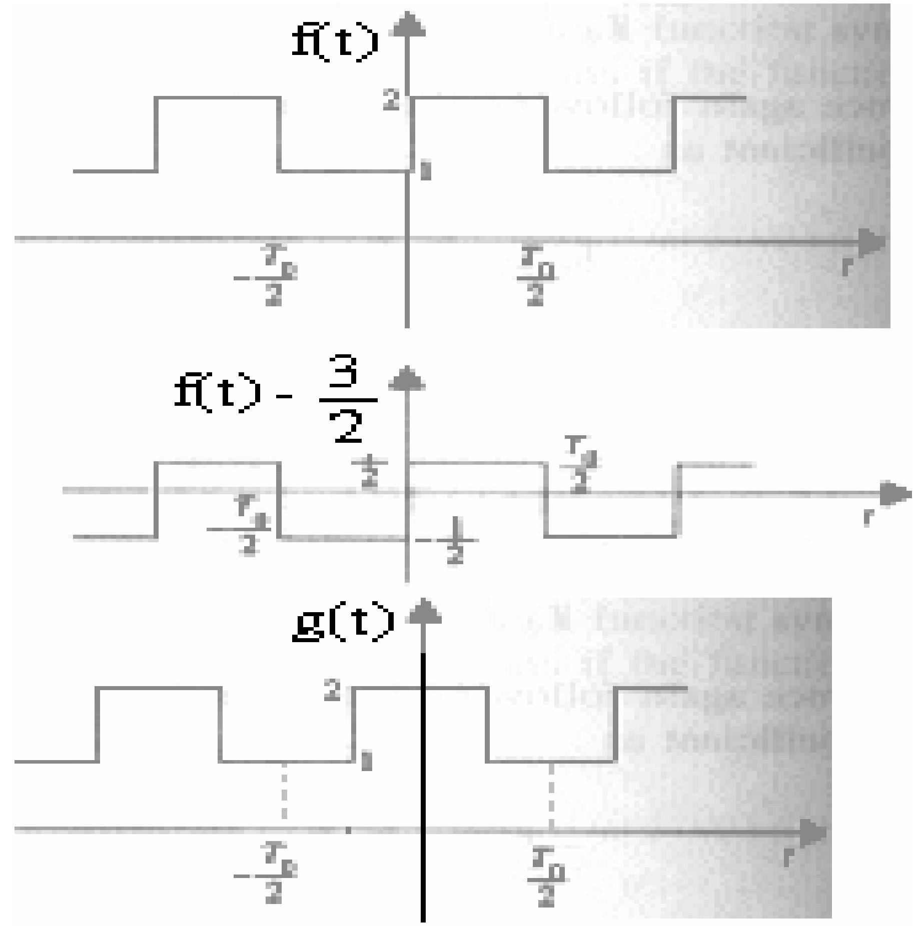
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$



Nếu hàm không đối xứng : dời trục

- **Dời tín hiệu theo trục tung : thay đổi Thành phần DC của tín hiệu .**
- **Dời tín hiệu theo trục hoành : thay đổi góc pha của các hài.**



