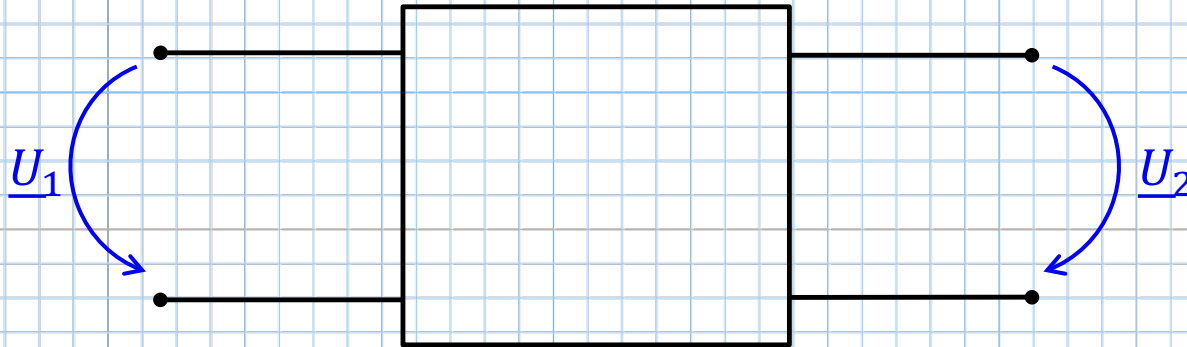


13. Das Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm dient der Darstellung eines Ausgangssignals in Abhängigkeit von einem zeitperiodischen (sinusförmigen) Eingangssignal



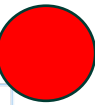
Das Bode-Diagramm besteht dabei aus zwei Teilen:

a) Darstellung des **Amplitudenverhältnis** $\left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right|$

➤ Darstellung in logarithmischer Skala!

b) Darstellung der **Phasendifferenz** $\angle \underline{U}_1, \underline{U}_2$

13.1 Logarithmieren und die Einheit Dezibel



Erinnerung an das Rechnen mit dem Logarithmus

$$10^A = B \quad \leadsto \quad A = \log_{10}(B) = \log(B)$$

Logarithmus zur Basis 10

$$e^A = B \quad \leadsto \quad A = \log_e(B) = \ln(B)$$

Logarithmus Naturalis

Es gilt:

- $\log(B_1 \cdot B_2) = \log(B_1) + \log(B_2)$

- $\log\left(\frac{B_1}{B_2}\right) = \log(B_1) - \log(B_2)$

- $\log(B^n) = n \cdot \log(B)$

Bei der Darstellung von physikalischen Größen gilt:

- Logarithmen können lediglich von dimensionslosen Größen gebildet werden!

⇒ ~~$\log(|\underline{U}_1|)$~~ oder ~~$\log(|\underline{U}_2|)$~~

aber

$$\log\left(\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}\right); \quad \log\left(\frac{|\underline{I}_2|}{|\underline{I}_1|}\right); \quad \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \checkmark$$

- Wir bilden Logarithmen ausschließlich von reellen Größen

~~$\log\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)$~~ aber $\log\left(\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}\right) \quad \checkmark$

- In der Elektrotechnik üblich ist die Darstellung von „Verhältnissen“ in Dezibel:

$$a_v = 20 \cdot \log \left(\frac{|U_2|}{|U_1|} \right) / dB$$

$$a_i = 20 \cdot \log \left(\frac{|I_2|}{|I_1|} \right) / dB$$

$$a_p = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) / dB$$

- Üblich ist auch Spannungen, Ströme und insbesondere Leistungen bzgl. einer **Bezugsgröße** anzugeben:

$$P / \text{dBm} \triangleq 10 \cdot \log \left(\frac{P}{1 \text{ mW}} \right)$$

- Zusammenhang zwischen a_v und a_p :

$$a_v = 20 \cdot \log \left(\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \right)$$

$$a_p = 10 \cdot \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

- Wir wissen: $P = R \cdot \underline{I}^2 = G \cdot \underline{U}^2$

$$\leadsto \log \left(\frac{P}{P_0} \right) = 2 \cdot \log \left(\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \right)$$

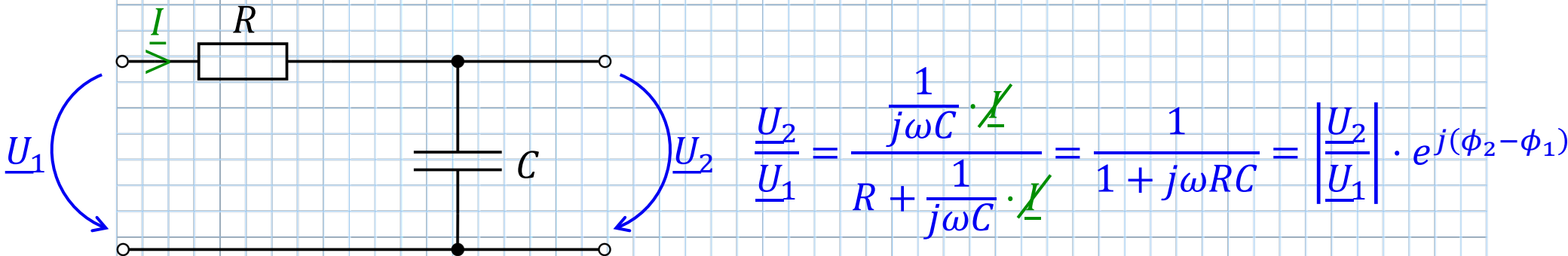
⇒ **Das Verhältnis bleibt erhalten!**

	0 dB	3 dB	6 dB	10 dB	20 dB
$\frac{ \underline{U}_1 }{ \underline{U}_2 }$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sim 3,16$	10
$\frac{P}{P_0}$	1	2	4	10	100

13.2 Das Bode Diagramm für einfache Vierpole

- a) Verhältnis von $\left| \frac{U_2}{U_1} \right|$ im log-Maßstab über einer log-Frequenzskala
(Faktor der Verstärkung)
- a) Phasendifferenz zwischen Eingang und Ausgang über einer log-Frequenzskala
(Wertebereich für Phase $0 \leq \phi \leq 2\pi$)

■ Beispiel: RC Tiefpass



■ Amplitudenverhältnis in Dezibel (dB):

$$a_v = 20 \cdot \log \left(\left| \frac{U_2}{U_1} \right| \right) = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{|1 + j\omega RC|} \right) = \cancel{20 \cdot \log(1)} - 20 \cdot \log(|1 + j\omega RC|) = -20 \cdot \log(|1 + j\omega RC|)$$

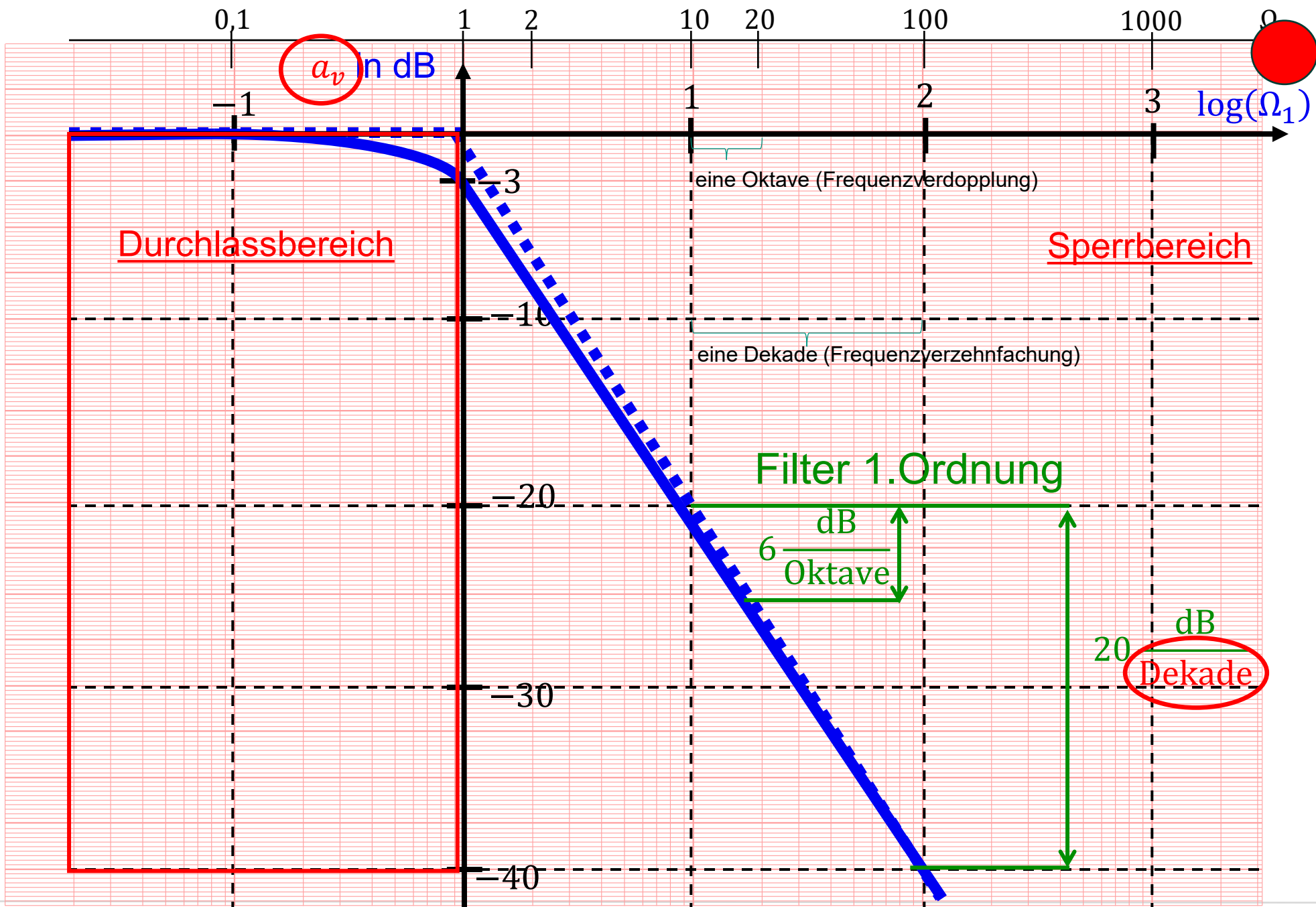
Definition einer Referenzfrequenz:

$$\Omega_1 := \frac{\omega}{\omega_1} = \omega \cdot RC \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad \text{mit } \tau = RC \quad \text{Charakt. Zeitkonstante}$$

→ log-Frequenzskala möglich:

$$a_v = -20 \cdot \log|1 + j\Omega_1|$$

$\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$	$\log(\Omega_1)$	$ 1 + j\Omega_1 $	$-20 \cdot \log 1 + j\Omega_1 $
0,001	-3	~ 1	~ 0
0,01	-2	~ 1	~ 0
0,1	-1	~ 1	~ 0
1	0	$\sqrt{2}$	-3
10	1	~ 10	-20
20	$\sim 1,3$	~ 20	~ -26
100	2	~ 100	-40



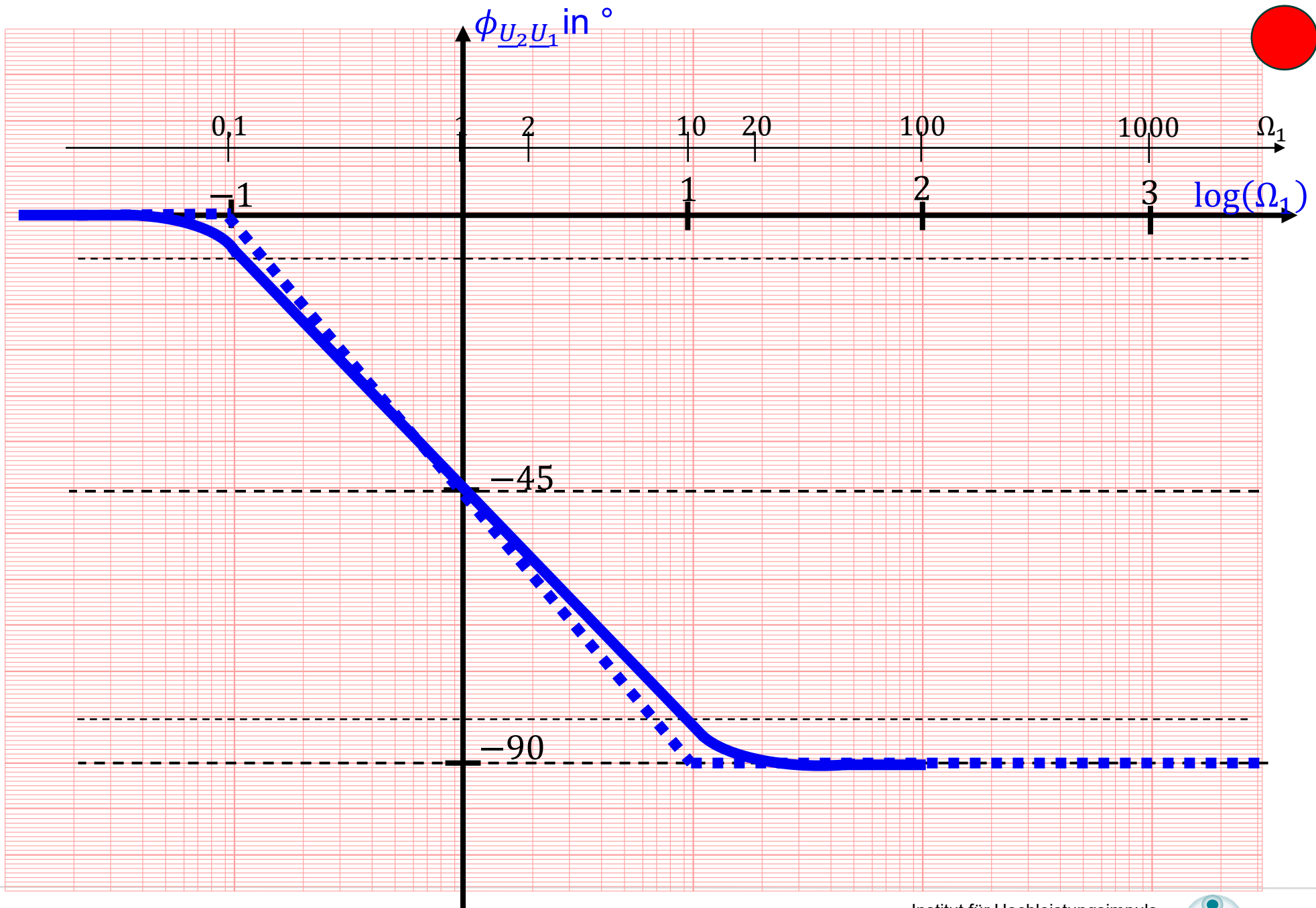
Bestimmung der Phasenbeziehung:

$$\angle \phi_{\underline{U}_2 \underline{U}_1} = \phi_{\text{Zähler}} - \phi_{\text{Nenner}} = \phi_Z - \phi_N$$

