Chương 2

# BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

- Biến ngẫu nhiên rời rạc và phân bố xác suất của b.n.n rời rạc
- Biến ngẫu nhiên liên tục và phân bố xác suất của b.n.n liên tục



## §1. Biến ngẫu nhiên

- Xét phép thử ngẫu nhiên gieo một đồng xu. Gọi $X$ là số mặt Ngửa xuất hiện. Khi đó:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{nếu xuất hiện mặt Sấp} \\ 1, & \text{nếu xuất hiện mặt Ngửa} \end{cases}$$

Giá trị của $X$ nhận được là ngẫu nhiên, tùy theo kết cục của phép thử là mặt Sấp hay mặt Ngửa. Người ta gọi $X$ là một biến ngẫu nhiên.

- Xét phép thử ngẫu nhiên: Chọn ngẫu nhiên một điểm $C$ trên đoạn thẳng $AB$ có độ dài bằng 1. Gọi $Y$ là độ dài đoạn thẳng $AC$. Khi đó $Y$ nhận vô số các giá trị thực trong đoạn $[0; 1]$. Người ta gọi $Y$ là



## §1. Biến ngẫu nhiên

• Một biến ngẫu nhiên là một đại lượng nhận giá trị một cách ngẫu nhiên, tùy thuộc vào kết quả của phép thử ngẫu nhiên.

• Tập hợp tất cả các giá trị mà biến ngẫu nhiên có thể nhận được gọi là tập giá trị của biến ngẫu nhiên.

• Nếu số phần tử của tập giá trị của một biến ngẫu nhiên là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được thì ta gọi biến ngẫu nhiên là biến ngẫu nhiên rời rạc.

• Nếu tập giá trị của một biến ngẫu nhiên lấp đầy một hoặc một vài khoảng nào đó của trục số thực thì ta gọi biến ngẫu nhiên là biến ngẫu nhiên liên tục.



## §2. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất

- Xét phép thử ngẫu nhiên gieo một đồng xu. Gọi $X$ là số mặt ngửa xuất hiện. Khi đó

$$X = \begin{cases} 0, & \text{nếu xuất hiện mặt sấp} \\ 1, & \text{nếu xuất hiện mặt ngửa.} \end{cases}$$

- Các giá trị 0 và 1 mà biến ngẫu nhiên $X$ nhận là ngẫu nhiên. Do đó, ta có nhu cầu tìm hiểu xem xác suất để nó nhận các giá trị đó là bao nhiêu? Ta dễ thấy rằng: "$X$ nhận giá trị 0" = "xuất hiện mặt sấp" và "$X$ nhận giá trị 1" = "xuất hiện mặt ngửa". Do đó, nếu đồng xu cân đối và đồng chất, thì

$$P(X = 0) = 0,5 \text{ và } P(X = 1) = 0,5.$$

## §2. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất

Ta có thể tổng kết bằng bảng sau

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0,5 | 0,5 |

Bảng trên được gọi là bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc $X$.



## Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất

- Xét phép thử ngẫu nhiên gieo một đồng xu. Gọi $X$ là số mặt ngửa xuất hiện khi gieo. Khi đó, giá trị của $X$ nhận được như sau:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{nếu xuất hiện mặt sấp} \\ 1, & \text{nếu xuất hiện mặt ngửa} \end{cases}$$

- Bảng phân phối xác suất

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0,5 | 0,5 |

Trong ví dụ trên, ta có thể xem $X$ là một hàm xác định trên không gian các biến cố sơ cấp $\Omega = \{S, N\}$ của phép thử gieo một đồng xu:

$$X : \Omega = \{S, N\} \to \mathbb{R}, \quad X(S) = 0 \text{ và } X(N) = 1.$$

- Tổng quát, mỗi biến ngẫu nhiên có thể xem như một hàm xác định trên không gian các biến cố sơ cấp.