$$f(t) = g(t - \frac{T_0}{4})$$

Nếu hàm không đối xứng :phân tích chẵn – lẻ

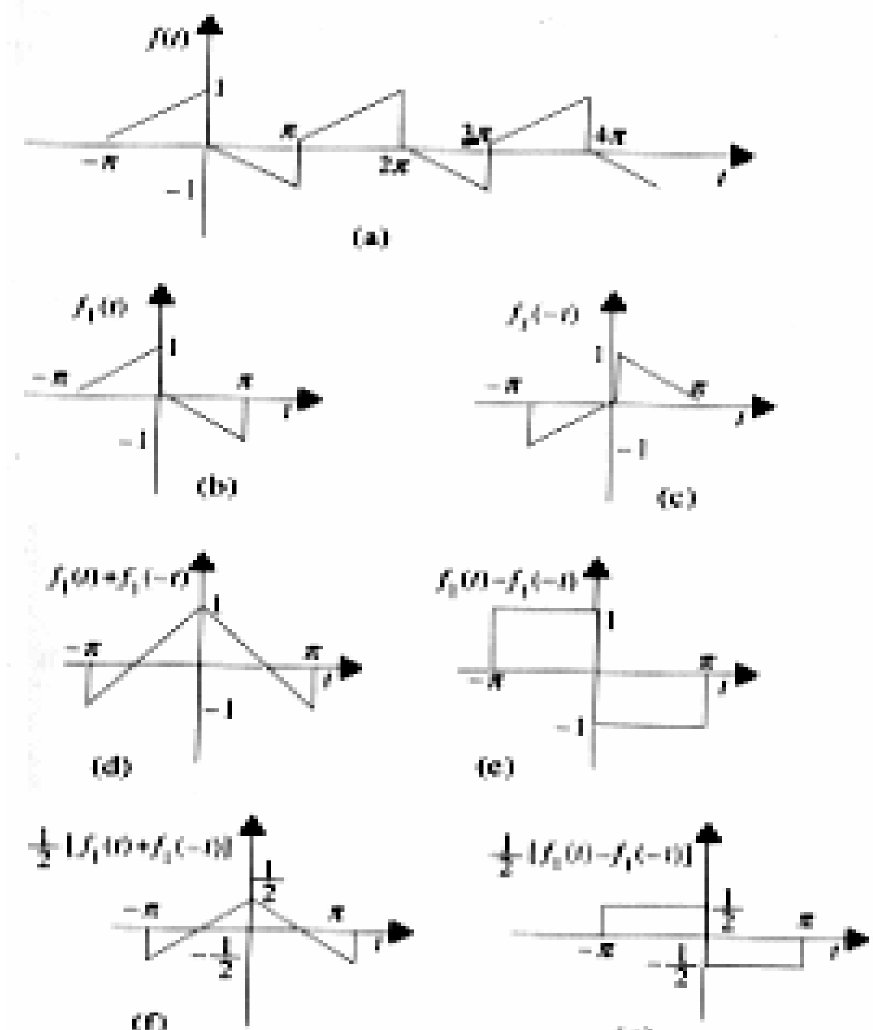
- **Hàm không đối xứng : phân tích thành các thành phần chẵn và lẻ : $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$**

