密码学中的可证明安全性

杨波

陕西师范大学计算机学院

目录

单向加密–One way encryption

如果敌手已知某个密文，不能得出所对应的明文的完整信息，该公钥加密方案称为单向加密（One way encryption，简称OWE），是一个很弱的安全概念，因为不能防止敌手得到明文的部分信息。

语义安全

语义安全（Semantic scurity）的概念

由Goldwasser和Micali于1984年提出，即敌手即使已知某个消息的密文，也得不出该消息的任何部分信息,即使是1比特的信息。这一概念的提出开创了可证明安全性领域的先河，奠定了现代密码学理论的数学基础，将密码学从一门艺术变为一门科学。

获得2012年度图灵奖。

语义安全

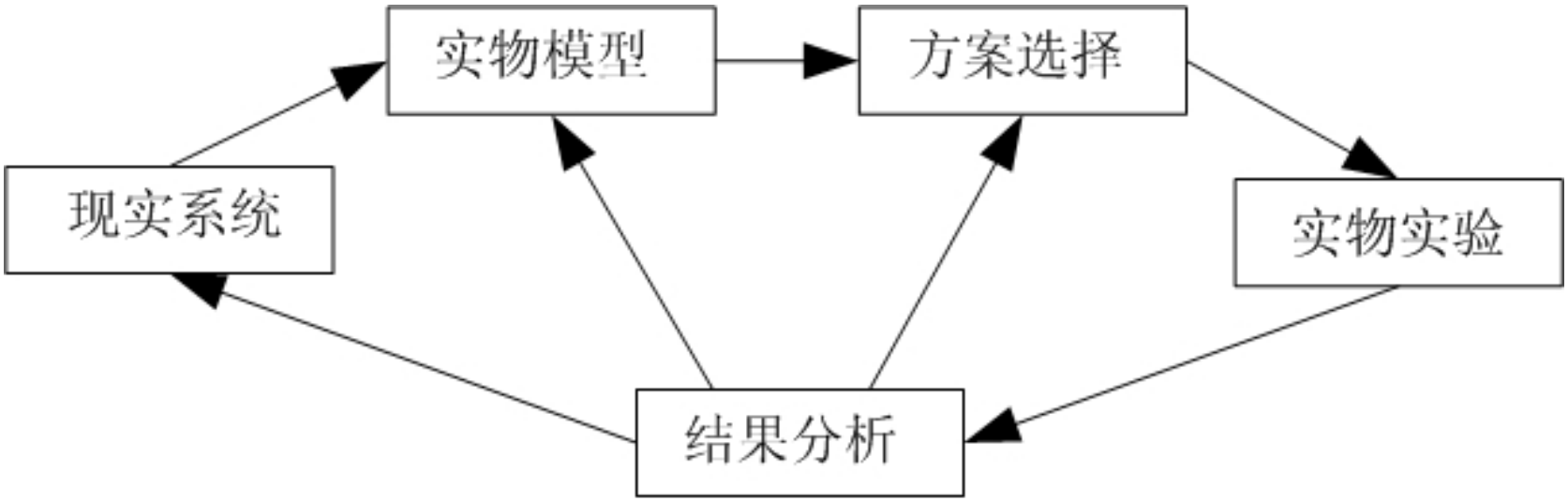
加密方案语义安全的概念由不可区分性(Indistinguishability) 游戏（简称IND游戏）来刻画，这种游戏是一种思维实验，其中有2个参与者，一个称为挑战者（challenger)，另一个是敌手。挑战者建立系统，敌手对系统发起挑战，挑战者接受敌手的挑战。

语义安全

思维实验(（thought experiment）)是用来考察某种假设、理论或原理的结果而假设的一种实验，这种实验可能在现实中无法做到，也可能在现实中没有必要去做。思维实验和科学实验一样，都是从现实系统出发，建立系统的模型，然后通过模型来模拟现实系统。

科学实验与思维实验

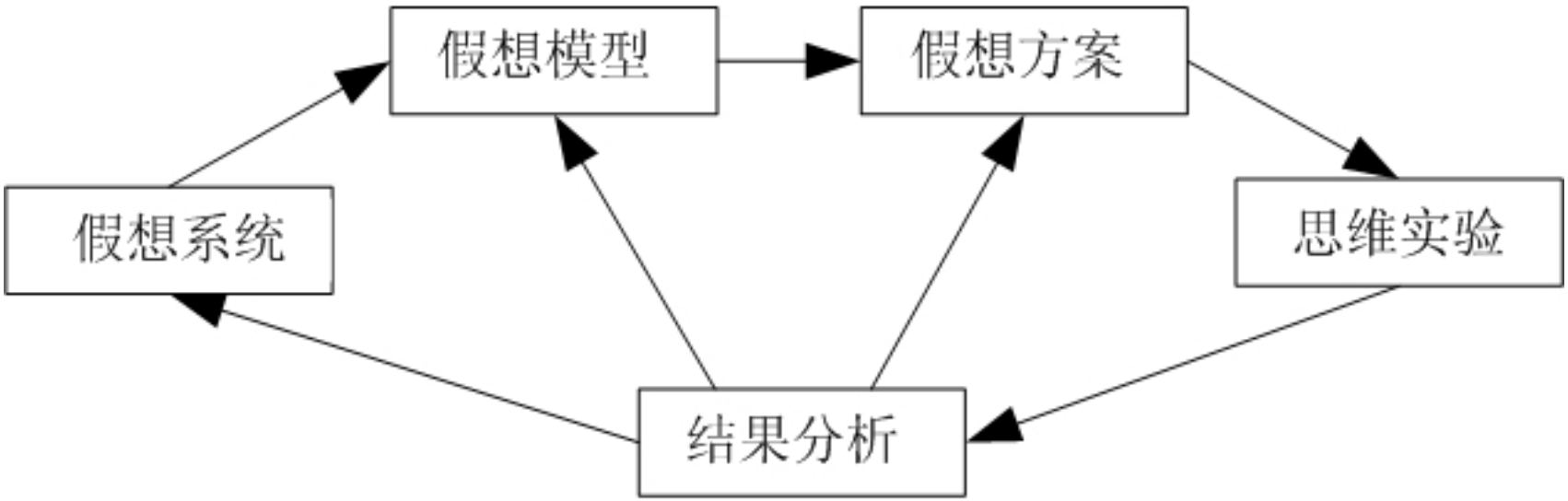
图1-1: 科学实验与思维实验



(a) 科学实验

科学实验与思维实验

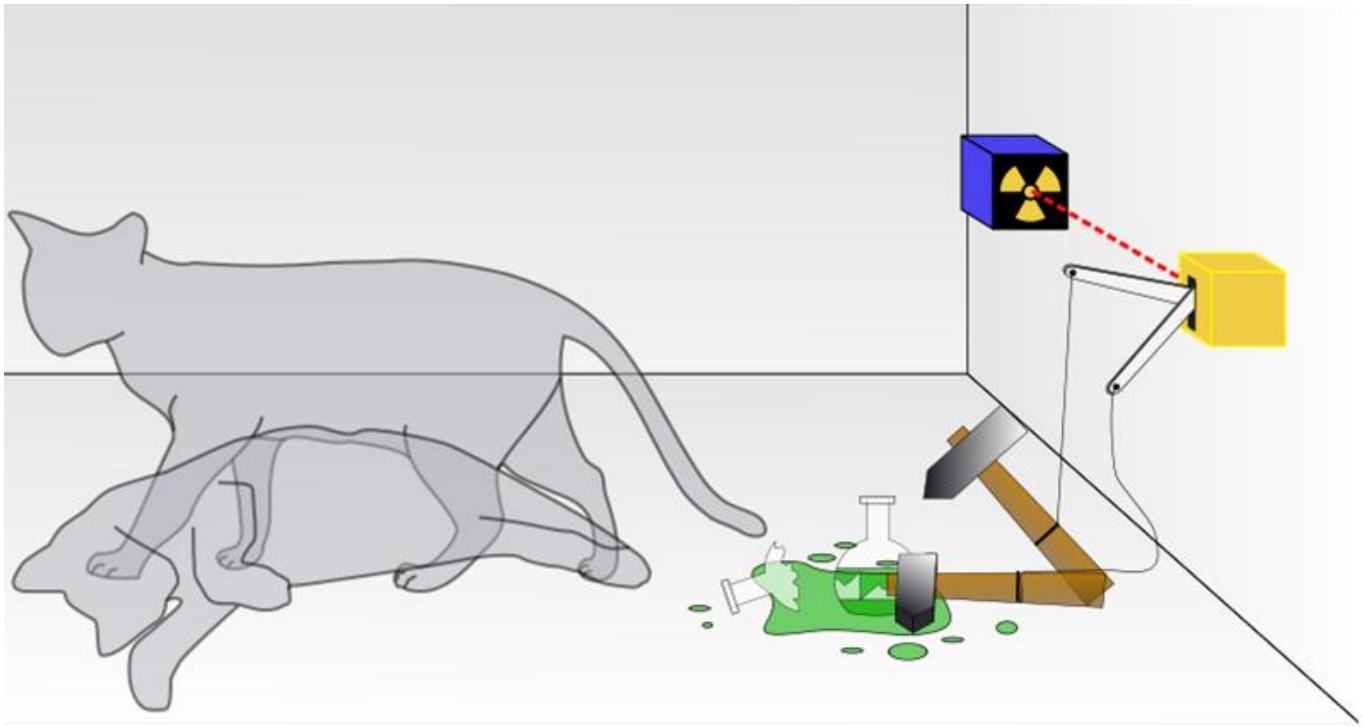
图1-2: 科学实验与思维实验



(*b*) 思维实验

科学实验与思维实验

图1-3: 薛定谔的猫



系统是真空的、无光的

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性(IND-CPA)

公钥加密方案在选择明文攻击下的IND游戏（称为IND-CPA游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性(IND-CPA)

公钥加密方案在选择明文攻击下的IND游戏（称为IND-CPA游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;
2. 挑战：敌手输出两个长度相同的消息m_0 和m_1 。挑战者随机选择$b \in \{0,1\}$，将m_b 加密，并将密文（称为目标密文）给敌手;

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性(IND-CPA)

公钥加密方案在选择明文攻击下的IND游戏（称为IND-CPA游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;
2. 挑战：敌手输出两个长度相同的消息m_0 和m_1 。挑战者随机选择$b \in \{0,1\}$，将m_b 加密，并将密文（称为目标密文）给敌手;
3. 猜测：敌手输出b'，如果$b' = b$, 则敌手攻击成功。