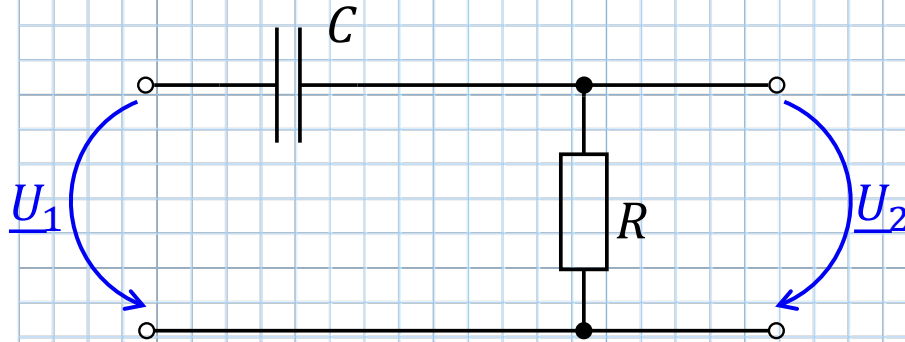
Für den RC-Tiefpass gilt (*Wiederholung*):

$$a_v = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\Omega_1} \quad \leadsto \quad \phi_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{\underline{U}_2 \underline{U}_1} = -\phi_N = -\arctan\left(\frac{\Omega_1}{1}\right)$$

$\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$	$\log(\Omega_1)$	$Re\{Nenner\}$	$Im\{Nenner\}$	$\phi_{\underline{U}_2 \underline{U}_1} = -\phi_N$
0,01	-2	1	0,01	$\sim 0^\circ$
0,1	-1	1	0,1	$\sim -5,7^\circ$
1	0	1	1	$\sim -45^\circ$
10	1	1	10	$\sim -84,3^\circ$
100	2	1	100	$\sim -89,4^\circ (\sim -90^\circ)$



RC-Hochpass



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

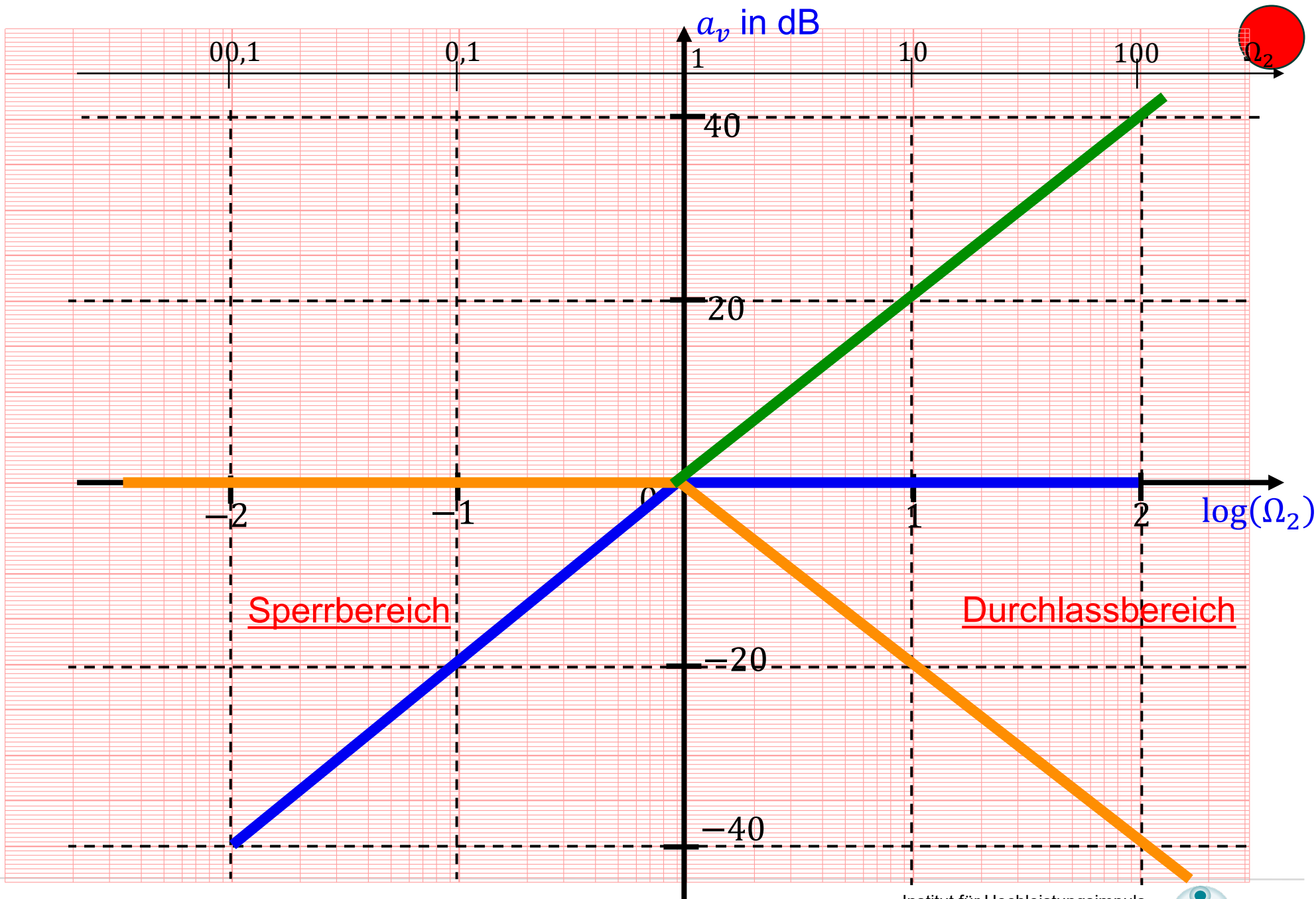
$$a_v/dB = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{U_2}{U_1}\right|\right) = 20 \cdot [\log(|j\omega RC|) - \log(|1 + j\omega RC|)]$$

Definition der Referenzfrequenz

$$\omega_2 := \frac{1}{RC} \quad \leadsto \quad \Omega_2 := \frac{\omega}{\omega_2}$$

$$\leadsto a_v/dB = 20 \cdot \log(\Omega_2) - 20 \cdot \log(|1 + j\Omega_2|)$$

⇒ Graphische Lösung!



Phasenbeziehung $\phi_{\underline{U}_2 \underline{U}_1}$ für den RC-Hochpass:

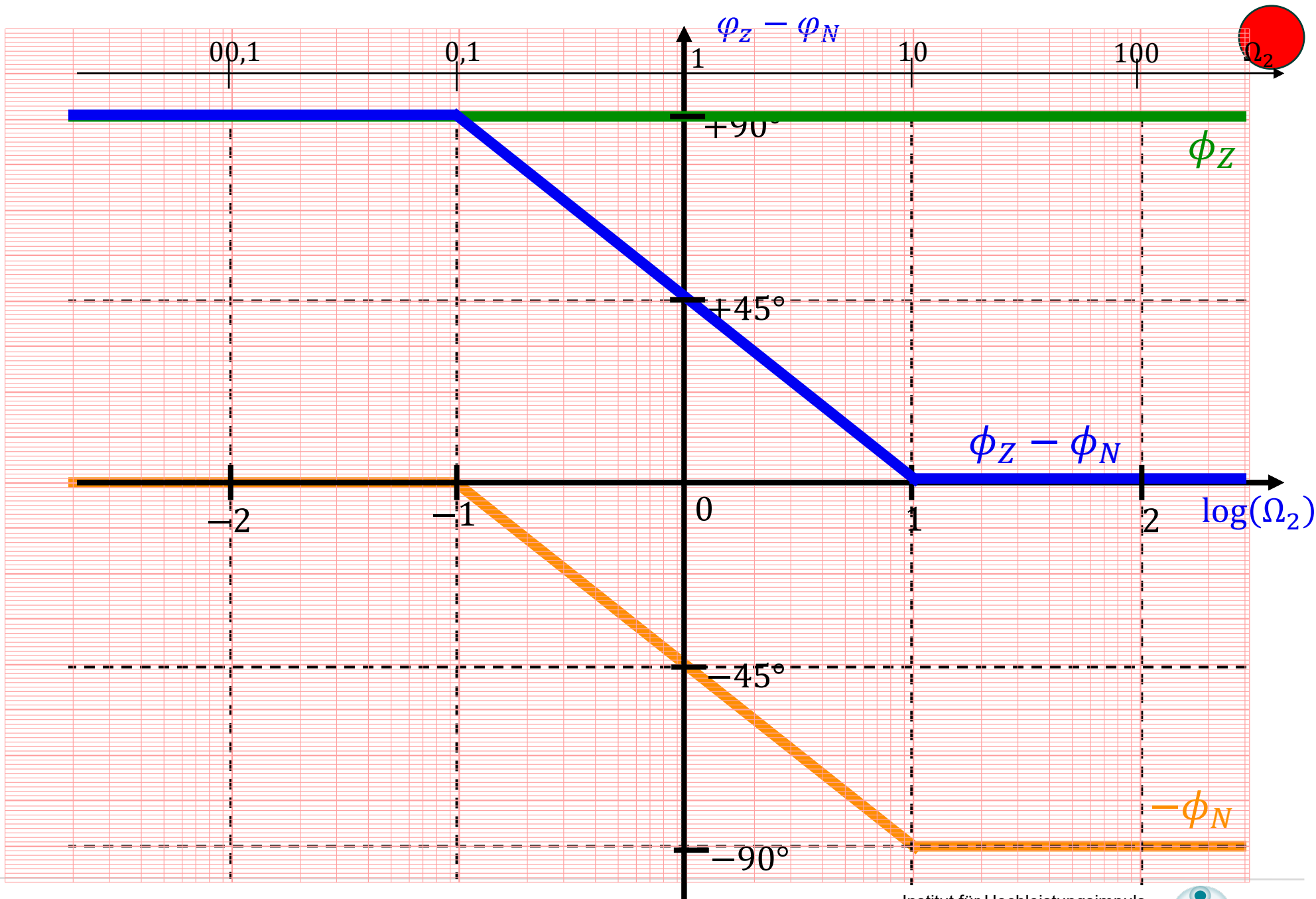
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2}$$

$$\phi_Z = +90^\circ \triangleq \left(+\frac{\pi}{2}\right)$$

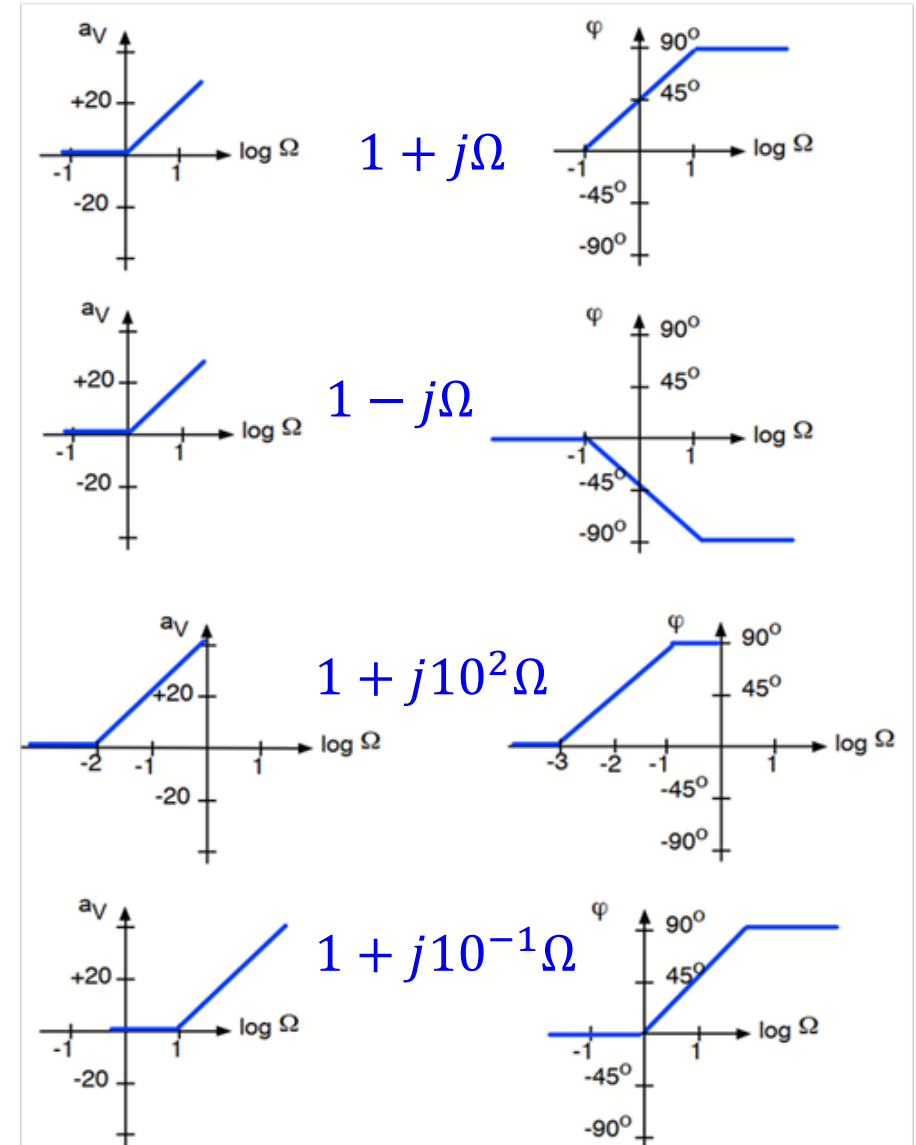
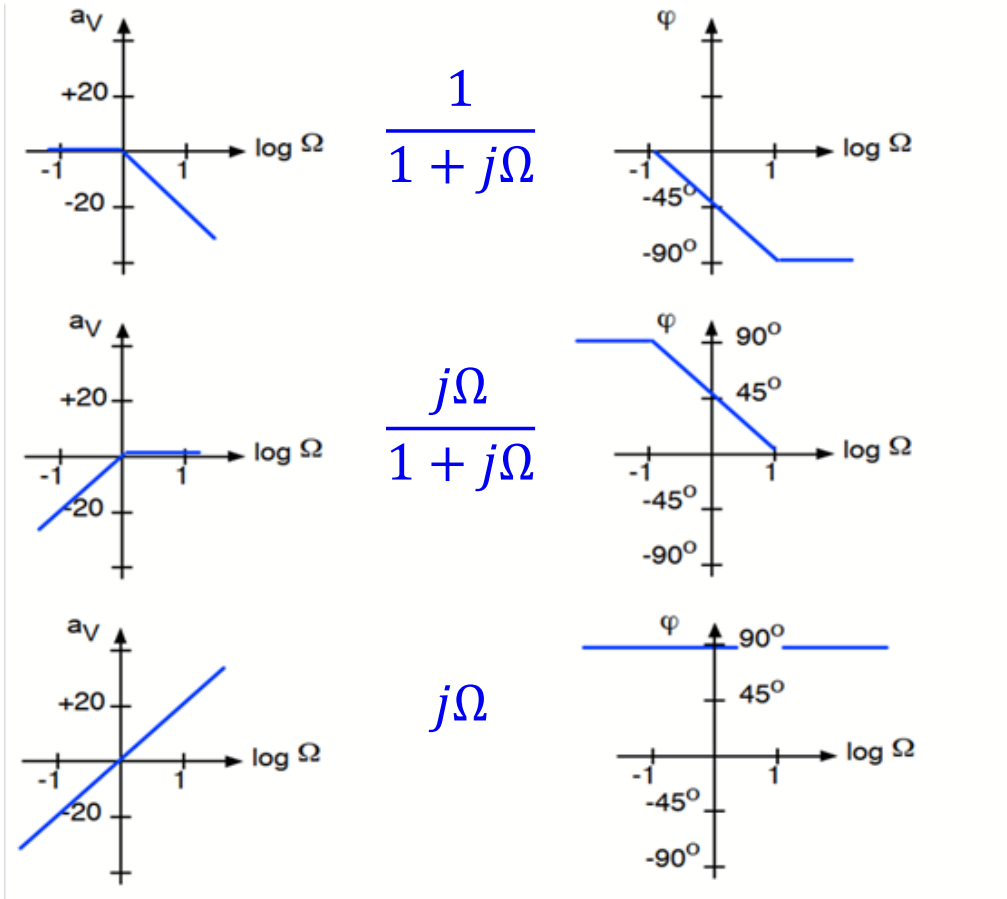
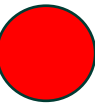
$$\phi_N = \arctan(\Omega_2)$$

