## Chương 1
# BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

- Phép thử ngẫu nhiên và biến cố ngẫu nhiên
- Cách định nghĩa xác suất của một biến cố ngẫu nhiên
- Các quy tắc tính xác suất cơ bản
- Xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất



## §0. BỔ TÚC VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

**0.1. Định nghĩa**

• Hoán vị của $n$ phần tử là số cách đổi chỗ $n$ phần tử cho nhau và bằng $n!$.

• Lấy ngẫu nhiên ra $k$ phần tử từ tập gồm $n$ phần tử $k \leq n$ sao cho 2 cách lấy được gọi là khác nhau nếu giữa chúng có ít nhất một phần tử khác nhau. Số cách lấy $k$ phần tử như vậy được gọi là tổ hợp chập $k$ của $n$, ký hiệu là $C_n^k$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

• Lấy ngẫu nhiên ra $k$ phần tử từ 1 tập hợp gồm $n$ phần tử sao cho 2 cách lấy được gọi là khác nhau nếu:
- có ít nhất một phần tử khác nhau
- thứ tự lấy ra của các phần tử khác nhau

Số cách lấy ra $k$ phần tử như vậy được gọi là chỉnh hợp chập $k$ của $n$, ký hiệu là $A_n^k$.



## §0. BỔ TÚC VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

**0.2. Ví dụ**

• Nêu các cách xếp 3 người A, B, C vào 3 chỗ ngồi.

• Nêu các cách chọn ngẫu nhiên 2 người từ một nhóm 3 người A, B, C.

• Chọn ngẫu nhiên 2 người từ một nhóm 3 người A, B, C. Ai được chọn đầu tiên sẽ làm nhóm trưởng. Liệt kê các cách chọn.

> Luật tích: Giả sử ta có 2 việc $A_1$ và $A_2$ khác nhau sao cho có $k_1$ cách thực hiện $A_1$ và $k_2$ cách thực hiện $A_2$. Khi đó số cách thực hiện 2 việc $A_1$ và $A_2$ liên tiếp là $k_1 k_2$.



## §1. Phép thử ngẫu nhiên

**1.1. Định nghĩa**

Một **phép thử ngẫu nhiên** (p.t.n.n) là một hoạt động có thể lặp lại và hoạt động đó tạo ra các kết cục có tính ngẫu nhiên (không thể dự báo trước được).

Phép thử: Tung một đồng xu

Phép thử : Gieo 2 con xúc xắc

**1.2. Ví dụ**

- Tung một đồng xu và quan sát mặt xuất hiện ở phía trên là p.t.n.n.
- Gieo hai con xúc xắc và quan sát số chấm xuất hiện ở hai con xúc xắc đó là một p.t.n.n.
- Quan sát tuổi thọ của một sinh vật là một p.t.n.n

# §2. Biến cố sơ cấp và không gian biến cố sơ cấp

**2.1. Định nghĩa**

Một **biến cố sơ cấp** là một kết cục của một phép thử ngẫu nhiên.

**Không gian biến cố sơ cấp ($\Omega$)** là tập tất cả các biến cố sơ cấp đó.

**2.2. Ví dụ**

- Tung một đồng xu: Các kết cục: Xuất hiện mặt ngửa (N) và xuất hiện mặt sấp (S) là hai biến cố sơ cấp. Không gian b.c.s.c là $\Omega = \{N, S\}$.
- Gieo một con xúc xắc: Không gian biến cố sơ cấp $\Omega = \{i \mid i = 1, \ldots 6\}$ trong đó $i$ là biến cố sơ cấp "xuất hiện $i$ chấm trên con xúc xắc".

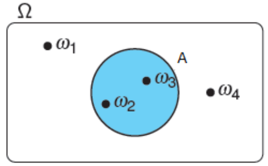

Phép thử: Tung một đồng xu


Phép thử : Gieo 2 con xúc xắc

- Gieo hai con xúc xắc.Không gian biến cố sơ cấp $\Omega = \{(i,j) \mid i,j = 1, \ldots, 6\}$, trong đó $(i,j)$ là biến cố sơ cấp "xuất hiện $i$



# §3. Biến cố và sự xảy ra của biến cố




**3.1. Định nghĩa**

- Một **biến cố** là một tập con của không gian biến cố sơ cấp $\Omega$, i.e. một tập bao gồm các biến cố sơ cấp nào đó. Ký hiệu: $A, B, ..$
- Mỗi phần tử của tập $A$ được gọi là một **kết quả thuận lợi** của biến cố $A$.

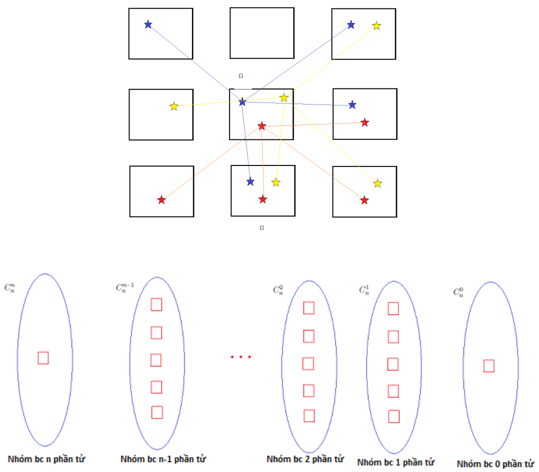
**3.2. Ví dụ**

Phép thử tung một đồng xu. Không gian biến cố sơ cấp $\Omega = \{S, N\}$. Các biến cố của phép thử là $\emptyset, \{S\}, \{N\}, \{S, N\}$.