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

敌手的优势可定义为参数k的函数：

$$Adv_{\mathcal{E},A}(k) = |Pr[b = b'] - \frac{1}{2}|$$

其中k是安全参数，用来确定加密方案密钥的长度。因为任一个不作为的敌手A，都能通过对b做随机猜测，而以$\frac{1}{2}$的概率赢得IND-CPA游戏。而$|Pr[b = b'] - \frac{1}{2}|$是敌手通过努力得到的，故称为敌手的优势。

Definition 1.1

如果对任何多项式时间的敌手A，存在一个可忽略的函数$negl(k)$，使得$Adv^{CPA}_{\mathcal{E},A}(k) \leq negl(k)$，那么就称这个加密算法在选择明文攻击下具有不可区分性，或者称为IND-CPA安全。

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

- 如果敌手通过m_b 的密文能得到m_b 的一个比特，则有可能区分m_b 是m_0 还是m_1，因此IND游戏刻画了语义安全的概念;
- 定义中敌手是多项式时间的，否则因为它有系统的公开钥，可得到m_0 和m_1 的任意多个密文，再和目标密文逐一进行比较，即可赢得游戏;

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

- 如果加密方案是确定的，如RSA算法、Rabin密码体制等，每个明文对应的密文只有一个，敌手只需重新对m_0和m_1 加密后，与目标密文进行比较，即赢得游戏。因此语义安全性不适用于确定性的加密方案。
- 与确定性加密方案相对的是概率性的加密方案，在每次加密时，首先选择一个随机数，再生成密文。因此同一明文在不同的加密中得到的密文不同，如ElGamal加密算法。

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

例：ElGamal加密算法

1. 密钥产生：设G是阶为大素数q的群,g为G的生成元，随机选$x \in Z_q^*$,计算$y = g^x \bmod q$. 以x为秘密钥，(y, g, q)为公开钥。
2. 加密：设消息$m \in G$, 随机选一与$p-1$互素的整数k，计算

$$c_1 = g^k \bmod q, c_2 = y^k m \bmod q$$

密文为$c = (c_1, c_2)$.

3. 解密：$m = c_2 / c_1^x \bmod q$.

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

例：ElGamal加密算法

安全性基于Diffie-Hellman判定性问题：设G是阶为大素数q的群，g_1, g_2 为G的生成元。没有多项式时间的算法区分以下2个分布：

- 随机4元组$R = (g_1, g_2, u_1, u_2) \in G^4$的分布；
- 4元组$D = (g_1, g_2, u_1, u_2) \in G^4$的分布，其中$u_1 = g_1^r, u_2 = g_2^r, r \in_R Z_q$.

变形：做代换$g_1 \to g, g_2 \to g^x, u_1 \to g^y, u_2 \to g^{xy}$, 2个分布变为：

- 3元组$R = (g^x, g^y, g^z) \in G^3$的分布；
- 3元组$D = (g^x, g^y, g^{xy}) \in G^3$的分布.

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

例：ElGamal加密算法

在ElGamal加密算法的IND-CPA游戏中，敌手输出两个长度相同的消息m_0、m_1，挑战者加密$m_b(b \in \{0,1\})$，得$C = (C_1, C_2) = (g^k \bmod p, y^k m_b \bmod p)$。

如果$b = 0$，则

$$(C_1, y, C_2/m_0) = (g^k \bmod p, g^x \bmod p, g^{kx} \bmod p)$$

为Diffie-Hellman3元组。

如果$b = 1$，则

$$(C_1, y, C_2/m_1) = (g^k \bmod p, g^x \bmod p, g^{kx} \bmod p)$$

为Diffie-Hellman3元组。

公钥加密方案在选择明文攻击下的不可区分性

例：ElGamal加密算法

然而，IND CPA安全仅仅保证敌手是完全被动情况时（即仅做监听）的安全，不能保证敌手是主动情况时（例如向网络中注入消息）的安全。例如敌手收到密文为$C = (C_1, C_2)$，构造新的密文$C' = (C_1, C_2')$，其中$C_2' = C_2 m'$，解密询问后得到$M = mm'$。

或者构造新的密文$C'' = (C_1'', C_2'')$，其中$C_1'' = C_1 g^{k''}$，$C_2'' = C_2 y^{k''} m'$，此时

$$C_1' = g^k g^{k''} = g^{k+k''}, C_2'' = y^k m y^{k''} m' = y^{k+k''} mm'$$

解密询问后仍得到$M = mm'$。再由$\frac{M}{m'} \bmod p$，得到C的明文m。可见，ElGamal加密算法不能抵抗主动攻击。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性(IND-CCA)

CPA只能被动攻击的原因是CPA安全性和不可区分安全性等价。实际上，CPA真实表示的是，敌手在获得目标密文前可以访问加密预言机。而这里描述的主动攻击,即CCA.

为了描述敌手的主动攻击，1990年Naor和Yung提出了（非适应性）选择密文攻击（Chosen Ciphertext Attack，简称为CCA）的概念，其中敌手在获得目标密文以前，可以访问解密谕言机(Oracle)。敌手获得目标密文后，希望获得目标密文对应的明文的部分信息。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性(IND-CCA)

IND游戏（称为IND-CCA游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统$\mathcal{E}$，敌手A获得系统的公开钥。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性(IND-CCA)

IND游戏（称为IND-CCA游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统$\mathcal{E}$，敌手A获得系统的公开钥。
2. 训练：敌手向挑战者（或解密谕言机）做解密询问（可多次），即取密文c给挑战者，挑战者解密后，将明文给敌手。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性(IND-CCA)

IND游戏（称为IND-CCA游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统$\mathcal{E}$，敌手A获得系统的公开钥。
2. 训练：敌手向挑战者（或解密谕言机）做解密询问（可多次），即取密文c给挑战者，挑战者解密后，将明文给敌手。
3. 挑战：敌手输出两个长度相同的消息m_0和m_1，再从挑战者接收m_b的密文，其中随机值$b \in \{0, 1\}$。
4. 猜测：敌手输出b'，如果$b' = b$，则A成功。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性

以上攻击过程也称为“午餐时间攻击”或“午夜攻击”，相当于有一个执行解密运算的黑盒，掌握黑盒的人在午餐时间离开后，敌手能使用黑盒对自己选择的密文解密。午餐过后，给敌手一个目标密文，敌手试图对目标密文解密，但不能再使用黑盒了。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性

第2步可以形象地看做是敌手发起攻击前，敌手对自己的训练（自学），这种训练可通过挑战者，也可通过解密谕言机。谕言机也称为神谕、神使或传神谕者，神谕是古代希腊的一种迷信活动，由女祭祀代神传谕，解答疑难者的叩问，她们被认为是在传达神的旨意。因为在IND-CCA游戏中，除了要求敌手是多项式时间的，我们不能对敌手的能力做如何限制，敌手除了自己有攻击IND-CCA游戏的能力外，可能还会借助于外力，这个外力是谁？是他人还是神，我们不知道，所以统称为谕言机。

公钥加密方案在选择密文攻击下的不可区分性

敌手的优势可定义为参数k的函数：

$$Adv_{\mathcal{E},A}^{CCA}(k) = |Pr[b' = b] - \frac{1}{2}|$$

Definition 1.2

如果对任何多项式时间的敌手A，存在一个可忽略的函数$negl(k)$，使得$Adv_{\mathcal{E},A}^{CCA}(k) \leq negl(k)$，那么就称这个加密算法在选择密文攻击下具有不可区分性，或者称为IND-CCA安全。

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性(IND-CCA2)

1991年Rackoff和Simon提出了适应性选择密文攻击（Adaptive Chosen Ciphertext Attack，简称为CCA2）的概念，其中敌手获得目标密文后，可以向网络中注入消息（可以和目标密文相关），然后通过和网络中的用户交互，获得与目标密文相应的明文的部分信息。

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性

IND游戏（称为IND-CCA2游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性

IND游戏（称为IND-CCA2游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;
2. 训练阶段1：敌手向挑战者（或解密谕言机）做解密询问（可多次），即取密文c给挑战者，挑战者解密后，将明文给敌手;

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性

IND游戏（称为IND-CCA2游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;
2. 训练阶段1：敌手向挑战者（或解密谕言机）做解密询问（可多次），即取密文c给挑战者，挑战者解密后，将明文给敌手;
3. 挑战：敌手输出两个长度相同的消息m_0和m_1，再从挑战者接收m_b的密文c_b，其中随机值$b \in \{0, 1\}$;

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性

IND游戏（称为IND-CCA2游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;
2. 训练阶段1：敌手向挑战者（或解密谕言机）做解密询问（可多次），即取密文c给挑战者，挑战者解密后，将明文给敌手;
3. 挑战：敌手输出两个长度相同的消息m_0和m_1，再从挑战者接收m_b的密文c_b，其中随机值$b \in \{0,1\}$;
4. 训练阶段2：敌手继续向挑战者（或解密谕言机）做解密询问(可多次)，即取密文$c(c \neq c_b)$给挑战者，挑战者解密后将明文给敌手;

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性

IND游戏（称为IND-CCA2游戏）如下：

1. 初始化：挑战者产生系统ε，敌手获得系统的公开钥;
2. 训练阶段1：敌手向挑战者（或解密谕言机）做解密询问（可多次），即取密文c给挑战者，挑战者解密后，将明文给敌手;
3. 挑战：敌手输出两个长度相同的消息m_0和m_1，再从挑战者接收m_b的密文c_b，其中随机值$b \in \{0,1\}$;
4. 训练阶段2：敌手继续向挑战者（或解密谕言机）做解密询问(可多次)，即取密文$c(c \neq c_b)$给挑战者，挑战者解密后将明文给敌手;
5. 猜测：敌手输出b'，如果$b' = b$，则A成功。

公钥加密方案在适应性选择密文攻击下的不可区分性

敌手的优势可定义为参数k的函数：

$$Adv_{\mathcal{E},A}^{CCA2}(k) = |Pr[b = b'] - \frac{1}{2}|$$

Definition 1.3

如果对任何多项式时间的敌手，存在一个可忽略的函数$negl(k)$，使得$Adv_{\mathcal{E},A}^{CCA2}(k) \leq negl(k)$，那么就称这个加密算法在适应性选择密文攻击下具有不可区分性，或者称为IND-CCA2安全。

在设计抗击主动敌手的密码协议时（如数字签名、认证、密钥交换、多方计算等），IND-CCA2安全的密码系统是有力的密码原语。原语是指由若干条指令组成的，用于完成一定功能的一个过程。

签名体制的语义安全性(EUF-CMA)

签名体制$\prod = (KeyGen, Sign, Ver)$一般由以下三个算法组成：

1. 密钥生成(KeyGen)：该算法输入1^k，输出密钥对(pk, sk);

签名体制的语义安全性(EUF-CMA)