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

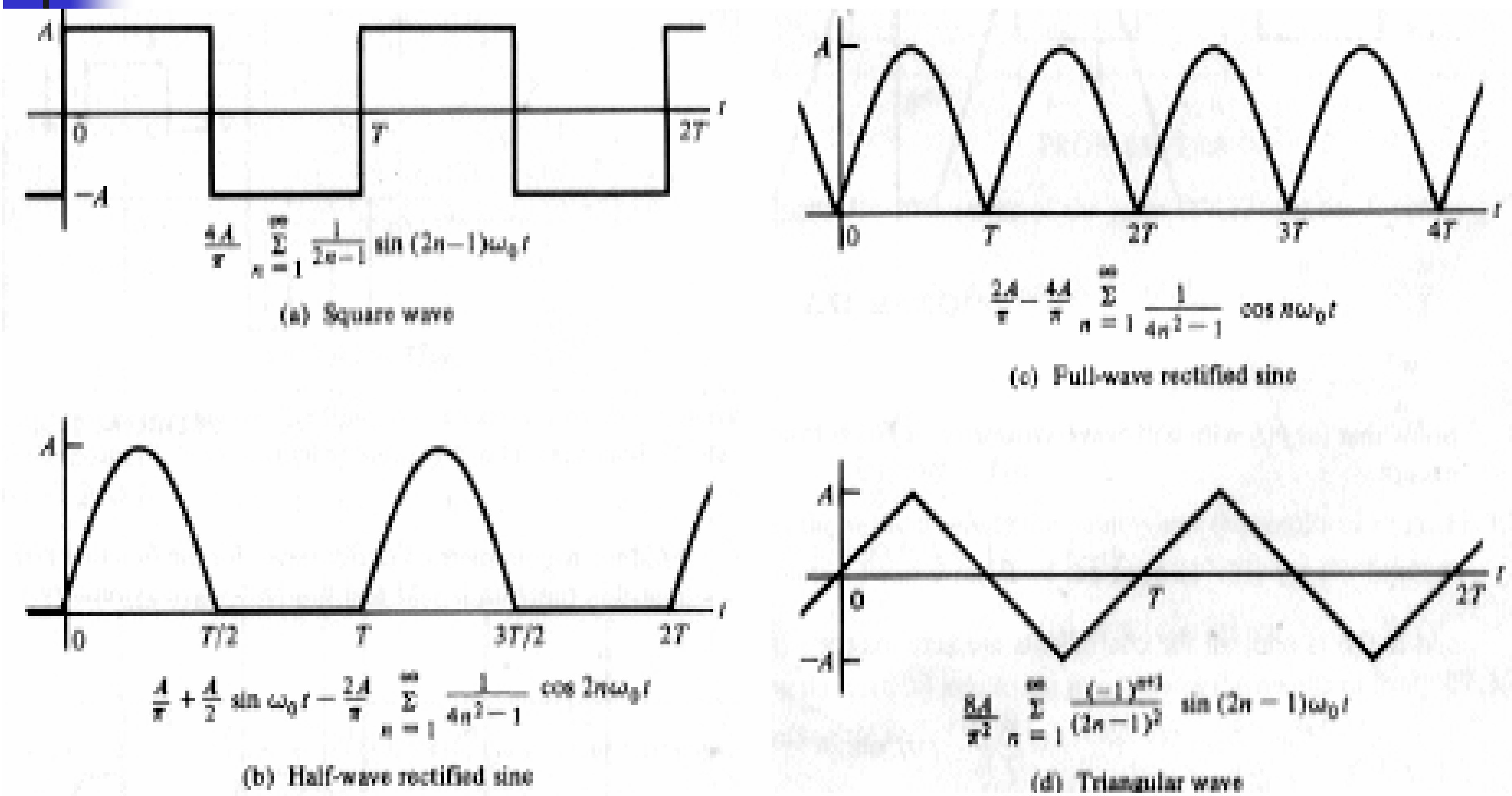
$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Hàm f(-t) xác định bằng đồ thị . Và ta có :

$a_0 = a_{0e}$; $a_n = a_{ne}$; $b_n = b_{no}$;



▪ Một số ví dụ chuỗi Fourier



7.2.3 Chuỗi Fourier dạng mũ

- **Nếu sử dụng các công thức biến đổi Euler vào phương trình (1) , ta nhận được chuỗi Fourier dạng số mũ (dạng số phức) như sau :**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \textbf{(3)}$$