# §3. Biến cố và sự xảy ra của biến cố

**3.3. Tính chất**




Nếu không gian b.c.s.c. $\Omega$ gồm $n$ biến cố sơ cấp thì ta sẽ có $2^n$ biến cố.



# §3. Biến cố và sự xảy ra của biến cố

**3.3. Ví dụ**

Phép thử gieo một con xúc xắc có không gian biến cố sơ cấp $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Ta có tất cả $2^6 = 32$ biến cố. Chẳng hạn

- $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ "Xuất hiện số chấm chẵn"
- $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ "Xuất hiện số chấm nhỏ hơn 4"
- $C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ "Xuất hiện số chấm lẻ"

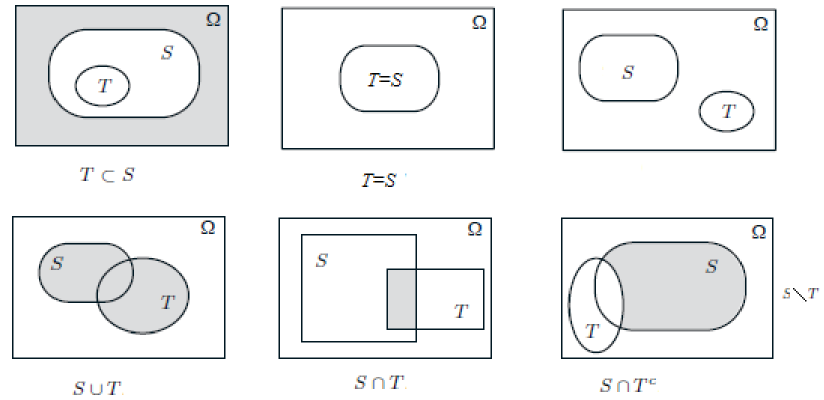
# §3. Biến cố và sự xảy ra của biến cố

• Một biến cố được gọi là xảy ra khi phép thử được thực hiện nếu kết cục của phép thử là một phần tử của biến cố đó.
• Biến cố $\Omega$ chắc chắn xảy ra, biến cố $\emptyset$ không thể xảy ra, và các biến cố còn lại có khi xảy ra và cũng có khi không xảy ra (đgl biến cố ngẫu nhiên).
• Khi thực hiện phép thử, khả năng xảy ra của $\Omega$ là 100%, của biến cố $\emptyset$ là 0%.
**Khả năng xảy ra của các biến cố ngẫu nhiên là bao nhiêu?**



# §4. Mối quan hệ và các phép toán trên các biến cố

Do mỗi biến cố là một tập hợp, giữa các biến cố có các mối quan hệ và ta có thể thực hiện các phép toán tập hợp trên các biến cố.






# §4. Mối quan hệ và các phép toán trên các biến cố

Các mối quan hệ và phép toán trên tập hợp tạo ra các mối quan hệ và phép toán trên các biến cố như sau:

| Sự kiện | Tên gọi biến cố | Đặc điểm nhận dạng |
|---|---|---|
| $T \subset S$ | $T$ kéo theo $S$ | Nếu $T$ xảy ra thì $S$ xảy ra |
| $T = S$ | $T$ tương đương $S$ | $T$ xảy ra khi và chỉ khi $S$ xảy ra |
| $T \cup S$ | Tổng của $T$ và $S$ | Xảy ra khi $T$ hoặc $S$ xảy ra |
| $T \cap S$ | Tích của $T$ và $S$ | Xảy ra khi $T$ và $S$ xảy ra |
| $T \cap S = \emptyset$ | $T$ và $S$ xung khắc | $T$ và $S$ không xảy ra cùng lúc |
| $S \setminus T$ | Hiệu của $S$ cho $T$ | Xảy ra khi $S$ xảy ra và $T$ không xảy ra |
| $\Omega \setminus T =: T^c$ | Biến cố đối lập của $T$ | Xảy ra khi $T$ không xảy ra |

Biến cố tổng $S \cup T$ có thể kí hiệu $S + T$; biến cố tích $S \cap T$ có thể kí hiệu $ST$, biến cố đối lập $A^c$ của $A$ có thể kí hiệu $\bar{A}$.



# §4. Mối quan hệ và các phép toán trên các biến cố

- Quan hệ xung khắc và các phép toán tổng, tích có thể mở rộng phát biểu cho một số hữu hạn biến cố:
  - $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi nếu hai biến cố bất kỳ khác nhau $A_i$, $A_j$ xung khắc.
  - $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$: Xảy ra khi ít nhất một biến cố $A_i$ xảy ra.
  - $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$: Xảy ra khi tất cả các biến cố $A_i$ xảy ra.
- Nhóm biến cố đầy đủ: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là đầy đủ nếu:
  - xung khắc từng đôi,
  - $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.
- Các quy tắc De Morgan cũng đúng đối với các biến cố!