签名体制$\prod = (KeyGen, Sign, Ver)$一般由以下三个算法组成：

1. 密钥生成(KeyGen)：该算法输入1^k，输出密钥对(pk, sk);
2. 签名：输入消息m，秘密钥sk，输出$\sigma = Sign(m, sk)$;

签名体制的语义安全性(EUF-CMA)

签名体制$\prod = (KeyGen, Sign, Ver)$一般由以下三个算法组成：

1. 密钥生成(KeyGen)：该算法输入1^k，输出密钥对(pk, sk);
2. 签名：输入消息m，秘密钥sk，输出$\sigma = Sign(m, sk)$;
3. 验证：输入σ，消息m，公开钥pk，输出$Ver(\sigma, m, pk) = T$或$\perp$。

签名体制的语义安全性

签名体制的语义安全性，由以下不可伪造（Existential Unforgeability）游戏（简称EUF游戏）来刻画。

1. 初始阶段：挑战者产生系统$\mathcal{E}$的密钥对(pk, sk)，敌手A获得系统的公开钥;

签名体制的语义安全性

签名体制的语义安全性，由以下不可伪造（Existential Unforgeability）游戏（简称EUF游戏）来刻画。

1. 初始阶段：挑战者产生系统$\mathcal{E}$的密钥对(pk, sk)，敌手A获得系统的公开钥;
2. 阶段1(签名询问)：A执行以下的多项式有界次适应性询问;

   A提交m_i，挑战者计算$\sigma_i = Sign(m_i, sk)$ 并返回给A;

签名体制的语义安全性

签名体制的语义安全性，由以下不可伪造（Existential Unforgeability）游戏（简称EUF游戏）来刻画。

1. 初始阶段：挑战者产生系统$\mathcal{E}$的密钥对(pk, sk)，敌手A获得系统的公开钥;
2. 阶段1(签名询问)：A执行以下的多项式有界次适应性询问;
   A提交m_i，挑战者计算$\sigma_i = Sign(m_i, sk)$并返回给A;
3. 输出：A输出(m, σ)，如果m不出现在阶段1且$Ver(\sigma, m, pk) = T$，则A攻击成功。

签名体制的语义安全性

A的优势为它获胜的概率，记为$AdvSig_{\mathcal{E},A}^{CMA}(k)$，其中$k$为安全参数。

Definition 1.4

签名体制$\prod = (KeyGen, Sign, Ver)$称为在适应性选择消息攻击下具有存在性不可伪造性(Existential Unforgeability Against Adaptive Chosen Messages Attacks，EUF-CMA)，简称为EUF-CMA安全，如果对任何多项式有界时间的敌手，存在一个可忽略的函数$negl(k)$，使得

$$AdvSig_{\mathcal{E},A}^{CMA}(k) \leq negl(k)$$

存在性伪造：提供一个新的消息—签名对

签名体制的语义安全性

例：RSA签名体制

RSA签名体制不是EUF-CMA安全的，其EUF游戏如下：

- 初始阶段：挑战者产生系统ε的密钥
  对$pk = (e, n), sk = (d, n)$，将pk发送给敌手A并且保密sk;
- 阶段1(签名询问)：A执行以下的多项式$q = q(\lambda)$ 有界次适应性询问;
  A提交m_i，其中某个$m_j = r^e \cdot m$，挑战者计算$s_i \equiv m_i^d \bmod n (i = 1, \ldots, q)$并返回给A;

签名体制的语义安全性

例：RSA签名体制

- 输出：A输出$(m, \sigma) = (m, s_j/r)$，因为$s_j \equiv (r^e m)^d \bmod n \equiv r m^d \bmod n$，所以$s_j/r \equiv m^d \bmod n$，即为$m$的签字。
  m 不出现在阶段1且$Ver(\sigma, m, pk) = T$。

规约(reduction)

有了以上安全定义后，通常使用规约的方法来证明方案满足定义。

规约是复杂性理论中的概念，一个问题P_1规约到问题P_2是指，已知解决问题P_1的算法M_1，我们能构造另一算法M_2，M_2可以以M_1作为子程序，用来解决问题P_2。

把规约方法用在密码算法或安全协议的安全性证明，可把敌手对密码算法或安全协议（问题P_1）的攻击规约到一些已经得到深入研究的密码本原（问题P_2）。即如果敌手能够对算法或协议发起有效的攻击，就可以利用敌手构造一个算法来攻破密码本原，从而得出矛盾。根据反证法，敌手能够对算法或协议发起有效的攻击的假设不成立。

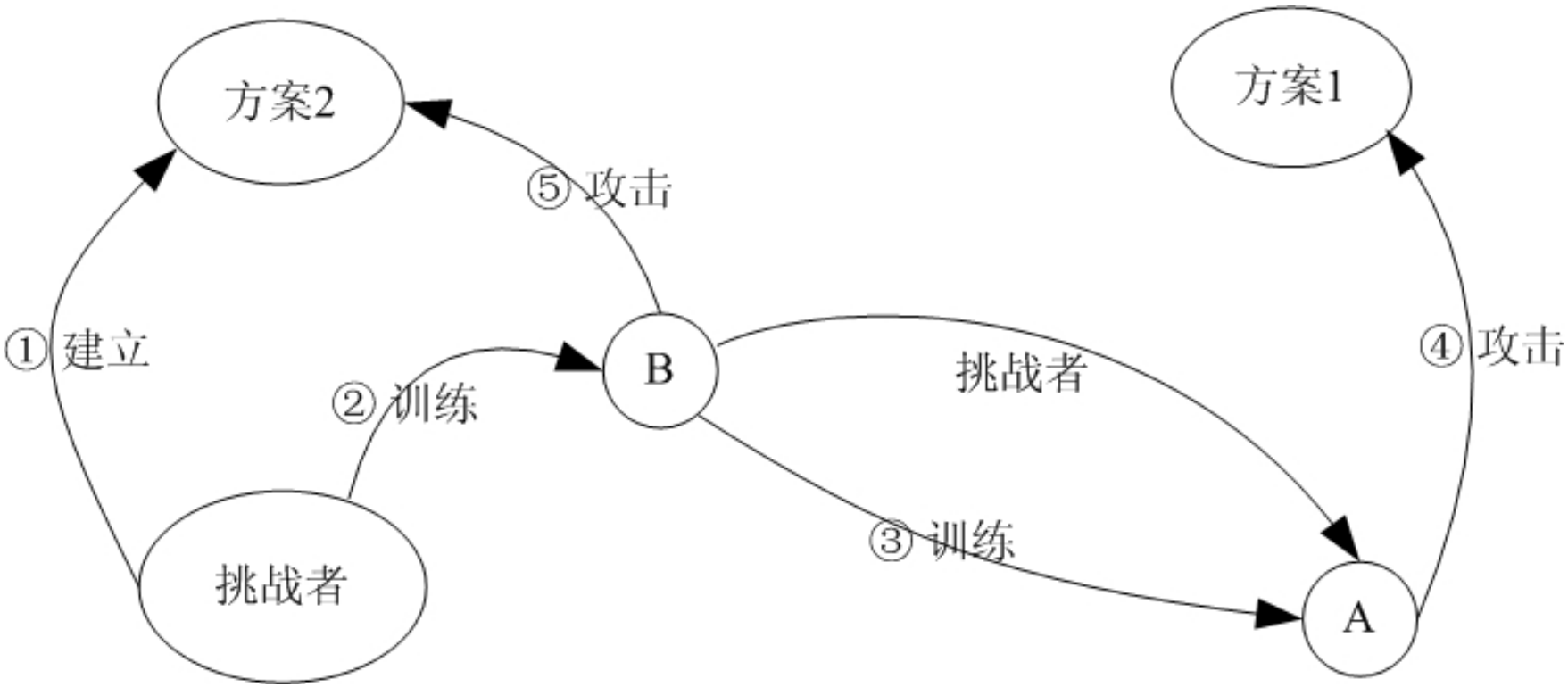
规约

一般地，为了证明方案1的安全性，我们可将方案1规约到方案2，即如果敌手A能够攻击方案1，则敌手B能够攻击方案2，其中方案2是已证明安全的，或是一困难问题，或是一密码本原。

证明过程还是通过思维实验来描述，首先由挑战者建立方案2，方案2中的敌手用B表示，方案1中的敌手用A表示。B为了攻击方案2，它利用A作为子程序来攻击方案1。B为了利用A，它可能需要对A加以训练，因此B又模拟A的挑战者。

规约

图2: 两个方案之间的规约



规约

具体步骤如下：

1. 挑战者产生方案2的系统;

规约

具体步骤如下：

1. 挑战者产生方案2的系统;
2. 敌手B为了攻击方案2，接受挑战者的训练;

规约

具体步骤如下：

1. 挑战者产生方案2的系统;
2. 敌手B为了攻击方案2，接受挑战者的训练;
3. B为了利用敌手A，对A进行训练，即作为A的挑战者;

规约

具体步骤如下：

1. 挑战者产生方案2的系统;
2. 敌手B为了攻击方案2，接受挑战者的训练;
3. B为了利用敌手A，对A进行训练，即作为A的挑战者;
4. A攻击方案1的系统;

规约

具体步骤如下：

1. 挑战者产生方案2的系统;
2. 敌手B为了攻击方案2，接受挑战者的训练;
3. B为了利用敌手A，对A进行训练，即作为A的挑战者;
4. A攻击方案1的系统;
5. B利用A攻击方案1的结果，攻击方案2。

规约

对于加密算法来说，图2中的方案1取为加密算法，如果其安全目标是语义安全，即敌手A攻击它的不可区分性，敌手B模拟A的挑战者，和A进行IND游戏。称此时A对方案1的攻击为模拟攻击。在这个过程中，B为了达到自己的目标，而利用A，A也许不愿意被B利用。如果A不能判别是和自己的挑战者交互还是和模拟的挑战者交互，则称B的模拟是完备的。

规约

对于其他密码算法或密码协议来说，我们首先要确定它要达到的安全目标，如签名方案的不可伪造性等，然后构造一个形式化的敌手模型及思维实验，再利用概率论和计算复杂性理论，把对密码算法或密码协议的攻击规约到对已知困难问题的攻击。这种方法就是可证明安全性。

可证明安全性是密码学和计算复杂性理论的天作之合。过去30年，密码学的最大进展是将密码学建立在计算复杂性理论之上，并且正是计算复杂性理论将密码学从一门艺术发展成为一门严格的科学。

