Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

1. i) $1 \in A$ Verdadero.
   ii) $\{1\} \subseteq A$ Verdadero.
   iii) $\{2,1\} \subseteq A$ Verdadero.
   iv) $\{1,3\} \in A$ Falso.
   v) $\{2\} \in A$ Falso.

2. i) $3 \in A$ Falso.
   ii) $\{3\} \subseteq A$ Falso.
   iii) $\{3\} \in A$ Verdadero.
   iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$ Verdadero.
   v) $\{1,2\} \in A$ Verdadero.
   vi) $\{1,2\} \subseteq A$ Falso.
   vii) $\{\{1,2\}\} \subseteq A$ Verdadero.
   viii) $\{\{1,2\},3\} \subseteq A$ Falso.
   ix) $\emptyset \in A$ Falso.
   x) $\emptyset \subseteq A$ Verdadero.
   xi) $A \in A$ Falso.
   xii) $A \subseteq A$ Verdadero.

3. i) $A \subseteq B$ pues $1 \in B$, $2 \in B$ y $3 \in B$.
   ii) $A \not\subseteq B$ pues $3 \in A$ pero $3 \notin B$.
   iii) $A \not\subseteq B$ pues $\frac{5}{2} \in A$ pero $\frac{5}{2} \notin B$.
   iv) $A \not\subseteq B$ pues $\emptyset \in A$ pero $\emptyset \notin B$.

4.
   - $A \cap B = \{3,7,11\}$
   - $A \cup B = \{-1,1,3,-5,5,7,-8,8,11\}$
   - $B - A = \{-1,-5,-8\}$
   - $A \triangle B = \{-1,1,-5,5,-8,8\}$

5. i) $B \cap C = \emptyset$
   Por lo tanto, $B \triangle C = B \cup C = \{1,\{3\},10,-2,\{1,2,3\},3\}$
   Luego, $A \cap (B \triangle C)$ es igual a
   $\{1,-2,7,3\} \cap \{1,\{3\},10,-2,\{1,2,3\},3\} = \{1,-2,3\}$
   ii) $A \cap B = \{1\}$
   $A \cap C = \{-2,3\}$
   $\therefore (A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1\} \triangle \{-2,3\} = \{1,-2,3\}$
   iii) $A^c = V - A = \{\{3\},10,\{1,2,3\}\}$
   $B^c = \{-2,7,\{1,2,3\},3\}$
   $C^c = \{1,\{3\},7,10\}$
   $\therefore A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$

6. Por la Ley de De Morgan:
   - $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$
   - $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

7. Acá debería mostrar diagramas de Venn. Cuando tenga tiempo voy a buscar algún paquete de LaTeX para hacerlos.

8. La idea de este ejercicio es buscar formas de expresar la resta de conjuntos y la diferencia simétrica utilizando uniones, intersecciones y complementos.

i) $(A \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$

ii) $(A \cup C) \cap (A \cap C)^c \cap B^c$

iii) $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \cap (A \cap B \cap C)^c$

9. i) $\{\emptyset, \{1\}\}$

   ii) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

   iii) $\{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}\}$

   iv) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

   v) $\{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{\{-1\}\}, \{1, a\}, \{1, \{-1\}\}, \{a, \{-1\}\}, \{1, a, \{-1\}\}\}$

   vi) $\{\emptyset\}$

10. Para probar que $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ hay que probar que $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$ y que $P(A) \subseteq P(B) \Leftarrow A \subseteq B$. Es decir, hay que probar la implicación para los dos lados.

    - $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$:
      Demostración por el absurdo. Supongamos que $A \not\subseteq B$. Entonces existe $a \in A$ que no pertenece a B. Esto es equivalente a decir que $\{a\} \subseteq A$ pero $\{a\} \not\subseteq B$ (por definición de conjunto de partes). ¡Absurdo! Pues esta afirmación contradice a $P(A) \subseteq P(B)$. Luego, $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
    - $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$:
      Demostración por el absurdo. Supongamos que $P(A) \not\subseteq P(B)$. Entonces existe $a \in P(A)$ que no pertenece a $P(B)$. Esto es equivalente a decir que $a \subseteq A$ pero $a \not\subseteq B$ (por definición de conjunto de partes). ¡Absurdo! Pues esta afirmación contradice a $P(A) \not\subseteq P(B)$.

