7.3 Phương pháp biến đổi Fourier

1. Biến đổi Fourier và ảnh Fourier.

2. Các tính chất của biến đổi Fourier.

3. Biến đổi Fourier của các hàm thông dụng.

4. Áp dụng biến đổi Fourier.

1. Biến đổi Fourier và ảnh Fourier

- **Biến đổi Fourier cho tín hiệu không tuần hoàn f(t) : là một công cụ toán có phạm vi áp dụng rất lớn trong các bài toán kỹ thuật , nó được định nghĩa là một cặp biến đổi thuận – ngược như sau :**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j\omega t} dt$$

và :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega).e^{j\omega t} d\omega$$

- **Để có biến đổi Fourier, tín hiệu f(t) cũng phải thỏa mãn điều kiện Dirichlets.**

Đặc điểm của hàm F(ω)

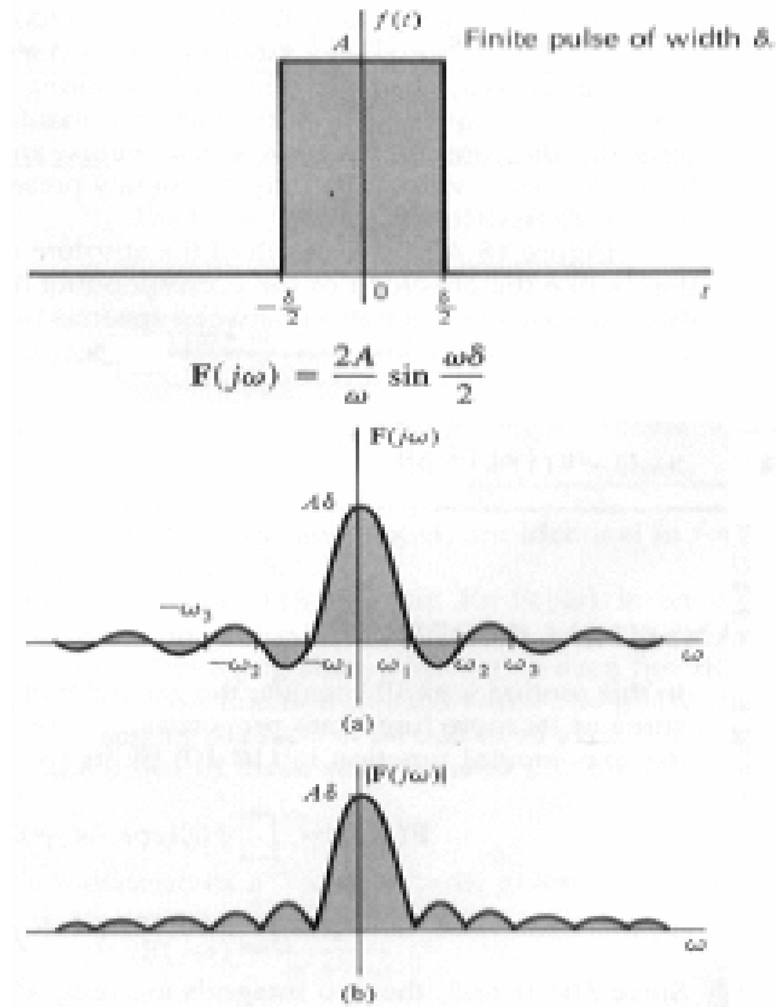
- **Phổ tần số :**

$$F(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

Phổ biên độ: biểu diễn |F(jω)| theo ω .

Phổ pha : φ(ω) theo ω .

- **Phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu không tuần hoàn là các hàm liên tục theo ω .**



$$F(j\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\delta}{2}$$

2. Các tính chất của biến đổi Fourier

- Với F(ω) = P(ω) + jQ(ω) thì : P(ω) là hàm chẵn theo tần số ω và Q(ω) là hàm lẻ theo tần số ω.
- Tuyến tính (Linearity) :

$$a.f_1(t)+b.f_2(t) \Leftrightarrow a.F_1(\omega)+b.F_2(\omega)$$

- Nén tín hiệu (Time scaling):

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}.F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Trễ tín hiệu (Time shifting) :

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega).e^{-j\omega t_0}$$

- Điều chế (Modulation):

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

- Đạo hàm trong miền thời gian

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow (j\omega).F(\omega)$$

Các tính chất của biến đổi Fourier (tiếp theo)

- **Tích phân trong miền thời gian (Integration in the time domain):**

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}.F(\omega)+\pi.F(0).\delta(\omega) \quad ;F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

- **Tích chập trong miền thời gian (Convolution in the time domain):**

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow F_1(\omega).F_2(\omega)$$

- **Định lý Parseval (Parseval's Theorem):cho ta một sự liên hệ giữa năng lượng ở miền thời gian và năng lượng trong miền tần số.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$$