CA可能成为系统的瓶颈

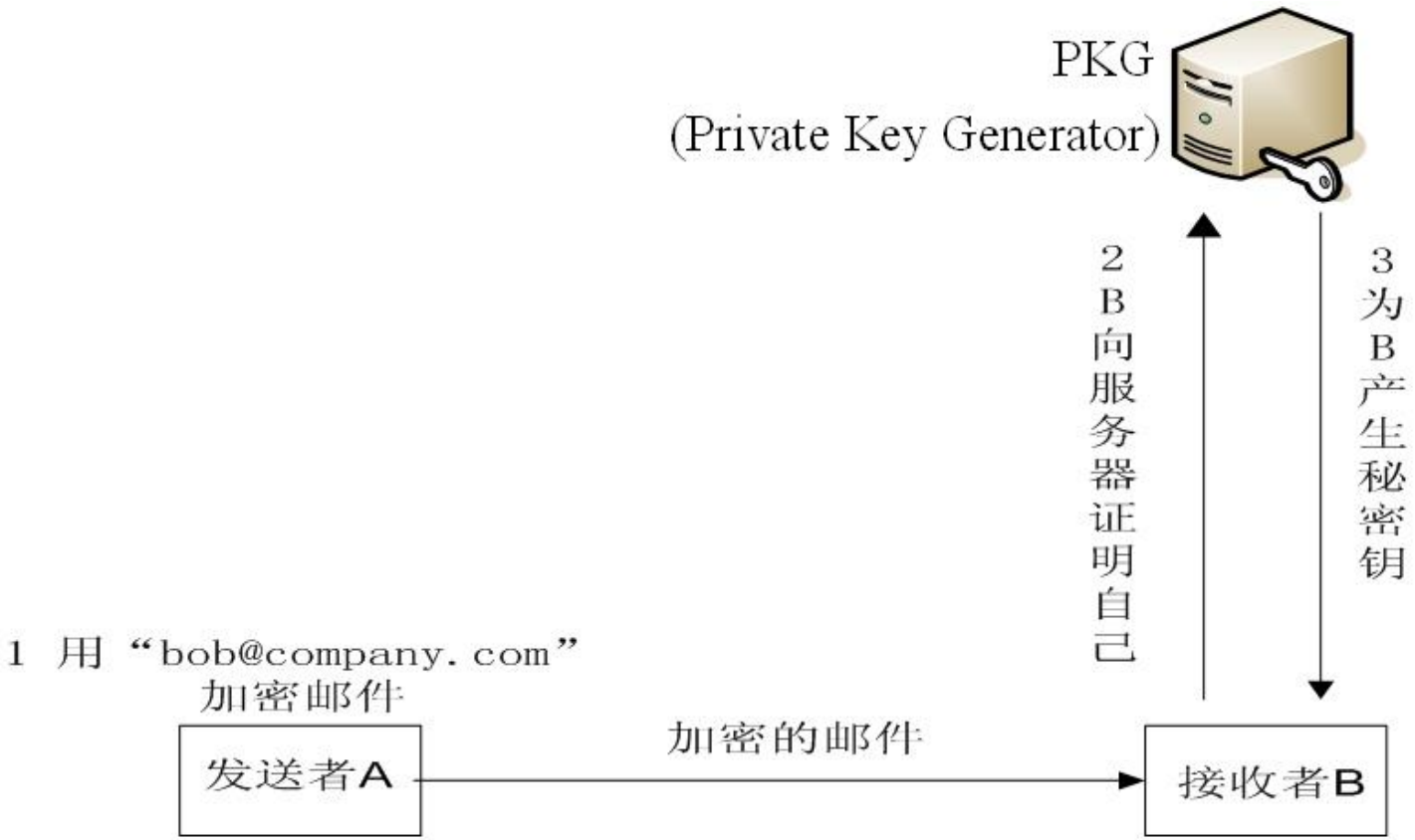
- 公钥密码体制
- CA（Certificate Authority），负责用户公钥证书生命周期的每一个环节：生成、签发、存贮、维护、更新、撤销等
- CA有可能成为系统的瓶颈。

基于身份的公钥密码体制

- 基于身份的公钥密码体制，从根本上改变传统CA公钥体制架构中证书的管理和运作
- 基于身份的公钥体制的思想最早由Shamir于1984年提出，方案中不使用任何证书，直接将用户的身份作为公钥，以此来简化公钥基础设施PKI（Public Key Infrastructure）中基于证书的密钥管理过程

基于身份的加密算法如何工作？

图3: 基于身份的加密方案示例



Identity-Based Encryption

一个基于身份的加密体制(E)由以下四个算法组成：

- 建立（Setup）：由安全参数k生成系统参数*params*和主密钥master-key.
- 提取（Extract）：由给定公钥（身份）生成秘密钥,即由*params*,master-keys和任意$ID \in \{0,1\}^*$,返回一个秘密钥d.
- 加密（Encrypt）：由输入params, ID, M, 返回密文C.
- 解密（Decrypt）：由输入params, C，d, 返回明文M.

双线性映射

设q是一个大素数，$\mathbb{G}_1$和$\mathbb{G}_2$是两个阶为q的群，$\mathbb{G}_1$到$\mathbb{G}_2$的双线性映射：$\hat{e}: \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$，满足如下性质：

1、双线性：如果对任意$P, Q, R \in \mathbb{G}_1$和$a, b \in \mathbb{Z}_q$，$\hat{e}(aP, bQ) = \hat{e}(P, Q)^{ab}$或$\hat{e}(P+Q, R) = \hat{e}(P, R) \cdot \hat{e}(Q, R)$成立。

2、非退化性: 映射不把$\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_1$所有的元素对映射到$\mathbb{G}_2$的单位元。由于$\mathbb{G}_1$和$\mathbb{G}_2$都是素数阶的群，即，如果$P$是$\mathbb{G}_1$的单位元，那么$\hat{e}(P, P)$是$\mathbb{G}_2$的单位元。

3、可计算性：任意$P, Q \in \mathbb{G}_1$，存在一个有效算法计算$\hat{e}(P, Q)$。

IBE方案所基于的困难问题之DDH问题

设$\mathbb{G}_1$是一个阶为q的群，$\mathbb{G}_1$中的判定性Diffie-Hellman问题，简称DDH(Decision Diffie-Hellman)问题是指已知P, aP, bP, cP，判定$c = ab \bmod q$ 是否成立，其中P是$\mathbb{G}_1^*$中的随机元素，a, b, c是$\mathbb{Z}_q^*$中的随机数。

由双线性映射的性质可知：

$$c = ab \bmod q \Leftrightarrow \hat{e}(P, cP) = \hat{e}(aP, bP)$$

因此，可将判定$c = ab \bmod q$是否成立转变为判定$\hat{e}(P, cP) = \hat{e}(aP, bP)$是否成立，所以$\mathbb{G}_1$中的DDH问题是简单的。

IBE方案所基于的困难问题之CDH问题

$\mathbb{G}_1$中的计算性Diffie-Hellman问题，简称CDH问题(Computational Diffie-Hellman)是指已知P, aP, bP，求abP，其中P是$\mathbb{G}_1^*$中的随机元素，a, b是$\mathbb{Z}_q^*$中的随机数。

与$\mathbb{G}_1$中的DDH问题不同，$\mathbb{G}_1$中的CDH问题不因引入双线性映射而解决,因此它仍是困难问题。

MOV规约

$\mathbb{G}_1$中的离散对数问题: 已知$P, Q \in \mathbb{G}_1$,求$a \in \mathbb{Z}_q$,使得$Q = aP$。已知这是一个困难问题。

然而如果记$g = \hat{e}(P, P), h = \hat{e}(P, Q)$，则由$\hat{e}$的双线性可知$h = g^a$，因此，可以将$\mathbb{G}_1$中的离散对数问题归结为$\mathbb{G}_2$ 中的离散对数问题。若$\mathbb{G}_2$中的离散对数问题可解，则$\mathbb{G}_1$中的离散对数问题可解。

MOV规约(也称MOV攻击)是指将攻击$\mathbb{G}_1$中的离散对数问题转化为攻击$\mathbb{G}_2$中的离散对数问题。所以要使$\mathbb{G}_1$中的离散对数问题为困难问题，就必须选择适当参数使$\mathbb{G}_2$中的离散对数问题为困难问题。

Random oracle model

- HASH函数的一个性质：对任一输入，其输出的概率分布与均匀分布在计算上不可区分。
- 改为：对任一输入，其输出是均匀分布的。
- 把HASH函数看作这样一个理想的函数，就称其为Random Oracle。

IBE方案所基于的困难问题之BDH问题和BDH假设

由于$\mathbb{G}_1$中的DDH问题简单，那么就不能用它来构造$\mathbb{G}_1$中的密码体制。IBE体制的安全性是基于CDH问题的一个变形，称之为双线性DH假设。

双线性DH问题，简称BDH(Bilinear Diffie-Hellman)问题，是指给定$(P, aP, bP, cP)(a, b, c \in \mathcal{Z}_q^*)$，计算

$$w = \hat{e}(P, P)^{abc} \in \mathbb{G}_2$$

其中$\hat{e}$是一个双线性映射，P是$\mathbb{G}_1$的生成元，$\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$是阶为素数$q$的两个群。

IBE方案所基于的困难问题之BDH问题和BDH假设

设算法A用来解决BDH问题，其优势定义为τ，如果

$$Pr \mid A(P, aP, bP, cP) = \hat{e}(P, P)^{abc} \mid \geq \tau$$

目前还没有有效的算法解决BDH问题. 因此，可假设BDH问题是一个困难问题，这就是BDH假设。

选择明文安全的IBE方案

要定义基于身份的密码体制的语义安全，应允许敌手根据自己的选择进行秘密钥询问，即敌手可根据自己的选择询问公钥对应的秘密钥，以此来加强标准定义。

IND游戏（称为IND-ID-CPA游戏）如下：

- 初始化：挑战者输入安全参数k，产生公开的系统参数$params$ 和保密的主密钥.
- 阶段1(训练)：敌手A发出对$ID_1 ... ID_m$的秘密钥产生询问。挑战者运行秘密钥产生算法，产生与公钥ID_i 对应的秘密钥$d_i (i = 1, \ldots, m)$，并把它发送给敌手.

选择明文安全的IBE方案

- 挑战：敌手输出要挑战的两个等长明文m_0, m_1和一个意欲挑战的公开钥ID。唯一的限制是ID不在阶段1中的任何秘密钥询问中出现。挑战者随机选取一个比特值$b \in \{0,1\}$，计算$C = Encrypt(Params, ID, m_b)$，并将$C$发送给敌手.
- 阶段2(训练)：敌手发出对$ID_{m+1}...ID_n$的秘密钥产生询问，唯一的限制是$ID_i \neq ID(i = m+1, \ldots, n)$，挑战者以阶段1中的方式进行回应.
- 猜测：敌手输出猜测$b' \in \{0,1\}$，如果$b = b'$,则A成功.