## Bài tập

Bài 1. Hãy xác định không gian các biến cố sơ cấp của các phép thử ngẫu nhiên sau:

a) Gieo một đồng xu liên tiếp 3 lần.

b) Gieo một đồng xu cho đến khi xuất hiện mặt ngửa.

c) Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập hợp số $\{1, 3, 6, 5\}$.

Bài 2. Gieo một con xúc xắc. Gọi $A$ là biến cố xuất hiện mặt có số chấm chẵn và $B$ là biến cố xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 3. Hãy kiểm chứng các khẳng định sau đây:

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.



## Bài tập

Bài 3. Cho $A, B$ và $C$ là ba biến cố. Hãy viết biểu thức diễn tả các biến cố sau:

a) Chỉ có $B$ xảy ra.

b) $A$ và $B$ xảy ra nhưng $C$ không xảy ra.

c) Ít nhất một biến cố xảy ra.

d) Ít nhất hai biến cố xảy ra.

e) Tất cả ba biến cố xảy ra.

f) Không biến cố nào xảy ra.

g) Nhiều nhất 1 biến cố xảy ra.

h) Nhiều nhất hai biến cố xảy ra.



## CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

**1. Các định nghĩa về xác suất:**

- Định nghĩa cổ điển của xác suất
- Định nghĩa hình học của xác suất
- Định nghĩa xác suất theo thống kê



## §5. Xác suất

Trong cuộc sống thường ngày chúng ta đôi khi nghe các kết luận chẳng hạn như:

- Xác suất sinh con trai của một gia đình là 0.5 hay 50%.
- Xác suất nảy mầm một hạt lúa giống là 98%.
- Xác suất một học sinh trường chuyên A thi đậu ĐH là $0,99$, etc.

Ques. 1:

$\boxed{\text{Xác suất là gì?}}$

Xác suất của một biến cố $A$ là một số thực nằm giữa 0 và 1, đặc trưng cho khả năng xảy ra của $A$. Ký hiệu là $\mathbf{P}(A)$.

# §5. Xác suất/Probability

Trong cuộc sống thường ngày chúng ta đôi khi nghe các kết luận chẳng hạn như:

- Xác suất sinh con trai của một gia đình là 0.5 hay 50%.
- Xác suất nảy mầm một hạt lúa giống là 98%.
- Xác suất một học sinh trường chuyên A thi đậu ĐH là 0, 99, etc.

Ques. 2:

Làm thế nào để tính được xác suất của một biến cố?



# 5.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Xét phép thử ngẫu nhiên: Có bốn lá bài là 4 con 7 (cơ, rô, chuồn và bích). Từ 4 lá bài đó ta lấy ra một lá bài. Hỏi khả năng (xác suất) lấy được con 7 cơ là bao nhiêu?

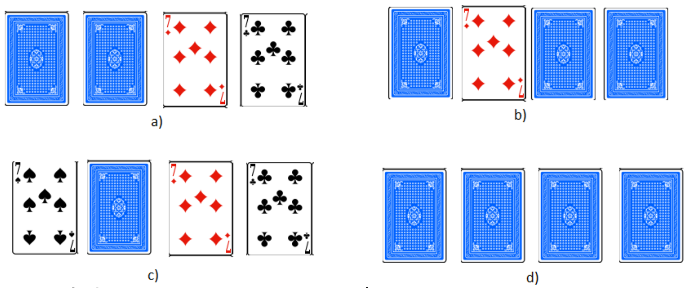
Ta lập luận như sau: Vì có 4 con bài nên ta có 4 cách để lấy một lá bài. Hơn nữa, trong 4 cách đó có 1 cách lấy được con 7 cơ. Do vậy, khả năng lấy được con 7 cơ là 1/4, i.e. xác suất lấy được con 7 cơ là 1/4 hay 25%.

Lập luận như trên đúng hay sai?



# 5.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Vì có 4 con bài nên ta có 4 cách để lấy một lá bài. Hơn nữa, trong 4 cách đó có 1 cách lấy được con 7 cơ. Do vậy, khả năng lấy được con 7 cơ là 1/4, i.e. xác suất lấy được con 7 cơ là 1/4 hay 25%.

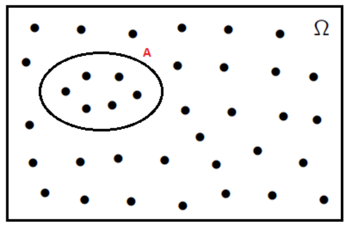



Lập luận chỉ đúng cho trường hợp *d*). Các trường hợp còn lại sai vì khả năng lấy ra các con bài không như nhau do ta biết thông tin về các lá bài mở.



# 5.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

- Xét một phép thử ngẫu nhiên với không gian các biến cố sơ cấp $\Omega$ có $n$ biến cố sơ cấp và các biến cố sơ cấp đồng khả năng xảy ra. Và $A$ là biến cố bất kỳ có $m$ kết quả thuận lợi.