3. Biến đổi Fourier của các hàm thông dụng

Hàm gốc	Ảnh Fourier
1(t)	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
δ(t)	1
1 (nguồn DC)	2πδ(ω)
$e^{-at}.1(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
Sign(t)	$\frac{2}{j\omega}$

Biến đổi Fourier của các hàm thông dụng (tiếp theo)

Hàm gốc	Ảnh Fourier
Hàm AC : $\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
Hàm AC : $\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
Hàm quá độ AC : $\cos(\omega_0 t).1(t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
Hàm quá độ AC : $\sin(\omega_0 t).1(t)$	$-j\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
Hàm mũ hai phía $e^{-\alpha\lvert t\rvert}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

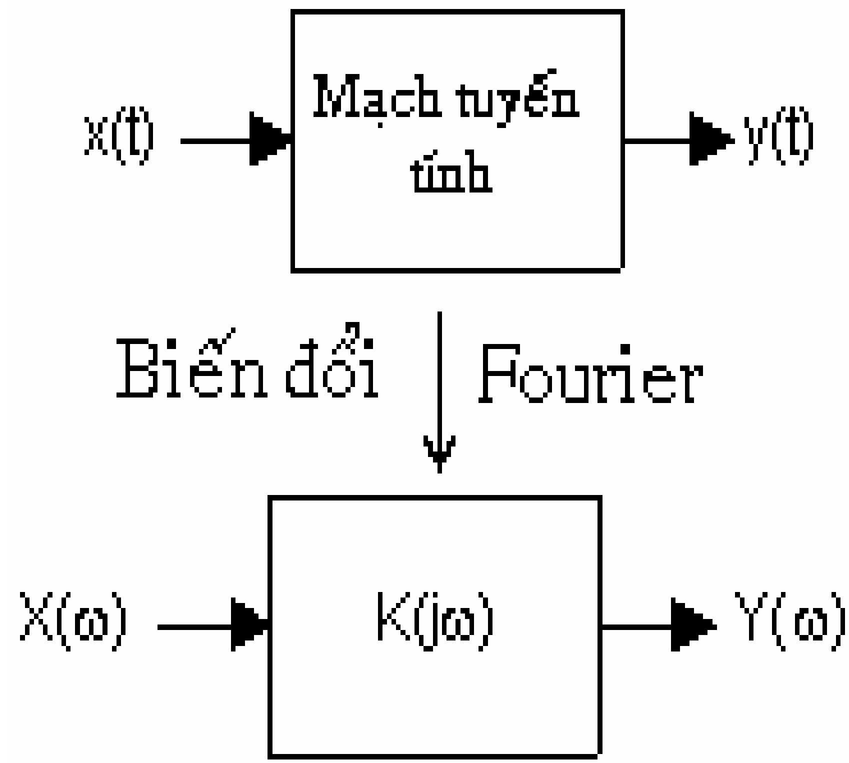
4. Ứng dụng biến đổi Fourier

- **Truyền tín hiệu qua mạch tuyến tính:**

  Xác định biến đổi Fourier của tác động x(t) và hàm truyền theo tần số K(jω) của mạch . Sau đó xác định :

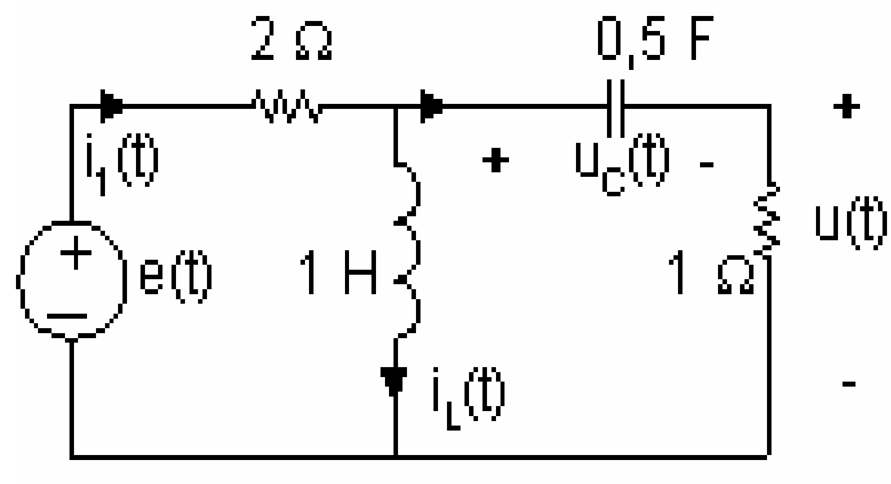
  $$Y(\omega) = K(j\omega).X(\omega)$$

- **Biến đổi ngược Y(ω) tìm y(t).**
- **<u>Lưu ý :</u> không có khái niệm điều kiện đầu như Ch 6 !**