    Acabamos de probar que $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

11. Pendiente de completar.

12. Sean los conjuntos
    $A = \{$"Argentinos"$\}$
    $E = \{$"Estudiantes de matemática de la facultad"$\}$
    $M = \{$"Materos, personas que toman mate"$\}$
    Sabemos que

    - $E \not\subseteq A$ (hay estudiantes extranjeros).
    - $(M - A) \cap E = \emptyset$ (no hay materos extranjeros en la facultad).

    ¿Estas premisas implican que $E \not\subseteq M$ (hay estudiantes que no toman mate)?
    Sí, los estudiantes extranjeros no toman mate.
    $E \not\subseteq A$ implica que existe una persona p tal que $p \in E$ y $p \notin A$. Luego, $p \notin (M - A)$ pues $(M - A) \cap E = \emptyset$. Sabemos que $p \notin (M - A)$ y $p \notin A$. Entonces, $p \notin M$. Es decir, $p \in E$ pero $p \notin M$. Esto dice que $E \not\subseteq M$.

Relaciones

18. Dados dos conjuntos A y B, un conjunto R es una relación de A en B sii $R \in P(A \times B)$ o, equivalentemente, $R \subseteq A \times B$.

    i) Sí.
    ii) No, pues $(3,2) \notin A \times B$.
    iii) Sí.
    iv) Sí.
    v) Sí.
    vi) Sí.
    vii) Sí.
    viii) Sí.

19. Pendiente de completar.

20. Dado un conjunto A, una relación R de A en A (una relación en A) es

    - Reflexiva sii $(\forall a \in A) aRa$.
    - Simétrica sii $(\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.
    - Transitiva sii $(\forall a, b, c \in A)((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
    - Antisimétrica sii $(\forall a, b \in A)((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$ o, equivalentemente, $(\forall a, b \in A, a \neq b)((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R)$.

    i)
    - No reflexiva pues $(a,a) \notin R$.
    - No simétrica pues $(h,g) \in R$ pero $(g,h) \notin R$.
    - No transitiva pues eRc y cRh pero $(e,h) \notin R$.
    - No antisimétrica pues aRb y bRa.

    ii)
    - Reflexiva.
    - No simétrica pues $(h,g) \in R$ pero $(g,h) \notin R$.
    - No transitiva pues cRh y hRg pero $(c,g) \notin R$.
    - No antisimétrica pues aRb y bRa.

    iii)
    - No reflexiva pues $(d,d) \notin R$.
    - No simétrica pues $(h,g) \in R$ pero $(g,h) \notin R$.
    - Transitiva.
    - No antisimétrica pues aRb y bRa.

    iv)
    - Reflexiva.
    - Simétrica.
    - Transitiva.
    - No antisimétrica pues aRb y bRa.

21. Pendiente de completar.

22. Pendiente de completar.

23. Decimos que una relación es

    - una relación de equivalencia sii es reflexiva, simétrica y transitiva.

- una relación de orden sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

i) Reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica. Relación de orden y de equivalencia.

ii) No reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica.

iii) Reflexiva, no simétrica, transitiva, antisimétrica. Relación de orden.

iv) Reflexiva, simétrica, transitiva, no antisimétrica. Relación de equivalencia.

v) Reflexiva, no simétrica, transitiva, antisimétrica. Relación de orden.

vi) Reflexiva, no simétrica, transitiva, antisimétrica. Relación de orden.

vii) Reflexiva, no simétrica, transitiva y antisimétrica porque está definida con el operador $\subseteq$. Relación de orden.

