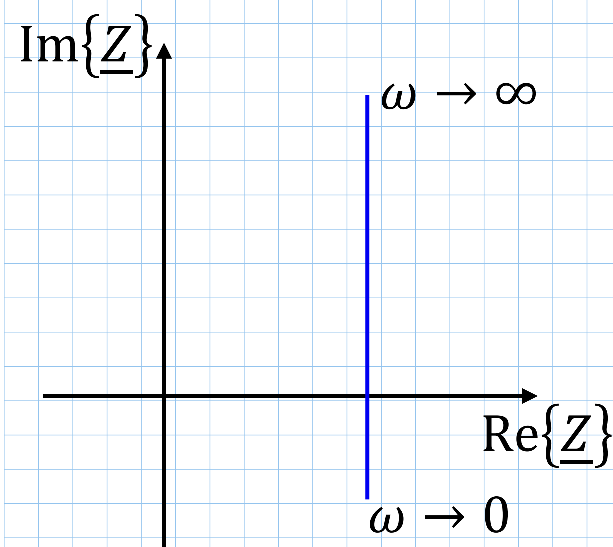
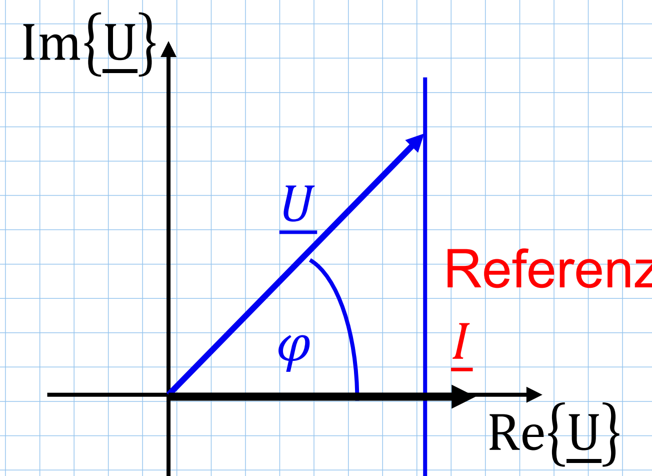
12. Ortskurven von $\underline{U}_2/\underline{U}_1$

Ansatz:

Ortskurve für Impedanzen → Ortskurven für $\underline{U}_2/\underline{U}_1$:



In gleicherweise für U möglich!



φ: Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}$ und $\underline{I}$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Allgemein gilt:

- Als **Filter** bezeichnen wir Schaltungen mit vorgegebenem frequenzabhängigen Übertragungsverhalten, die bestimmte Frequenzbereiche unterdrücken (Sperrbereich) und/oder andere Bereiche bevorzugt übertragen (Durchlassbereich)

- Die **Ordnung** eines Filters beschreibt die Flankensteilheit, d.h. die Zunahme bzw. Abnahme der Dämpfung über der Frequenz, oberhalb bzw. unterhalb dessen Grenzfrequenz

- Die Ordnung von passiven Filtern ist typischerweise durch die Anzahl der reaktiven (Speicher-) Elemente L, C bestimmt.

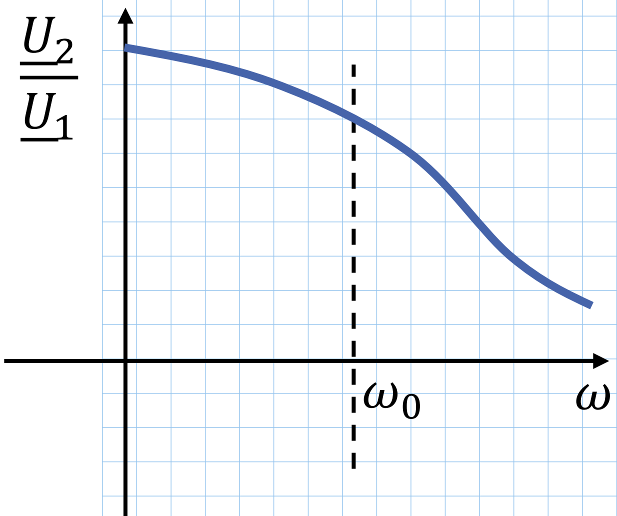
Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