Biến đổi Fourier : Ví dụ 1

- **Tìm đáp ứng xác lập u(t) khi e(t) = 10cos(2t) V**



Giải

- **Hàm truyền mạch ở miền tần số :**

$$K(j\omega)=\frac{\omega^2}{3\omega^2-j4\omega-4}$$

- **Ảnh Fourier của tác động :** $E(\omega)=10\pi\left[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\right]$

- **Tín hiệu ra miền tần số :** $U(\omega)=\dfrac{10\pi\omega^2\left[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\right]}{3\omega^2-j4\omega-4}$

Ví dụ 1 (tiếp theo)

- ***Tìm hàm gốc :*** $u(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

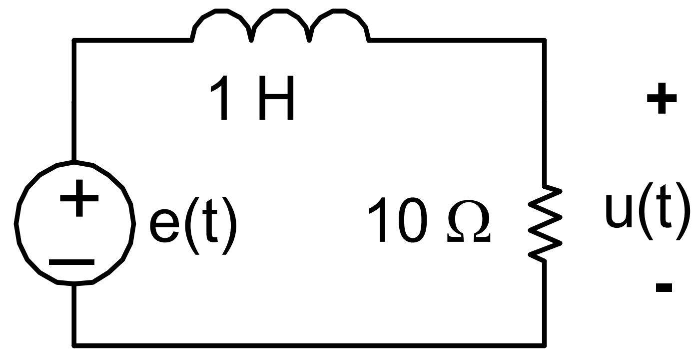
Lưu ý là : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$

$$u(t) = \frac{5(2^2)}{3(2^2)-j8-4}e^{j2t} + \frac{5(-2^2)}{3(-2^2)+j8-4}e^{-j2t} \Rightarrow u(t) = \frac{20}{8(1-j)}e^{j2t} + \frac{20}{8(1+j)}e^{-j2t}$$

$$u(t) = \frac{5}{4}\left[(1+j)(\cos 2t + j\sin 2t) + (1-j)(\cos 2t - j\sin 2t)\right]$$

$$u(t) = \frac{5}{2}\left[\cos 2t - \sin 2t\right] = 3,53\cos(2t + 45^o)$$

Biến đổi Fourier : Ví dụ 2



- **Tìm đáp ứng quá độ u(t) khi $e(t) = 5e^{-2t}.1(t)$ V**

Giải

- **Hàm truyền mạch ở miền tần số :**

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{10}{10 + j\omega}$$

- **Ảnh Fourier của tác động :** $E(\omega) = \dfrac{5}{2 + j\omega}$
- **Tín hiệu ra miền tần số :**

$$U(\omega) = K(j\omega).E(\omega) = \frac{50}{8}\left(\frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{10 + j\omega}\right)$$

- **Vậy :**

$$u(t) = 6,25\left(e^{-2t} - e^{-10t}\right).1(t)V$$

7.4 Biểu diễn đồ thị của hàm truyền

1 Đặc tuyến tần số của mạch .

2. Đặc tuyến logarithm – Tần số logarithm.

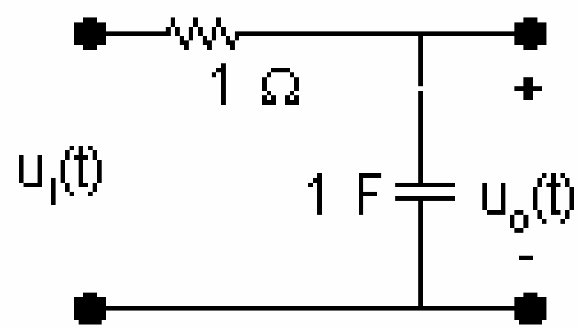
3. Giản đồ Bode.

1. Đặc tuyến tần số của mạch

- **Trong hàm truyền toán tử , khi ta thay s = jω , ta có hàm truyền của mạch trong miền tần số :**

$$K(j\omega) = \left|K(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$



$$K(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} + j\frac{-\omega}{1+\omega^2}$$