24. i) Dado un conjunto A y una relación R en A
    - Si $R = \emptyset$ entonces es simétrica y antisimétrica.
    - Si R es la relación de igualdad (o sea, la relación en A solo reflexiva), también es simétrica y antisimétrica.
    - Si a la relación de igualdad le quitamos algunos elementos, sigue siendo simétrica y antisimétrica.

    Entonces, una relación R en A es simétrica y antisimétrica sii $R \subseteq \{(a, a) : a \in A\}$.

    ii) Para ser una relación de equivalencia y de orden, además de ser simétrica y antisimétrica debe ser reflexiva y transitiva. La relación de igualdad es la única que es simétrica, antisimétrica y reflexiva. Además, también es transitiva. Luego, la única relación de equivalencia y de orden es la relación de igualdad.

    Una relación puede no ser simétrica ni antisimétrica. Por ejemplo, la relación del ejercicio 20. i).

25. Sea R una relación de equivalencia en el conjunto A y sea $a \in A$. La clase de equivalencia de a es el conjunto de elementos de A que se relacionan con él y la notamos $\overline{a}$. Es decir, $\overline{a} = \{b : b \in A, bRa\}$
    La partición asociada a R es el conjunto de clases de equivalencia. Notar que dos elementos $x, y \in A$ pueden tener la misma clase de equivalencia, o sea $\overline{x} = \overline{y}$. En ese caso solo escribimos uno de los dos al describir la partición por extensión para que sea lo más corta posible.
    No voy a escribir las clases de equivalencia y la partición de este ejercicio porque es muy tedioso.

26. El primer ítem nos dice que podemos separar los números naturales según su último dígito. Es decir, la partición de R es $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \ldots\ \overline{9}\}$.
    Pero como $(1, 2) \in R$ y es una relación de equivalencia, entonces $\overline{1} = \overline{2}$. Siguiendo el mismo razonamiento, $\overline{1} = \overline{2} = \overline{5} = \overline{7}$, $\overline{4} = \overline{6}$, $\overline{3} = \overline{8} = \overline{0}$. La

partición de R queda igual a $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{9}\}$.
Por otro lado, el hecho de que $(1,4) \notin R$ nos dice que $\overline{1} \neq \overline{4}$. Siguiendo el mismo razonamiento, obtenemos que $\overline{1} \neq \overline{0}$, $\overline{9} \neq \overline{0}$, $\overline{9} \neq \overline{4}$.
Con estas restricciones, lo único que no está determinado es si $\overline{0} = \overline{4}$ y si $\overline{1} = \overline{9}$. Es decir, las posibles particiones de R son:

- $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{9}\}$
- $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{9}\}$ con $\overline{0} = \overline{4}$
- $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}\}$ con $\overline{1} = \overline{9}$
- $\{\overline{0}, \overline{1}\}$ con $\overline{0} = \overline{4}$ y $\overline{1} = \overline{9}$

Dar la partición de una relación es equivalente a definir la relación. Por lo tanto, estas particiones nos dicen que hay 4 relaciones de equivalencia distintas que verifican simultáneamente las propiedades del enunciado.

27. La relación tiene dos clases de equivalencia, a saber: la clase de equivalencia de los números pares y la de los impares. Vamos a llamar $\overline{0}$ a la clase de equivalencia de los números pares y $\overline{1}$ a la de los impares. Algunos representantes:

    - $0, 2, -2, 4, -4 \in \overline{0}$
    - $1, 3, -3, 5, -5 \in \overline{1}$

28. Sea $\overline{1}$ la clase de equivalencia de los subconjuntos de un elemento, $\overline{2}$ la clase de equivalencia de los subconjuntos de dos elementos y así siguiendo. Hay una clase de equivalencia para cada número natural. Es decir hay cardinal de $\mathbb{N}$ clases de equivalencia. Los representantes más simples son

    - $\{1\} \in \overline{1}$
    - $\{1, 2\} \in \overline{2}$
    - $\{1, 2, 3\} \in \overline{3}$
    - $\{1, 2, 3, 4\} \in \overline{4}$
    - $\{1, 2 \ldots\ n\} \in \overline{n}$