12.1 Filter 1.Ordnung

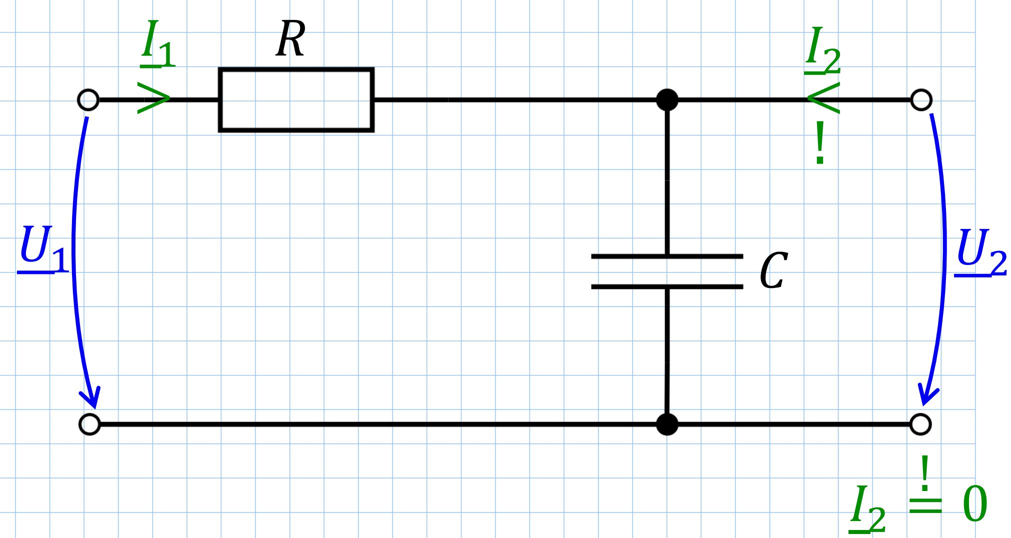
1. Beispiel: Tiefpass 1.Ordnung

Wir wollen folgenden Verlauf:

Ausgangswiderstand hochohmig abgegriffen $\underline{I}_2 = \mathbf{0}$



Mögliche Schaltung:



Berechnung der Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$:

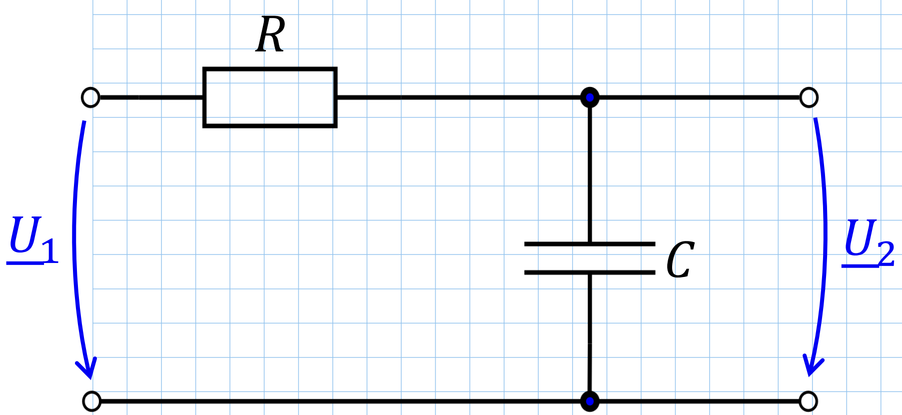
$$\curvearrowright \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot \cancel{\underline{I}_1}}{\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\cdot \cancel{\underline{I}_1}} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\omega\tau} \qquad \text{mit} \qquad \tau = RC$$

Im Zeitbereich wäre $\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{RC}$, die Zeit, bis zu der sich der Ausgangswert des Filters auf $\mathbf{63{,}3}$ % seines neuen Werts angenähert hat

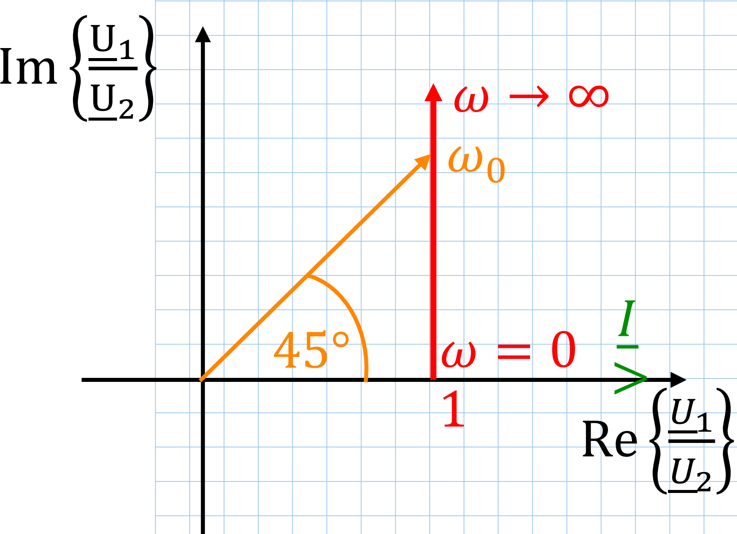
Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Darstellung der Übertragungsfunktion $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ als Ortskurve:

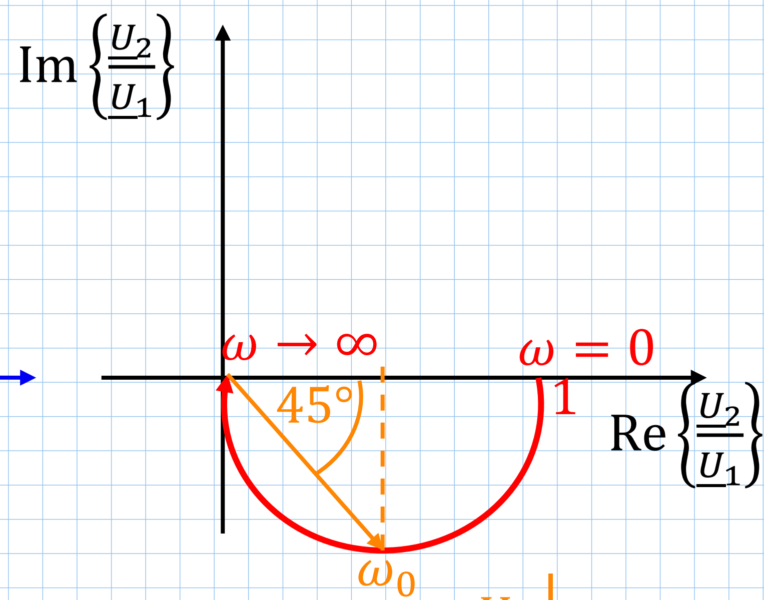
Dazu schauen wir uns zunächst den Kehrwert $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$ an:



$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 1 + j\omega RC \xrightarrow{\left(\underline{U}_1/\underline{U}_2\right)^{-1}} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Spiegelung am Einheitskreis



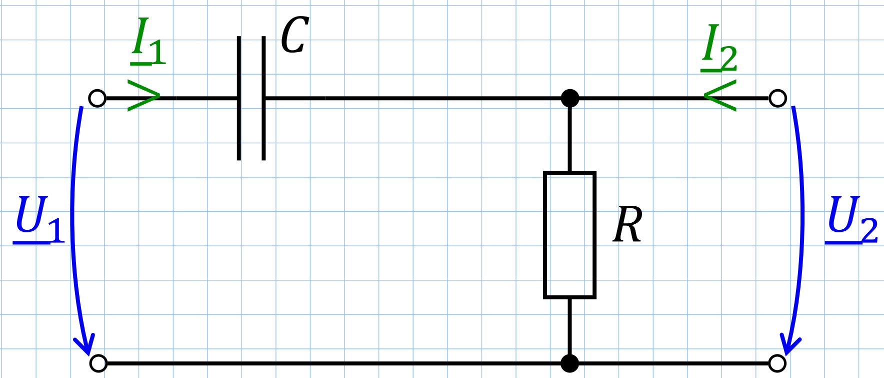
Charakteristische Frequenz: $\omega_0 RC \overset{!}{=} 1$

$$\underline{U}_2\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}_1$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

2.Beispiel: Hochpass 1.Ordnung

analog zum Tiefpass:



Ausgangswiderstand hochohmig abgegriffen $\underline{I}_2 \overset{!}{=} 0$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \; ; \quad \tau = RC$$

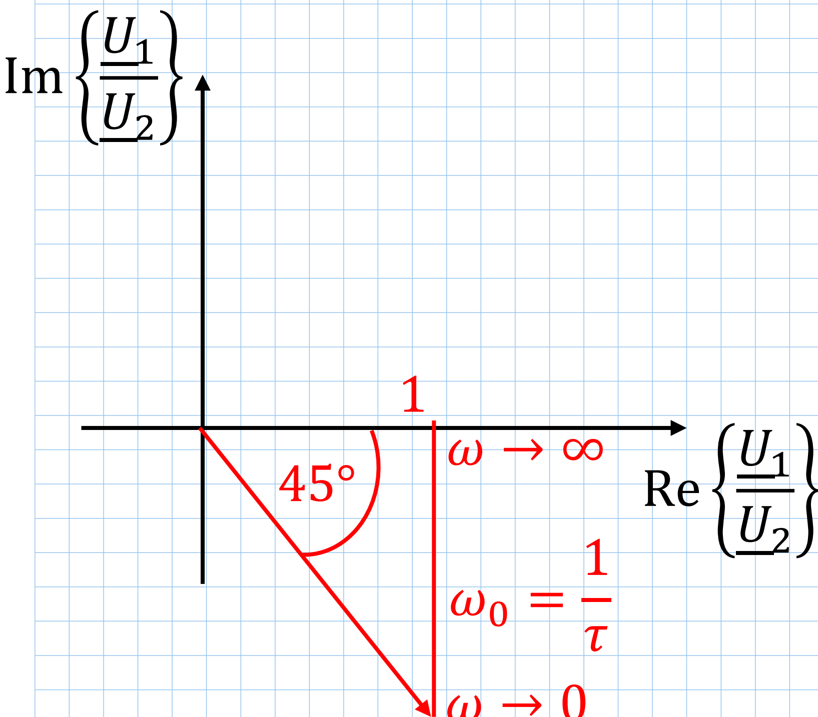
zugleich gilt:

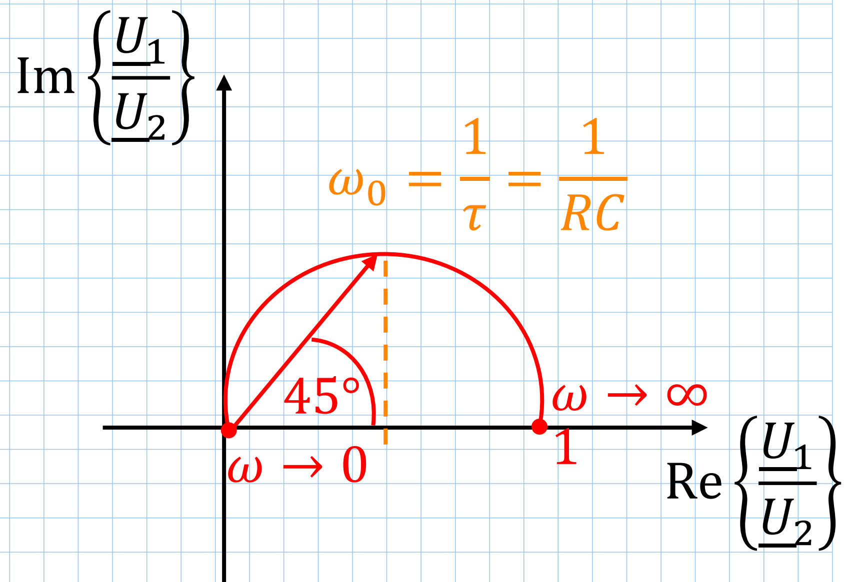
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau} = 1 + \frac{1}{j\omega\tau} = 1 - j\,\frac{1}{\omega\tau}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 1 - \frac{1}{j\omega RC}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{j\omega RC}}$$