$$\phi_{\underline{U}_2 \underline{U}_1} = \phi_Z - \phi_N$$

$$= +90^\circ - \arctan(\Omega_2)$$

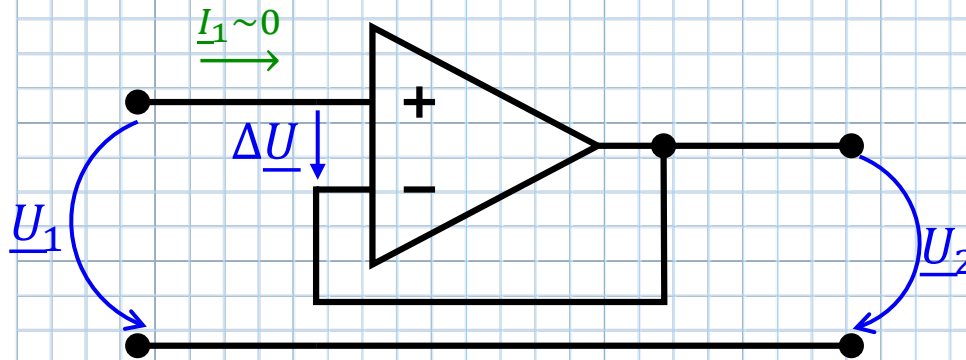
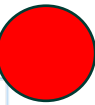


Typische Bilder von Bode-Diagrammen



Spannungsfolger:

(wird benötigt für Kettenschaltungen zur rückwirkungsfreien Trennung)



mit $\Delta U = 0$ gilt:

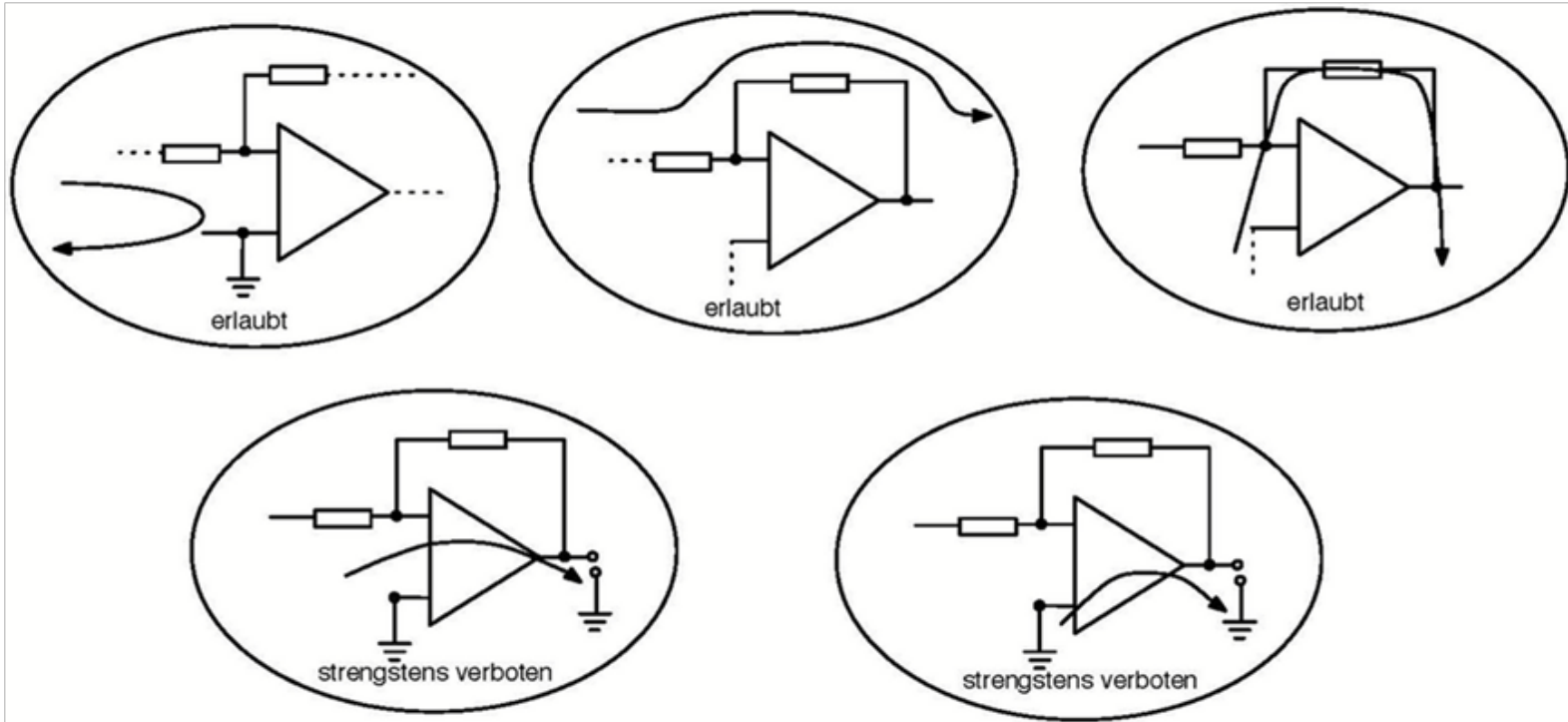
$$\frac{U_2}{U_1} = 1$$

$$\sim |a_v|_{dB} = 20 \log \left(\left| \frac{U_2}{U_1} \right| \right) = 0$$

$$\phi_{U_2 U_1} = 0$$

Siehe Kapitel 3!

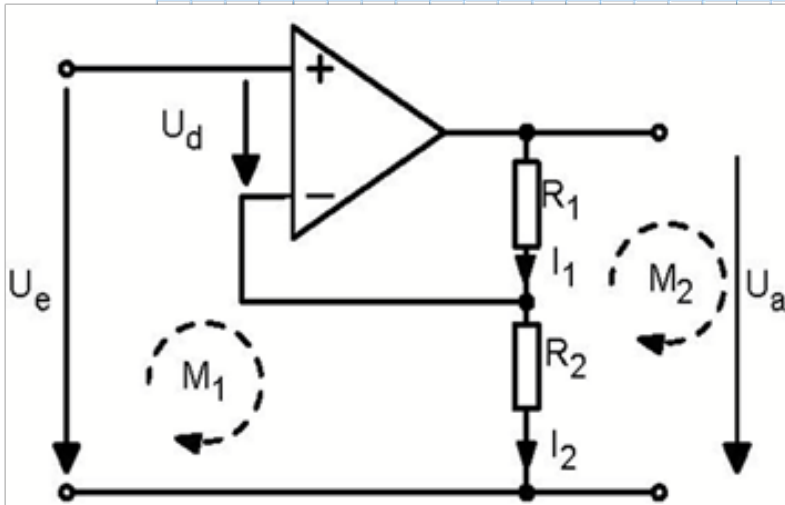
Einschub: (Wiederholung Kapitel 3.3: „Die Goldene Regeln für den Operationsverstärker“)



- Die Regeln gelten unabhängig davon, ob eine Gegenkopplung (Rückkopplung an „-“) oder eine Mitkopplung (Rückkopplung an „+“) vorliegt.
- Die Regeln gelten sowohl bei Gleichspannung und bei Wechselspannung!

Einschub: (Wiederholung Kapitel 3)

Der Spannungsfolger ist ein Grenzfall des nichtinvertierenden Verstärkers in Gegenkopplung:



$$M1: -U_e + U_a + R_2 \cdot I_2 = 0 \rightarrow U_e = R_2 \cdot I_2$$

$$M2: U_a - (R_2 + R_1) \cdot I_2 = 0 \rightarrow U_a = (R_1 + R_2) \cdot I_2$$

$$\Rightarrow \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \geq 1$$

$$\text{für } R_1 = R_2 \rightarrow \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 2$$

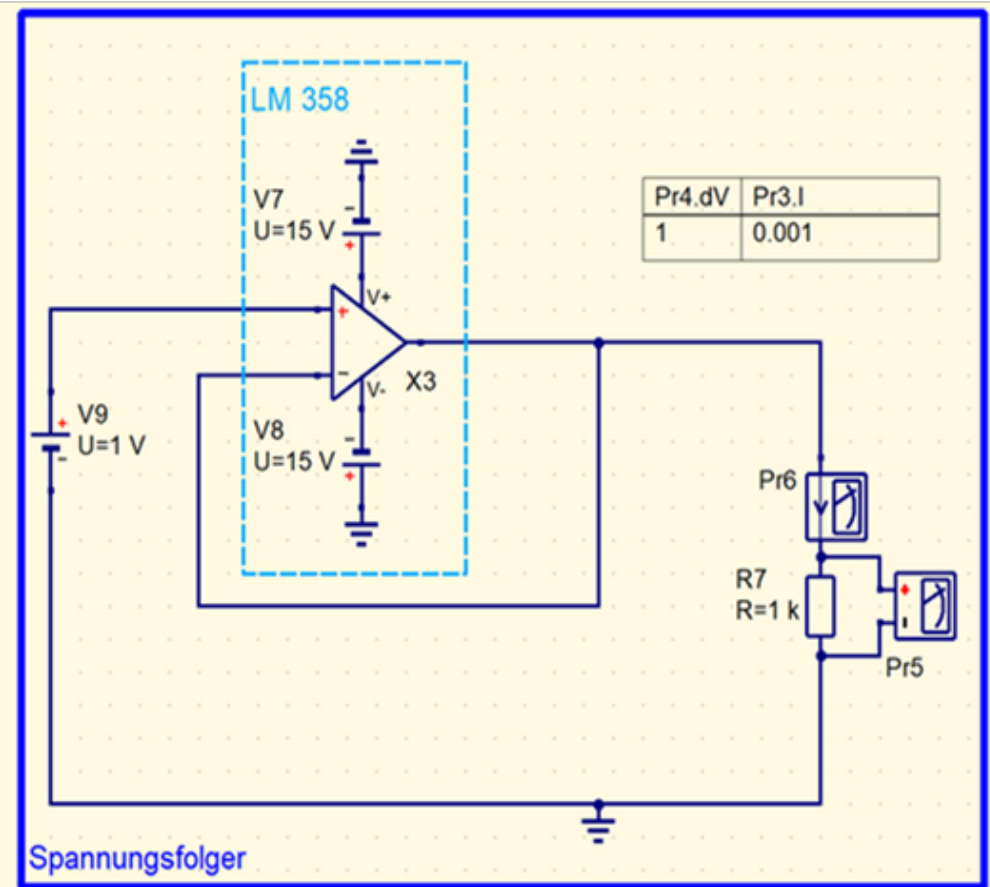
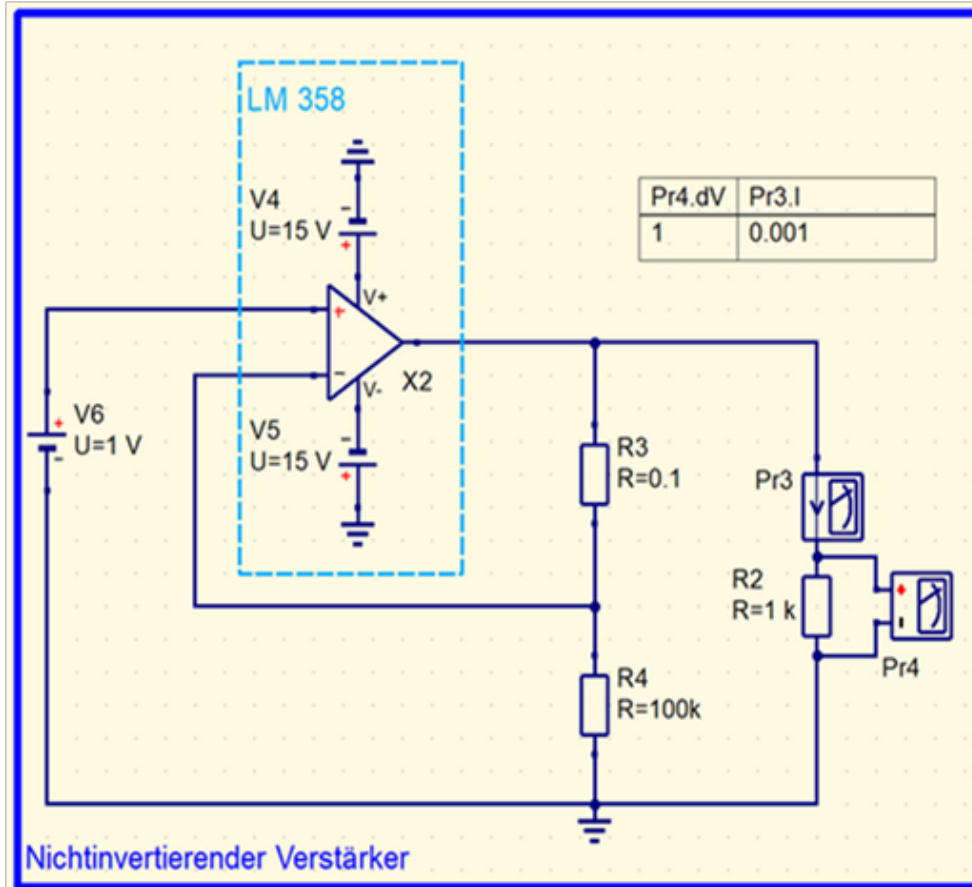
für $R_1 = 0$ (KS) und $R_2 \rightarrow \infty$ (LL) \rightarrow **Spannungsfolger**

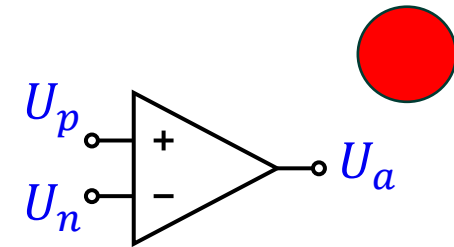
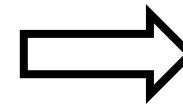
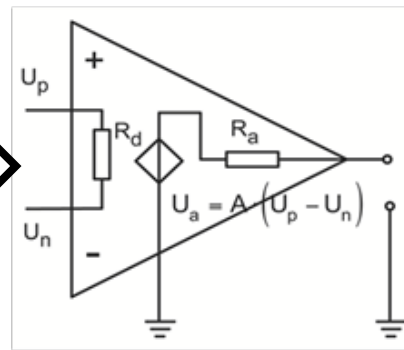
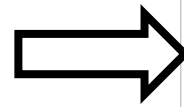
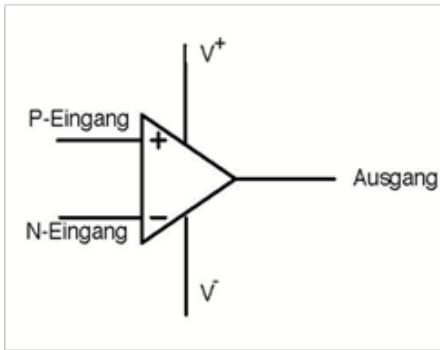
$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{0 + \infty}{\infty} \rightarrow \text{maximale Verstärkung des Op.-Amp. in Gegenkopplung}$$