- Xác suất của biến cố $A$ được tính theo công thức

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi của biến cố } A}{\text{Tổng số các biến cố sơ cấp}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}}$$

## 5.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

- Một lô sản phẩm có 1000 sản phẩm, trong đó có 1 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 7 sản phẩm trong lô sản phẩm đó đem kiểm tra. Xác suất để lấy được phế phẩm là bao nhiêu?
- Số cách lấy ra 7 sản phẩm để kiểm tra

$$n = C_{1000}^7 = \frac{1000!}{(1000-7)!7!}.$$

Số cách lấy ra 7 sản phẩm trong đó có phế phẩm

$$m = 1.C_{999}^6 = \frac{999!}{(1000-7)!6!}.$$

Xác suất để lấy được phế phẩm là

$$P = \frac{m}{n} = \frac{999!}{(1000-7)!6!}\frac{(1000-7)!7!}{1000!} = \frac{7}{1000} = 0,007.$$



## 5.2. Định nghĩa hình học của xác suất

- Xét một phép thử ngẫu nhiên có vô hạn kết cục đồng khả năng, i.e. $\Omega$ có vô hạn phần tử, và $A$ là một biến cố bất kỳ.
- Giả sử ta có thể biểu diễn tập $\Omega$ bằng một miền hình học $\Omega$ nào đó.
- Giả sử biến cố $A$ được biểu diễn bằng một miền con $A$ của $\Omega$.
- Xác suất của biến cố $A$ được tính như sau

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega}} \qquad \text{(ĐN HH của XS)}$$

trong đó Độ đo có thể là độ dài, diện tích hay thể tích.



## 5.2. Định nghĩa hình học của xác suất

VD. Romeo và Juliet có một cuộc hẹn tại một địa điểm cho trước, và mỗi người sẽ đến điểm hẹn trong khoảng thời gian từ 0 giờ đến 1 giờ. Người đến điểm hẹn đầu tiên sẽ đợi 15 phút. Sau khoảng thời gian này, nếu người còn lại chưa đến thì sẽ về. Hãy tính xác suất để hai người gặp nhau.

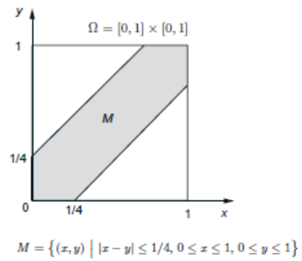
Lời giải. Gọi $x$ và $y$ tương ứng là thời điểm Romeo và Juliet đến điểm hẹn.Không gian các biến cố sơ cấp của phép thử ngẫu nhiên

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

Gọi $A$ là sự kiện "Romeo và Juliet gặp nhau". Các trường hợp thuận lợi cho $A$ là tập con $M$ của $\Omega$.



## 5.2. Định nghĩa hình học của xác suất




$$M = \{(x,y) \mid |x-y| \leqslant \frac{1}{4}, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Xác suất để Romeo và Juliet gặp nhau

$$P(A) = \frac{\text{Diện tích của } M}{\text{Diện tích của } \Omega} = \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{1} = \frac{7}{16}.$$

# 5.3. Định nghĩa thống kê của xác suất

- Xét các phép thử ngẫu nhiên có vô hạn các kết cục hoặc hữu hạn kết cục nhưng chúng có thể xảy ra không đồng khả năng.
- Để xác định xác suất của biến cố $A$ người ta thực hiện lặp lại $n$ lần (độc lập) phép thử ngẫu nhiên trong những điều kiện giống hệt nhau

$$\boxed{f_n(A) = \frac{k}{n}}$$

$k$ là tần số của $A$ trong $n$ phép thử.

- Xác suất của biến cố $A$ được xác định theo công thức

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)}$$



# 5.4. Các tính chất của xác suất

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(A) = 0$ khi và chỉ khi $A = \emptyset$
- $P(A) = 1$ khi và chỉ khi $A = \Omega$
- Nếu $A \subseteq B$ thì $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.



# Quy tắc tính xác suất của biến cố tổng

- Với hai biến cố $A$ và $B$ bất kỳ, ta có

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
- Xác suất của biến cố đối lập $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$
- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi thì

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)}$$

- Trong trường hợp tổng quát, ta có

$$\boxed{P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r})}$$



# Ví dụ

- **VD:** Giả sử 28% số sinh viên biết lập trình bằng ngôn ngữ Java và 7% lập trình bằng ngôn ngữ $C^{++}$. Có 5% số sinh viên biết lập trình bằng cả hai ngôn ngữ Java và $C^{++}$. Hỏi có bao nhiêu phần trăm số sinh viên biết

  a) lập trình bằng ít nhất một trong hai ngôn ngữ Java và $C^{++}$?
  b) lập trình bằng $C^{++}$ nhưng không biết Java?