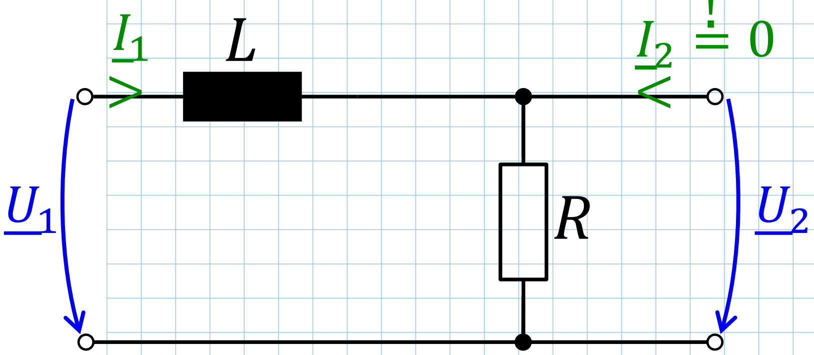




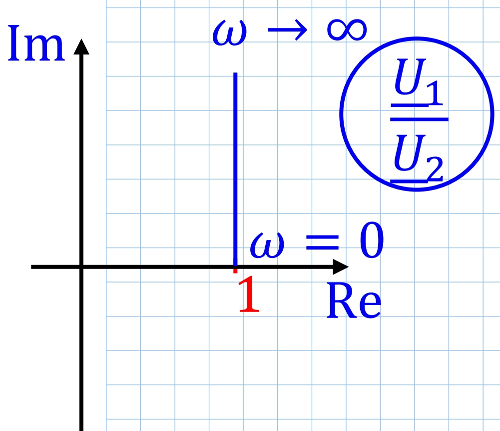
$$\underline{U}_2\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}_1$$

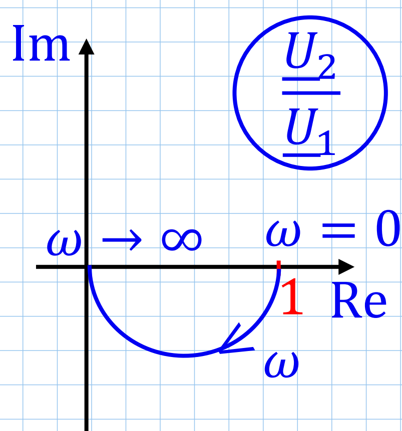
Analog dazu: Hochpass/Tiefpass mit R und L:

Tiefpass:

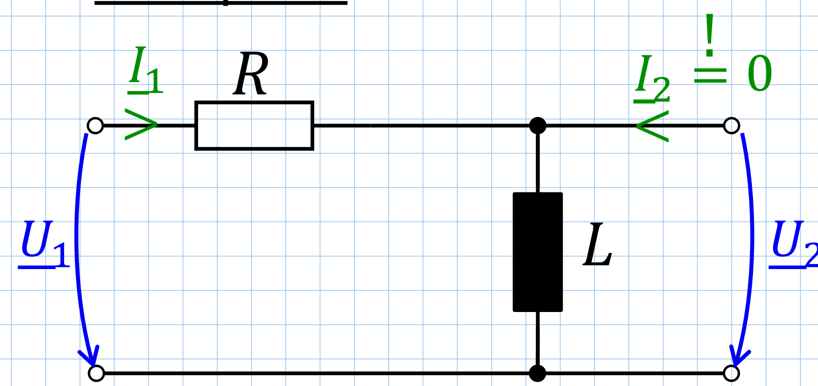


$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R \cdot \cancel{\underline{I}_1}}{(R + j\omega L) \cdot \cancel{\underline{I}_1}} \curvearrowright 0 \Big|_{\omega \to \infty}$$



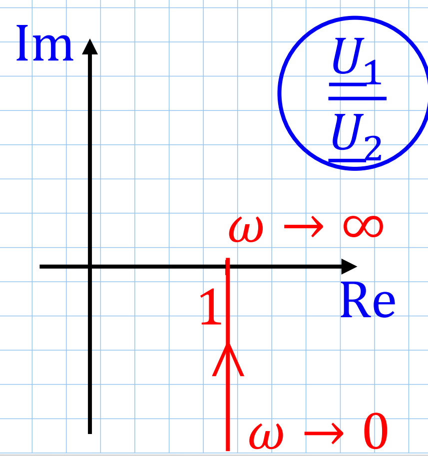


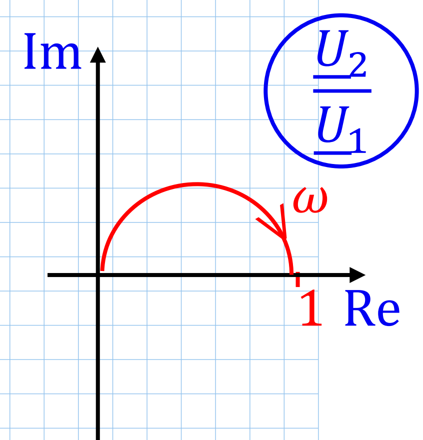
Hochpass:



$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{R}{j\omega L} + 1$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega L \cdot \cancel{\underline{I}_1}}{(R + j\omega L) \cdot \cancel{\underline{I}_1}} \curvearrowright 0 \Big|_{\omega \to \infty}$$

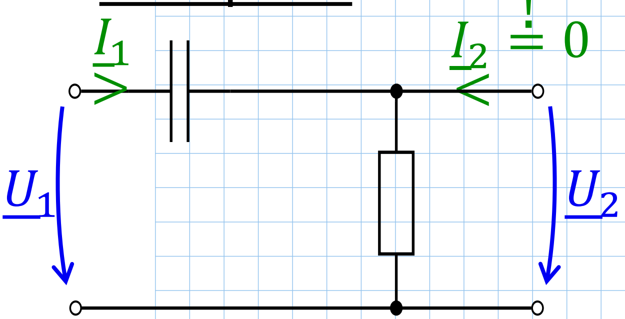




Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Zusammenfassung:

Hochpass:

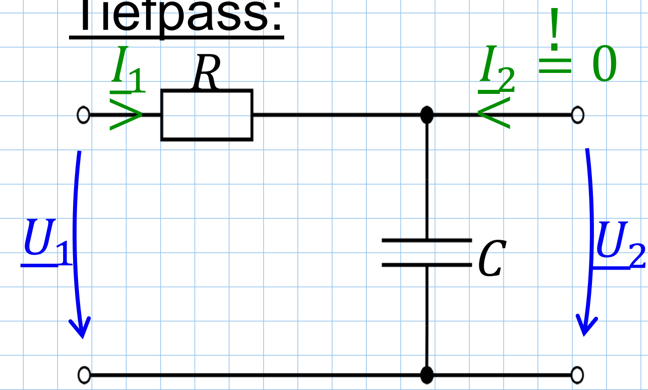


$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$\underline{I}_1$: $\omega = 0 \curvearrowright \underline{I}_1 = 0$

$\omega \to \infty \curvearrowright \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R}$

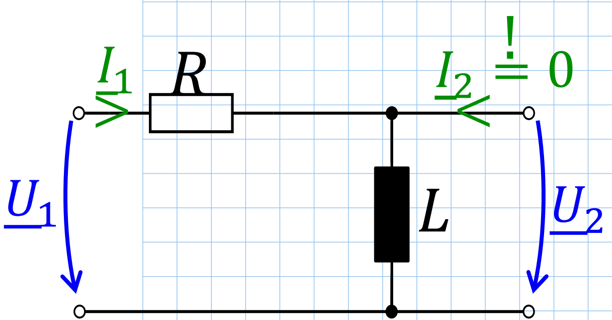
Tiefpass:



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$\underline{I}_1$: $\omega = 0 \curvearrowright \underline{I}_1 = 0$

$\omega \to \infty \curvearrowright \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R}$

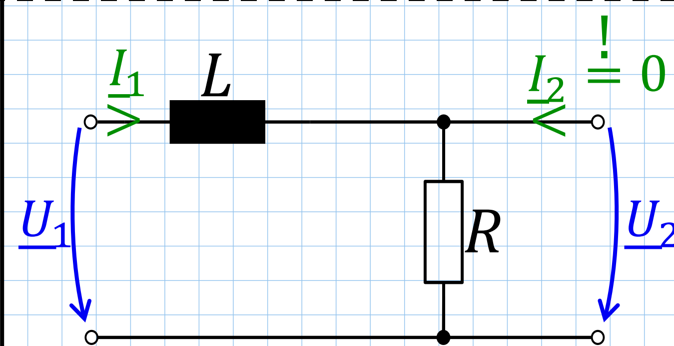


$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega L}{(R + j\omega L)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L}}$$

$\underline{I}_1$:

$\omega = 0 \curvearrowright \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R}$

$\omega \to \infty \curvearrowright \underline{I}_1 \to 0$



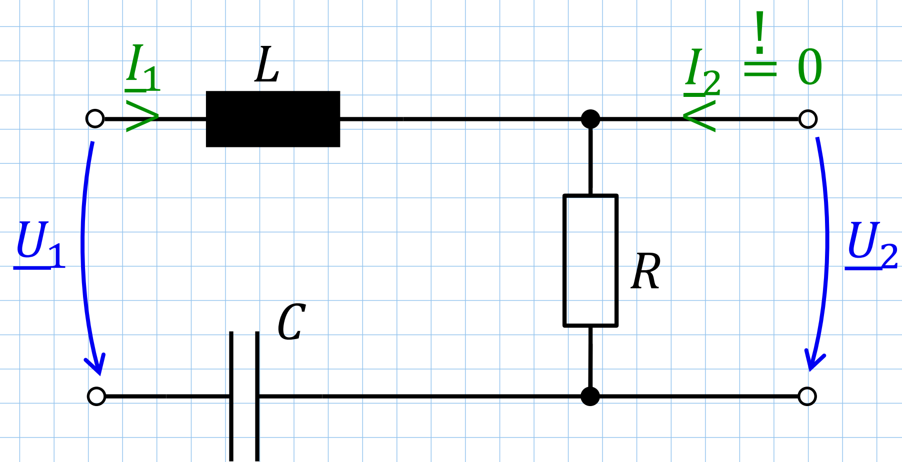
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