Beispielschaltung:

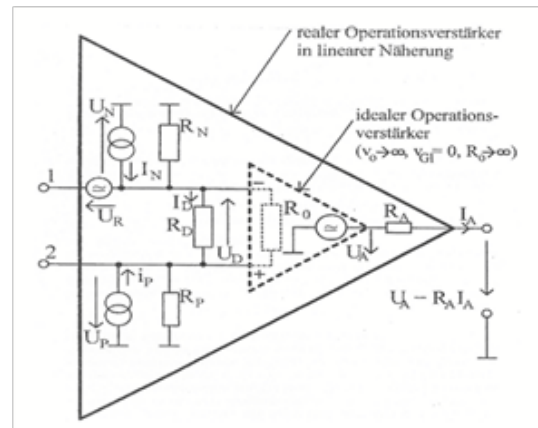
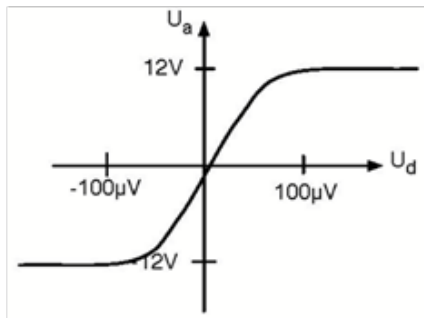
⇒ für $R_3 = 0,1\Omega$
(R_1 auf Folie 18) \ll $R_4 = 100k\Omega$
(R_2 auf Folie 18)

⇒ der nichtinvertierende Verstärker
⇒ verhält sich wie ein
Spannungsfolger



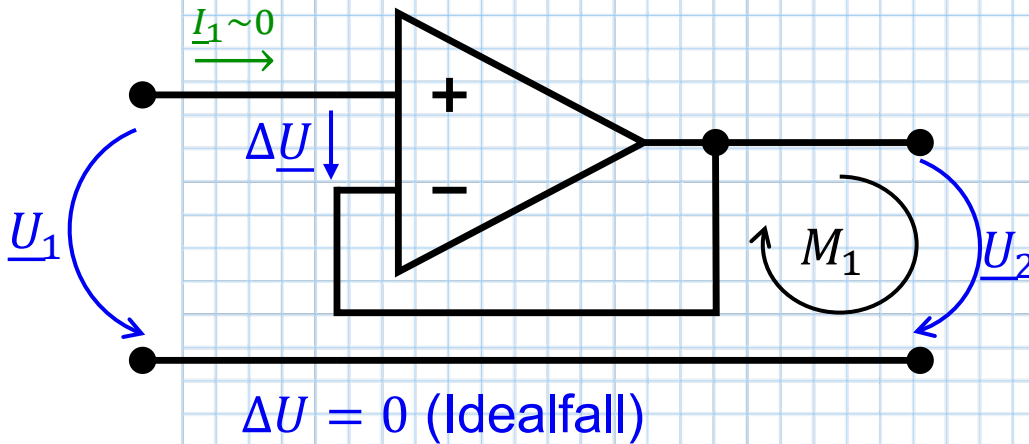


Eigenschaft	Idealer OPV	Realer OPV	
Verstärkung	unendlich	10^4 bis 10^5	(A)
Eingangswiderstand	unendlich	MΩ bis GΩ	(R_d)
Ausgangswiderstand	0	$\leq 200\Omega$	(R_a)



Eigenschaft	ideal	real
v_0	∞	$10^5 \dots 10^8$
v_{GI}	0	0.1 ... 3
R_D	∞	$10^7 \Omega \dots 10^{12} \Omega$
R_P, R_N	∞	$R_P, R_N \gg R_D$
R_A	0	$10 \Omega \dots 10^3 \Omega$
I_P, I_N	0	0.1 nA ... 25 nA
Slew rate	∞	0.5 V/μs ... 1 V/ns
U_0	0	0.1 mV ... 5 mV

Spannungsfolger in Gegenkopplung

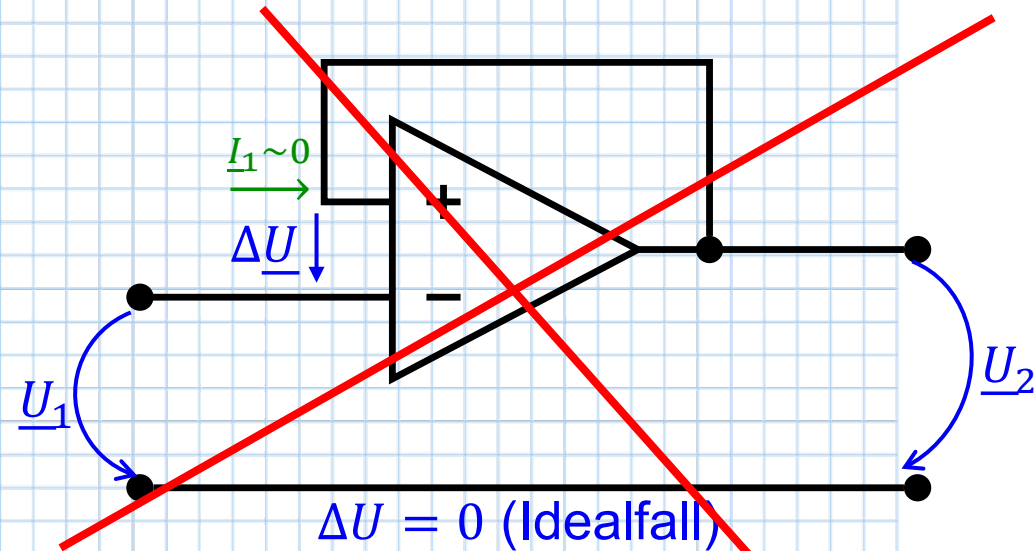


$$\Rightarrow \underline{U}_2 - \underline{U}_1 + \overset{0}{\Delta \underline{U}} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U}_2 = \underline{U}_1$$

In Gegenkopplung stabil!

Spannungsfolger in Mitkopplung

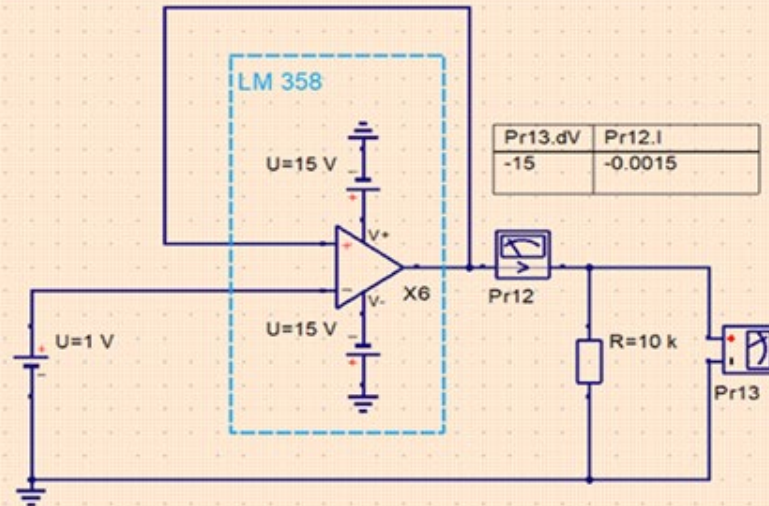
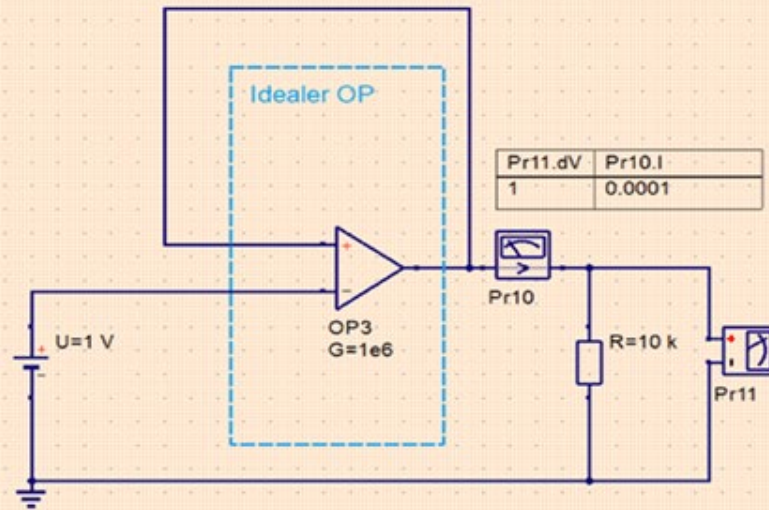


$$\Rightarrow \underline{U}_2 - \underline{U}_1 + \overset{0}{\Delta \underline{U}} = 0$$

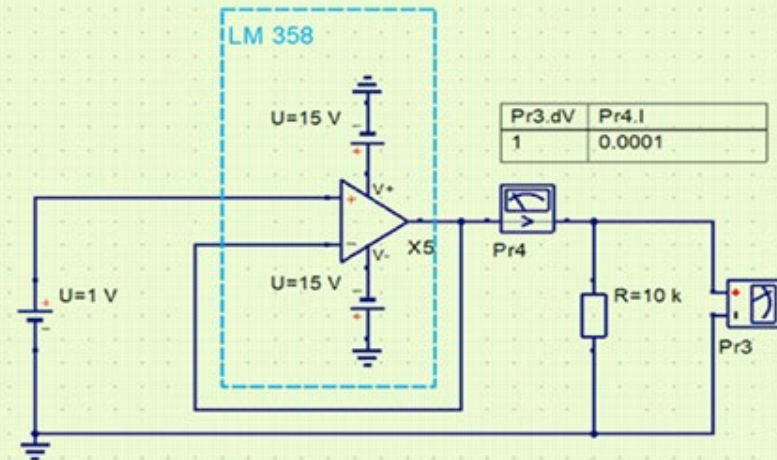
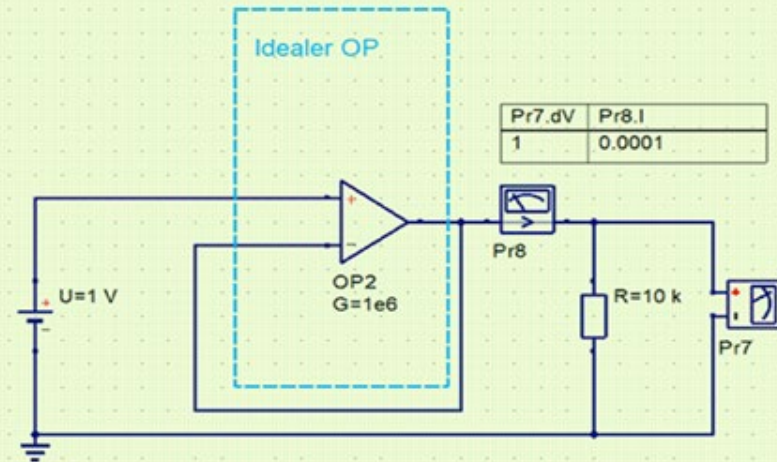
$$\Rightarrow \underline{U}_2 = \underline{U}_1 \text{ Idealfall !}$$

! Instabil! Funktioniert nicht mit realem Op.Verstärker !

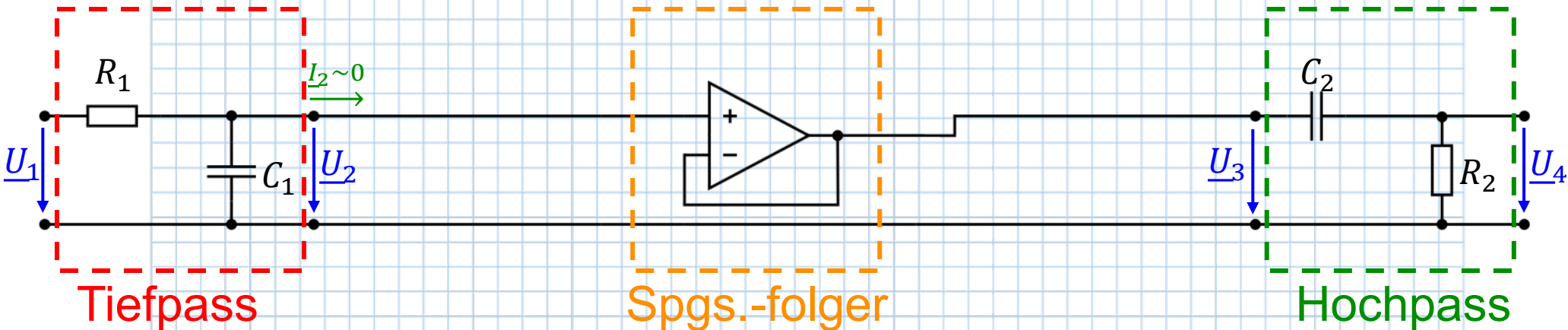
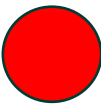
Spannungsfollower durch Mitkopplung führt zu Instabilität bei realem OP LM 358



Spannungsfollower korrekt angeschlossen!



13.3 Bode-Diagramm von Vierpol Kettenschaltungen



Bandpass, mit Freier Wahl der unteren und der oberen Grenzfrequenz

Übertragungsfunktion?

$$\frac{U_4}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_4}{U_3} \xrightarrow{\log} a_v = 20 \log \left| \frac{U_2}{U_1} \right| + 20 \log \left| \frac{U_3}{U_2} \right| + 20 \log \left| \frac{U_4}{U_3} \right|$$

$$\varphi_4 - \varphi_1 = (\varphi_4 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\Rightarrow a_{v_{ges}} = \sum_{i=1}^N a_{v_n} \quad ; \quad \varphi_{ges} = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

Was machen wir mit den normierten Frequenzzahlen?

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{und} \quad \Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$$

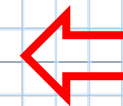
Unterschiedliche Bezugsfrequenzen!

Es gilt:

$$\Omega_1 \cdot \omega_1 = \omega = \Omega_2 \cdot \omega_2$$

$$\Rightarrow \Omega_2 = \Omega_1 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\Rightarrow \log(\Omega_2) = \log(\Omega_1) + \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$



Verschiebung
auf $\log x$ -Achse!

→ Haben zwei Vierpole eine unterschiedliche Bezugsfrequenz so gilt:

- a) Man muss sich für eine Bezugsfrequenz entscheiden!
- b) Man muss die logarithmische Frequenzskala anpassen!