选择明文安全的IBE方案

敌手的优势定义为安全参数k 的函数：

$$Adv_{\mathcal{E},\mathrm{A}}^{ID-CPA}(k) = |Pr[b = b'] - \frac{1}{2}|$$

Definition2-1

如果对任何多项式时间的敌手A，存在一个可忽略的函数$negl(k)$，使得$Adv_{\mathcal{E},\mathrm{A}}^{ID-CPA}(k) \leq negl(k)$，那么就称这个加密算法在适应性选择密文攻击下具有不可区分性，或者称为IND-ID-CPA安全。

BasicIdent

简单的方案：BasicIdent

该方案包括4个算法：Setup,Extract,Encrypt,Decrypt

1、建立（Setup）：给定安全参数$k \in \mathbb{Z}^+$, 运行BDH参数生成器$\mathcal{G}$

(1) 产生素数q，两个q阶群$\mathbb{G}_1$和$\mathbb{G}_2$,一个双线性映射$\hat{e} : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$. 选择$\mathbb{G}_1$中的生成元$P$;

(2) 选择一个随机数$s \in \mathbb{Z}_q^*$作为主密钥,计算$P_{pub} = sP$作为公开钥;

(3) 选择2个hash函数$H_1 : \{0,1\}^* \to \mathbb{G}_1^*$，$H_2 : \mathbb{G}_2^* \to \{0,1\}^*$.

系统参数$params =< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, H_1, H_2 >$

BasicIdent

2、密钥提取询问（Extract）：给定ID计算

(1)$Q_{ID} = H_1(ID)$;

(2)$d_{ID} = sQ_{ID}$作为ID对应的秘密钥。

3、加密（Encrypt）：给定明文M和ID

(1)计算$Q_{ID} = H_1(ID) \in \mathbb{G}_1^*$;

(2)选择随机数$r \in \mathbb{Z}_q^*$;

(3)$C =< rP, M \oplus H_2(g_{ID}^r) >$，其中$g_{ID} = \hat{e}(Q_{ID}, P_{pub}) \in \mathbb{G}_2^*$.

BasicIdent

4、解密（Decrypt）：设$C =< U, V >$是用ID加密的密文，使用相应的秘密钥d_{ID}解密：

$$V \oplus H_2(\hat{e}(d_{ID}, U)) = M$$

正确性：

$$\hat{e}(d_{ID}, U) = \hat{e}(sQ_{ID}, rP) = \hat{e}(Q_{ID}, P)^{sr} = \hat{e}(Q_{ID}, P_{pub})^{r} = g_{ID}^{r}$$

选择明文安全的IBE方案

定理2-1

在BasicIdent中，设Hash函数H_1，H_2是随机谕言机，如果BDH问题在$\mathcal{G}$生成的群上是困难的，那么BasicIdent是IND-ID-CPA安全的。

具体来说，假设存在一个IND-ID-CPA敌手A以$\epsilon(k)$ 的优势攻破BasicIdent方案，A最多进行$q_{H_1} > 0$ 次H_1 询问、$q_{H_2} > 0$次H_2 询问，那么一定存在一个敌手B至少以

$$Adv_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(k) \geq \frac{2\epsilon(k)}{e \cdot q_{H_1} \cdot q_{H_2}}$$

的优势解决$\mathcal{G}$生成的群中的BDH问题

选择明文安全的IBE方案

定理2-1是将BasicIdent规约到BDH问题，为了证明这个规约，我们先将BasicIdent规约到一个非基于身份的加密方案BasicPub，再将BasicPub规约到BDH问题，规约的传递性是显然的。

BasicPub加密方案如下定义：

(1)密钥产生：设安全参数$k \in \mathbb{Z}^+$

1. 运行$\mathcal{G}$,生成两个阶为素数q的群$\mathbb{G}_1$,$\mathbb{G}_2$,一个双线性映射$\hat{e} : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$. 随机选择$\mathbb{G}_1$中的生成元$P$;
2. 选择一个随机数$s \in \mathbb{Z}_q^*$，计算$P_{pub} = sP$。随机选取$Q_{ID} \in G_1^*$，计算$d_{ID} = sQ_{ID}$作为秘密钥;
3. 选择一个杂凑函数$H_2 : \mathbb{G}_2 \to \{0,1\}^n$;
4. 公开钥：$< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, Q_{ID}, H_2 >$。

选择明文安全的IBE方案

(2)加密：随机选取$r \in \mathbb{Z}_q^*$，计算$C =< rP, M \oplus H_2(g^r) >$，其中$g = \hat{e}(Q_{ID}, P_{pub}) \in \mathbb{G}_2^*$

(3)解密：设$C =< U, V >$，计算$V \oplus H_2(\hat{e}(d_{ID}, U)) = M$

在BasicIdent中，Q_{ID}是根据用户的身份产生的。而在BasicPub中是随机选取的一个固定值，因此它与用户的身份无关。

选择明文安全的IBE方案

首先证明BasicIdent到BasicPub的规约。

引理2-1

设H_1是从$\{0,1\}^*$到$\mathbb{G}_1^*$的随机预言机，A是IND-ID-CPA以$\epsilon(k)$优势成功攻击BasicIdent的敌手。假设A最多进行$q_{H_1} > 0$次$H_1(\cdot)$询问，那么存在一个IND-CPA敌手B以最少$\frac{\epsilon(k)}{eq_{H_1}}$的概率成功攻击BasicPub，运行时间是$O(time(A))$。

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

证明: 挑战者先建立BasicPub方案，敌手B攻击BasicPub方案时，以A为子程序，过程如图2所示，其中方案1为BasicIdent，方案2为BasicPub。

为了简化，不失一般性，我们假设：（1）A不会对$H_1(\cdot)$发起两次相同的询问；（2）如果A请求身份ID的密钥提取询问，则它之前已经询问过$H_1(ID)$。

具体过程如下：

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

(1) 初始化：挑战者运行BasicPub中的密钥产生算法生成公开钥$K_{pub} =< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, Q_{ID}, H_2 >$，保留秘密钥$d_{ID} = sQ_{ID}$。B获得公开钥。

下面（2）∽（6）步，B模拟A的挑战者和A进行IND游戏。

(2) B的初始化：B发送BasicIdent的公开钥$K_{pub} =< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, H_1, H_2 >$给A，且随机选择$j \in \{1, \ldots, q_{H_1}\}$，这里$j$是B的一个猜测值：A的这次$H_1$询问对应着A最终的攻击结果。因BasicPub中的公开钥无H_1，所以B为了承担A的挑战者，需要构造一个H_1列表H_1^{list}，它的元素类型是3元组$< ID_i, Q_i, b_i >$。

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

(3)H_1询问

设A询问ID_i, $\mathcal{B}$ 如下应答:

1. 如果ID_i已经在H_1^{list}, B以$Q_i \in \mathbb{G}_1^*$作为H_1的值应答A;
2. 否则B选择随机数$b_i \in Z_q^*$,
   - 如果$i = j$，计算$Q_i = b_i Q_{ID} \in \mathbb{G}_1^*$；
   - 否则，计算$Q_i = b_i P \in \mathbb{G}_1^*$；

B将$< ID_i, Q_i, b_i >$加入H_1^{list}，并以$H_1(ID_i) = Q_i$回应A。

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

(4) 密钥提取询问-阶段1：设ID_i是A向B发出的密钥提取询问，

1. 如果$i = j$，B报错并退出(此时，B原打算利用A对BasicIdent的攻击来攻击BasicPub，B无法利用A，所以对BasicPub的攻击失败)；
2. 否则B从H_1^{list}取出$Q_i = b_i P$，求$d_i = b_i P_{Pub}$，并将d_i作为ID_i对应的BasicIdent的秘密钥给A。

这是因为$d_i = sQ_i = s(b_i P) = b_i(sP) = b_i P_{Pub}$。

注意：$d_{ID} = sQ_{ID}$是BasicPub中的秘密钥；$d_i = sQ_i = b_i P_{Pub}$是BasicIdent中的秘密钥。

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

(5) A发出挑战：设A的挑战是ID_{ch}, m_0, m_1，满足$ID_i = ID_{ch}$，

1. 如果$i \neq j$，B报错并退出；
2. 否则(此时$Q_i = b_i Q_{ID}$)，B将m_0, m_1给自己的挑战者，挑战者随机选$c \in \{0, 1\}$，以BasicPub方案加密m_c得$C =< U, V >$(BasicPub密文)作为对B的应答。B则以$C' =< b_i^{-1} U, V >$(BasicIdent密文)作为对A的应答。这是因为$d_{ch} = sQ_i = sb_i Q_{ID} = b_i sQ_{ID} = b_i d_{ID}$ (BasicIdent密钥)，

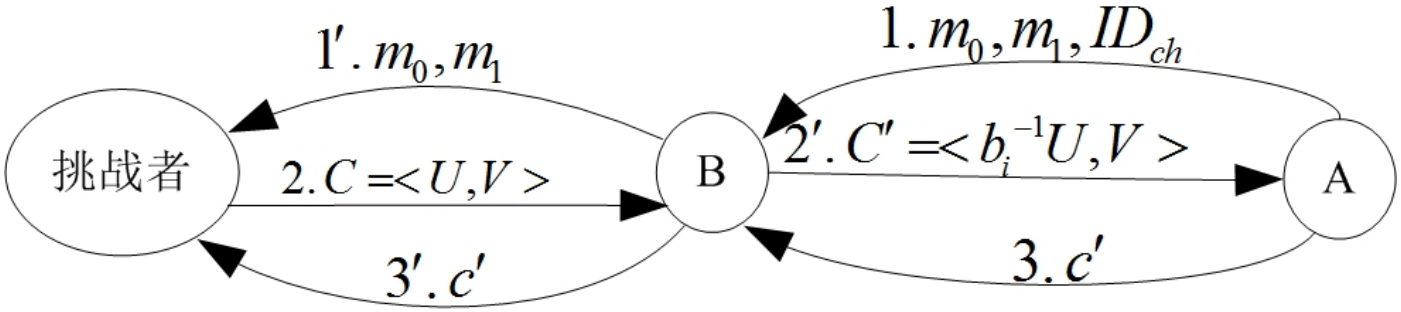
$\hat{e}(d_{ch}, b_i^{-1} U) = \hat{e}(b_i d_{ID}, b_i^{-1} U) = \hat{e}(d_{ID}, U)$