$\underline{I}_1$:

$\omega = 0 \curvearrowright \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R}$

$\omega \to \infty \curvearrowright \underline{I}_1 \to 0$

3. Beispiel: RLC Bandpass



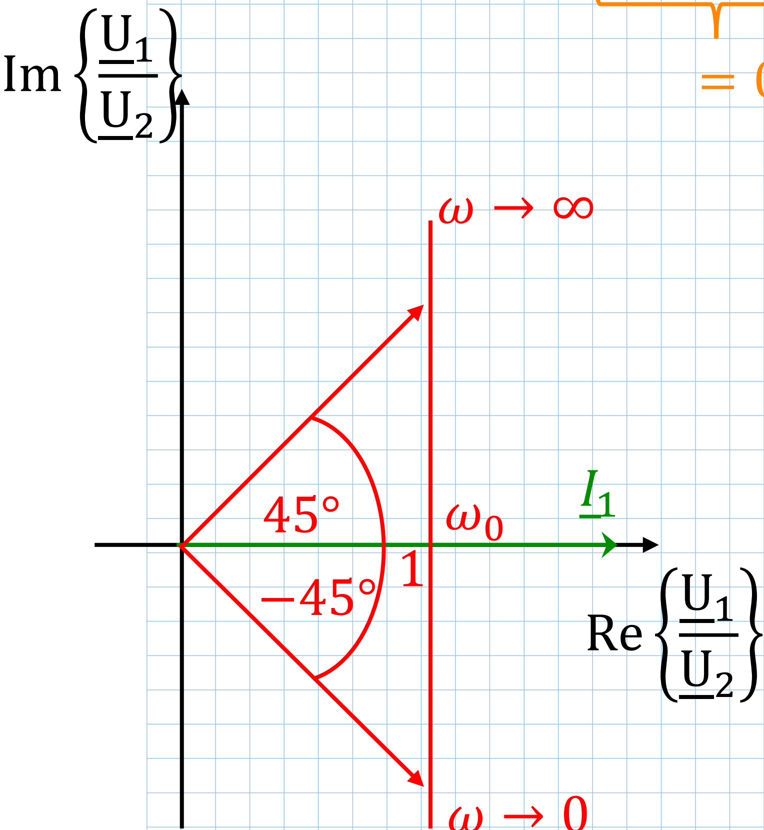
$$\rightarrow \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}$$

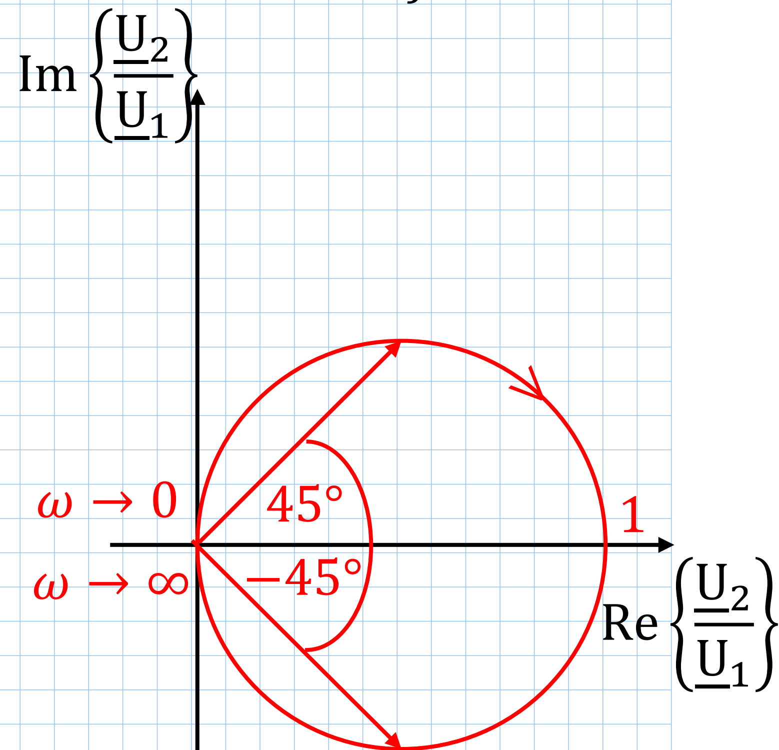
$$\rightarrow \quad \frac{1}{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = j\frac{\omega L}{R} + 1 + \frac{1}{j\omega RC} = 1 + \frac{1}{R} \cdot j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Zugehörige Ortskurve

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 1 + \frac{1}{R} \cdot j \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{= 0 \,\big|_{\omega = \omega_0}}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