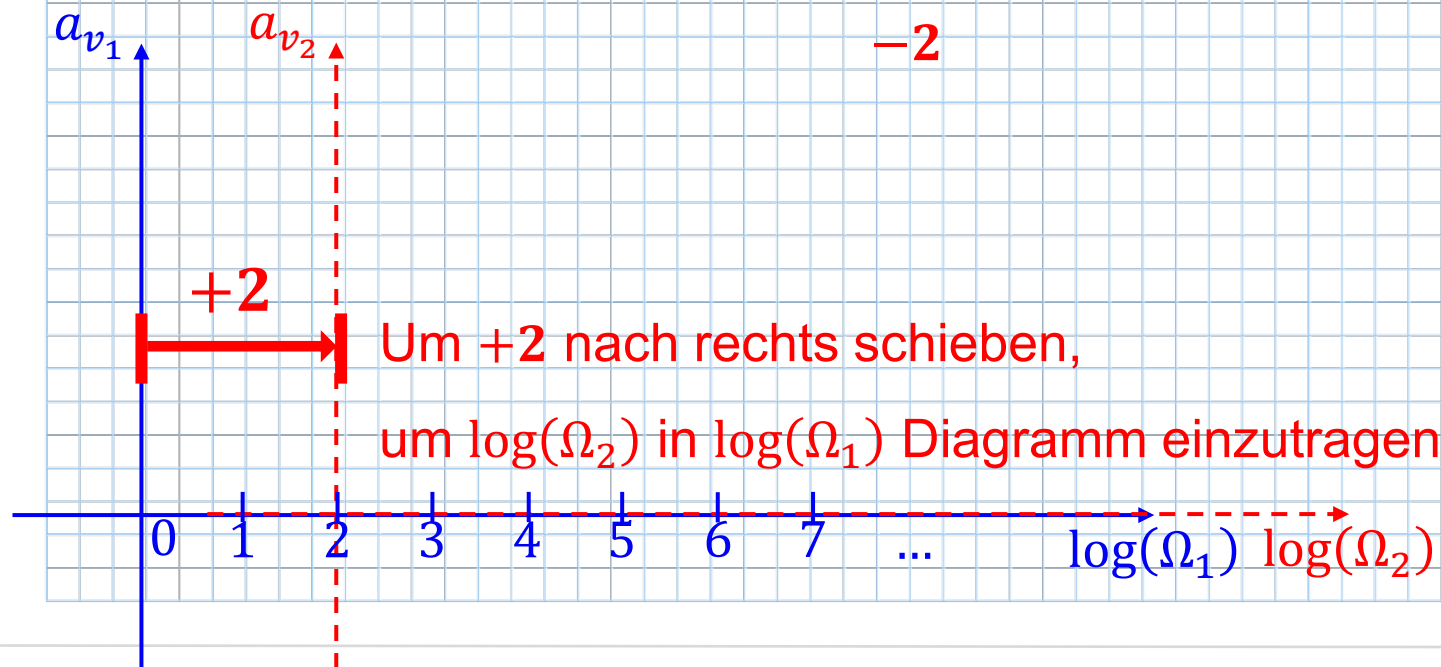
1. Beispiel:

Annahme: $\omega_2 = 100 \cdot \omega_1$

$\leadsto \omega_2$ ist 100-mal größer als ω_1 !

$$\leadsto \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{100} = 10^{-2} \Rightarrow \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \underline{\underline{-2}}$$

es gilt: $\log(\Omega_2) = \log(\Omega_1) + \underbrace{\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}_{-2}$

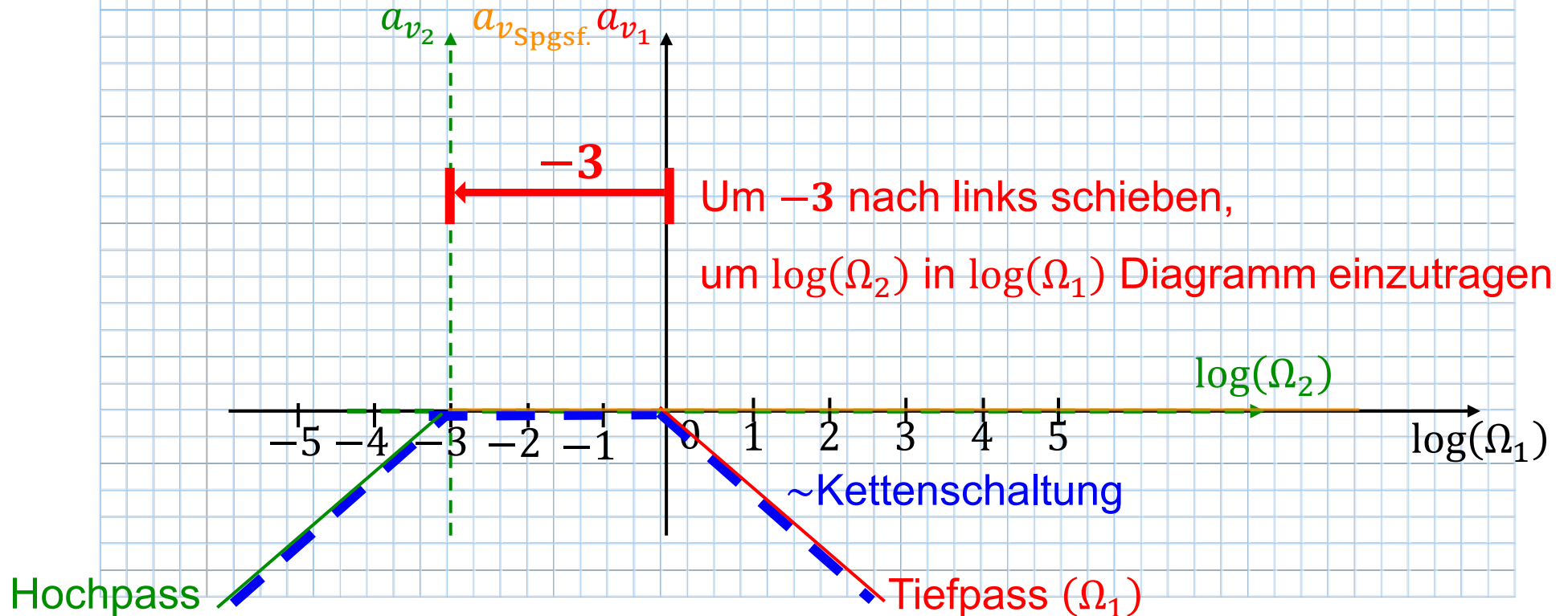


2. Beispiel:

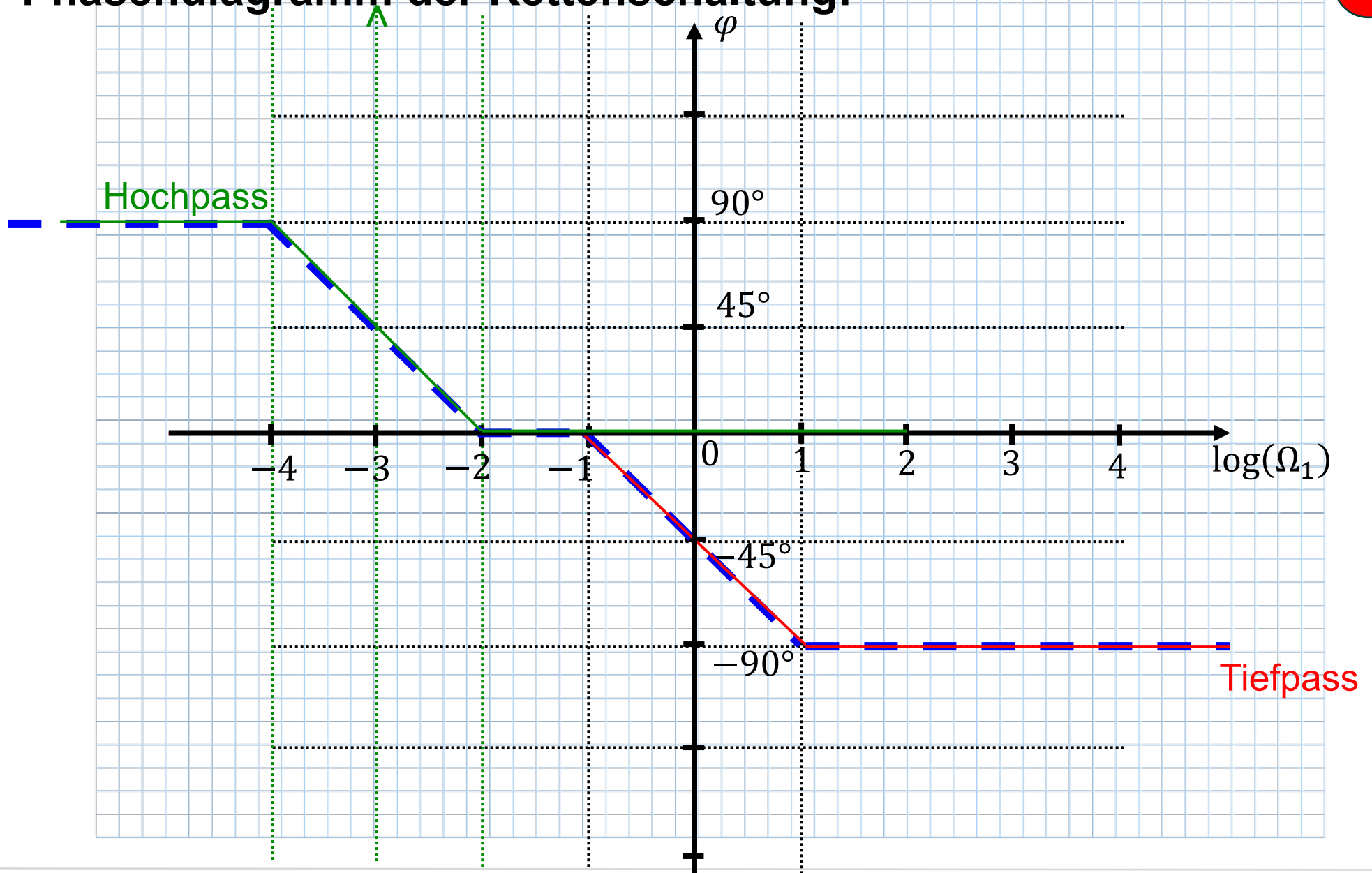
Annahme: $\omega_1 = 1000 \cdot \omega_2 = 10^3 \cdot \omega_2 \leadsto \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = +3$

Ansatz für Kettenschaltung

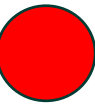
1. Glied: Tiefpass | 2. Glied: Spgs.-folger | 3. Glied: Hochpass



Phasendiagramm der Kettenschaltung:



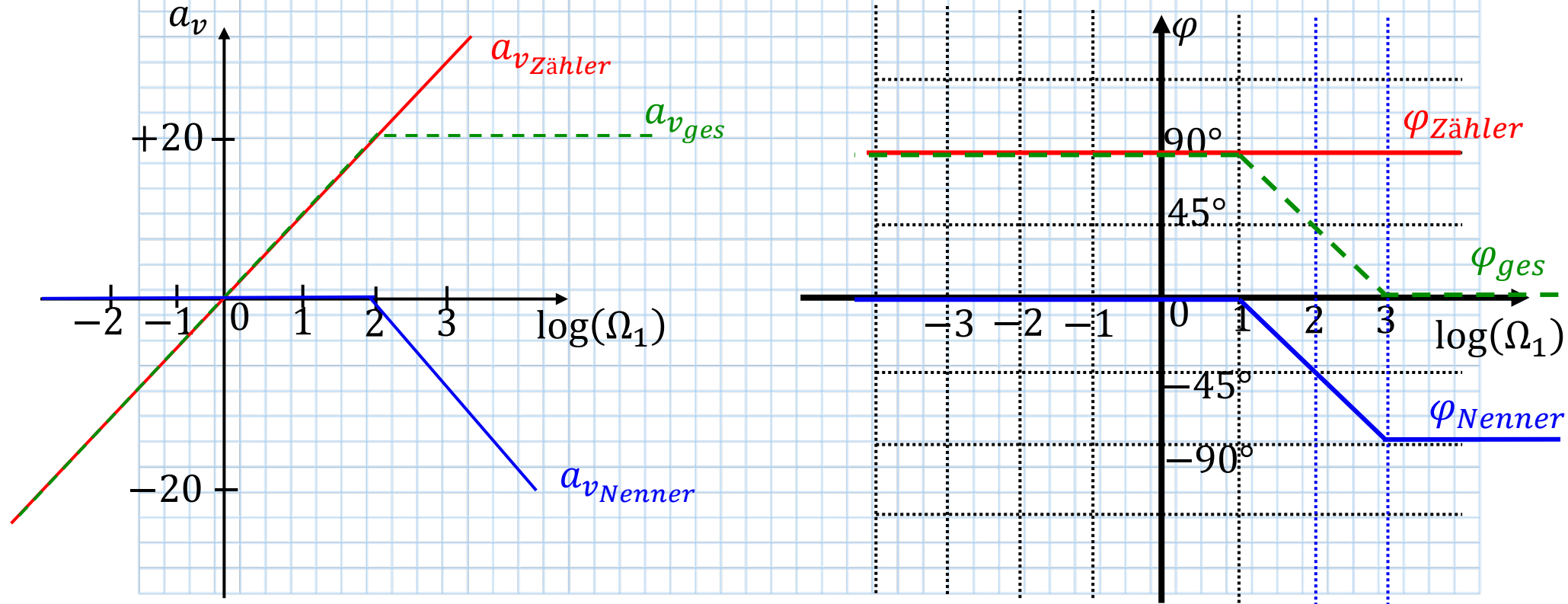
Ein ganz anderes Beispiel mit zwei Bezugsfrequenzen



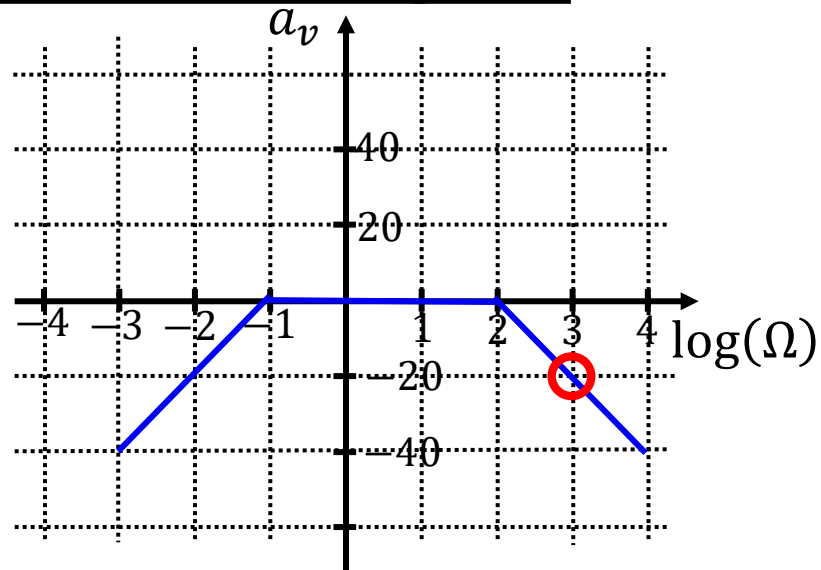
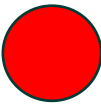
Annahme: $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$ für den Fall $\omega_2 = 100\omega_1$