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

挑战过程如图4所示。

图4: 挑战过程



(6) 密钥提取询问-阶段2：与密钥提取询问-阶段1相同。

(7) 猜测：A输出猜测c'，B也以c'作为自己的猜测。

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

断言2-1

在以上规约过程中，如果B不中断，则B的模拟是完备的。

证明 在以上模拟中，当B猜测正确时，A的视图与其在真实攻击中的视图是同分布的。这是因为

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

1. A的q_{H_1} 次H_1 询问中的每一个都是用随机值来回答的：
   - 对ID_j 的询问是用$Q_i = b_i Q_{ID}$ 来应答的；
   - 对ID_i 的询问是用$Q_i = b_i P$来应答的；

   由b_i 的随机性，知Q_i 是随机均匀的。而
   在A对BasicIdent的真实攻击中，A得到的是H_1 的函数值，由于假定H_1 是随机谕言机，所以A得到的函数值是均匀的（这就是假定H_1 是随机谕言机的原因）。
2. 而B对A的密钥提取询问的应答$d_i = b_i P_{pub}$ 等于sQ_i ，因而是有效的。

   所以两种视图不可区分。（断言2-1证毕）

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

继续引理1.2的证明：由断言2-1知，A在模拟攻击中的优势$Adv_{Sim,\mathrm{A}}^{ID-CPA}(k) = |Pr[b = b'] - \frac{1}{2}|$与真实攻击中的优势$Adv_{\mathcal{E},\mathrm{A}}^{ID-CPA}(k)$相等，至少为$\epsilon$

设A进行了q_{H_1}次H_1询问，若B的猜测是正确的，且A在第（7）步成功攻击了BasicIdent的不可区分性，则B就成功攻击了BasicPub的不可区分性。

因为B猜测正确的概率为$\frac{1}{q_{H_1}}$，B在第（4）步不中断的概率为$(1 - \frac{1}{q_{H_1}})^{q_{H_1}}$，在第（5）步不中断的概率为$\frac{1}{q_{H_1}}$，因此B不中断的概率为$[1 - \frac{1}{q_{H_1}}]^{q_{H_1}} \frac{1}{q_{H_1}}$，B的优势为

选择明文安全的IBE方案

引理2-1之证明

$$[1-\frac{1}{q_{H_1}}]^{q_{H_1}}\frac{1}{q_{H_1}}Adv^{ID-CPA}_{Sim,A}(k)=\frac{\epsilon(k)}{eq_{H_1}}.$$

运行时间显然。（引理2-1证毕）

选择明文安全的IBE方案

下面证明BasicPub到BDH问题的规约。

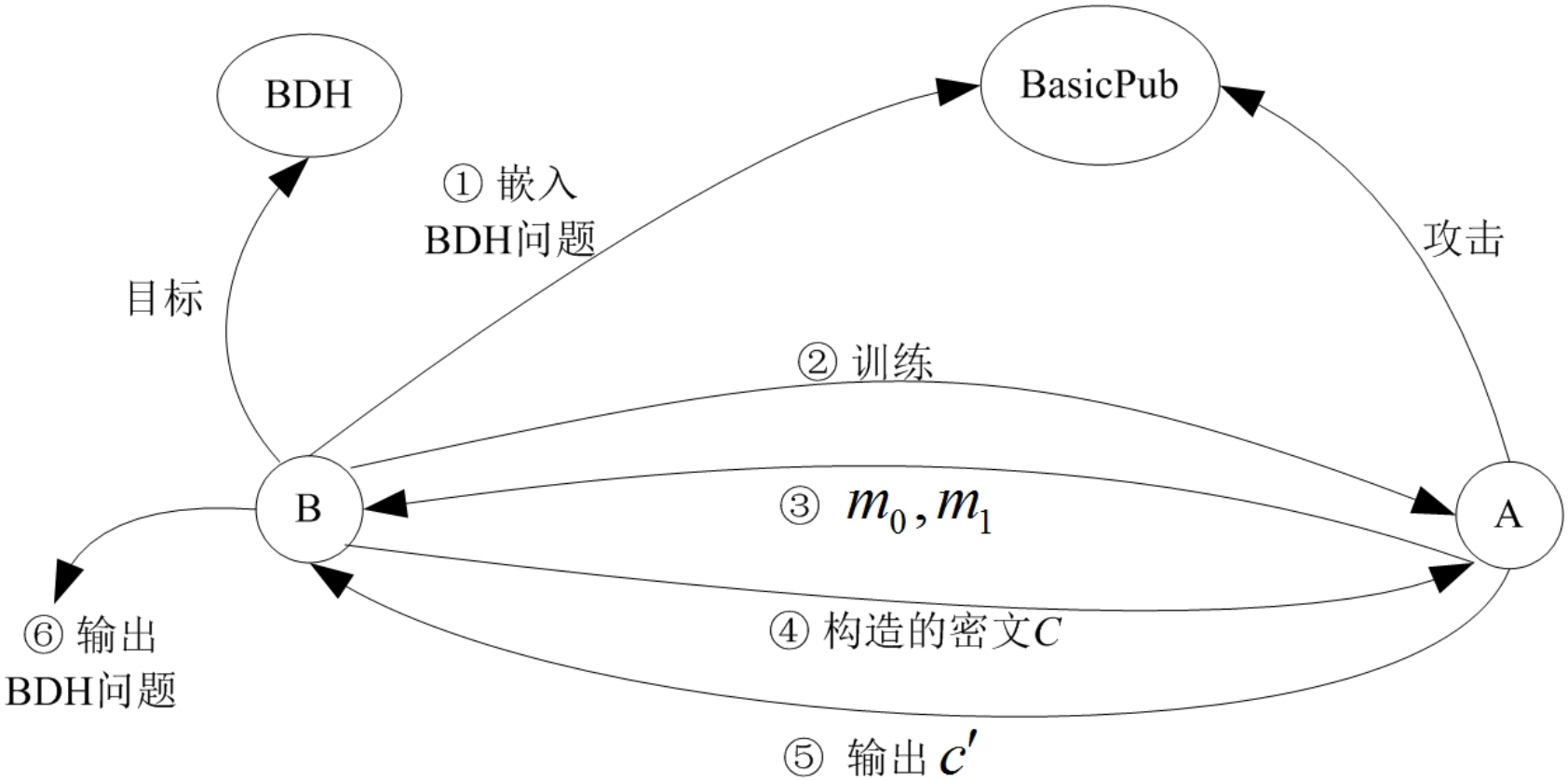
引理2-2

设H_2是从$\mathbb{G}_2$到$\{0,1\}^n$的随机预言机，A是以$\epsilon(k)$的优势攻击BasicPub的IND-CPA敌手, 且A最多向H_2询问$q_{H_2} > 0$次，那么存在一个算法$\mathcal{B}$能以至少$2\epsilon(k)/q_{H_2}$的优势和$O(time(A))$的运行时间解决$\mathcal{G}$上的BDH问题。

证明 为了证明BasicPub到BDH问题的规约，即B已知$< P, aP, bP, cP >=< P, P_1, P_2, P_3 >$，想通过A对BasicPub的攻击，求$D = \hat{e}(P,P)^{abc} \in \mathbb{G}_2$。B在以下思维实验中作为A的挑战者建立BasicPub方案，B设法要把BDH问题嵌入到BasicPub方案。

选择明文安全的IBE方案

图5: BasicPub到BDH问题的规约



选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

(1) B生成BasicPub的公钥

$$K_{pub} =< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, Q_{ID}, H_2 >$$

其中$P_{pub} = P_1$，$Q_{ID} = P_2$。由于$P_{pub} = sP = P_1 = aP$，所以$s = a, d_{ID} = sQ_{ID} = aQ_{ID} = abP$。

H_2的建立在第（2）步。

选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

(2) H_2询问：B建立一个H_2^{list} (初始为空)，元素类型为$< X_i, H_i >$，A在任何时候都能发出对H_2^{list} 的询问，B做如下应答：

- 如果X_i已经在H_2^{list}, 以$H_2(X_i) = H_i$应答;
- 否则随机选择$H_i \in \{0,1\}^n$,以$H_2(X_i) = H_i$应答并将$< X_i, H_i >$加入H_2^{list}.

选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

(3) 挑战：A输出两个要挑战的消息m_0 和m_1 ，B随机选择$R \in \{0,1\}^n$，定义$C =< P_3, R >$，C的解密应为$R \oplus H_2(\hat{e}(P_3, d_{ID})) = R \oplus H_2(D)$，即B已将BDH问题的解$D$埋入$H_2^{list}$。

(4) 猜测：算法A输出猜测$c' \in \{0,1\}$。同时，B从H_2^{list}中随机取$< X_j, H_j >$，把X_j作为BDH的解。

选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

下面证明B能以至少$2\epsilon(k)/q_{H_2}$ 的概率输出D 。

设$\mathcal{H}$ 表示事件：在模拟中A发出$H_2(D)$ 询问，即$H_2(D)$ 出现在H_2^{list} 中。由B建立的过程知，其中的值是B随机选取的。下面的证明显示，如果H_2^{list} 没有$H_2(D)$ ，即A得不到$H_2(D)$ ，A就不能以ϵ 的优势赢得上述第（4）步的猜测。

选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

断言2-2

在以上模拟过程中，若$\mathcal{H}$ 不发生，则B的模拟是完备的。

证明 在以上模拟中，若$\mathcal{H}$ 不发生，A的视图与其在真实攻击中的视图是同分布的。这是因为

1. A的q_{H_2} 次H_2 询问中的每一个都是用随机值来回答的，而在A对BasicPub的真实攻击中，A得到的是H_2 的函数值，由于假定H_2 是随机谕言机，所以A得到的H_2 的函数值是均匀的。
2. 若$\mathcal{H}$ 不发生，则$R \oplus H_2(D)$ 对A来说，为$H_2(D)$ 对R 做一次一密加密，A通过$R \oplus H_2(D)$ 得不到m_0 或m_1 的任何信息。所以两种视图不可区分。

选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

断言2-3

在以上模拟过程中$Pr[\mathcal{H}] \geq 2\epsilon$。

证明 由断言2-2，$Pr[c = c'|\neg\mathcal{H}] = \frac{1}{2}$。又由A在真实攻击中的定义知A的优势为$|Pr[c = c'] - \frac{1}{2}| \geq \epsilon$，得A在模拟攻击中的优势也为$|Pr[c = c'] - \frac{1}{2}| \geq \epsilon$。

$Pr[c = c'] = Pr[c = c'|\neg\mathcal{H}]Pr[\neg\mathcal{H}] + Pr[c = c'|\mathcal{H}]Pr[\mathcal{H}] \leq Pr[c = c'|\neg\mathcal{H}]Pr[\neg\mathcal{H}] + Pr[\mathcal{H}] = \frac{1}{2}Pr[\neg\mathcal{H}] + Pr[\mathcal{H}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Pr[\mathcal{H}]$,

$Pr[c = c'] \geq Pr[c = c'|\neg\mathcal{H}]Pr[\neg\mathcal{H}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Pr[\mathcal{H}]$

所以$\epsilon \leq |Pr[c = c'] - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}Pr[\mathcal{H}]$,