- **Các đặc tuyến :**

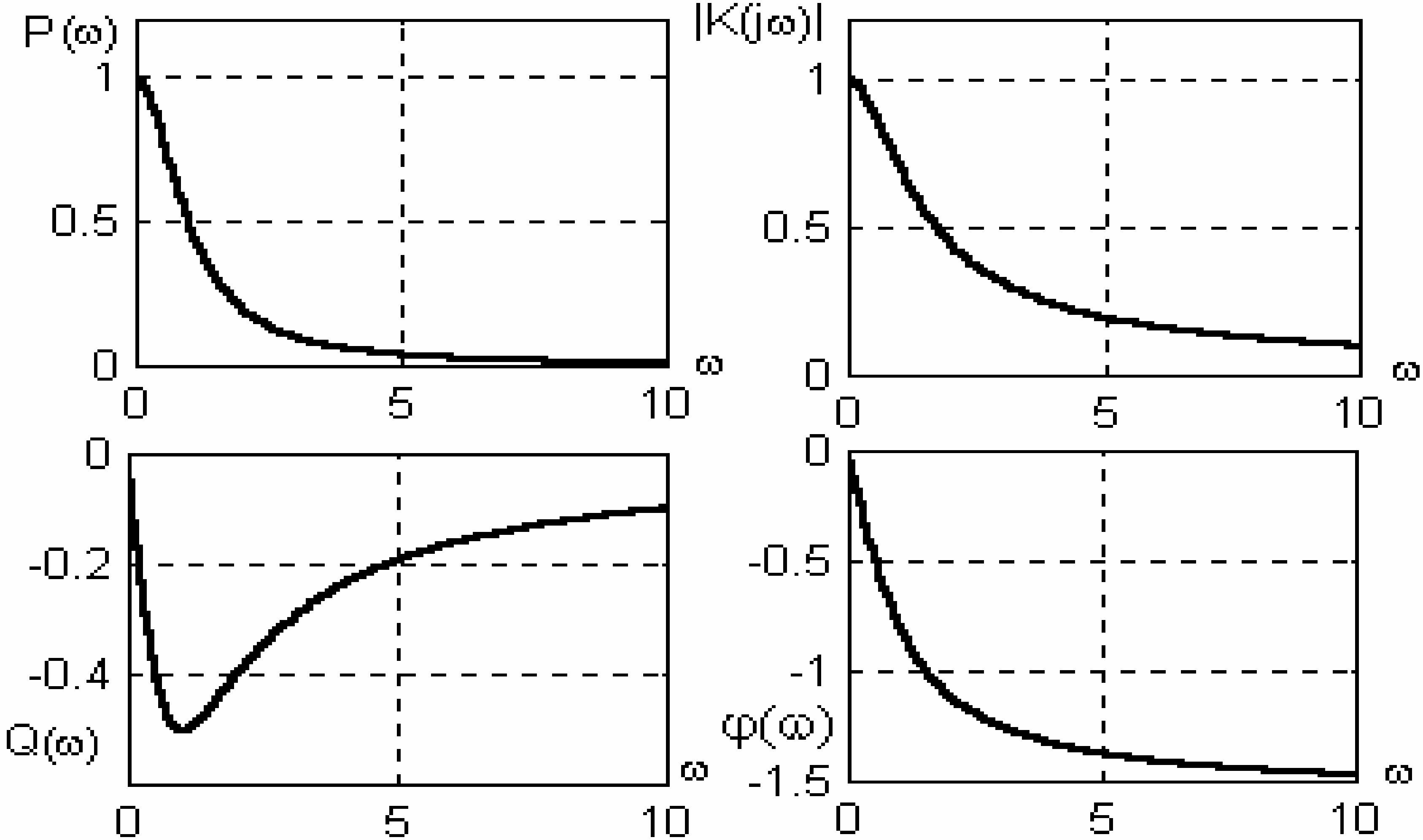
|K(j ω)| : Đặc tuyến biên tần.

φ(ω) : Đặc tuyến pha tần.

P(ω) : Đặc tuyến phổ thực .

Q(ω) : Đặc tuyến phổ ảo .