$\leadsto \frac{\omega_1}{\omega_2} = 10^{-2}$

⇒ Hier haben wir es nicht geschafft, eine Frequenzskala zu nehmen



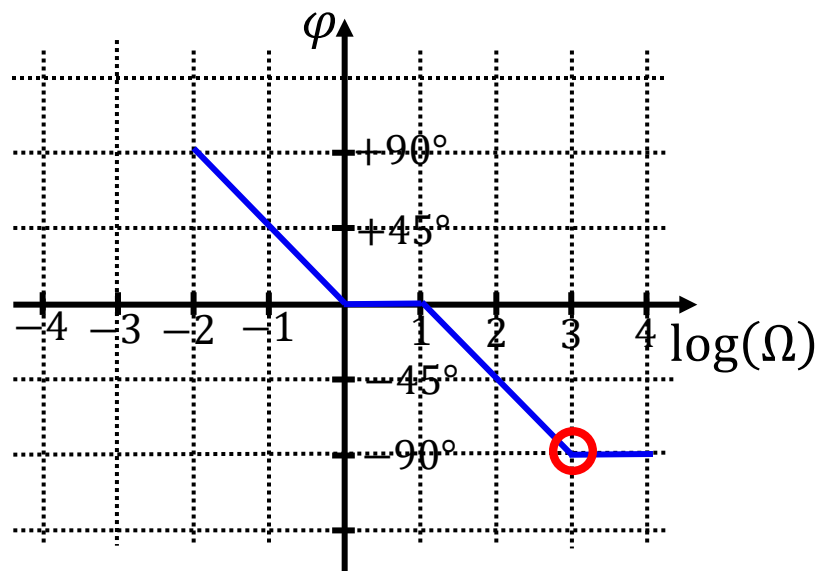
Eine Denksportaufgabe:



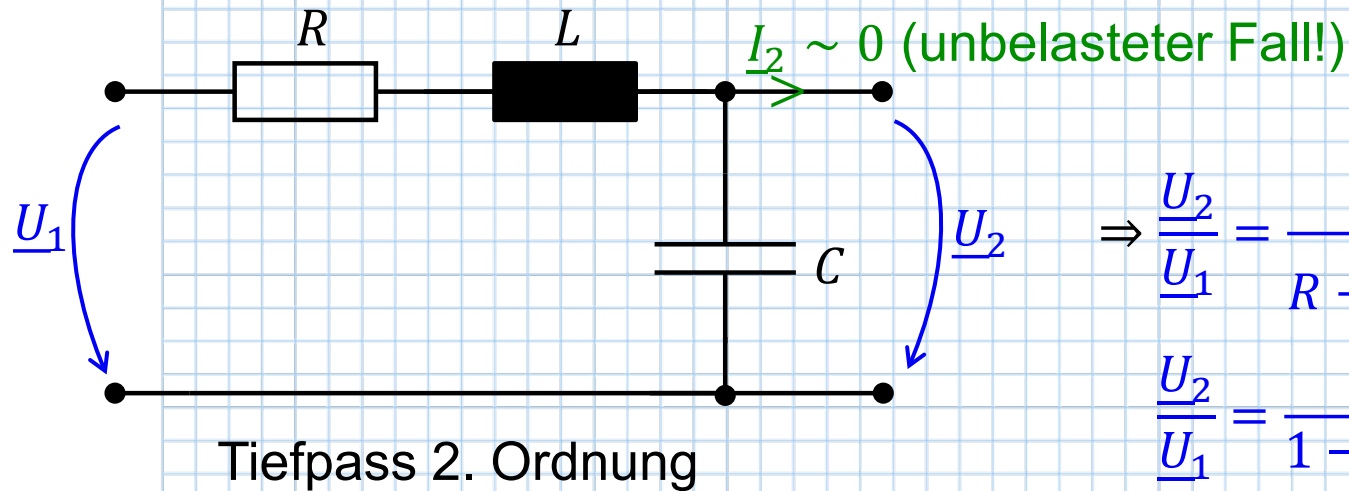
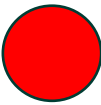
Annahme: $f_0 = 10 \text{ kHz}$; $U_1 = 10 \text{ V}$

Fragen:

- Wie groß ist die **Amplitude** des Ausgangssignals bei **10 MHz** ?
- Wie groß ist der **Phasenwinkel** bei **10 MHz**?



13.4 Das Bode-Diagramm von einem Filter 2. Ordnung



$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Beim Bode Diagramm stört der Bruch nicht!

Achtung! Steht im Nenner!

$$\Rightarrow a_v = \ominus 20 \cdot \log |1 - \omega^2 LC + j\omega RC|$$

$$\text{Def.: } \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \Omega_0 := \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow a_v = -20 \cdot \log \left| 1 - \Omega_0^2 + j\Omega_0 \cdot \frac{RC}{\sqrt{LC}} \right|$$

$$\Rightarrow a_v = -20 \cdot \log \left| 1 - \Omega_0^2 + j\Omega_0 \cdot \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \right|$$

zunächst betrachten wir folgendes:

a) $\omega \ll \omega_0 \leadsto \Omega_0 \rightarrow 0$

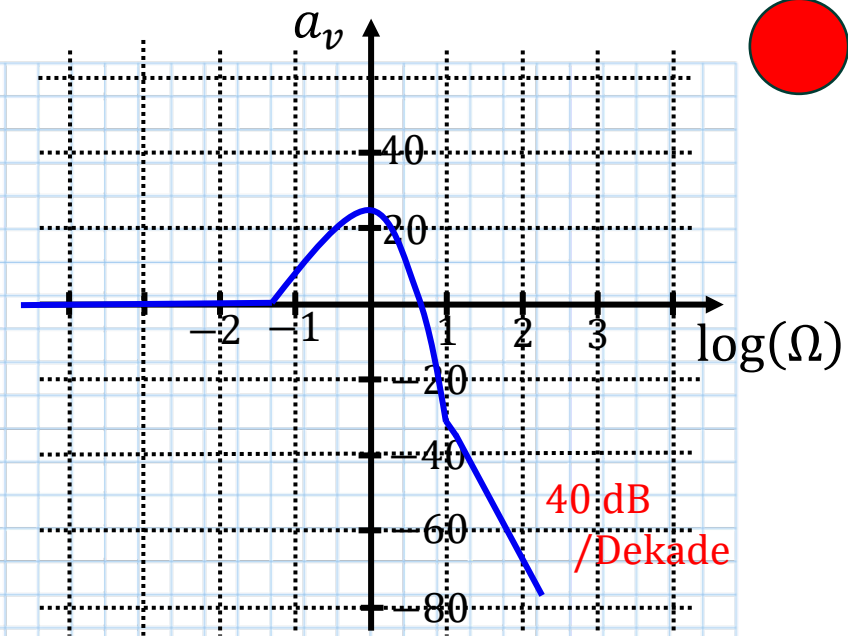
$$\Rightarrow a_v|_{\omega \ll \omega_0} \approx -20 \cdot \log|1| = 0$$

b) $\omega \gg \omega_0 \leadsto \Omega_0^2 \gg \Omega_0 \text{ und } \Omega_0^2 \gg 1$

$$\Rightarrow a_v|_{\omega \gg \omega_0} \approx -20 \cdot \log|-\Omega_0^2| = -20 \cdot 2 \cdot \log \Omega_0 = -40 \cdot \log \Omega_0$$

c) $\omega = \omega_0 \leadsto \Omega_0 = 1$

Beispiel: $Q = 10 = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \Rightarrow a_v = - \left| 1 - 1 + j1 \cdot \frac{1}{10} \right| = \underline{\underline{+20}}$



Phasendiagramm für TP 2.Ordnung:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Zunächst betrachten wir folgendes:

a) $\omega \ll \omega_0 \leadsto \Omega_0 \rightarrow 0$

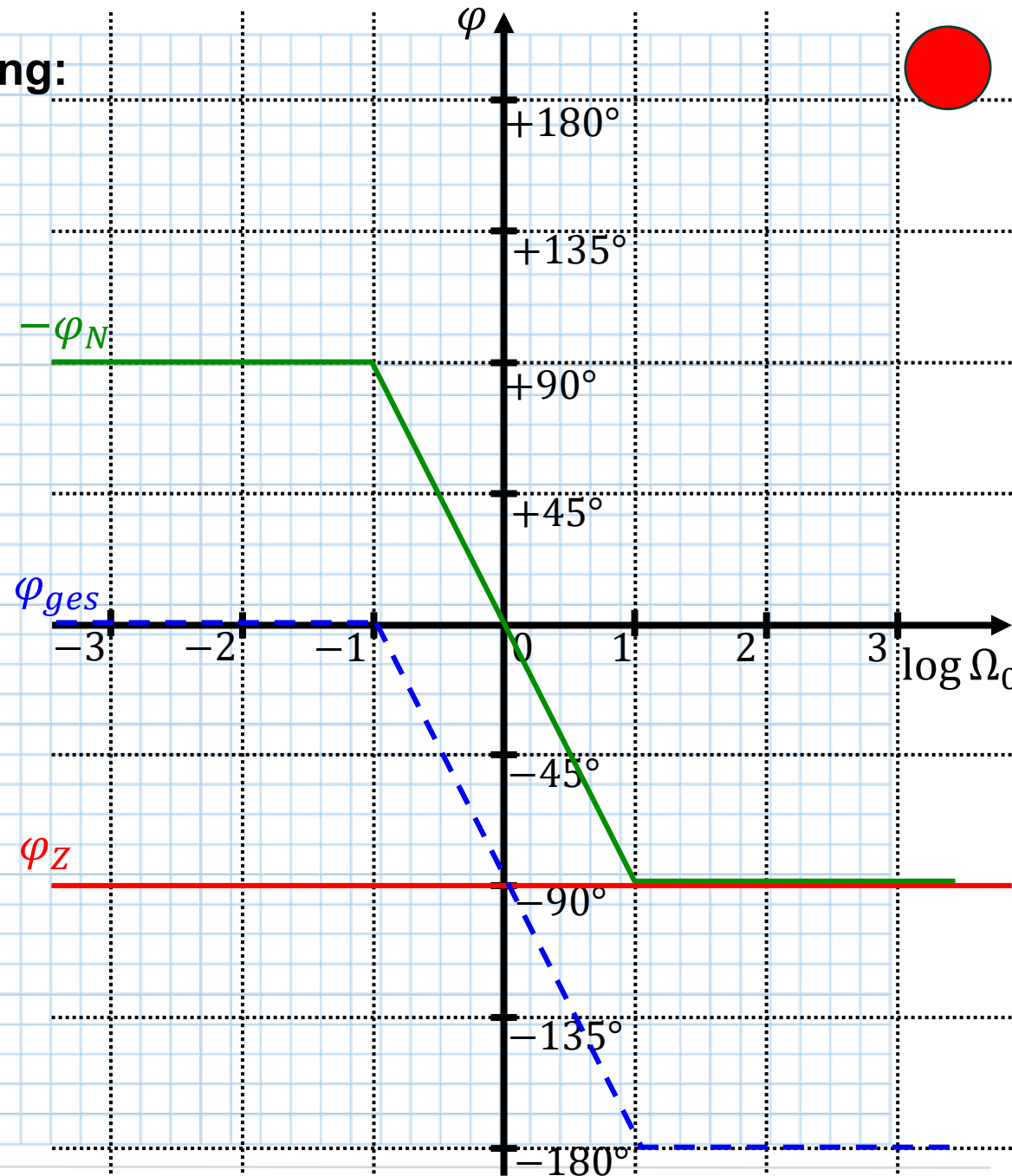
$$\Rightarrow \varphi_Z = -90^\circ; \varphi_N \rightarrow -90^\circ$$

$$-\varphi_N \rightarrow +90^\circ$$

a) $\omega \gg \omega_0$

$$\Rightarrow \varphi_Z = -90^\circ; \varphi_N \rightarrow +90^\circ$$

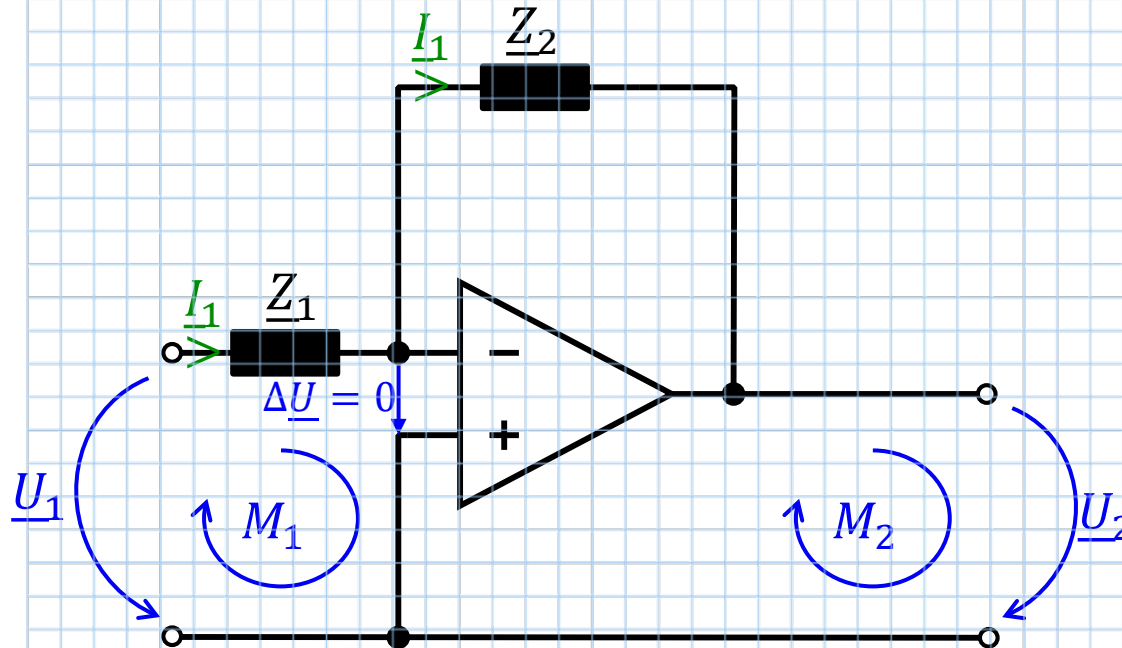
$$-\varphi_N \rightarrow -90^\circ$$



13.5 Das Bode-Diagramm von aktiven Filtern

Grundschialtung:

Rückkopplung an negativen Eingang



Invertierender Verstärker
mit komplexen Impedanzen

$$\begin{aligned} \text{Mesh } M_1: & -\underline{U}_1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = 0 \\ & \leadsto \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mesh } M_2: & -\underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1 = 0 \\ & \leadsto \underline{U}_2 = -\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1 \end{aligned}$$

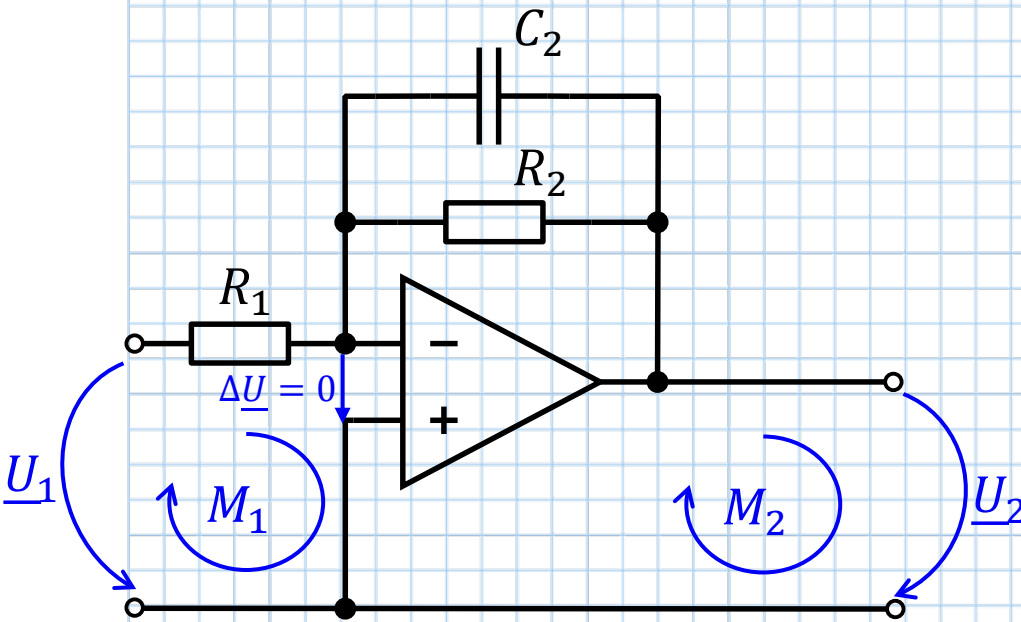
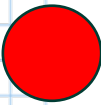
$$\Rightarrow \underline{U}_2 = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \cdot \underline{U}_1$$

Merken !