# Bài tập

1. Cần xếp 5 người ngồi thành một hàng ngang. Tính xác suất sao cho hai người cho trước $A$ và $B$ không ngồi cạnh nhau.
2. Cần xếp 5 người ngồi vào một bàn tròn. Tính xác suất sao cho hai người cho trước $A$ và $B$ không ngồi cạnh nhau.
3. Một lô sản phẩm chứa 100 sản phẩm, trong đó có 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 10 sản phẩm để kiểm tra. Lô hàng sẽ được kết luận đạt tiêu chuẩn nếu trong 10 sản phẩm lấy ra kiểm tra có không quá 1 sản phẩm là phế phẩm. Tính xác suất để lô hàng được kết luận đạt tiêu chuẩn.



# Bài tập

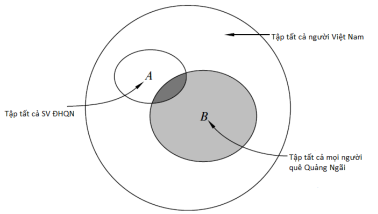
4. Một nước có 50 tỉnh, mỗi tỉnh có 2 đại biểu quốc hội. Cần chọn ngẫu nhiên ra 20 đại biểu để thành lập một ủy ban.
   a. Tính xác suất để trong ủy ban này có đại biểu đến từ thủ đô.
   b. Tính xác suất để trong ủy ban có đúng một đại biểu đến từ thủ đô.
   c. Tính xác suất để trong ủy ban không có đại biểu nào đến từ thủ đô.
5. Cần xếp 10 quả bóng vào trong 3 hộp.
   a. Tính xác suất sao cho hộp nào cũng có bóng.
   b. Tính xác suất để có một hộp chứa 4 quả bóng, hai hộp còn lại mỗi hộp chứa 3 quả bóng.
   c. Tính xác suất để hộp thứ nhất chứa 5 quả bóng, hộp thứ hai chứa 3 quả bóng và hộp thứ ba chứa 2 quả bóng.
   d. Tính xác suất để có ít nhất một hộp không chứa quả bóng nào.



# §6. Xác suất có điều kiện

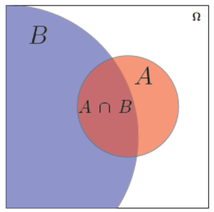
Chọn ngẫu nhiên một người ở Việt Nam. Ta có thể hỏi:

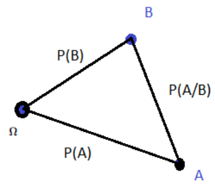
- Xác suất để chọn được một sinh viên Đại học Quy nhơn?
- Xác suất để chọn được một người quê ở Quảng Ngãi?
- Nếu đã chọn được một người quê Quảng Ngãi, thì xác xuất để người đó thuộc sinh viên ĐHQN là bao nhiêu? —> Xác suất có điều kiện.






# §6. Xác suất có điều kiện, công thức nhân xác suất




## 6.1. Định nghĩa

- Xác suất của biến cố $A$ với điều kiện biến cố $B$ là khả năng xảy ra $A$ khi biến cố $B$ đã xảy ra.
- Xác suất này được kí hiệu $P(A/B)$ và được tính theo công thức:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \text{ khi } P(B) > 0$$

## §6. Xác suất có điều kiện, công thức nhân xác suất

**6.2. Ví dụ** Ở một công ty, 70% số nhân viên biết ngôn ngữ $C/C_{++}$, 60% biết Python và 50% biết cả hai ngôn ngữ lập trình đó.

a) Nếu một nhân viên biết $C/C_{++}$ thì xác suất để người đó cũng biết Python là bao nhiêu?

b) Nếu một nhân viên biết Python thì xác suất để người đó cũng biết $C/C_{++}$ là bao nhiêu?

c) Nếu một nhân viên biết ít nhất một ngôn ngữ thì xác suất để người đó biết cả hai ngôn ngữ là bao nhiêu?



**6.3. Quy tắc nhân tính xác suất của biến cố tích**

Giả sử $A$ và $B$ là hai biến cố bất kỳ với $P(A) > 0$. Theo công thức xác suất có điều kiện, ta có

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B/A)}$$

Đây là công thức nhân xác suất cho hai biến cố.

Với $n$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho $P(A_1) > 0, \ldots, P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$, ta có

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2 ... A_n)}{P(A_1 ... A_{n-1})} \\ &= P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Đây là **công thức nhân xác suất tổng quát cho $n$ biến cố**.



## Công thức nhân xác suất

VD. Một hộp có 5 viên bi đỏ và 3 bi xanh.

- Lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi ta được bi đỏ. Sau đó lấy tiếp 1 bi nữa trong số bi còn lại. Tìm xác suất viên bi lần sau là bi đỏ.
- Tìm xác suất để 2 lần lấy đều là bi đỏ.

**Bài giải**

- Gọi $B$ là biến cố 'viên bi lấy ra lần đầu là đỏ'.
- Gọi $A$ là biến cố 'viên bi lấy ra lần sau là đỏ'.
- $P(A/B) = \frac{4}{7}$.
- $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.



- Hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là độc lập nếu việc xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố kia và ngược lại, tức là $P(A/B) = P(A)$ hoặc $P(B/A) = P(B)$ hoặc

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

- Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập nếu

$$\boxed{P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)}$$

đúng với mỗi tập con $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Trong trường hợp riêng ta có

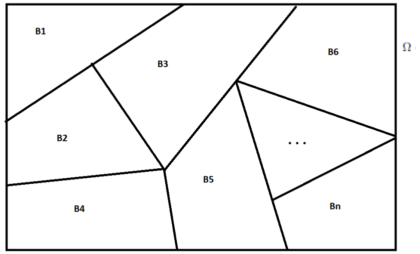
$$\boxed{P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)}$$

# §7. Nhóm đầy đủ các biến cố và công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

## 7.1. Nhóm đầy đủ các biến cố

a) Định nghĩa:

- Một họ các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ được gọi là một nhóm đầy đủ các biến cố nếu
  - chúng xung khắc từng đôi, i.e. $B_i \cap B_j = \emptyset, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, và
  - lấp đầy tập $\Omega$, i.e. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.
- Một nhóm đầy đủ các biến cố sẽ tạo thành một phân hoạch $\Omega$.





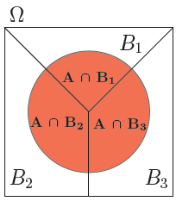

b) Ví dụ:

- Trong phép thử gieo một đồng xu, biến cố xuất hiện mặt sấp và biến cố xuất hiện mặt ngửa tạo thành một nhóm đầy đủ (có hai biến cố).
- Trong một phép thử ngẫu nhiên bất kỳ và với biến cố $A$ bất kỳ của phép thử, cặp biến cố đối lập $A$ và $\bar{A}$ tạo thành một nhóm đầy đủ (có hai biến cố).
- Tập tất cả các biến cố sơ cấp của một phép thử có hữu hạn phần tử tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố.
- etc.



## 7.2. Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử $B_1, B_2$ và $B_3$ là một nhóm đầy đủ các biến cố và $A$ là một biến cố bất kỳ.

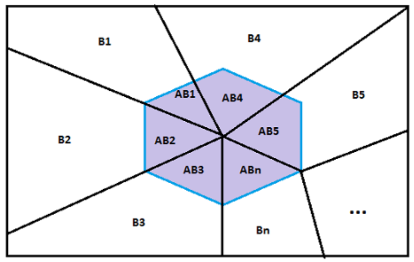



Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) \\ &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) \end{aligned}$$

nếu $P(B_i) > 0$.



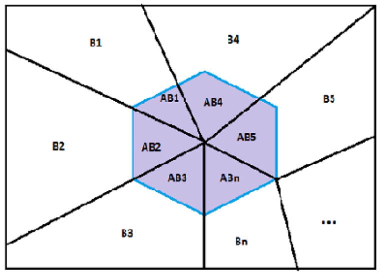



Giả sử $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là một nhóm đầy đủ các biến cố của một phép thử với $P(B_i) > 0$ và $A$ là một biến cố bất kỳ nào đó. Khi đó

$$\boxed{P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)}$$

Đây là công thức xác suất đầy đủ cho nhóm đầy đủ có $n$ biến cố.

# 7.3. Công thức Bayes




Thomas Bayes (1702-1761)

Giả sử $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là một nhóm đầy đủ các biến cố của một phép thử với $P(B_i) > 0$ và $A$ là một biến cố với $P(A) > 0$. Khi đó

$$\boxed{P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(B_1)P(A/B_1) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Đây là công thức Bayes.



VD1: Một nhà máy có 3 máy sản xuất cùng một loại sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm tương ứng 1%, 0,5% và 0,2%. Biết rằng các máy sản xuất ra tương ứng 35%, 45% và 20%. Chọn ra một sản phẩm, tìm xác suất đó là phế phẩm.

Lời giải

- Gọi $B_i$ là biến cố 'sản phẩm do nhà máy $i$ sản xuất ra', $i = 1, 2, 3$.
- $\{B_1, B_2, B_3\}$ tạo nên một nhóm đầy đủ các biến cố
- $P(B_1) = 0,35$, $P(B_2) = 0,45$ và $P(B_3) = 0,2$.
- Gọi $A$ là biến cố 'rút được phế phẩm'.

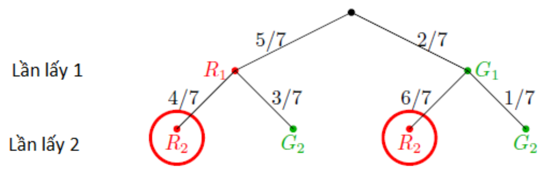
Khi đó $P(A/B_1) = 1\%$, $P(A/B_2) = 0,4\%$ và $P(A/B_3) = 0,2\%$. Ta có

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) = .$$



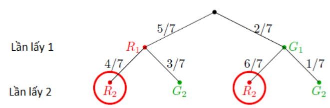
VD2: Xét một trò chơi như sau: Có 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh có cùng hình dạng và kích thước được đựng trong một cái hộp. Ta chọn ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp và thay thế nó bằng một quả cầu khác màu, trong hai màu đỏ và xanh. Sau đó ta lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một quả cầu.

a) Tính xác suất để quả cầu lấy lần thứ hai là màu đỏ.
b) Biết rằng quả cầu lấy lần thứ hai có màu đỏ. Xác suất để quả cầu lấy lần thứ nhất màu đỏ là bao nhiêu?






# Lời giải: a)



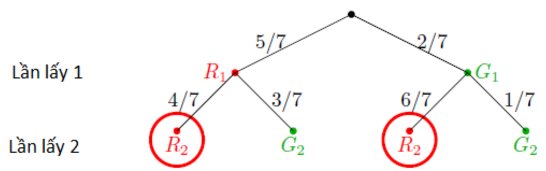

- Gọi $A$ là biến cố 'lấy được quả cầu đỏ ở lần lấy thứ 2'.
- Gọi $B_1$ là biến cố 'lấy được quả cầu đỏ ở lần lấy thứ 1' và $B_2$ là biến cố 'lấy được quả cầu xanh ở lần lấy thứ 1'.
- $B_1$ và $B_2$ tạo thành nhóm đầy đủ các biến cố và

$$P(B_1) = \frac{5}{7}, \; P(B_2) = \frac{2}{7}, \; P(A/B_1) = \frac{4}{7}, \; P(A/B_2) = \frac{6}{7}.$$

- Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có được

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{5}{7}.\frac{4}{7} + \frac{2}{7}.\frac{6}{7} = \frac{32}{49}.$$

## Lời giải: b)




Xác suất lấy quả cầu đỏ ở lần 1 khi biết lần 2 lấy được quả cầu đỏ được tính theo công thức Bayes:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{22}{49}} = \frac{10}{11}.$$



VD3: *Một thiết bị gồm 3 loại linh kiện: Loại I chiếm 35%, loại II chiếm 25% và loại III chiếm 40% tổng số linh kiện của toàn thiết bị. Xác suất hư hỏng sau khoảng thời gian hoạt động của các loại tương ứng là 15%, 25% và 5%. Thiết bị đang hoạt động bỗng nhiên bị hỏng. Khả năng máy bị hỏng do linh kiện nào là cao nhất?*

**Lời giải:**

Gọi $A$ là biến cố 'thiết bị bị hỏng'.
$B_i$ là biến cố 'linh kiện loại $i$', $i = 1, 2, 3$.
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_n)P(A/B_n) \\ &= 35\% \cdot 15\% + 25\% \cdot 25\% + 40\% \cdot 5\% \\ &= 5,25\% + 6,25\% + 2\% = 13,5\%. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_n)P(A/B_n) \\ &= 35\% \cdot 15\% + 25\% \cdot 25\% + 40\% \cdot 5\% \\ &= 5,25\% + 6,25\% + 2\% = 13,5\%. \end{aligned}$$

Theo công thức Bayes:

$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{5,25\%}{13,5\%} = \frac{7}{18}$

$P(B_2/A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{6,25\%}{13,5\%} = \frac{25}{54}$

$P(B_3/A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{2\%}{13,5\%} = \frac{4}{27}$.



## §8. Dãy phép thử Bernoulli

- Các phép thử được gọi là độc lập nếu xác suất của một kết cục bất kỳ của mỗi phép thử không phụ thuộc vào kết cục của các phép thử khác.
- Dãy phép thử Bernoulli là một quá trình gồm các phép thử độc lập, với hai biến cố $A$ và $\bar{A}$, xác suất không đổi từ phép thử này sang phép thử kia.
- Bài toán. Xét một dãy phép thử Bernoulli gồm $n$ phép thử độc lập với một biến cố $A$ với $P(A) = p$ trong mỗi phép thử. Hãy tính xác suất sao cho khi thực hiện dãy phép thử này biến cố $A$ xuất hiện $k$ lần, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

## Tính xác suất theo công thức Bernoulli

- Với $n = 5$ và $k = 3$ ta có kết quả như sau

| Biến cố | Xác suất | Biến cố | Xác suất |
|---|---|---|---|
| $AAA\bar{A}\bar{A}$ | $p^3.(1-p)^2$ | $\bar{A}\bar{A}AAA$ | $p^3.(1-p)^2$ |
| $AA\bar{A}A\bar{A}$ | $p^3.(1-p)^2$ | $\bar{A}A\bar{A}AA$ | $p^3.(1-p)^2$ |
| $A\bar{A}AA\bar{A}$ | $p^3.(1-p)^2$ | $A\bar{A}\bar{A}AA$ | $p^3.(1-p)^2$ |
| $\bar{A}AAA\bar{A}$ | $p^3.(1-p)^2$ | $\bar{A}AA\bar{A}A$ | $p^3.(1-p)^2$ |
| $AA\bar{A}\bar{A}A$ | $p^3.(1-p)^2$ | $A\bar{A}A\bar{A}A$ | $p^3.(1-p)^2$ |

- Các biến cố trong bảng trên được tạo ra bằng cách chọn ngẫu nhiên 3 vị trí điền $A$ và hai vị trí còn lại điền $\bar{A}$.
- Sự kiện "A xuất hiện đúng 3 lần" là tổng của các biến cố (xung khắc từng đôi) trong bảng trên. Do vậy xác suất để có đúng 3 lần xuất hiện A là

$$P = C_5^3 p^3 (1-p)^2$$



- Xét một dãy phép thử Bernoulli gồm $n$ phép thử độc lập với một biến cố $A$ với $P(A) = p$ trong mỗi phép thử. Hãy tính xác suất sao cho khi thực hiện dãy phép thử này biến cố $A$ xuất hiện $k$ lần, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Gọi $P_n(k; p)$ là xác suất sao cho khi thực hiện dãy $n$ phép thử độc lập biến cố $A$ xảy ra đúng $k$ lần.
- $P_n(k; p)$ được tính theo công thức Bernoulli như sau:

$$\boxed{P_n(k; p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n}$$



VD1: Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đã cài đặt 50 modem để phục vụ nhu cầu sử dụng Internet của 100 khách hàng.