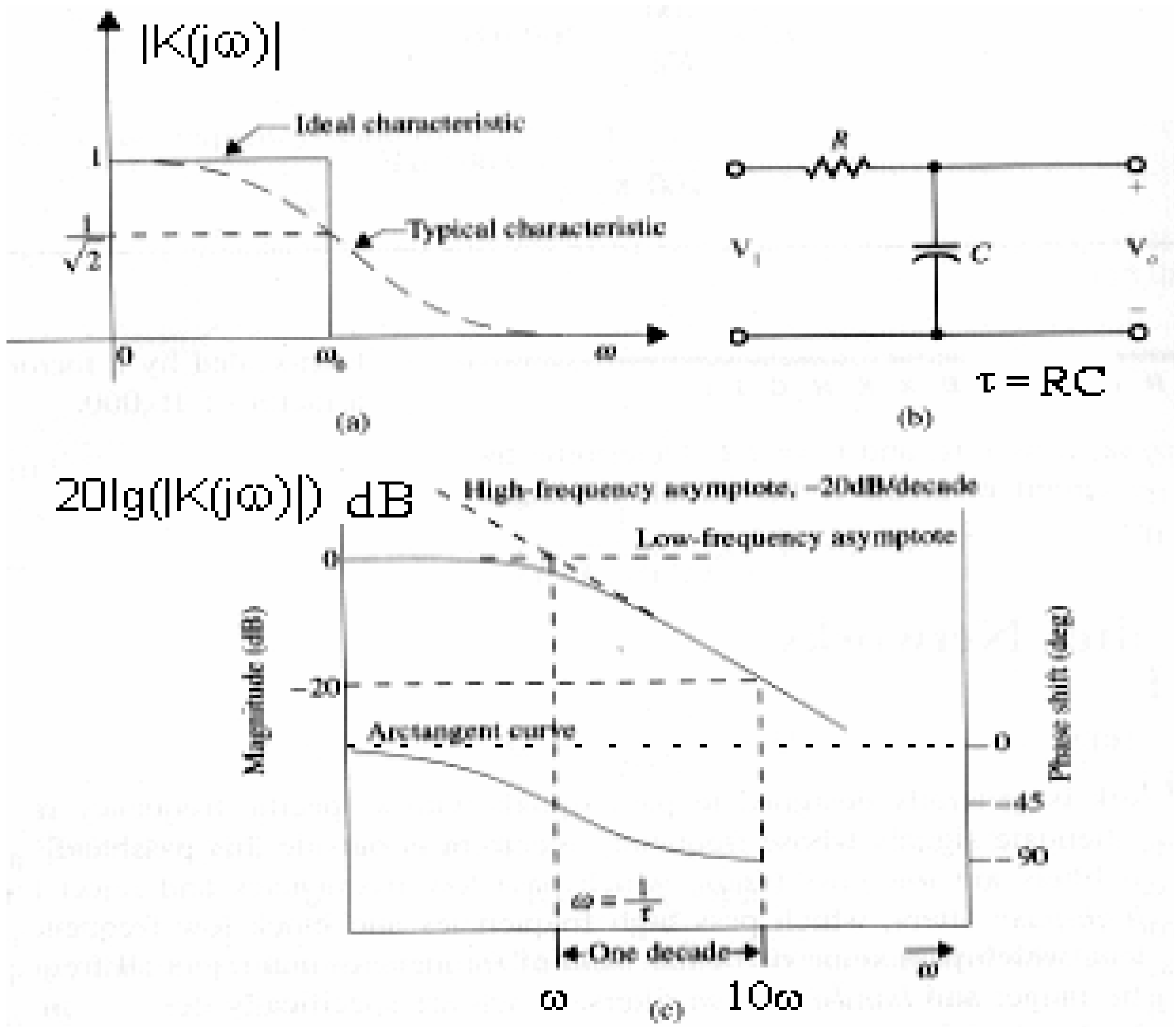
▪ Các đặc tuyến tần số của mạch RC



2. Đặc tuyến biên độ logarithm và tần số logarithm

- **Tần số tuyến tính (LIN) : giá trị trên trục tần số $V_i = k\omega_i + a$. Tức là : $\omega_i - \omega_{i-1} = const$.**
- **Tần số logarithm 2 (OCT) : giá trị trên trục tần số $V_i = \log_2(\omega_i)$. Tức là : $\omega_i = 2\,\omega_{i-1}$.**
- **Tần số logarithm 10 (DEC hay LOG) : giá trị trên trục tần số $V_i = \log_{10}(\omega_i)$. Tức là : $\omega_i = 10\,\omega_{i-1}$.**
- **Khi biểu diễn các đặc tuyến tần số , người ta ít dùng hàm $|K(j\,\omega)|$ mà thường dùng biểu diễn hàm $20\log_{10}|K(j\,\omega)|$, đơn vị dB , theo $\log_{10}(\omega)$ được gọi là đặc tuyến biên độ logarithm. Ưu điểm của cách biểu diễn này là có thể mô tả hàm truyền trong một khoảng rất rộng của tần số.**

▪ Minh họa Đặc tuyến biên độ logarithm



Giản đồ Bode

- **Nếu ta có biểu diễn hàm truyền dưới dạng :**

$$K(j\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm N}\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right)\left[1+2\xi_N(j\omega\tau_N)+(j\omega\tau_N)^2\right]\ldots}{\left(1+\frac{j\omega}{p_1}\right)\left[1+2\xi_M(j\omega\tau_M)+(j\omega\tau_M)^2\right]\ldots}$$

  - **Z_i là các điểm không của hàm truyền .**
  - **Z_p là các điểm cực của hàm truyền .**

Giản đồ Bode (tiếp theo)

- **Biến đổi để có đặc tuyến biên độ logarithm:**

$$20\log_{10}[|K(j\omega)|] = 20\log_{10} K \pm 20N\log_{10}(j\omega) + 20\log_{10}\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right)$$

$$+20\log_{10}\left(1+2\xi_N(j\omega\tau_N)+(j\omega\tau_N)^2\right)+\ldots-20\log_{10}\left(1+\frac{j\omega}{p_1}\right)-\ldots$$