Analyse genau wie im Kapitel 3!

1. Beispiel: Aktiver Tiefpass



$$\underline{Z}_1 = R_1$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \ominus \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

$$\Rightarrow a_v/dB = 20 \cdot \log \left| -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} \right|$$

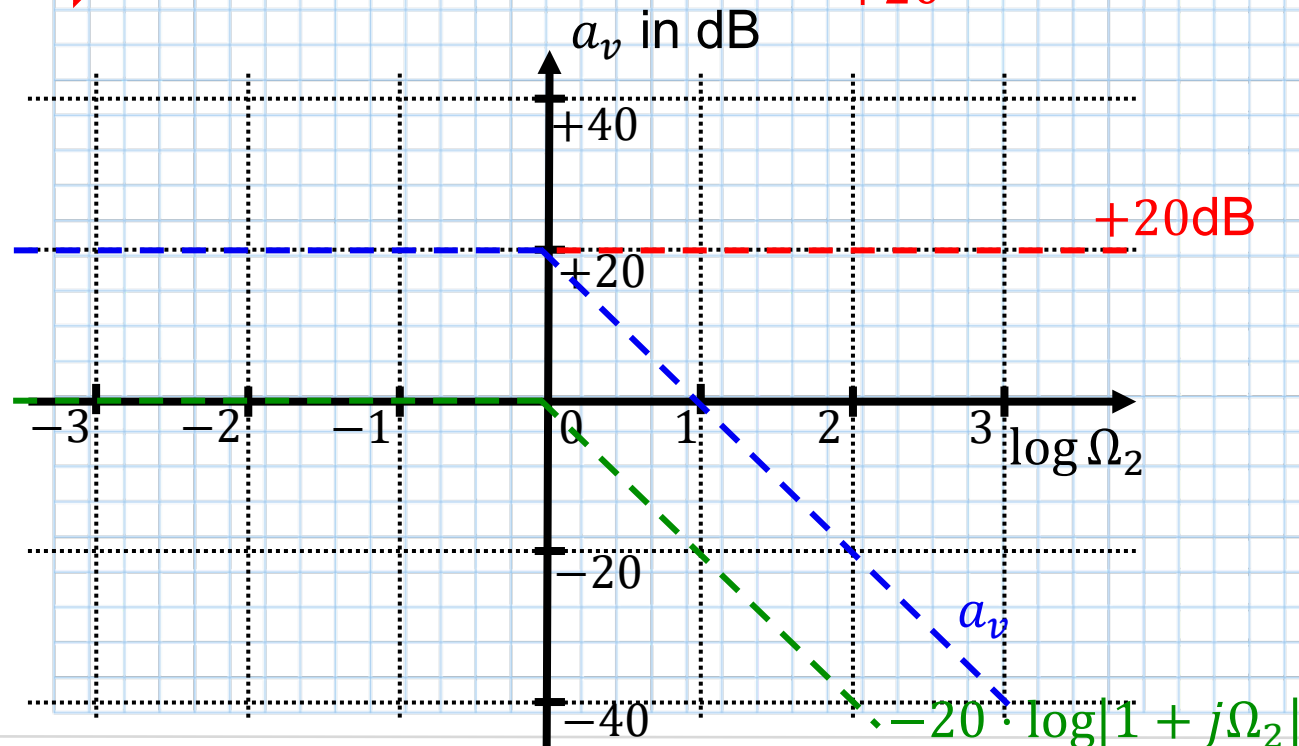
$$a_v/dB = 20 \cdot \log \left| -\frac{R_2}{R_1} \right| - 20 \cdot \log |1 + j\omega R_2 C_2|$$

$$a_v/dB = 20 \cdot \log \left| -\frac{R_2}{R_1} \right| - 20 \cdot \log |1 + j\Omega_2| \quad \text{mit } \Omega_2 = \omega R_2 C_2$$

Beispiel: $\frac{R_2}{R_1} = 10$

$$\Rightarrow a_v/dB = \underbrace{20 \cdot \log(10)}_{+20} - \underbrace{20 \cdot \log |1 + j\Omega_2|}_{\substack{1 \\ \text{TP}}}$$

Verstärkender TP !

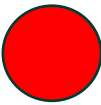


1) $\omega \ll R_2 C_2 \Rightarrow \Omega_2 \rightarrow 0$
 ≈ 0

2) $\omega = R_2 C_2 \Rightarrow \Omega_2 \rightarrow 1$
 $\approx -20 \cdot \log |\sqrt{2}| = -3 \text{ dB}$

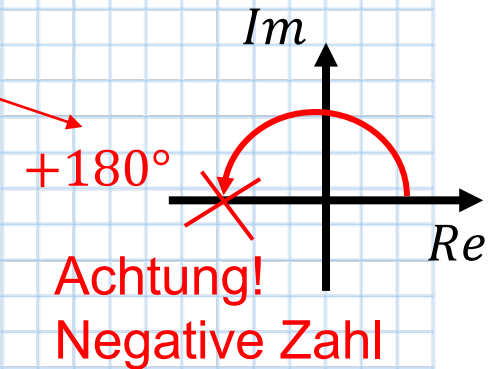
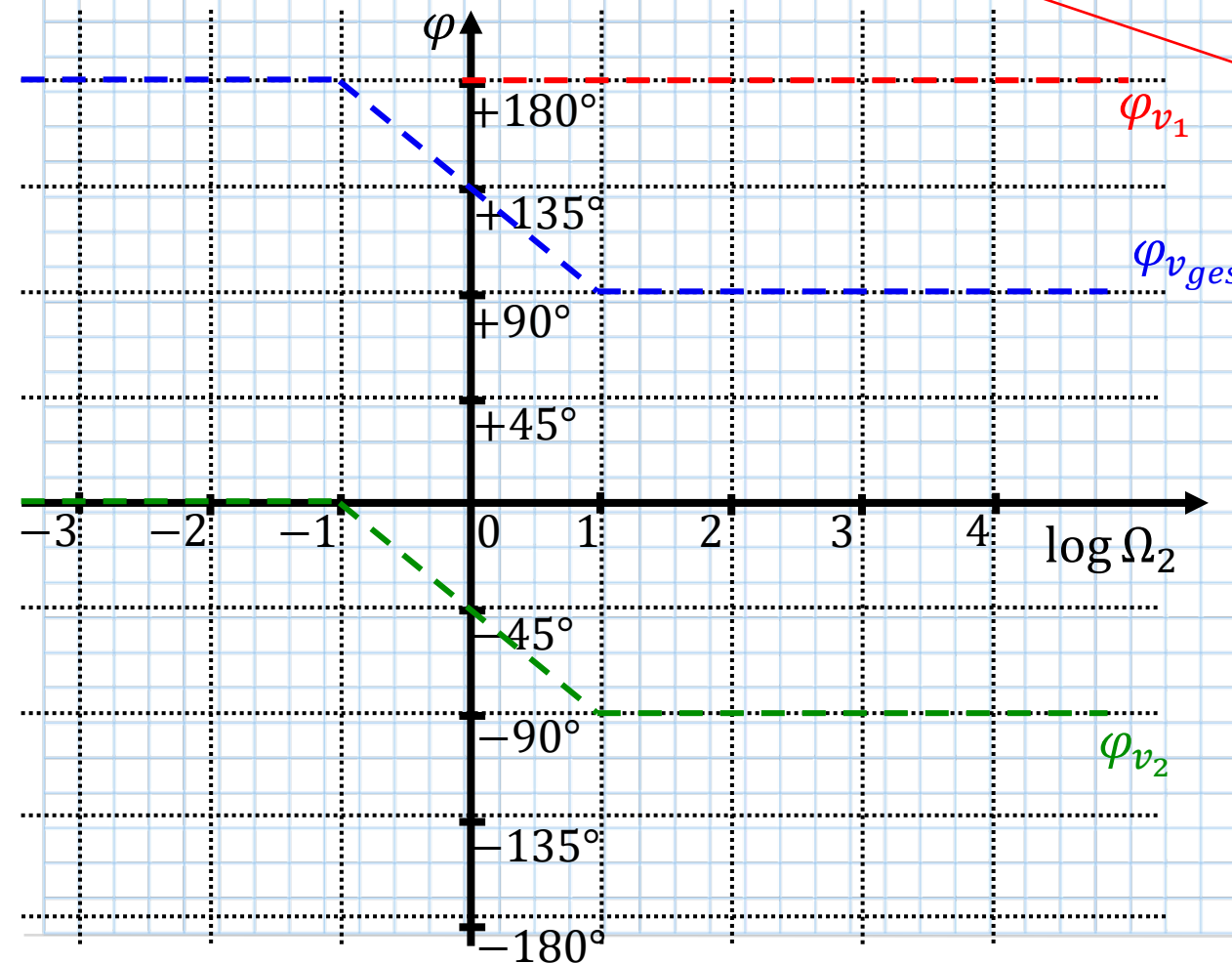
3) $\omega \gg R_2 C_2 \Rightarrow \Omega_2 \rightarrow \infty$
 $\approx -20 \cdot \log \Omega_2$

Das Phasendiagramm für den „verstärkenden Tiefpass“:

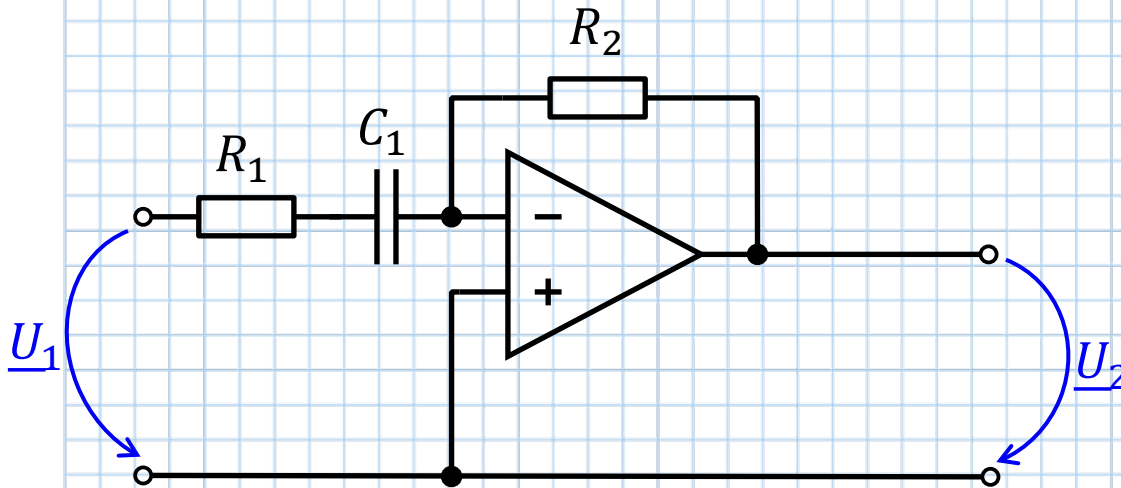


$$a_{v_{ges}} = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

a_{v1} a_{v2}



2. Beispiel: Aktiver Hochpass



$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2$$

$$\sim a_{v_{ges}} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{-j\omega C_1 R_2}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

Hier immer geeignet eine DC-Verstärkung $-\frac{R_2}{R_1}$ zu definieren

$$\Rightarrow a_{v_{ges}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot R_1 \cdot \frac{j\omega C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

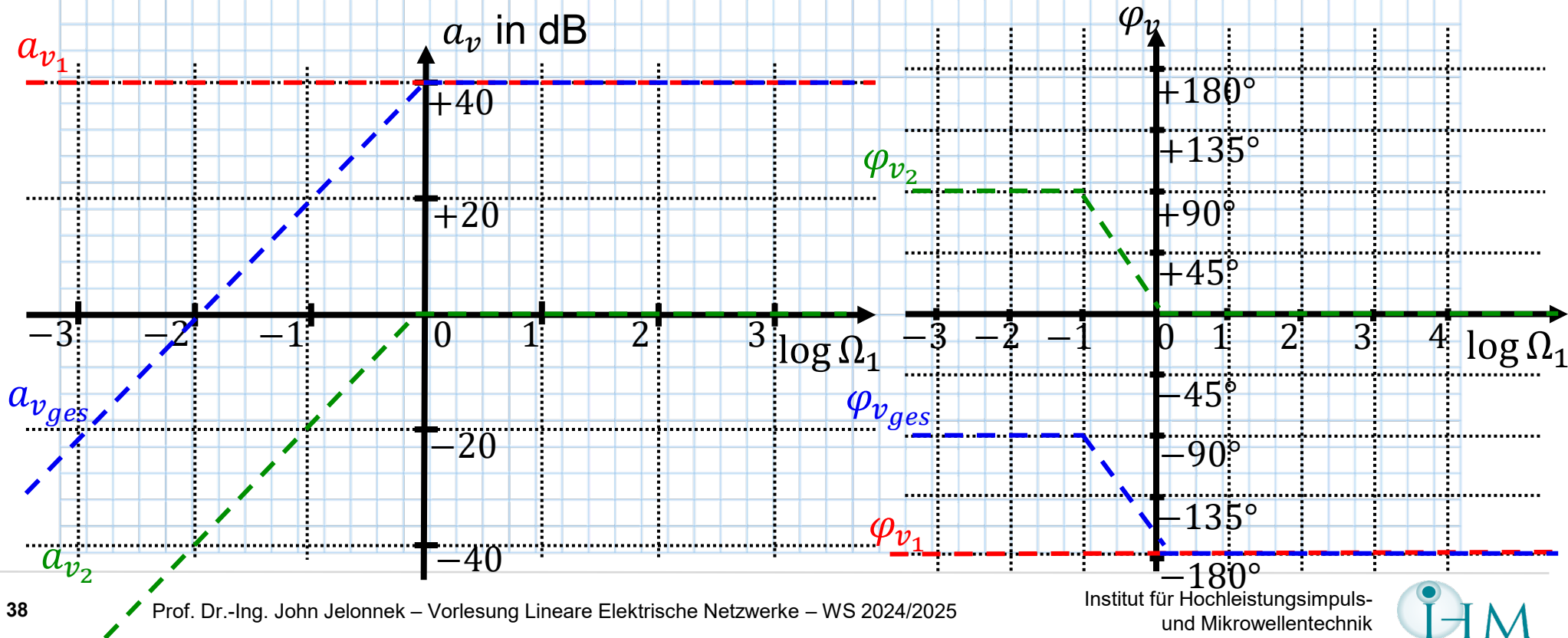
$$\sim \text{Def.: } \Omega_1 := \omega R_1 C_1 \rightarrow a_{v_{ges}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\Omega_1}{1 + j\Omega_1}$$