- **Với số phức C_n :**

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- **Và :**

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = a_0 = d_0$$

▪ Chuỗi dạng mũ và chuỗi lượng giác

- **Chuỗi dạng mũ quan hệ với các dạng khác :**

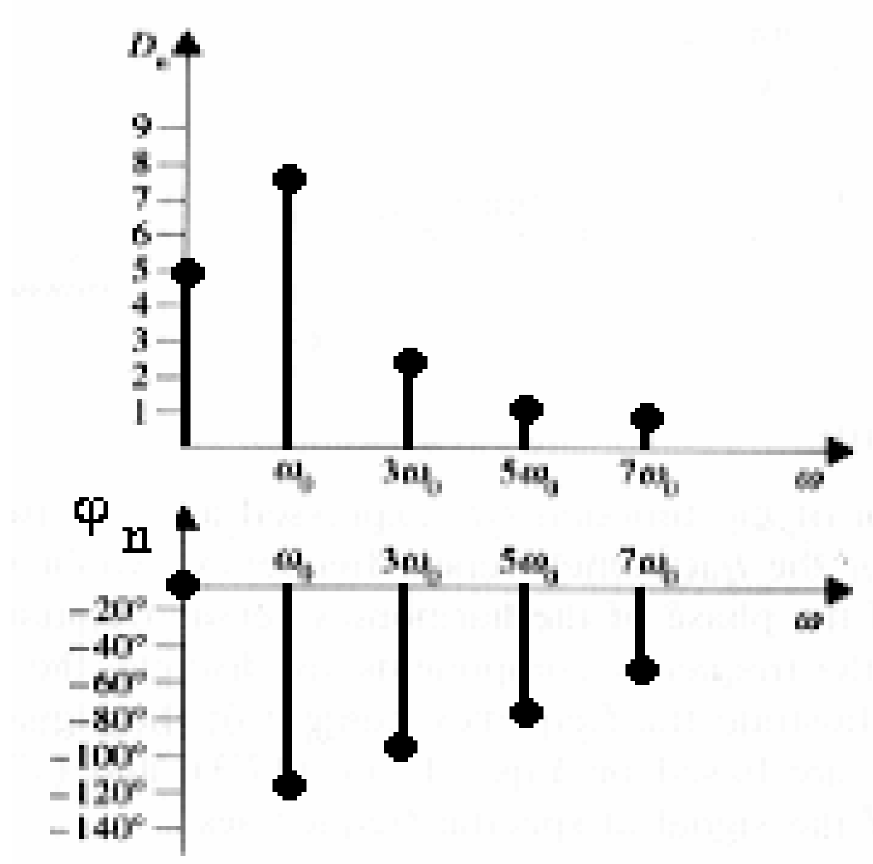
$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \angle -arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{D_n}{2} \angle \varphi_n$$

- **Và như vậy :**

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|C_n\right| \cos(n\omega_0 t + \angle C_n) \qquad \textbf{(4)}$$

7.2.4 Phổ tần số (fre. spectrum)

- **Phổ tần số của tín hiệu bao gồm đồ thị biểu diễn độ lớn biên độ (phổ biên độ) và đồ thị biểu diễn độ lớn góc pha (phổ pha) các hài theo tần số.**
- **Độ lớn biên độ hay pha được minh họa bằng các đoạn thẳng : gọi là phổ vạch. Phổ tần số của tín hiệu tuần hoàn là rời rạc.**



Amplitude and phase spectra.

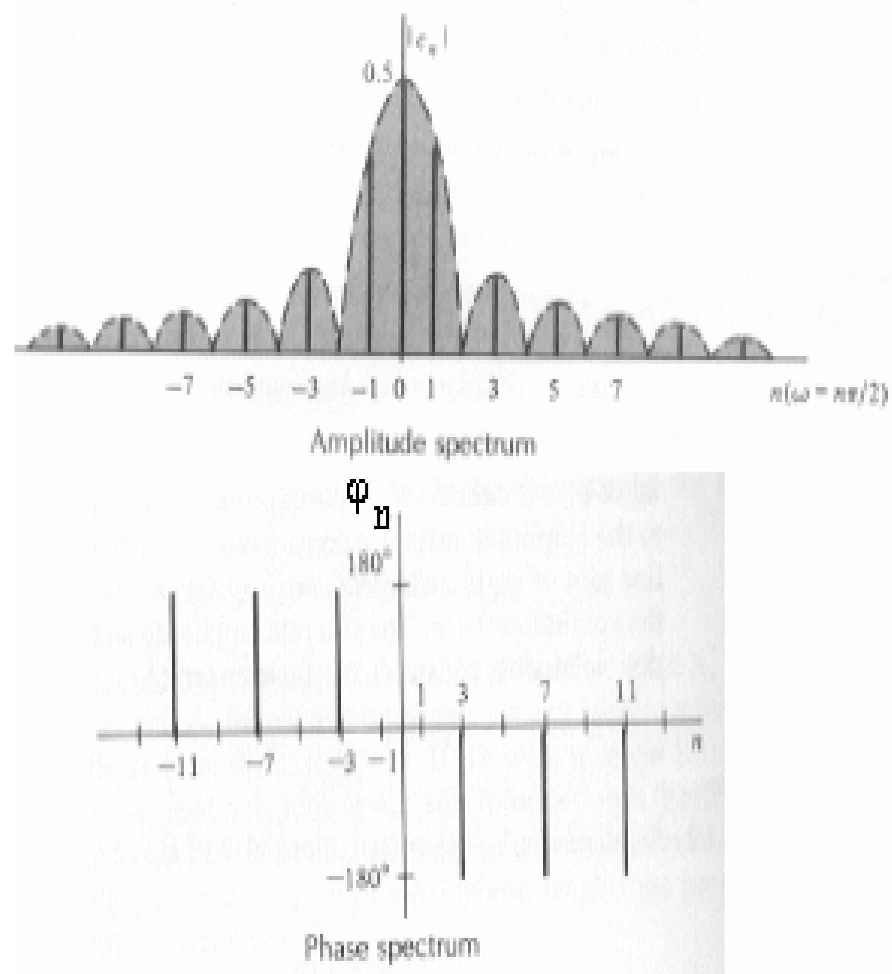
Xác định và vẽ phổ tần số

- **Ta có :** $C_n = \frac{D_n}{2} \angle \varphi_n$

  Nên biểu diễn:

  $|C_n|$ theo n là phổ biên độ.

  $\angle C_n$ theo n là phổ pha.
- **Phổ tần số được xây dựng : xác định C_0 , C_n và sau đó vẽ biên độ và pha theo n (ở đây là hài) .**
- **Phổ biên độ: đối xứng qua trục tung và phổ pha đối xứng qua gốc toạ độ.**



Time Shifting

- **Nếu hàm f(t) bị làm trễ đi t_0 , ta có :**

$$f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0(t-t_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(C_n.e^{-jn\omega_0 t_0})e^{jn\omega_0 t}$$

Tức là ở miền tần số , góc pha hài thứ n bị thay đổi : $n\omega_0 t_0$.

7.2.5 Truyền tín hiệu tuần hoàn qua mạch tuyến tính.

Xếp chồng trong miền tần số.

- **Tìm chuỗi Fourier của x(t).**

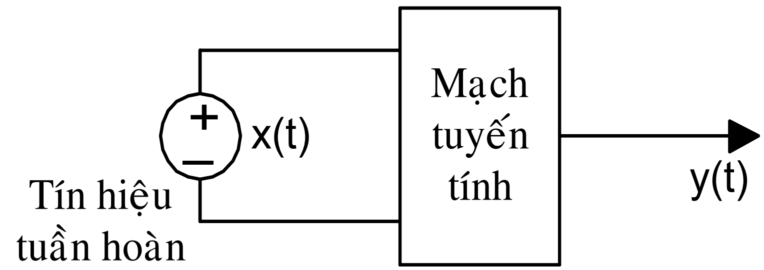
$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