- **Và đặc tuyến pha :**

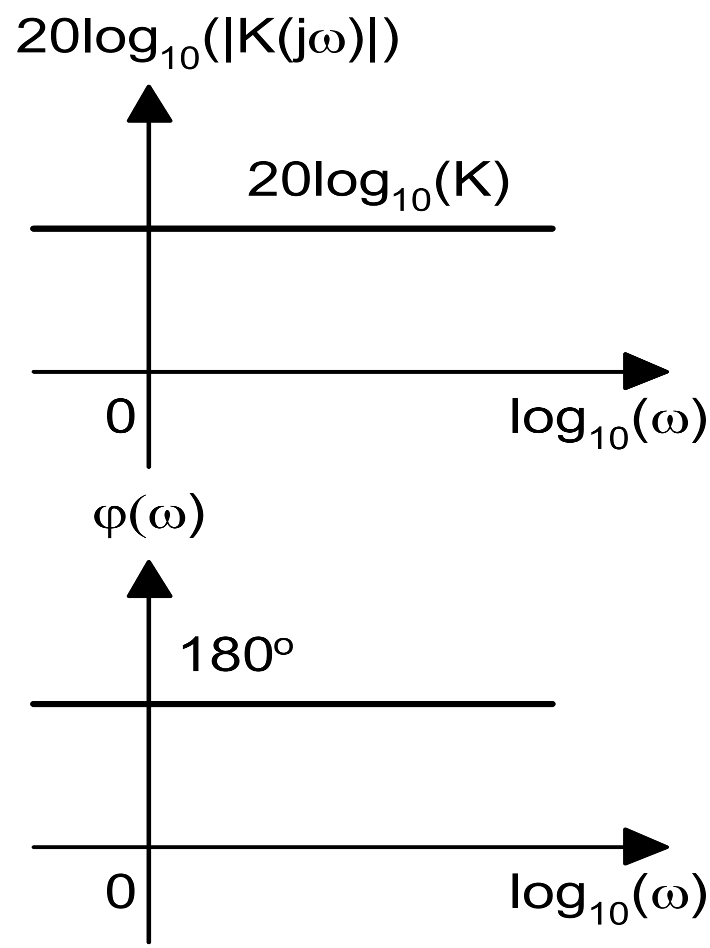
$$\angle K(j\omega) = \begin{cases} 0^o \leftrightarrow K>0 \\ 180^o \leftrightarrow K<0 \end{cases} \pm N.90^o + arctg\left(\frac{\omega}{z_1}\right)$$

$$+arctg\left(\frac{2\xi_N(\omega\tau_N)}{1-(\omega\tau_N)^2}\right)+\ldots-arctg\left(\frac{\omega}{p_1}\right)-arctg\left(\frac{2\xi_M(\omega\tau_M)}{1-(\omega\tau_M)^2}\right)\ldots$$

▪ Thành phần hằng số

- **Giá trị đặc tuyến biên độ logarithm và pha :**

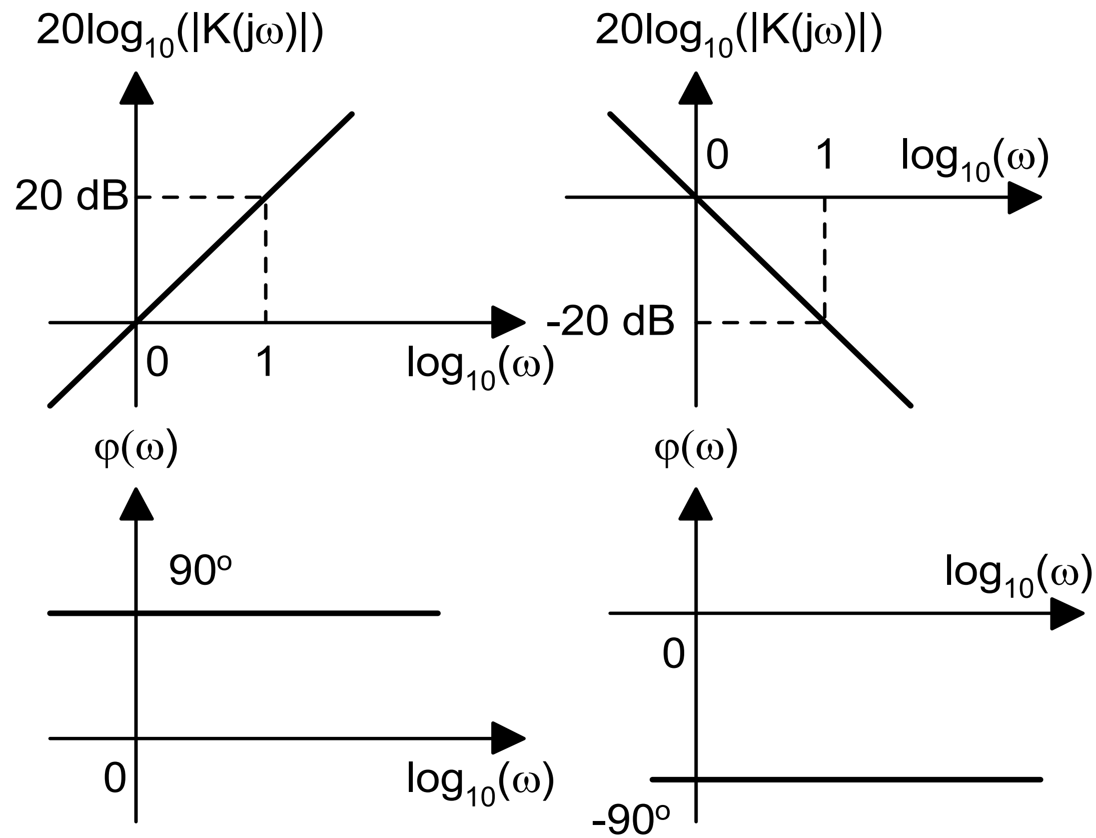
$$\begin{cases} a = 20\log_{10} K \\ b = \begin{cases} 0^o \\ 180^o \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} K > 0 \\ K < 0 \end{cases} \end{cases}$$