Bode-Diagramm:

$$a_{v_{ges}} = \overset{a_{v_1}}{\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \overset{a_{v_2}}{\left(\frac{j\Omega_1}{1+j\Omega_1}\right)}$$

Invertierender Verstärker
mit Verstärkung von 100
im Durchlassbereich

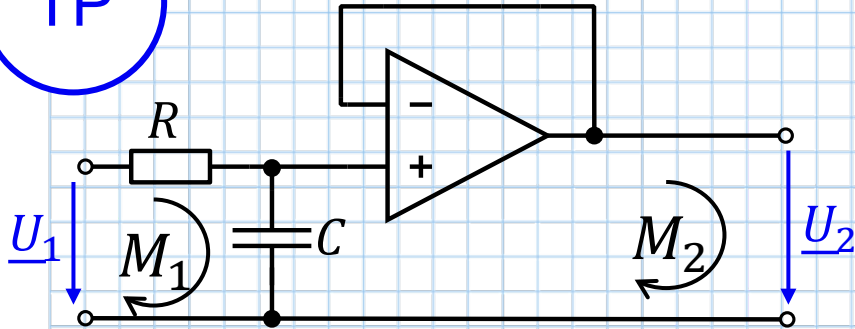
Annahme: $-\frac{R_2}{R_1} = -100$



Zusatzbeispiel: Einfacher Hochpass 1. Ordnung mit Impedanzkonverter

Tiefpass

TP

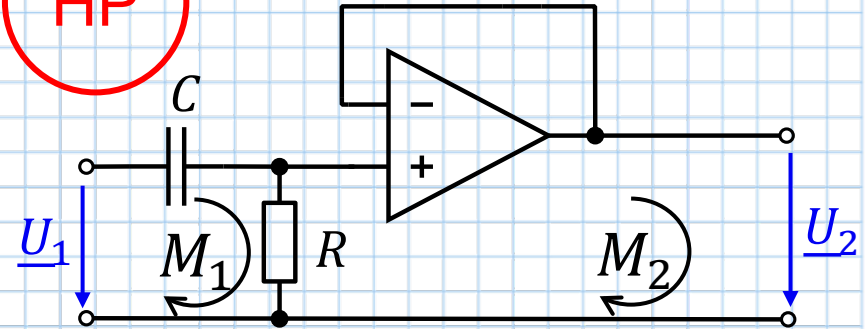


$$\begin{aligned}
 \text{M}_1: \quad -\underline{U}_1 + R \cdot \underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_1 &= 0 \\
 \leadsto \underline{U}_1 &= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_2 &= 0 \\
 \leadsto -\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{\underline{U}_1}{R + 1/j\omega C} &= -\underline{U}_2
 \end{aligned}$$

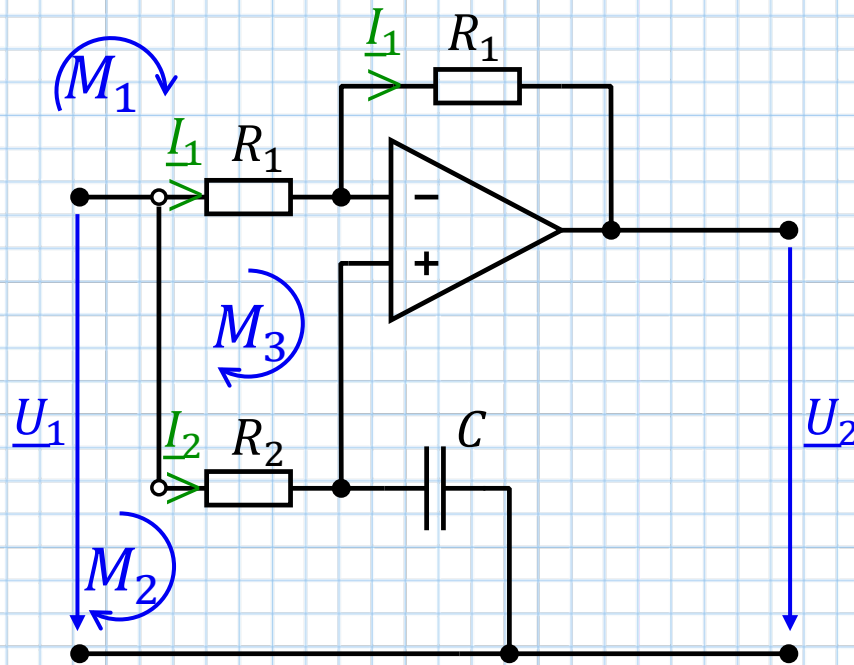
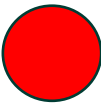
$$\boxed{\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

HP



$$\leadsto \boxed{\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}}$$

3. Beispiel: Allpass



1) Maschengleichung

$$0 = -\underline{U}_1 + R_1 \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \\ = -\underline{U}_1 + 2R_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2$$

2) Maschengleichung

$$0 = -\underline{U}_1 + R_2 \underline{I}_2 + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_2$$

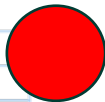
3) Maschengleichung

$$0 = R_1 \underline{I}_1 - R_2 \underline{I}_2$$

Wir wollen $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ berechnen:

Dazu haben wir 3 unabhängige Gleichungen

\underline{I}_1 können wir durch \underline{I}_2 ausdrücken in $\textcircled{M1}$ und $\textcircled{M2}$ einsetzen



$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \overset{M_1}{\curvearrowright} 0 &= -\underline{U}_1 + R_1 \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \\ &= -\underline{U}_1 + 2R_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\overset{M_3}{\curvearrowright} \text{ in } \overset{M_1}{\curvearrowright}} 0 = -\underline{U}_1 + 2 \cdot \cancel{R_1} \cdot \frac{R_2}{\cancel{R_1}} \underline{I}_2 \cdot \underline{U}_2$

$\overset{M_2}{\curvearrowright} \underline{U}_1 = R_2 \underline{I}_2 + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_2 \xrightarrow{\text{Nach } \underline{I}_2 \text{ auflösen}} \underline{I}_2 = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_1$

$\rightarrow \underline{U}_1 = 2 \cdot R_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2 = 2 \cdot R_2 \cdot \frac{\underline{U}_1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} + \underline{U}_2 = \frac{2 \cdot j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_2 C} \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

$\underline{U}_2 = \left(1 - \frac{2j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_2 C} \right) \underline{U}_1 = \frac{1 + \cancel{j\omega R_2 C} - \cancel{2j\omega R_2 C}}{1 + j\omega R_2 C} \underline{U}_1$

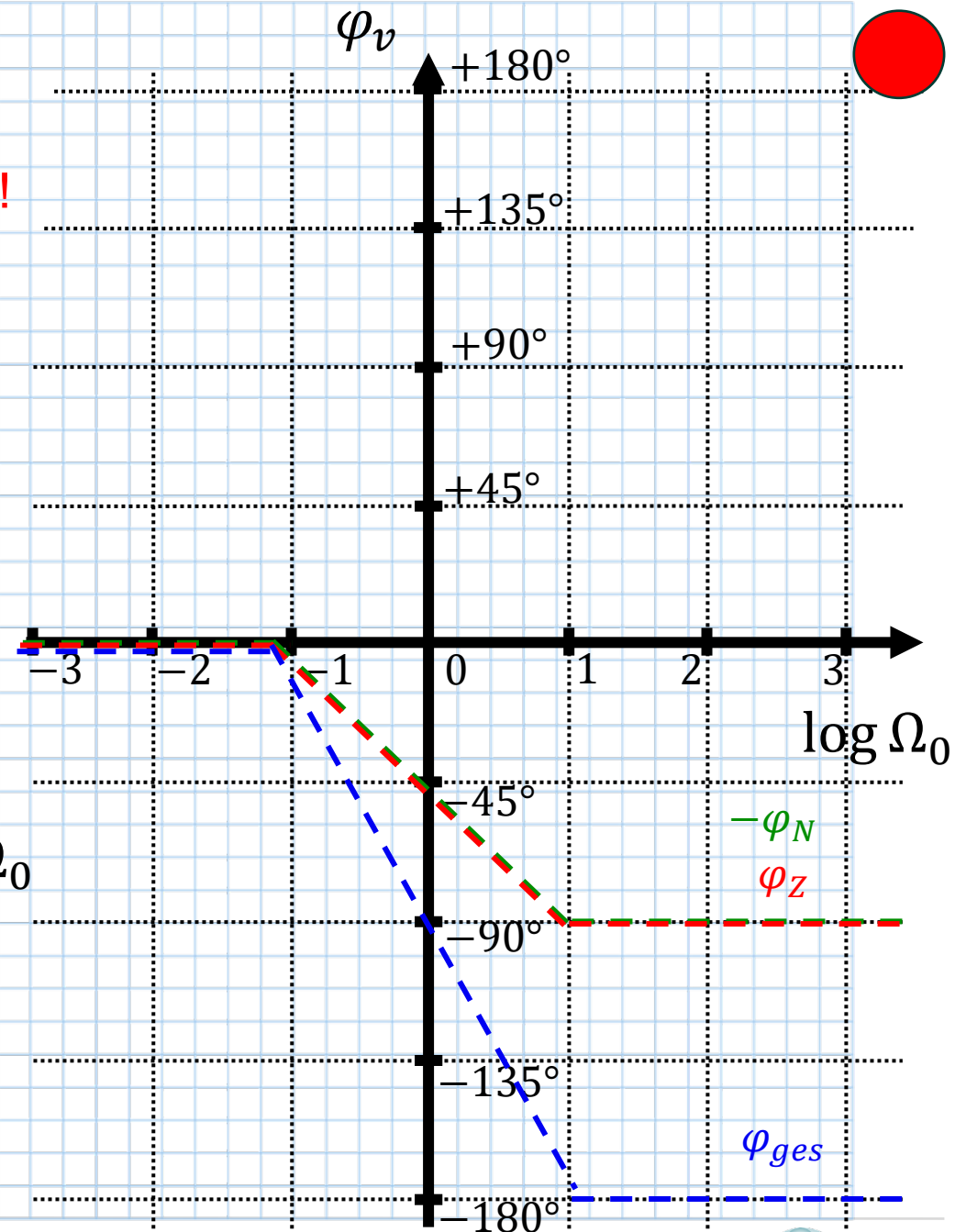
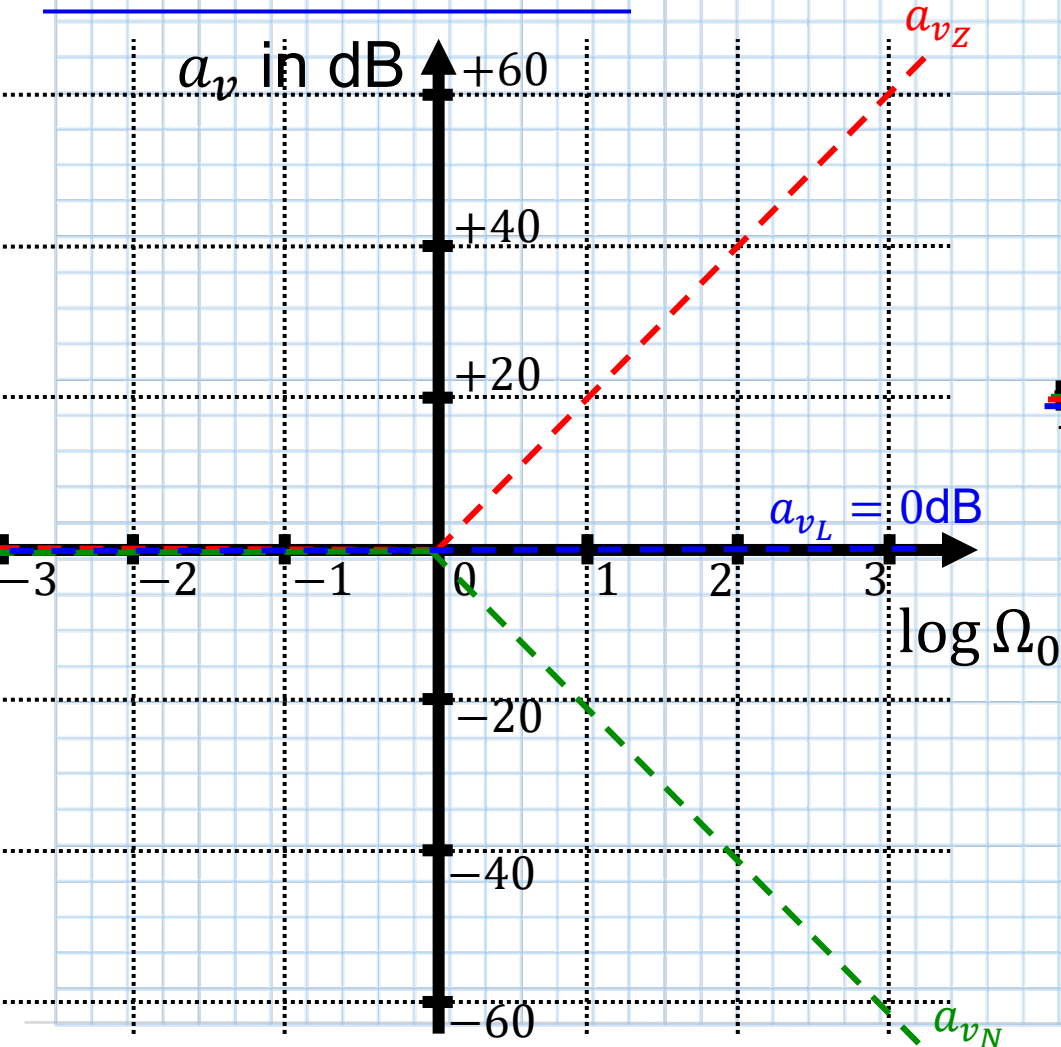
$\Rightarrow \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_2 C} \quad \text{mit} \quad \Omega_0 = \omega R_2 C \leadsto \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\Omega_0}{1 + j\Omega_0}$

Bode-Diagramm:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\Omega_0}{1 + j\Omega_0}$$

a_{vZ} (red circle)
 a_{vN} (green circle)

ausschließlich
Phasendrehung!



Fin