- Theo ước tính của nhà cung cấp, tại một thời điểm xác định, mỗi khách hàng sẽ cần sự kết nối Internet với xác suất $p = 0,35$, độc lập với các khách hàng khác.
- Tính xác suất sao cho tại thời điểm đó có nhiều khách hàng cần sự kết nối hơn số modem mà nhà cung cấp đã cài đặt.
- Lời giải. Ở đây chúng ta quan tâm đến xác suất để có nhiều hơn 50 khách hàng đồng thời cần sự kết nối. Dễ thấy xác suất này là

$$\sum_{k=51}^{100} P_{100}(k; 0,35) = \sum_{k=51}^{100} C_{100}^k 0,35^k (1-0,35)^{100-k}$$



VD2: Một bác sĩ có xác suất chữa khỏi bệnh là 80%. Có người nói rằng cứ 10 người đến chữa thì chắc chắn có 8 người khỏi bệnh. Điều đó có đúng không?
Lời giải: Xem việc chữa bệnh cho 10 người là 1 dãy phép thử Bernoulli, trong đó $A$ là sự kiện được chữa khỏi bệnh.

- $P(A) = 0,8$.
- Xác suất để trong 10 bệnh nhân có 8 người chữa khỏi là

$$P_{10}(8; 0,8) = C_{10}^8 (0,8)^8 (0,2)^2 \approx 0,3108.$$

- Kết luận: khẳng định trên là sai.

VD3: Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 5 lần, độc lập nhau. Gọi $A$ là biến cố xuất hiện mặt sấp trong mỗi lần gieo. Ta có $P(A) = 0,5$.

- Xác suất để trong 5 lần gieo, mặt sấp xuất hiện $k$ lần được tính theo công thức Bernoulli

$$P_5(k; 0,5) = C_5^k (0,5)^k (1-0,5)^{5-k}, k = 0, 1, \ldots, 5.$$

- Kết quả tính cho ở bảng sau:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_5(k; 0,5)$ | 0.0313 | 0.1563 | 0.3125 | 0.3125 | 0.1563 | 0.0313 |

- Mặt sấp xuất hiện 2 lần hoặc 3 lần trong 5 lần gieo xảy ra với xác suất lớn nhất. Người ta gọi nó là số có khả năng nhất.



## Công thức Bernoulli và số có khả năng nhất

- Xác suất biến cố $A$ xảy ra đúng $k$ lần trong dãy $n$ phép thử Bernoulli độc lập:

$$\boxed{P_n(k; p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n}$$

- Khi $n$ và $p$ cố định, $P_n(k; p)$ là một hàm của $k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Số $k_0$ mà $P_n(k_0; p)$ đạt giá trị lớn nhất được gọi là số có khả năng nhất.
- Làm sao để xác định số có khả năng nhất? Ta có

$$\frac{P_n(k+1; p)}{P_n(k; p)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

$$P_n(k+1; p) > P_n(k; p) \iff k < (n+1)p - 1$$

- Nếu $(n+1)p - 1 \in \mathbb{N}$ thì $k_0 = (n+1)p - 1$ hoặc $k_0 = (n+1)p$ là các số có khả năng nhất.
- Nếu $(n+1)p - 1 \notin \mathbb{N}$ thì $k_0 = [(n+1)p] + 1$ ([a] phần nguyên của a) là số có khả năng nhất.



VD4: Theo kết quả điều tra về bệnh lao, tỷ lệ người bị bệnh lao ở vùng nọ là 0,001. Tìm xác suất để đi khám cho 10 người:

- Có 2 người bị lao.
- Không có ai bị lao.
- Có 9 người không bị lao.
- Có ít nhất 1 người bị lao.
- Số người không bị lao có khả năng nhất.

Lời giải: Xem khám cho 10 người là 10 phép thử Bernoulli với biến cố A là 'người được khám bị lao'.

- $P(A) = 0,001$.
- $P_{10}(2; 0,001) = C_{10}^2 (0,001)^2 (0,999)^8$.
- $P_{10}(0; 0,001 = C_{10}^0 (0,001)^0 (0,999)^{10}$.
- $P_{10}(1; 0,001) = P_{10}(9; 0,999)$.
- $P_{10}(k \geq 1; 0,999) = 1 - P_{10}0; 0,001 =$
- $10 \cdot 0,999 + 0,999 - 1 = 9,989$; suy ra $k_0 = 10$.