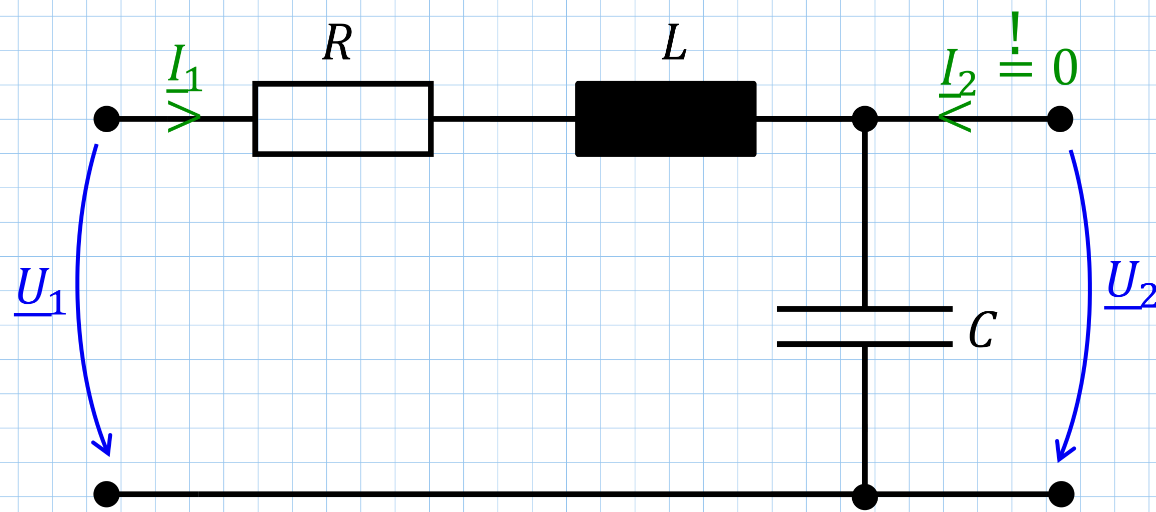




$$\measuredangle \varphi_{ui} = 45° \Rightarrow R \overset{!}{=} \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

12.2 Filter zweiter Ordnung



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{\underline{\frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 1 - \omega^2 LC + j\omega RC = \underbrace{Re\left\{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right\}}_{=:x(\omega)} + j \cdot \underbrace{Im\left\{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right\}}_{=:y(\omega)}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Jetzt nutzen wir dies, um die Ortskurve $y(\omega) = f\big(x(\omega)\big)$ für $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$ darzustellen:

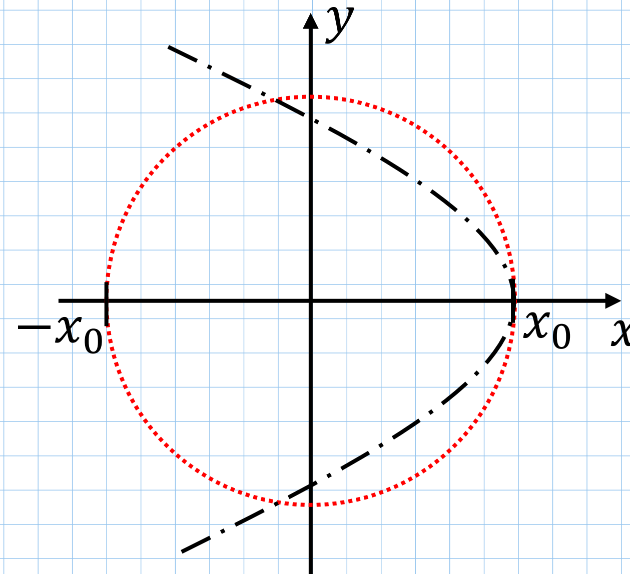
Dazu schreiben wir nochmals:

$$x(\omega) = 1 - \omega^2 LC\,; y(\omega) = \omega RC$$

Dies lässt sich in eine Normalform für eine gespiegelte Parabel umformen: $y^2 = 2p(x - x_0)$

$$x|_{y=0} = x_0$$

$$y^2|_{x=0} = -2px_0$$



Beispiel: $x_0 = 1\,;\ 2p = -1$

$$y^2 = -(x-1) \curvearrowright y = \pm\sqrt{-(x-1)}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Dies angewendet auf unser Filter 2. Ordnung

$$y^2 = 2p(x - x_0)$$

Dabei versuchen wir, $x(\omega)$ und $y(\omega)$ in die Normalform zu wandeln

$$y = \omega RC \quad \curvearrowright \quad y^2 = (\omega^2 R^2 C^2) \quad \curvearrowright \quad \underline{\underline{\omega^2 = \frac{y^2}{R^2 C^2}}}$$

$$x = 1 - \omega^2 LC \quad \curvearrowright \quad x = 1 - \frac{y^2}{\mathrm{R}^2 C^2} \cdot LC \quad = 1 - y^2 \cdot \frac{L}{R^2 C}$$