## §2. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất

- Một cách tổng quát: Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $x_i$. Khi đó $X = x_i$ là một biến cố ngẫu nhiên. Giả sử

  $p_i = P(X = x_i)$ : xác suất để $X$ nhận giá trị $x_i$, $i = 1, 2, \dots$

  $p_i \in [0, 1]$ và $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$.

  Bảng phân phối xác suất của $X$ là bảng có dạng sau:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- Nếu $X$ chỉ nhận một số hữu hạn giá trị, chẳng hạn $n$ giá trị, thì bảng trên dừng lại ở vị trí thứ $n$.



## §2. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất

VD1. Số chấm xuất hiện ($X$) khi gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất là

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

VD2. Một xạ thủ có 3 viên đạn. Anh ta bắn từng phát cho đến khi trúng mục tiêu hoặc hết cả 3 viên đạn thì dừng. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số đạn đã bắn, biết xác suất trúng đích ở mỗi lần bắn là $0,8$.

# §3. Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm phân phối xác suất

- Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- Với một tập con $S$ bất kỳ của $\mathbb{R}$, ta có

$$P(X \in S) = \sum_{x_i \in S} P(X = x_i): \text{ Xác suất để } X \text{ nhận giá trị trong } S.$$

- Với $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ và $S = (-\infty, x)$, ta có

$$P(X < x) = P(X \in S) = \sum_{x_i \in S} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

là xác suất để $X$ nhận giá trị trong $(-\infty, x)$. Giá trị xác suất này là hàm của $x$.

- Hàm số $F(x) := P(X < x), x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc $X$.



# §3. Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm phân phối xác suất

VD. Tiến hành bắn 3 phát súng độc lập vào bia và xác suất trúng đích của mỗi phát là $0,4$. Khi đó, bảng phân phối xác suất của số lần bắn trúng bia là

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $0,216$ | $0,432$ | $0,288$ | $0,064$ |

Hàm phân phối xác suất của số lần bắn trúng bia:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 0,216, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0,648, & 1 < x \leqslant 2 \\ 0,936, & 2 < x \leqslant 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$



# §3. Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm phân phối xác suất

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc có các tính chất sau:

- Tính chất 1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Tính chất 2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ và $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- Tính chất 3. $P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ với mọi $\alpha < \beta$.
- Tính chất 4. $F$ là hàm không giảm, dạng bậc thang và liên tục bên trái tại mỗi điểm.



# §4. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc

- Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- Bảng phân phối xác suất này cho ta thông tin đầy đủ về biến ngẫu nhiên. Tuy nhiên, trong nhiều tình huống thực tế, người ta không có nhu cầu biết toàn bộ thông tin về b.n.n mà chỉ cần biết một vài khía cạnh nào đó trên biến ngẫu nhiên, chẳng hạn trung bình các giá trị mà b.n.n nhận, hoặc mức độ phân tán các giá trị xung quanh giá trị trung bình này, ...
- Các số đặc trưng hay quan tâm: Kỳ vọng, phương sai, mômen, mốt, trung vị.

## 4.1. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Kỳ vọng

- Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- Giả sử $\sum_i |x_i|p_i < +\infty$. Khi đó, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X$ là số được xác định bởi

$$EX = \sum_i x_i p_i \qquad \left(\sum_i \text{ là } \sum_{i=1}^{n} \text{ hoặc } \sum_{i=1}^{\infty}\right)$$

- VD. Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1/12 | 2/12 | 3/12 | 2/12 | 2/12 | 1/12 | 1/12 |

Kỳ vọng là

$$EX = 5\times 1/12 + 6\times 2/12 + 7\times 3/12 + 8\times 2/12 + 9\times 2/12 + 10\times 1/12 + 11\times 1/12 = 7,75.$$



## 4.1. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Kỳ vọng

- Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- Giả sử $\sum_i |x_i|p_i < +\infty$. Khi đó, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X$ là số được xác định bởi

$$\boxed{EX = \sum_i x_i p_i} \qquad \left(\sum_i \text{ là } \sum_{i=1}^{n} \text{ hoặc } \sum_{i=1}^{\infty}\right)$$

- Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên là trung bình (có trọng xác suất) các giá trị mà biến ngẫu nhiên nhận.



## 4.1. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Kỳ vọng

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau:

- Tính chất 1. Với $k$ là hằng số, $Ek = k$.
- Tính chất 2. Với $\alpha, \beta$ là các hằng số và $X, Y$ là các b.n.n có kỳ vọng,
$$E(\alpha X \pm \beta Y) = \alpha EX \pm \beta EY.$$
- Tính chất 3. Cho $X$ là b.n.n. có kỳ vọng. Nếu $P(X \geqslant 0) = 1$ thì $EX \geqslant 0$.
- Tính chất 4. Nếu $X$ và $Y$ là hai b.n.n độc lập, có kỳ vọng, thì
$$E(XY) = EX.EY$$

> Hai biến ngẫu nhiên được gọi là độc lập nhau nếu luật phân phối của một trong chúng không phụ thuộc vào biến kia lấy giá trị nào



## 4.1. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Kỳ vọng

- Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- Giả sử $\sum_i |x_i|p_i < +\infty$. Khi đó, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X$ là số được xác định bởi

$$EX = \sum_i x_i p_i \qquad \left(\sum_i \text{ là } \sum_{i=1}^{n} \text{ hoặc } \sum_{i=1}^{\infty}\right)$$

- Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên là trung bình (có trọng xác suất) các giá trị mà biến ngẫu nhiên nhận.

## 4.1. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Kỳ vọng

VD1. Xét biến ngẫu nhiên $X$ có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

Khi đó kỳ vọng của $X$ là $EX = (-1)\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

VD2. Một thanh có độ dài 2m. Tại 2 đầu mút ta treo 2 quả cầu có trọng lượng $\frac{1}{4}$kg và $\frac{3}{4}$kg. Tìm trọng tâm của thanh sau khi treo.



## 4.1. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Kỳ vọng

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau:

- Tính chất 1. Với $k$ là hằng số, $Ek = k$.
- Tính chất 2. Với $\alpha, \beta$ là các hằng số và $X, Y$ là các b.n.n có kỳ vọng,
$$E(\alpha X \pm \beta Y) = \alpha EX \pm \beta EY.$$
- Tính chất 3. Cho $X$ là b.n.n. có kỳ vọng. Nếu $P(X \geqslant 0) = 1$ thì $EX \geqslant 0$.
- Tính chất 4. Nếu $X$ và $Y$ là hai b.n.n độc lập, có kỳ vọng, thì
$$E(XY) = EX.EY$$
- Tính chất 5. Với $X$ là một b.n.n có kỳ vọng và $\varphi$ là một hàm, ta có
$$E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i)p_i$$
trong đó $EX = \sum_i x_i p_i$.



## 4.2. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Phương sai

ĐN. Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

Giả sử $\sum_i |x_i|p_i < +\infty$ và $\sum_i x_i^2 p_i < +\infty$. Khi đó, phương sai của biến ngẫu nhiên $X$ là số được xác định bởi

$$\boxed{DX = E(X - EX)^2 = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i} \qquad \left(\sum_i \text{ là } \sum_{i=1}^{n} \text{ hoặc } \sum_{i=1}^{\infty}\right)$$



## 4.2. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Phương sai

VD. Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

Ta có $EX = 1.0,3 + 2.0,5 + 5.0,2 = 2,3$. Phương sai là

$$DX = E(X - 2,3)^2 = (1-2,3)^2.0,3 + (2-2,3)^2.0,5 + (5-2,3)^2.0,2 = 2,01.$$

## 4.2. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Phương sai

ĐN. Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

Giả sử $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$ và $\sum_i x_i^2 p_i < +\infty$ . Khi đó, phương sai của biến ngẫu nhiên $X$ là số được xác định bởi

$DX = E(X - EX)^2 = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$ $\quad$ ($\sum_i$ là $\sum_{i=1}^{n}$ hoặc $\sum_{i=1}^{\infty}$).

ĐN. Đại lượng $\sigma(X) := \sqrt{DX}$ đ.g.l. độ lệch tiêu chuẩn của biến ngẫu nhiên $X$.

NX. Phương sai của một biến ngẫu nhiên $X$ đặc trưng cho mức độ phân tán các giá trị mà biến ngẫu nhiên nhận xung quanh giá trị trung bình $EX$.



## 4.2. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Phương sai

TC. Phương sai của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau:

- ⋆ Tính chất 1. Với $k$ là hằng số, $Dk = 0$.
- ⋆ Tính chất 2. Với $X$ có phương sai,
  $$DX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2 \geqslant 0$$
- ⋆ Tính chất 3. Với $k$ là hằng số và $X$ là b.n.n có phương sai, $D(kX) = k^2 DX$.
- ⋆ Tính chất 4. Nếu $X$ và $Y$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập, có phương sai thì
  $$D(X + Y) = DX + DY.$$



## Số đặc trưng b.n.n. rời rạc: Kỳ vọng và Phương sai

VD1. Cho $X$ và $Y$ là hai biến ngẫu nhiên rời rạc, độc lập, có bảng phân phối xác suất như sau:

| $X$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0, 3 | 0, 5 | 0, 2 |

,

| $Y$ | 1 | 4 |
|---|---|---|
| $P$ | 0, 2 | 0, 8 |

Tính $E(X + Y)$ và $D(2X - 3Y)$.

VD2. Cho $X$ là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất như sau:

| $X$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0, 1 | 0, 2 | 0, 3 | 0,3 | 0,1 |

Tìm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = \min\{X, 4\}$. Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của $Y$.



## 4.3. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Mốt (mode)

ĐN. Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

Giá trị $x_\mu$ được gọi là mốt (mode) của $X$ nếu nó là giá trị mà $X$ nhận được với xác suất lớn nhất, tức là

$$p_\mu = P(X = x_\mu) \geqslant P(X = x_k) = p_k, \forall k.$$

Kí hiệu $\mathrm{mod}(X)$ cho mốt của $X$.

- Với các biến ngẫu nhiên rời rạc sau:

| $X$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0, 3 | 0, 5 | 0, 2 |

,

| $Y$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0, 1 | 0, 2 | 0, 3 | 0,3 | 0,1 |

Ta có $\mathrm{mod}(X) = 3$ và $\mathrm{mod}(Y) = 5$ hoặc $\mathrm{mod}(Y) = 7$.

## 4.4. Số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc: Mômen

ĐN. Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

- ⋆ Mômen (gốc) cấp $k$ của biến ngẫu nhiên $X$ là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X^k$, tức là số

$$m_k = EX^k = \sum_i x_i^k p_i \qquad (\sum_i \text{ là } \sum_{i=1}^n \text{ hoặc } \sum_{i=1}^\infty)$$

- ⋆ Mômen trung tâm cấp $k$ của biến ngẫu nhiên $X$ là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $(X-EX)^k$, tức là số

$$\alpha_k = E(X-EX)^k = \sum_i (x_i - EX)^k p_i \qquad (\sum_i \text{ là } \sum_{i=1}^n \text{ hoặc } \sum_{i=1}^\infty)$$

Mômen cấp 1 là kỳ vọng, mômen trung tâm cấp 2 là phương sai.



## §5. Một số phân phối rời rạc thường gặp

Trong số các biến ngẫu nhiên rời rạc, các biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất sau đây thường hay gặp trong các bài toán thực tế:

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối nhị thức
- Phân phối hình học
- Phân phối Poisson



## 5.1. Phân phối Bernoulli

ĐN. Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối Bernoulli với tham số $p$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, nếu $X$ nhận hai giá trị 0 và 1 với xác suất tương ứng

$$P(X=0) = 1-p =: q \text{ và } P(X=1) = p.$$

VD. Số mặt ngửa xuất hiện khi gieo một đồng xu cân đối và đồng chất có phân phối Bernoulli với tham số $p = 0,5$.

TC. Nếu $X$ có phân phối Bernoulli với tham số $p$ thì kỳ vọng và phương sai tương ứng là

$$EX = p \text{ và } DX = p(1-p) = pq.$$



## 5.2. Phân phối nhị thức

ĐN. Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối nhị thức với các tham số $n \in \mathbb{N}$ và $p \in [0,1]$ nếu $X$ nhận các giá trị $0, 1, 2, \ldots, n$ với xác suất tương ứng

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Kí hiệu $X \sim B(n,p)$.

VD1. Số lần hiện lên một kết quả nào đó trong $n$ lần thử độc lập Bernoulli, mà mỗi lần thử có xác suất hiện lên kết quả bằng $p$, có phân phối nhị thức $B(n,p)$.

TC. Giả sử $X \sim B(n,p)$. Khi đó kỳ vọng và phương sai là

$$EX = np \text{ và } DX = np(1-p) = npq$$

trong đó $q = 1-p$.

## 5.2. Phân phối nhị thức

VD2. Trong một thành phố có 65% gia đình có máy vi tính. Chọn ngẫu nhiên 12 gia đình và gọi $X$ là số gia đình có máy vi tính.

a. $X$ có phân phối xác suất gì?
b. Tính xác suất để có đúng 5 gia đình có máy vi tính.
c. Tính xác suất để có ít nhất 2 gia đình có máy vi tính.
d. Trung bình có bao nhiêu gia đình có máy vi tính?



## 5.3. Phân phối hình học

ĐN. Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối hình học với tham số $p$, $0 < p < 1$, nếu nó nhận các giá trị $1, \dots, n, \dots$ với xác suất tương ứng

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, \dots, n, \dots.$$

Kí hiệu $X \sim G(p)$.

TC. Nếu $X \sim G(p)$ thì kỳ vọng và phương sai là

$$EX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

VD1. Một người chơi trò tung vòng vào cổ chai, tung đến bao giờ trúng thì thôi. Xác suất để tung trúng mỗi lần là $p$. Gọi $X$ là số lần phải tung cho đến khi tung trúng. Khi đó $X$ là một biến ngẫu nhiên có phân phối hình học với tham số $p$.

VD2. Bắn liên tiếp, độc lập vào 1 mục tiêu cho tới khi nào trúng mục tiêu thì dừng bắn. Xác suất để mỗi viên đạn trúng mục tiêu là 0,2. Gọi X là số viên đạn cần bắn để lần đầu tiên trúng bia. Tìm phân phối xác



## 5.4. Phân phối Poisson

ĐN. Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$ nếu nó nhận các giá trị $0, 1, \dots, n, \dots$ với xác suất tương ứng

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, \dots, n, \dots.$$

Kí hiệu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

VD. Trong thực tiễn, có nhiều biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối Poisson, chẳng hạn

- ⋆ Số lỗi trong trang của một quyển sách,
- ⋆ Số khách hàng vào một ngân hàng ở ngày nào đó,
- ⋆ Số lần gọi đến một trạm điện thoại trong một khoảng thời gian nào đó

là các biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson.



## 5.4. Phân phối Poisson

ĐN. Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$ nếu nó nhận các giá trị $0, 1, \dots, n, \dots$ với xác suất tương ứng

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, \dots, n, \dots.$$

Kí hiệu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

TC. Giả sử $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Khi đó

$$EX = \lambda \text{ và } DX = \lambda.$$

## §6. Biến ngẫu nhiên liên tục

- Một biến ngẫu nhiên là một đại lượng mà giá trị của nó nhận mang tính ngẫu nhiên, tùy thuộc vào kết quả xảy ra của một phép thử ngẫu nhiên nào đó.
- Nếu tập các giá trị của một biến ngẫu nhiên là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được, người ta gọi nó là biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Nếu tập các giá trị của một biến ngẫu nhiên lấp đầy một (hoặc một số) khoảng nào đó của trục số thực, người ta gọi nó là biến ngẫu nhiên liên tục.
- Lấy ngẫu nhiên một giá trị trên đoạn $[-2, 7]$. Gọi $X$ là giá trị lấy được. Khi đó giá trị của $X$ nhận được là ngẫu nhiên và là một số bất kỳ trên đoạn đó. Theo định nghĩa, $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục.



## §6. Biến ngẫu nhiên liên tục

- Lấy ngẫu nhiên một giá trị trên đoạn $[-2, 7]$. Gọi $X$ là giá trị lấy được. Khi đó, $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục. Với bất kỳ $a \in \mathbb{R}$, ta có thể thấy rằng
$$P(X = a) = 0.$$
Xác suất để $X$ nhận một giá trị bất kỳ luôn bằng 0.
- Kết luận trên cũng đúng cho biến ngẫu nhiên liên tục bất kỳ.

> Với bất kỳ biến ngẫu nhiên liên tục $X$, xác suất để $X$ nhận một giá trị cụ thể nào đó luôn luôn bằng 0,
> $$P(X = a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

- Do đó, với các biến ngẫu nhiên liên tục, ta quan tâm đến xác suất để nó nhận giá trị trên một khoảng nào đó chứ không quan tâm đến xác suất để nó nhận một giá trị cụ thể nào đó.



## 6.1. Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục

ĐN. Mỗi biến ngẫu nhiên liên tục $X$ có thể mô tả bằng một hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho

a) $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c) Với mọi $\alpha < \beta$, ta có
$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{1}$$

Hàm $f$ được gọi là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục $X$.

NX. Công thức (**??**) có thể viết thành
$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$



## 6.1. Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục

VD1. Cho $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ dạng
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{A}{x^2} & , x \geqslant 1. \end{cases}$$
Xác định hằng số $A$ và tính $P(2 < X < 3)$.

VD2. Cho $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ dạng
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$
Tính $P(-0,5 < X < 1)$?

## 6.2. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục

ĐN. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục $X$ được định nghĩa bởi

$$F(x) = P(X < x),\ x \in \mathbb{R}.$$

TC. Tương tự như trường hợp b.n.n. rời rạc

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ và $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- $F$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $F$ là hàm không giảm và

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2)$$

với mọi $x_1 < x_2$.



## 6.3. Quan hệ giữa hàm phân phối và hàm mật độ

TC.
- Giả sử $f(x)$ và $F(x)$ là hàm mật độ và hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục $X$. Khi đó, ta có

$$f(x) = F'(x)$$

và

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

VD. Cho $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{6x}{5} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{6}{5x^4} & x > 1. \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối xác suất.



## 6.4. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên liên tục

Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$.

- Kỳ vọng của $X$ là số được xác định bởi

$$\boxed{EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.}$$

Chú ý: Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục có các tính chất tương tự như bnn rời rạc, ngoại trừ tính chất sau:

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx.$$

- Phương sai của $X$ là số được xác định bởi

$$\boxed{DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)dx = E(X^2) - (EX)^2.}$$

- Đại lượng $\sigma = \sqrt{DX}$ được gọi là độ lệch tiêu chuẩn.



## 6.4. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên liên tục

Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$.

- Mốt (mode) của $X$ là giá trị $x_0$ mà tại đó hàm mật độ $f(x)$ đạt giá trị cực đại.
- Trung vị của $X$ là giá trị $m$ mà $P(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \geq m)$. Ký hiệu $\mathrm{med}(X)$ cho giá trị trung vị của $X$.
- Mômen (moment) cấp $k$ của biến ngẫu nhiên $X$ là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X^k$, tức là số

$$m_k = EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

- Mômen trung tâm cấp $k$ của biến ngẫu nhiên $X$ là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $(X - EX)^k$, tức là số

$$\alpha_k = E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k f(x)dx.$$

## 6.4. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên liên tục

VD. Cho biến ngẫu nhiên liên tục $X$ có hàm mật độ dạng

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 & x \notin [0,3]. \end{cases}$$

*a*) Xác định hằng số $c$.

*b*) Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch tiêu chuẩn.

*c*) Tìm mốt và trung vị.

*d*) Tính mômen trung tâm cấp 3.



## §7. Một số phân phối liên tục thường gặp

Trong số các biến ngẫu nhiên liên tục, các biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất sau đây thường hay gặp:

- Phân phối đều
- Phân phối mũ
- Phân phối chuẩn
- Phân phối Student (phân phối $t$)
- Phân phối khi-bình phương



## 7.1. Phân phối đều

ĐN. Biến ngẫu nhiên liên tục $X$ được gọi là có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$ nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

TC.
- Kỳ vọng, phương sai của b. n.n. $X$ có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$:

$$EX = \frac{a+b}{2}, \qquad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$



## 7.2. Phân phối mũ

ĐN. Biến ngẫu nhiên liên tục $X$ được gọi là có phân phối mũ với tham số $\lambda > 0$ nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

TC.
- Kỳ vọng, phương sai của biến n.n. $X$ có phân phối mũ với tham số dương $\lambda$:

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \qquad DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

## 7.3. Phân phối chuẩn

ĐN. Biến ngẫu nhiên liên tục $X$ được gọi là có phân phối chuẩn $N(a,\sigma^2)$ với $a \in \mathbb{R}$ và $\sigma > 0$ nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Ký hiệu $X \sim N(a,\sigma^2)$.

Phân phối chuẩn với các tham số $a = 0$ và $\sigma = 1$ được gọi là phân phối chuẩn tắc. Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

TC. Nếu $X \sim N(a,\sigma^2)$ thì $EX = a$ và $DX = \sigma^2$.



## 7.3. Phân phối chuẩn

- **Mối quan hệ giữa phân phối chuẩn và phân phối chuẩn tắc:** Nếu $X \sim N(a,\sigma^2)$ thì biến ngẫu nhiên
$$Y = \frac{X-a}{\sigma} \text{ có phân phối chuẩn tắc, } Y \sim N(0,1).$$
- Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt, x \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 0,5 + \Phi(x)$$
trong đó
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt: \text{ Hàm Laplace.}$$
- Hàm Laplace là hàm số lẻ. Giá trị của hàm Laplace rất hay dùng nhưng tích phân vp không tính được bằng sơ cấp, và người ta đã lập bảng tính sẵn giá trị của hàm Laplace.



## 7.3. Phân phối chuẩn

Xác suất để biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn nhận giá trị trong một khoảng: Giả sử $X \sim N(a,\sigma^2)$. Với $\alpha < \beta$, ta cần tính các xác suất

$$P(\alpha < X < \beta),\ P(X < \alpha),\ P(X > \beta).$$

- Để ý rằng $\frac{X-a}{\sigma} \sim N(0,1)$, ta có
$$P(\alpha < X < \beta) = P(\frac{\alpha-a}{\sigma} < \frac{X-a}{\sigma} < \frac{\beta-a}{\sigma})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$
$$= \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$
- Tương tự, ta có
$$P(X < \alpha) = 0,5 + \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}) \text{ và } P(X > \beta) = 1 - P(X < \beta) = 0,5 - \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})$$
trong đó $\Phi$ là hàm Laplace.



## 7.3. Phân phối chuẩn

VD. Giả sử $X$ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a = 2100$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 200$. Hãy tính

a) $P(X > 2400)$
b) $P(1700 < X < 2200)$
c) Xác định $\alpha$ để $P(X > \alpha) = 0,03$.

## 7.4. Phân phối Student

ĐN. Biến ngẫu nhiên liên tục $X$ được gọi là có phân phối Student hay phân phối $t$ với $n$ bậc tự do nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}.$$

trong đó

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, x > 0: \text{ hàm Gamma.}$$

Ký hiệu $X \sim t(n)$.

TC. Hàm $\Gamma(x)$ có các tính chất sau:

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}.$$



## 7.5. Phân phối khi-bình phương

ĐN. Biến ngẫu nhiên liên tục $X$ được gọi là có phân phối khi bình phương với $n$ bậc tự do nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leqslant 0 \end{cases}$$

trong đó

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt: \text{ hàm Gamma.}$$

Ký hiệu $X \sim \chi^2(n)$.