Điểm cực và không bằng không

- **Giá trị đặc tuyến biên độ logarithm và pha :**

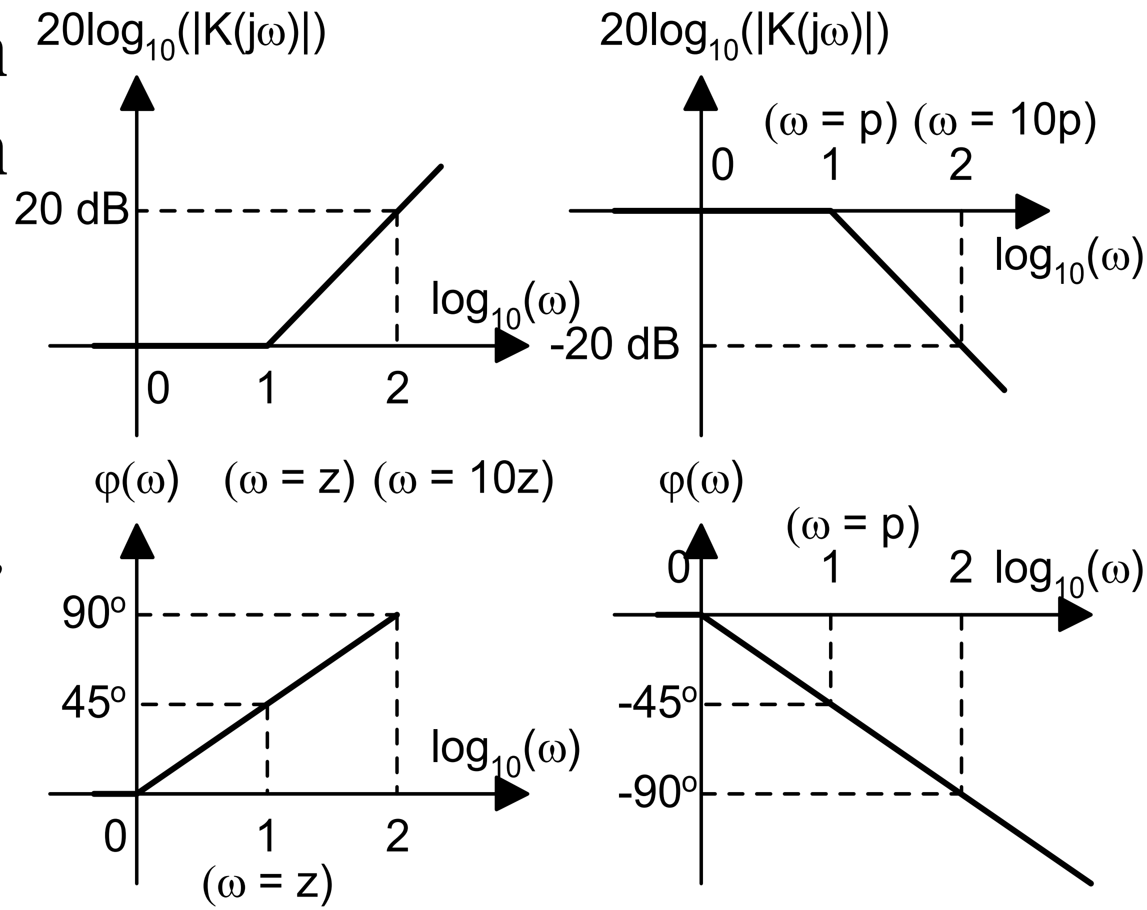
$$\begin{cases} a = \begin{cases} 20\log_{10}(\omega) \\ -20\log_{10}(\omega) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} zero \\ pole \end{cases} \\ b = \begin{cases} 90^o \\ -90^o \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} zero \\ pole \end{cases} \end{cases}$$