即模拟攻击中$Pr[\mathcal{H}] \geq 2\epsilon$。（断言2-3证毕）

选择明文安全的IBE方案

引理2-2之证明

由断言2-3知在模拟结束后, D以至少2ϵ的概率出现在H_2^{list}. 又由引理2-2的假定, A对H_2的询问至少有$q_{H_2} > 0$次，B建立的H_2^{list} 至少有q_{H_2} 项，所以B在H_2^{list} 随机选取一项作为D，概率至少为$2\epsilon(k)/q_{H_2}$。

（引理2-2证毕）

选择明文安全的IBE方案

定理2-1的证明：设存在一个IND-ID-CPA敌手A以$\epsilon(k)$ 的优势攻破BasicIdent方案，A最多进行了q_{H_1} 次H_1 询问，对随机谕言机H_2 至多$q_{H_2} > 0$ 次询问。

由引理2-1，存在IND-CPA敌手B以最少$\epsilon_1 = \frac{\epsilon(k)}{eq_{H_1}}$ 的概率成功攻击BasicPub。由引理2-2，存在另一B能以至少

$$2\epsilon_1 / q_{H_2} = \frac{2\epsilon(k)}{eq_{H_1} q_{H_2}}$$

的优势解决$\mathcal{G}$ 生成的群中的BDH问题。

（定理2-1证毕）

选择密文安全的IBE方案

定理2-1已证明BasicIdent是IND-ID-CPA安全的，然而BasicIdent不是IND-ID-CCA安全的。敌手已知密文$C =< C_1, C_2 >$，构造$C' =< C_1, C_2 \oplus m' >$，给解密谕言机，收到解密结果为$m'' = m \oplus m'$，再由$m'' \oplus m'$即获得$C$对应的明文。

选择密文安全的IBE方案

在IBE体制中需加强标准CCA安全的概念，因为在IBE体制中，敌手攻击公钥ID（即获取与之相应的秘密钥）时，他可能已有所选用户$ID_1, ...ID_n$的秘密钥，因此选择密文安全应允许敌手获取与其所选身份（除ID外）相应的秘密钥，我们把这一要求看作是对密钥产生算法的询问。

选择密文安全的IBE方案

一个IBE加密方案在适应性选择密文攻击下具有不可区分性，如果不存在多项式时间的敌手，它在下面的攻击过程中有不可忽略的优势。

- 初始化：挑战者输入安全参数k，产生公开的系统参数$params$和保密的主密钥。

选择密文安全的IBE方案

- 阶段1(训练)：敌手执行$q_1, \ldots, q_m$，这里q_i是下面询问之一：
  - ▷ 对$< ID_i >$的秘密钥产生询问。挑战者运行秘密钥产生算法，产生与公钥ID_i对应的秘密钥d_i，并把它发送给敌手。
  - ▷ 对$< ID_i, C_i >$的解密询问。挑战者运行秘密钥产生算法，产生与ID_i对应的秘密钥d_i，再运行解密算法，用d_i解密C_i，并将所得明文发送给敌手。

选择密文安全的IBE方案

上面的询问可以自适应地进行，是指执行每个q_i 时可以依赖于执行$q_1, \ldots, q_{i-1}$ 时得到的询问结果。

- 挑战：敌手输出两个长度相等的明文m_0, m_1和一个意欲挑战的公开钥ID。唯一的限制是ID 不在阶段1中的任何秘密钥询问中出现。挑战者随机选取一个比特值$b \in \{0,1\}$，计算$C = Encrypt(params, ID, m_b)$，并将$C$发送给敌手。

选择密文安全的IBE方案

- 阶段2(训练)：敌手产生更多询问$q_{m+1}, \ldots, q_n$，q_i是下面询问之一：

  ▷ 对$< ID_i >$的秘密钥产生询问（$ID_i \neq ID$）。挑战者以阶段1中的方式进行回应。

  ▷ 对$< ID_i, C_i >$的解密询问（$< ID_i, C_i > \neq < ID, C >$）。挑战者以阶段1中的方式进行回应。

- 猜测：最后，敌手输出对b的猜测$b' \in \{0, 1\}$，如果$b' = b$, 则成功。

选择密文安全的IBE方案

敌手的优势定义为安全参数k 的函数：

$$Adv_{\varepsilon,A}^{ID-CCA}(k) = |Pr[b = b'] - \frac{1}{2}|$$

Definition 2-2

如果对任何多项式时间的敌手，存在一个可忽略的函数$negl(k)$，使得$Adv_{\varepsilon,A}^{ID-CCA}(k) \leq negl(k)$，那么就称这个加密算法$\varepsilon$ 在选择密文攻击下具有不可区分性，或者称为IND-ID-CCA安全。

选择密文安全的IBE方案

为使上述方案成为IND-ID-CCA安全的，还需对其加以修改。以$\mathcal{E}_{pk}(m,r)$ 表示用随机数r 在公钥pk下加密m的公钥加密算法，Fujisaki-Okamoto指出，如果$\mathcal{E}_{pk}$是单向加密的，则$\mathcal{E}^{hy}_{pk} =< \mathcal{E}_{pk}(\sigma, H_3(\sigma,m)), H_4(\sigma) \oplus m >$ 在随机谕言模型下是IND-CCA安全的，其中σ 是随机产生的比特串，H_3, H_4 是杂凑函数。

$\mathcal{E}_{pk}$取为BasicIdent。

选择密文安全的IBE方案

修改后的加密方案（称为FullIdent方案）如下：

（1）初始化

和BasicIdent相同，此外还需选取两个杂凑函数$H_3 : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \mathbb{Z}_q^*$和$H_4 : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$，其中$n$是待加密消息的长度。

（2）加密

用公钥ID 加密$m \in \{0,1\}^n$：

- 计算$Q_{ID} = H_1(ID) \in \mathbb{G}_1^*$;
- 选一个随机串$\sigma \in \{0,1\}^n$;
- 计算$r = H_3(\sigma, m)$;
- 确定密文$C =< rP, \sigma \oplus H_2(g_{ID}^r), H_4(\sigma) \oplus m >$,

  这里$g_{ID} = \hat{e}(Q_{ID}, P_{pub}) \in \mathbb{G}_2^*$.

选择密文安全的IBE方案

（3）密钥产生和BasicIdent相同。

（4）解密

令$C =< U, V, W >$是用ID加密所得的密文。如果$U \notin \mathbb{G}_1^*$，拒绝这个密文。否则，用秘密钥$d_{ID} \in \mathbb{G}_1^*$对$C$如下解密：

- 计算$V \oplus H_2(\hat{e}(d_{ID}, U)) = \sigma$;
- 计算$W \oplus H_4(\sigma) = m$;
- 确定$r = H_3(\sigma, m)$. 检验$U = rP$是否成立，如果不成立，则拒绝;
- 把m作为C的明文。

选择密文安全的IBE方案

定理2-2

设Hash函数H_1, H_2, H_3, H_4是随机谕言机，如果BDH问题在$\mathcal{G}$生成的群上是困难的，那么FullIdent是IND-ID-CCA安全的。

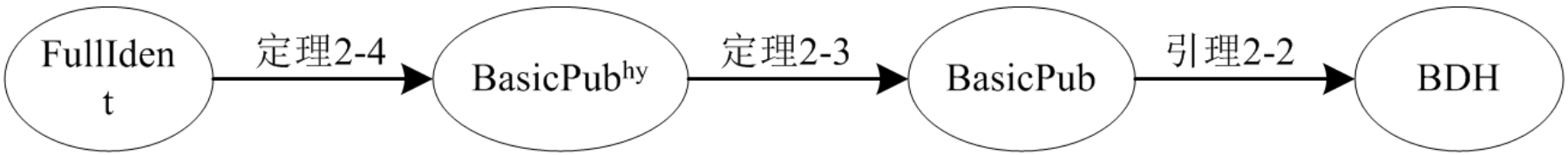
具体来说，假设存在一个IND-ID-CCA敌手A以$\epsilon(k)$的优势攻击FullIdent方案，A 分别对随机谕言机H_1, H_2, H_3, H_4至多$q_{H_1}, q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4}$次询问, 并且假定A的运行时间至多为$t(k)$. 那么存在另一个敌手B至少以$Adv_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(k)$的优势和$t_1(k)$的时间解决$\mathcal{G}$生成的群中的BDH问题. 其中

$$Adv_{\mathcal{G},B}(k) \geq 2FO_{adv}(\frac{\epsilon(k)}{eq_{H_1}}, q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4}), t_1(k) \leq FO_{time}(t(k), q_{H_3}, q_{H_4})$$

选择密文安全的IBE方案

设将$\mathcal{E}^{hy}$作用于BasicPub，得到的方案为BasicPub^{hy}。为了证明FullIdent方案到BDH问题的规约，根据规约的传递性，首先将FullIdent方案规约到BasicPub^{hy}，再将BasicPub^{hy}规约到BasicPub，最后将BasicPub规约到BDH问题，如图6所示。其中BasicPub到BDH问题的规约已由引理2-2证明，BasicPub^{hy}到BasicPub的规约由下面定理2-3给出。FullIdent方案到BasicPub^{hy}的规约由下面定理2-4给出。

图6: FullIdent方案到BDH问题的规约



选择密文安全的IBE方案

定理2-3(Fujisaki-Okamoto): BasicPub^{hy}到BasicPub的规约

假设存在一个IND-CCA敌手A以$\epsilon(k)$的优势攻击BasicPub^{hy}，A分别对随机谕言机H_2, H_3, H_4 至多$q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4}$次询问, 并且假定A的运行时间至多为$t(k)$. 那么存在一个IND-CPA敌手B至少以$\epsilon_1(k)$的优势和$t_1(k)$的时间攻击BasicPub. 其中

$$\epsilon_1(k) \geq FO_{adv}(\epsilon(k), q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4}) = \frac{1}{2(q_{H_3}+q_{H_4})}[(\epsilon(k)+1)(1-2/q)^{q_{H_2}} - 1]$$

$$t_1(k) \leq FO_{time}(t(k), q_{H_3}, q_{H_4}) = t(k) + O((q_{H_3} + q_{H_4}) \cdot n)$$