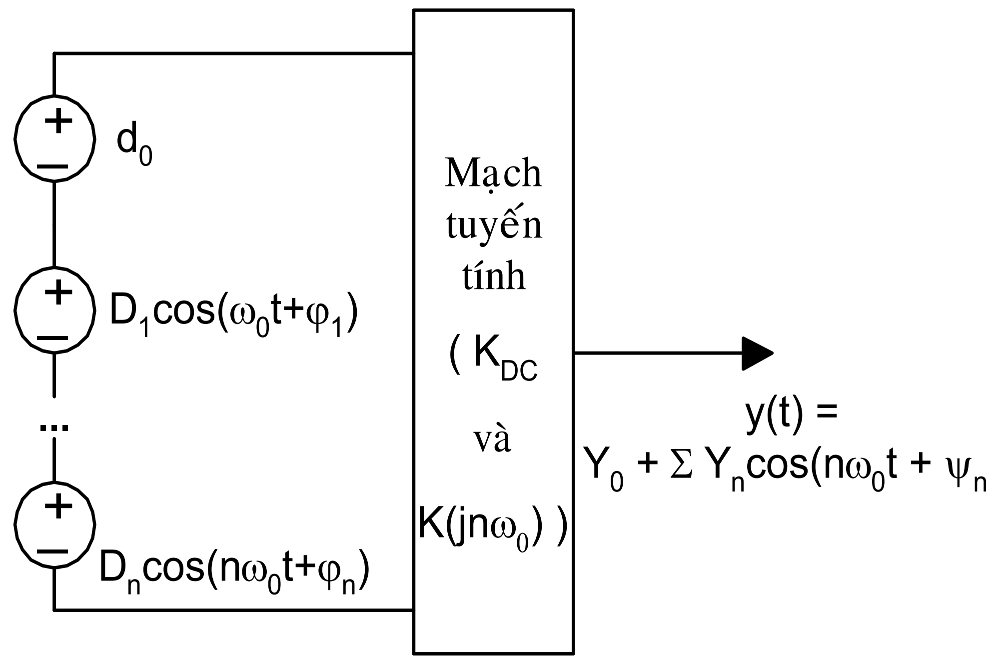
- **Tìm Y_0 : đáp ứng DC.**
- **Tìm vecto phức của hài:**

$$\dot{Y}_n = H(jn\omega_0).\dot{X}_n = Y_n \angle \psi_n$$

Đáp ứng có dạng :

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n)$$





7.2.6 Công suất ở mạch không sin.

- **Cho một nhánh có áp , dòng là tín hiệu không sin :**

$$u(t) = U_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{un})$$

$$i(t) = I_{DC} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m \cos(m\omega_0 t + \varphi_{im})$$

- **Công suất tác dụng P (W) :** $\mathbf{P = P_{DC} + \sum(P_{hài})}$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t)dt$$

$$P = U_{DC} I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} U_n I_n \cos(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

Trị hiệu dụng của tín hiệu

- **Cho tín hiệu không sin có khai triển chuỗi Fourier :**

$$u(t) = U_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{un})$$

- **Trị hiệu dụng (RMS value) :**

$$U_{RMS} = \sqrt{U_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{U_n}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

Công suất Q ; S ; T

- **Công suất phản kháng Q (VAR) = ∑(Q$_{\text{hài}}$) :**

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} U_n I_n \sin(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

- **Công suất biểu kiến S (VA) :** $S = U_{RMS} I_{RMS}$

- **Công suất méo dạng T (VA) : có một số hài chỉ tồn tại ở u(t) hay i(t), mà khi thay đổi biên độ của chúng , S thay đổi nhưng P và Q không đổi. Người ta đưa ra khái niệm công suất méo dạng.**

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

7.2.7 Các đặc trưng của tín hiệu tuần hoàn không sin

- **Hệ số công suất cosφ :** $$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$
- **Hệ số méo dạng k = (Trị hiệu dụng hài cơ bản) / (Trị hiệu dụng của tín hiệu) :** $$k = \frac{F_{1RSM}}{F_{RMS}}$$
- **Hệ số hàm lượng hài thứ n :** $$k_n = \frac{F_{n(RSM)}}{F_{RMS}}$$

Hệ số dạng - Hệ số đỉnh

- **Hệ số dạng k_f :**

$$k_f = \frac{RMS - value}{Average - value} = \frac{F_{RSM}}{F_0}$$

- **Hệ số đỉnh k_p :**

$$k_p = \frac{\max\left[f(t)\right]}{RMS - value} = \frac{F_{\max}}{F_{RMS}}$$