Điểm cực và không khác không

- **Giá trị đặc tuyến biên độ logarithm và pha :**

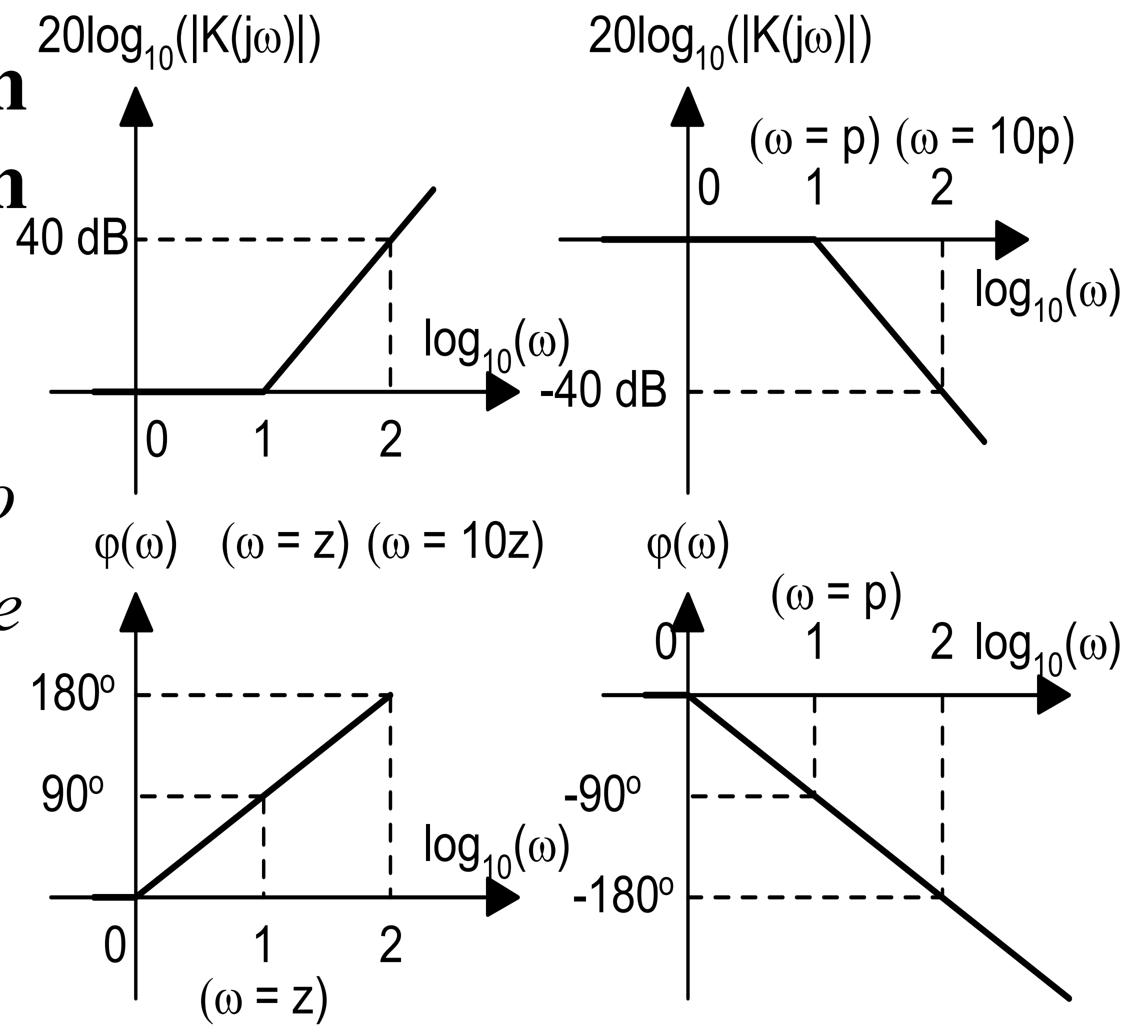
$$\begin{cases} a = \begin{cases} 20\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{z}\right) \\ -20\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{p}\right) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} zero \\ pole \end{cases} \\ b = \begin{cases} 45^o \\ -45^o \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} zero \\ pole \end{cases} \end{cases}$$



Điểm cực và điểm không phức

- **Giá trị đặc tuyến biên độ logarithm và pha :**

$$\begin{cases} a = \begin{cases} 40\log_{10}(\frac{\omega}{z}) \\ -40\log_{10}(\frac{\omega}{p}) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} zero \\ pole \end{cases} \\ b = \begin{cases} 90^o \\ -90^o \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} zero \\ pole \end{cases} \end{cases}$$



Ví dụ vẽ giản đồ Bode

- **Vẽ giản đồ Bode cho :**

$$K(j\omega) = \frac{10\left(1+\dfrac{j\omega}{10}\right)}{(1+j\omega)\left(1+\dfrac{j\omega}{50}\right)}$$