其中q是群的阶，n是消息长度。

选择密文安全的IBE方案

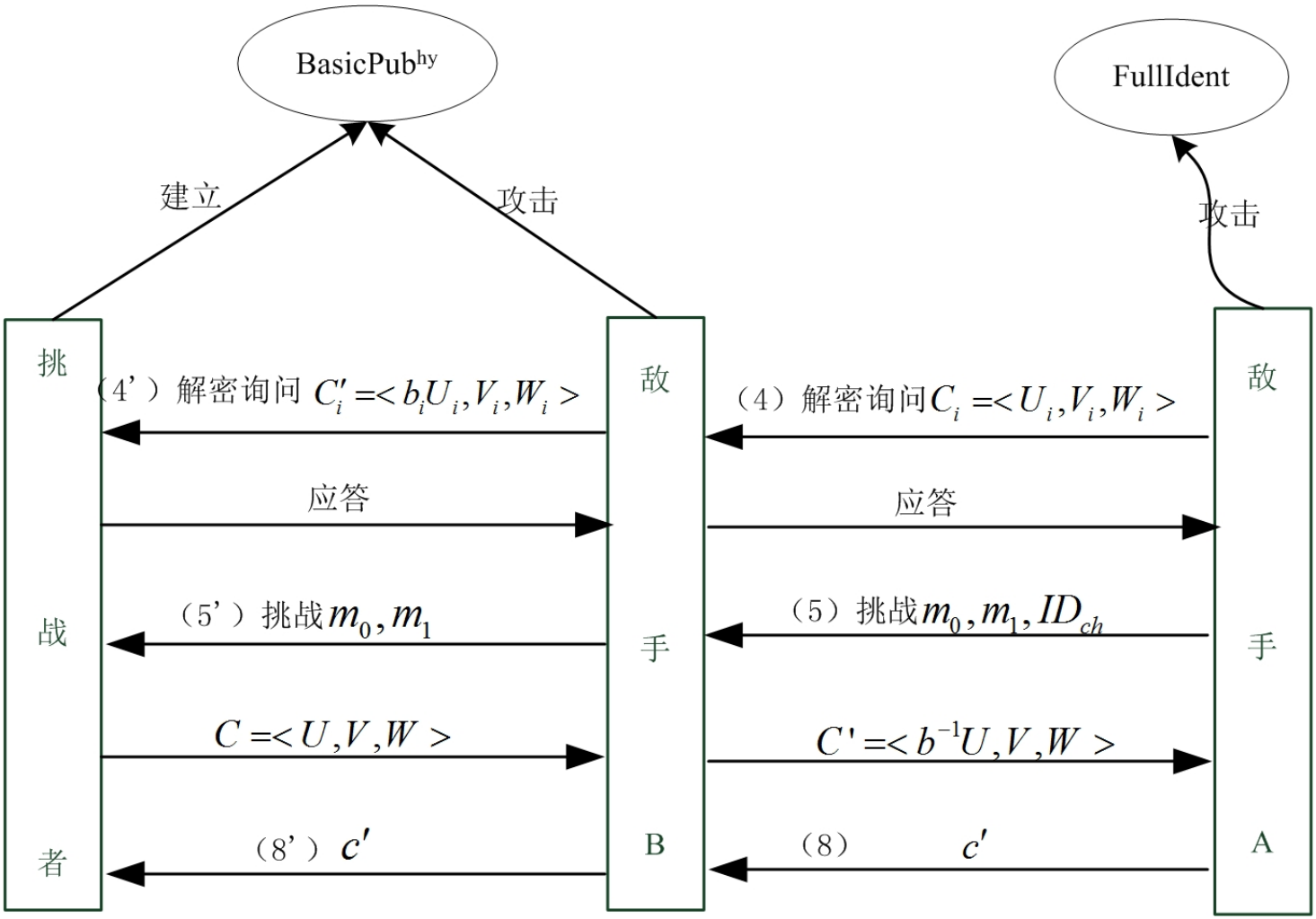
定理2-4: FullIdent方案到BasicPub^{hy}的规约

假设存在一个IND-ID-CCA敌手A以$\epsilon(k)$的优势攻击FullIdent方案，A对随机谕言机H_1 至多做q_{H_1} 次询问。那么存在一个IND-CCA敌手B至少以$\frac{\epsilon(k)}{eq_{H_1}}$ 的优势和$O(time(A))$ 的时间攻击BasicPub^{hy}。

证明：B利用攻击FullIdent的敌手A，如图7所示。为了简化，不失一般性，我们假设：（1）A不会对$H_1(\cdot)$ 发起两次相同的询问；（2）如果A发出解密询问$< ID_i, C_i >$，则它之前已经询问过$H_1(ID_i)$。

选择密文安全的IBE方案

图7: FullIdent方案到BasicPub^{hy}的规约



选择密文安全的IBE方案

(1)初始化：挑战者运行BasicPub^{hy}的密钥产生算法生成公钥$K_{pub} =< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, Q_{ID}, H_2, H_3, H_4 >$给IND-CCA敌手B，并保留秘密钥$d_{ID} = sQ_{ID}$。

下面（2）∽（8）步，B模拟A的挑战者和A进行IND游戏。

(2) B的初始化：

B发送公开钥$K_{pub} =< q, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \hat{e}, n, P, P_{pub}, H_1, H_2, H_3, H_4 >$给A，且随机选择$j \in \{1, \ldots, q_{H_1}\}$，这里$j$ 是B的一个猜测值：A的这次H_1询问对应着A最终的攻击结果。

B为了承担A的挑战者，需要构造一个H_1 列表H_1^{list} ，它的元素类型是3元组$< ID_i, Q_i, b_i >$ 。

选择密文安全的IBE方案

（3）H_1询问：与引理2-1相同。

（4）密钥提取询问-阶段1：与引理2-1相同。

（5）解密询问-阶段1：设A询问$< ID_i, C_i >$(注意：FullIdent密文)，其中$C_i =< U_i, V_i, W_i >$。B如下应答：

如果$i \neq j$，运行密钥提取询问，获得密钥后做解密询问应答；

如果$i = j$，则$Q_i = b_i Q_{ID}$；

- 求$C_i' =< b_i U_i, V_i, W_i >$(注意：BasicPub^{hy}密文)；
- 向挑战者做$< C_i' >$的解密询问，将挑战者的应答转发给A

选择密文安全的IBE方案

（6）A发出挑战：设A的挑战是ID_{ch}, m_0, m_1。设i 满足$ID_{ch} = ID_i$，表示第i 次H_1 询问的询问值。B做以下应答：

- 如果$i \neq j$，B报错并退出(B对BasicPubhy的攻击失败)；
- 如果$i = j$，将m_0, m_1 给自己的挑战者，挑战者随机选$c \in \{0, 1\}$，以BasicPub^{hy}加密m_c 得$C =< U, V, W >$ 作为对B的应答；B则以$C' =< b_i^{-1}U, V, W >$作为对A的应答。

证明与引理2-1相同。

（7）密钥提取询问-阶段2：与密钥提取询问-阶段1相同。

选择密文安全的IBE方案

（8）解密询问-阶段2：与解密询问-阶段1相同。然而，如果B得到的密文与挑战密文$C_i =< U_i, V_i, W_i >$相同，B报错并退出(B对BasicPub^{hy}的攻击失败)。

（9）猜测：A输出猜测c'，B也以c'作为自己的猜测。

断言2-4

在以上过程中，如果B不中断，则B的模拟是完备的。

证明：在以上模拟中，当B猜测正确时，A的视图与其在真实攻击中的视图是同分布的。这是因为

选择密文安全的IBE方案

1. A的q_{H_1}次H_1询问中的每一个都是用随机值来回答的（同断言2-1）；
2. B对A的密钥提取询问的应答是有效的（同断言2-1）；
3. B对A的解密询问的应答是有效的：
   - 如果$i \neq j$，因为密钥提取询问是有效的，B所做的解密是有效的。
   - 如果$i = j$，设$d_i = sQ_i$是FullIdent与ID_i相对应的秘密钥，则在FullIdent中使用d_i对$C_i =< U_i, V_i, W_i >$的解密与在BasicPub^{hy}中使用d_{ID}对$C'_i =< b_i U_i, V_i, W_i >$的解密相同，这是因为$\hat{e}(d_{ID}, b_i U_i) = \hat{e}(sQ_{ID}, b_i U_i) = \hat{e}(sb_i Q_{ID}, U_i) = \hat{e}(sQ_i, U_i) = \hat{e}(d_i, U_i)$

所以B所转发的挑战者的解密是有效的。（断言2-4证毕）

选择密文安全的IBE方案

下面考虑在以上过程中B不中断的概率。

引起B中断有3种可能：

(1) 阶段1、2中的密钥提取询问(当$i = j$)；

(2) 挑战时A发出的身份ID_{ch}对应的ID_i，使得$i \neq j$；

(3) 阶段2的解密询问时，A发出的密文与以前的挑战密文相同。

在第（3）种情况中，设A发出的密文$C_i =< U_i, V_i, W_i >$与它的挑战密文$C' =< b_i^{-1}U, V, W >$相同，则$U = b_i U_i, V = V_i, W = W_i$。B将$C_i$转发给挑战者前做变换得$C_i' =< b_i U_i, V_i, W_i >$，得到的结果与B的挑战密文$C =< U, V, W >$相同。这种情况发生当且仅当$i = j$。

选择密文安全的IBE方案

所以整个实验中B不中断的概率为

$$[1-\frac{1}{q_{H_1}}]^{q_{H_1}}\frac{1}{q_{H_1}}[1-\frac{1}{q_{H_1}}]\approx\frac{1}{eq_{H_1}}$$

由断言2-4知，A在模拟攻击中的优势

$$Adv_{Sim,A}^{ID-CCA}(k)=|Pr[c=c']-\frac{1}{2}|$$

与真实攻击中的优势$Adv_{\varepsilon,A}^{ID-CCA}(k)$相等，至少为$\epsilon(k)$。B的优势为

$$\frac{1}{eq_{H_1}}Adv_{Sim,A}^{ID-CCA}(k)\approx\frac{\epsilon(k)}{eq_{H_1}}.$$

运行时间显然。（定理2-4证毕）

选择密文安全的IBE方案

定理2-2的证明：

参见图6。假定敌手攻击FullIdent的优势为ϵ，则由定理2-4，存在另一攻击BasicPub^{hy} 的敌手，其优势为$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{eq_{H_1}}$
由定理2-3，存在另一攻击BasicPub的敌手，其优势为

$$\epsilon_2 \geq FO_{adv}(\epsilon_1, q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4}) = FO_{adv}(\frac{\epsilon}{eq_{H_1}}, q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4})$$

由引理2-2，存在另一攻击BDH的敌手，其优势为

$$\epsilon_3 \geq \frac{2\epsilon_2}{q_{H_2}} = 2FO_{adv}(\frac{\epsilon}{eq_{H_1}}, q_{H_2}, q_{H_3}, q_{H_4})/q_{H_2}$$

（定理2-2证毕）

以上介绍的CCA和IBE是基于随机谕言机模型的，虽然很有意义和价值，但在这种模型下，不能排除以下可能：攻击者可能不通过攻击它所基于的困难性假定，或者不通过找出hash函数的缺陷而攻击系统。没有随机谕言机的模型称作标准模型。

Thank you!