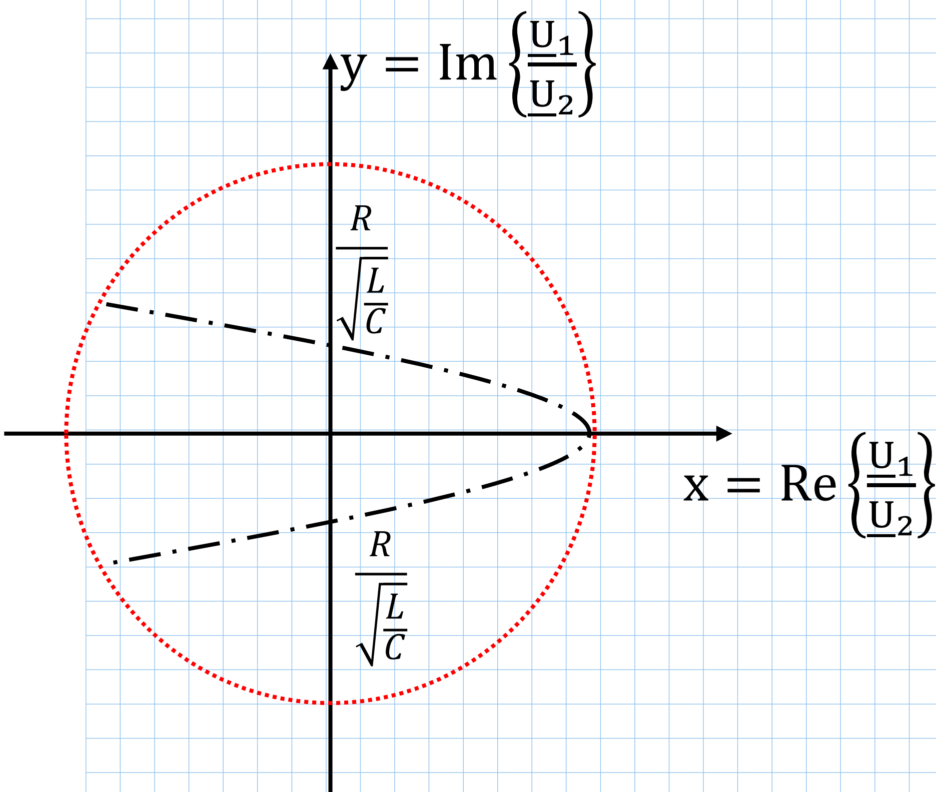
$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{R^2 C}{L}(1 - x) \quad = -\frac{R^2 C}{L}(x - 1)$$

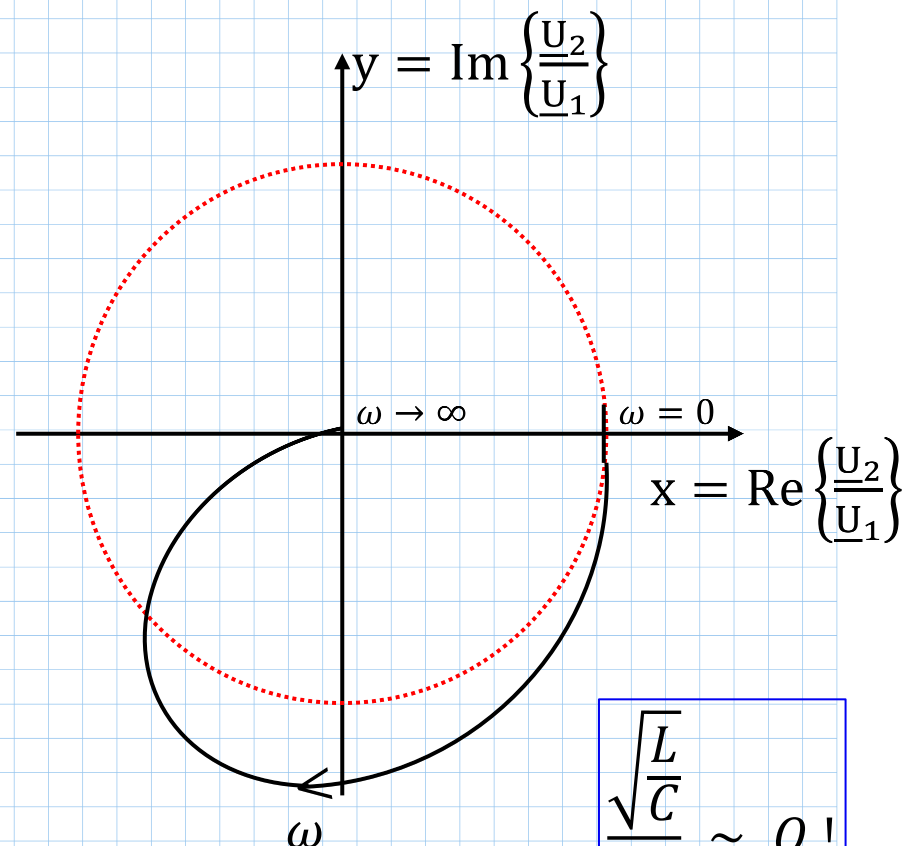
Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Daraus ergibt sich die Ortskurve:

$$y^2 = \frac{R^2 C}{L}(1-x) = -\frac{R^2 C}{L}(x-1)$$

$$y\Big|_{x=0}^{x_G=1} = \pm \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$





$$\boxed{\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \sim Q\,!}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Einschub:

Resonanzfrequenz:

$$x\Big|_{x=0} = 1 - \omega^2 LC \quad \curvearrowright \quad 0 = 1 - \omega^2 LC$$

$$\curvearrowright \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Güte:

$$y^2 = \frac{R^2C}{L}(1-x) = -\frac{R^2C}{L}(x-1)\Big|_{x=0}$$

$$Q_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik