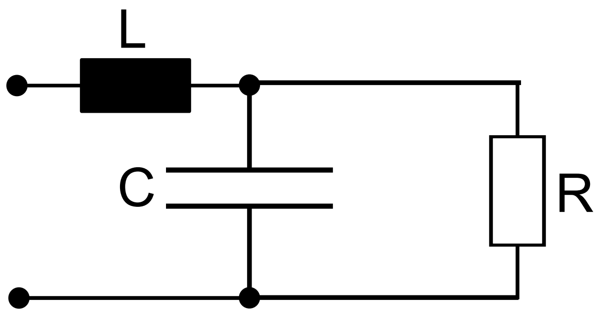
9.1 Lineare Zweipole mit passiven Bauelementen

Zunächst nur Zweipole aus passiven Bauelementen
(Widerständen + Reaktanzen(L, C))

Beispiel:



Für diesen Zweipol gilt:

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$= j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{[1 + (\omega RC)^2]}$$

$$\underline{Z} = \underbrace{\frac{R}{1 + \omega^2 (RC)^2}}_{\mathbf{Re}\{\underline{Z}\}} + j \underbrace{\left[\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 (RC)^2}\right]}_{\mathbf{Im}\{\underline{Z}\}}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Imaginärteil $\stackrel{!}{=}$ 0 ?

$$\omega_0 L \stackrel{!}{=} \frac{\omega_0 R^2 C}{1+\omega_0^2 R^2 C^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Im}\left\{ \underline{Z}\Big|_{\omega_0} \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\omega_0 L(1+\omega^2 R^2 C^2) - \omega_0 R^2 C}{1+\omega_0^2 R^2 C^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 L\left(1+\omega_0^2 R^2 C^2\right) - \omega_0 R^2 C \stackrel{!}{=} 0$$

$$\curvearrowright \boldsymbol{\omega_{0_1} = 0 \ (\textit{triviale Lösung})}$$

$$L\left(1+\omega_0^2 R_C^2 C^2\right) = R^2 C \quad \curvearrowright \quad 1+\omega_0^2 R^2 C^2 = R^2 \frac{C}{L}$$

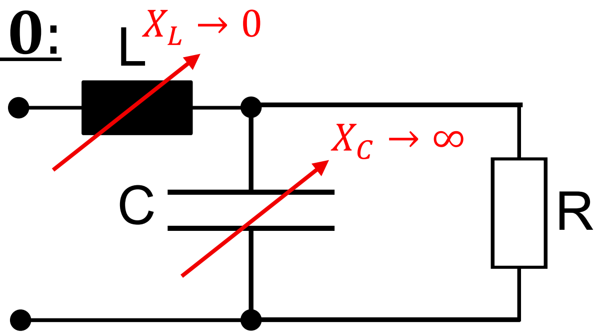
$$\curvearrowright \omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C^2}\left(R^2 \frac{C}{L} - 1\right) \quad \curvearrowright \quad \boldsymbol{\omega_{0_{2,\cancel{3}}} = \cancel{\pm} \frac{1}{RC}\sqrt{R^2 \frac{C}{L} - 1}}$$

unter der Bedingung:

$$\boldsymbol{R^2 \geq \frac{L}{C}}$$

Abhängigkeit der Impedanz von der Kreisfrequenz ω

$\boldsymbol{\omega \to 0}$:

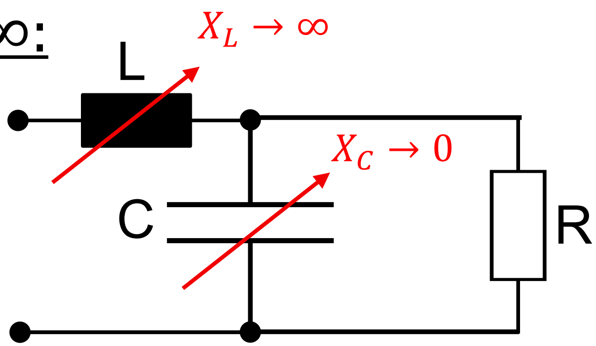


$$jX_L = j\omega L \to 0$$

$$jX_C = -j\frac{1}{\omega C} \to \infty$$

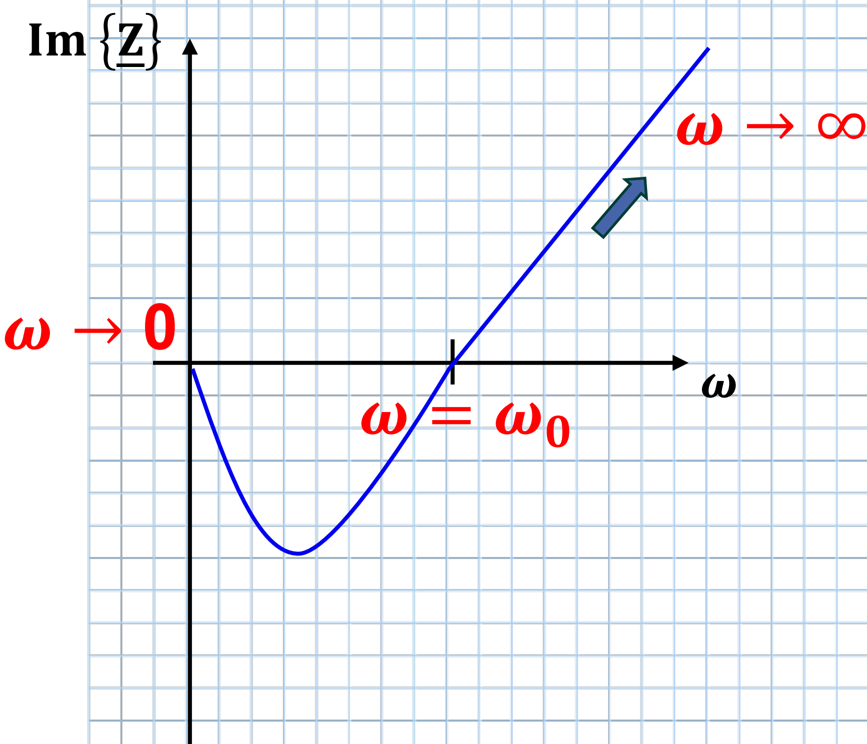
$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z}\Big|_{\omega\to 0} \to R}$$

$\boldsymbol{\omega \to \infty}$:

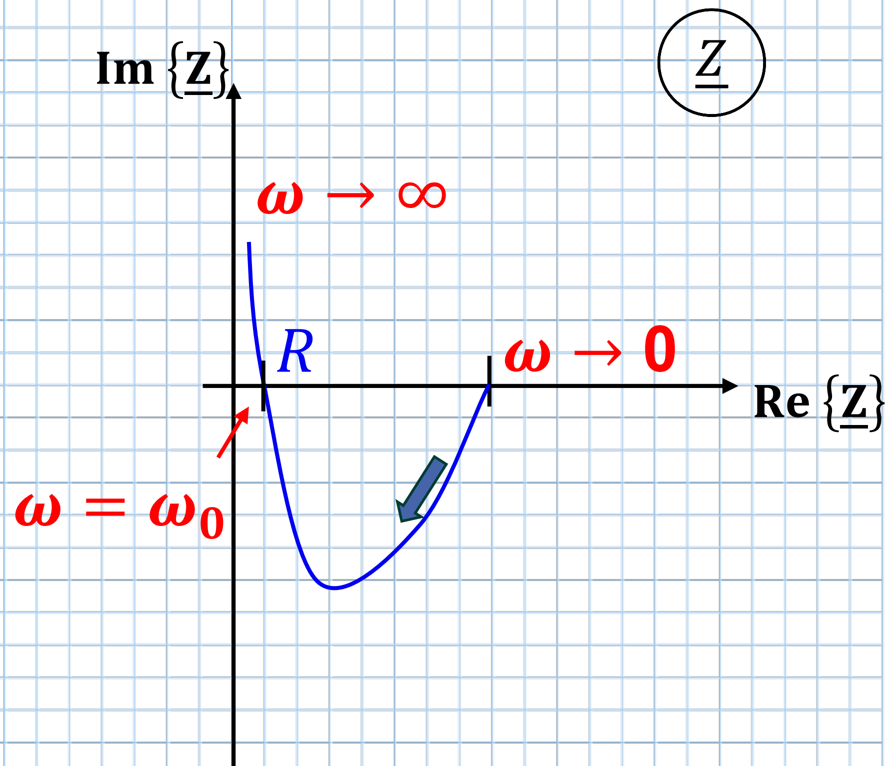


$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z}\Big|_{\omega\to \infty} \to jX_L = j\omega L}$$

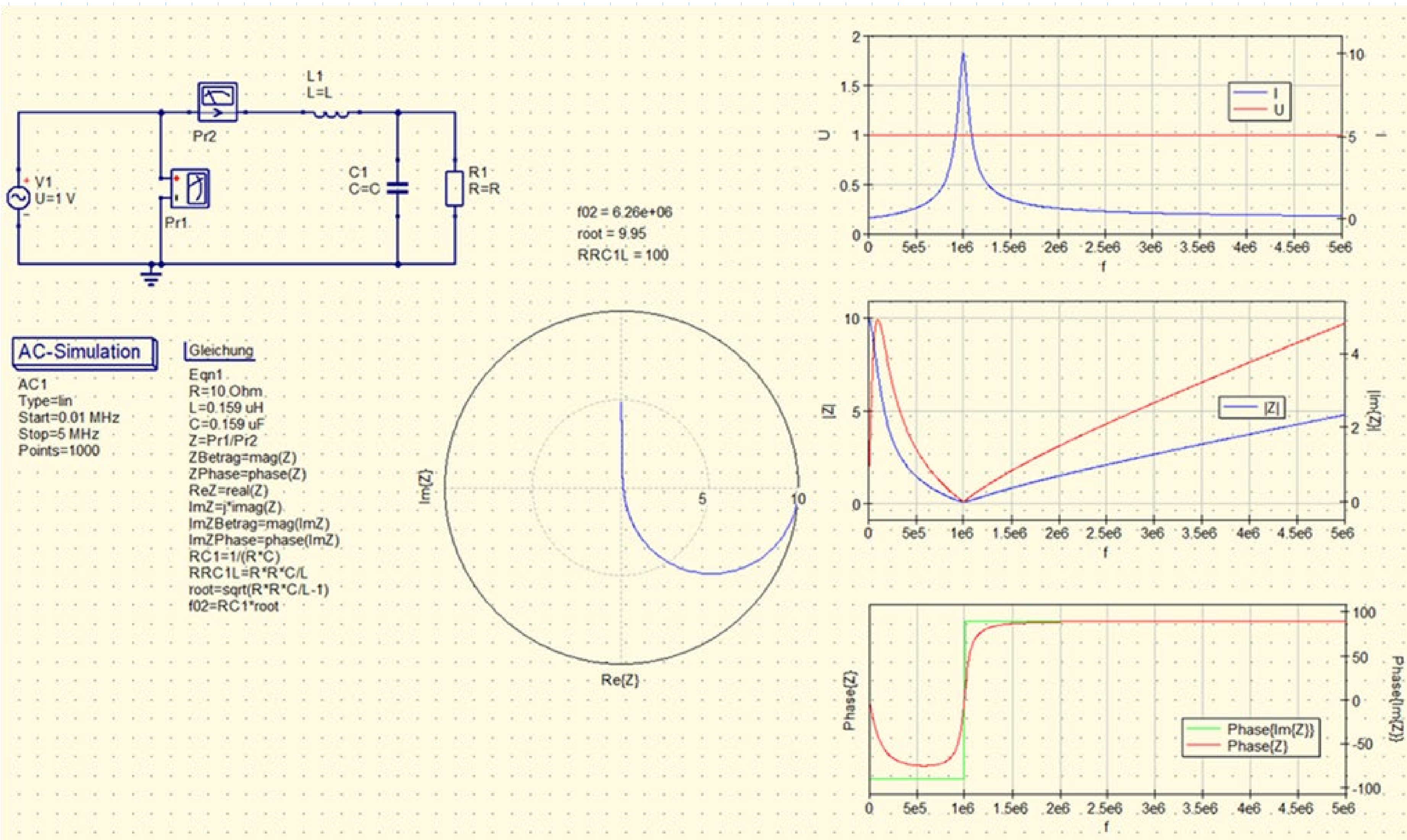
Verlauf der Reaktanz



Ortskurve für Z



Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik



Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Verallgemeinerung

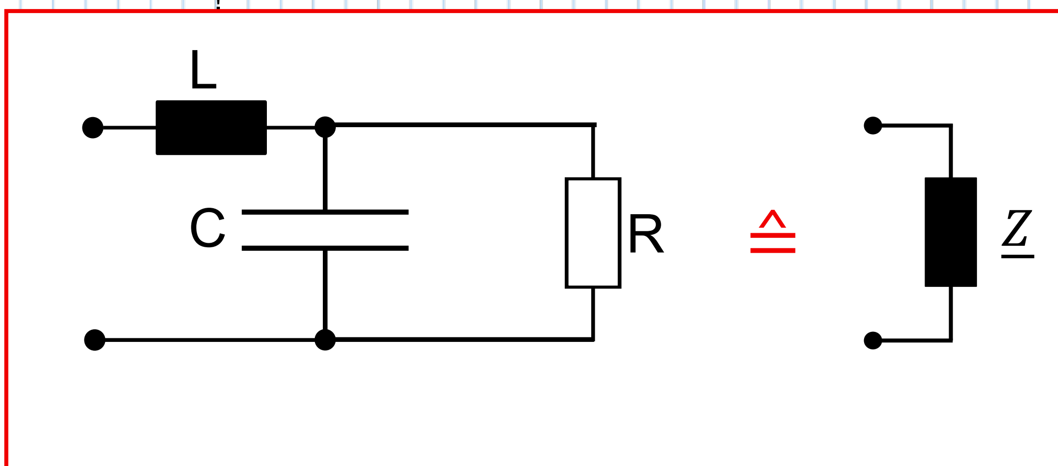
- Jeder passive Zweipol lässt sich durch

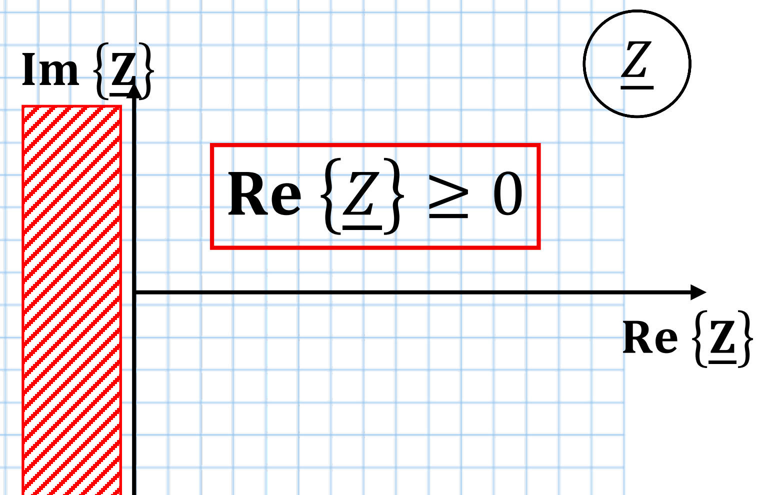
$$\boxed{\mathbf{Im}\left\{\underline{Z}\right\} \text{ und } \mathbf{Re}\left\{\underline{Z}\right\}}$$

eindeutig darstellen.

- Zweipole unterscheiden sich **<u>eindeutig</u>** im Frequenzgang

- Für einen passiven Zweipol gilt $\boxed{\mathbf{Re}\left\{\underline{Z}\right\} \geq 0}$





Einschub: Reaktanzsatz von Foster (Foster´sches Theorem)

Def.: Reaktanz, Impedanz, Admittanz, Immittanz

Reaktanz

- Jedes ideale verlustlose passive Bauelement (L, C)
(bei dem die zugeführte Energie in der Reaktanz gespeichert und ein Viertelzyklus später vollständig wieder in den Stromkreis zurückgeführt wird)

  → Spannungen und Strom sind um ein Viertelzyklus verschoben

- Reaktanzen können „positiv“ und „negativ“ sein

- Reaktanzen sind frequenzabhängig

Def.: „Impedanz“, „Admittanz“, „Reaktanz“, „Suszeptanz“

$$\underline{Z} = jX \qquad\qquad \underline{Y} = \frac{1}{jx} = -j\frac{1}{x} = jB$$

Reaktanz

Suszeptanz

Impedanz

Admittanz

Immittanz

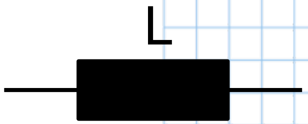
- <u>Nach Foster gilt:</u>

! Der Imaginärteil einer Immittanz eines passiven verlustlosen Netzwerks „steigt immer streng monoton“ mit der Frequenz !

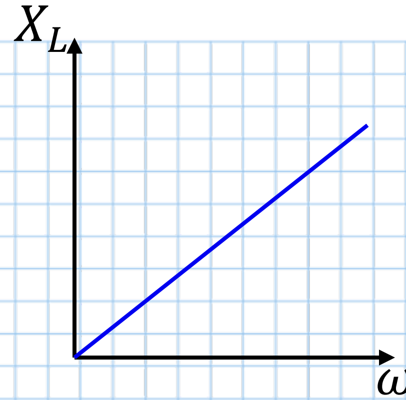
Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Beispiele

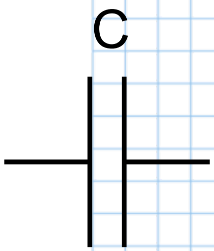
Spule:



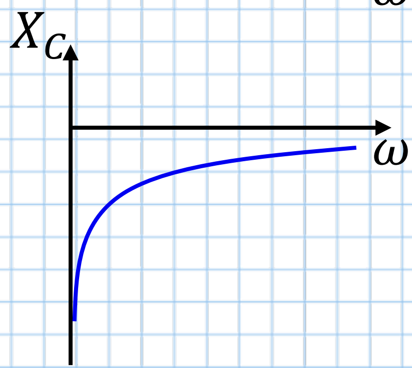
$$\underline{Z} = jX = j\omega L$$



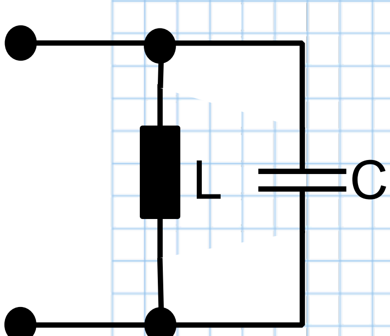
Kondensator:

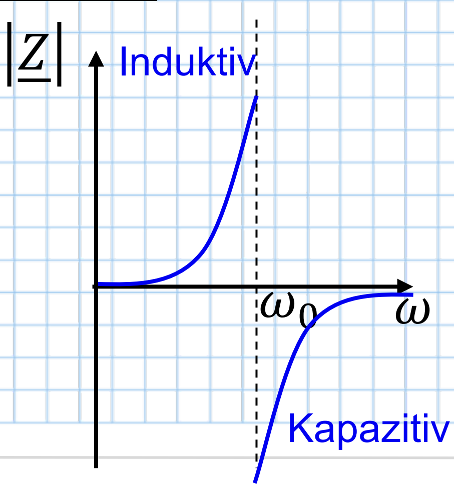


$$\underline{Z} = -j\,\frac{1}{\omega C}$$

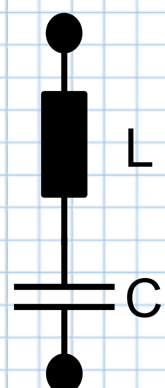


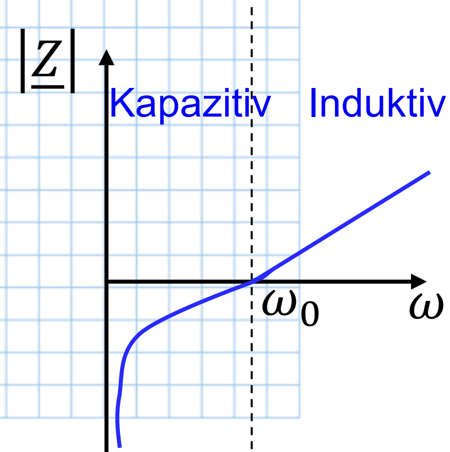
Parallelschwingkreis:





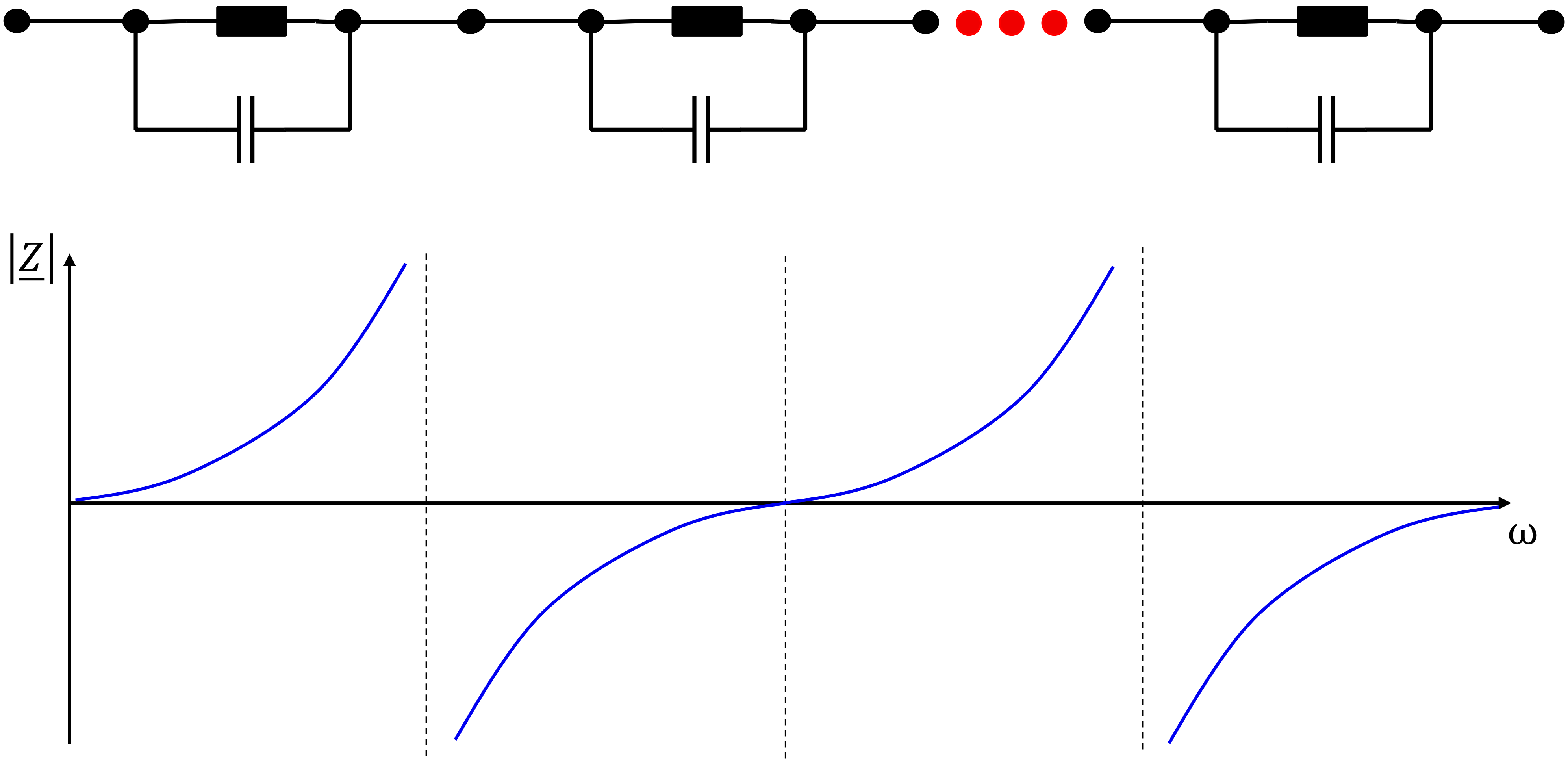
Serienschwingkreis:





Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

Verallgemeinerung für passive Reaktanznetzwerke



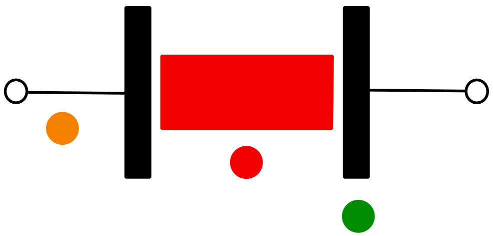
- Nullstellen und Pole wechseln sich ab!
- Die Impedanz steigt immer monoton an

Beschreibung realer Bauelemente *R, L, C*

Abstraktion der konzentrieren Bauelemente

"lumped element model"

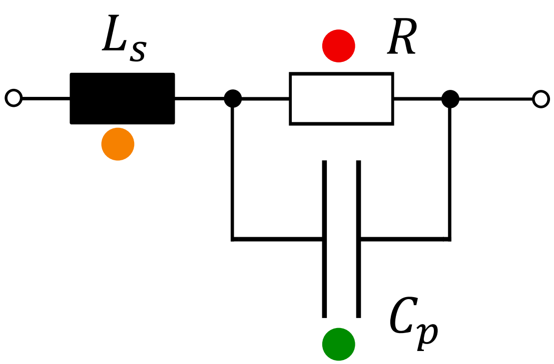
Widerstand *R*

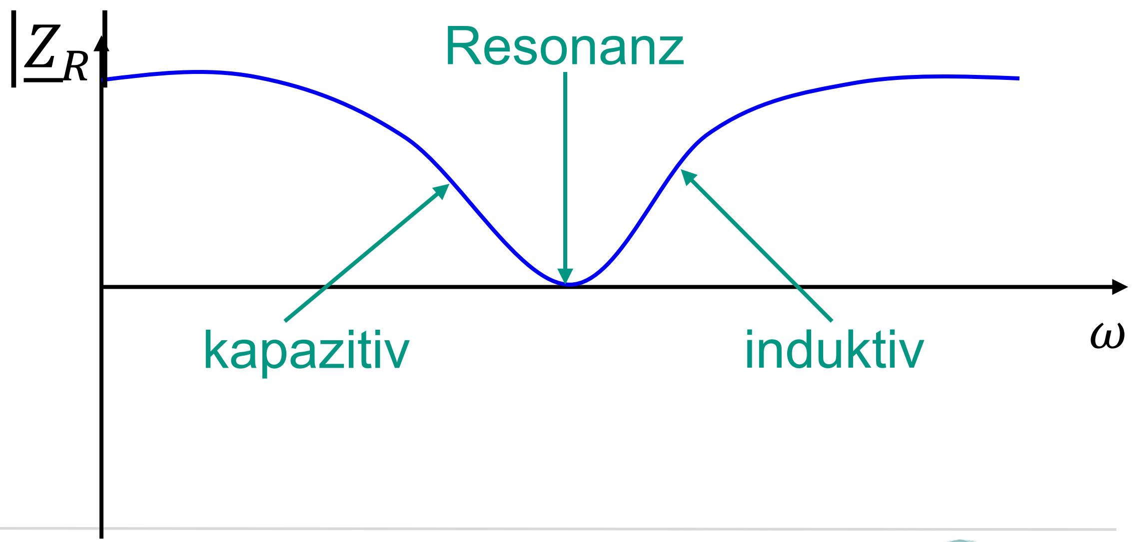


Besteht aus:

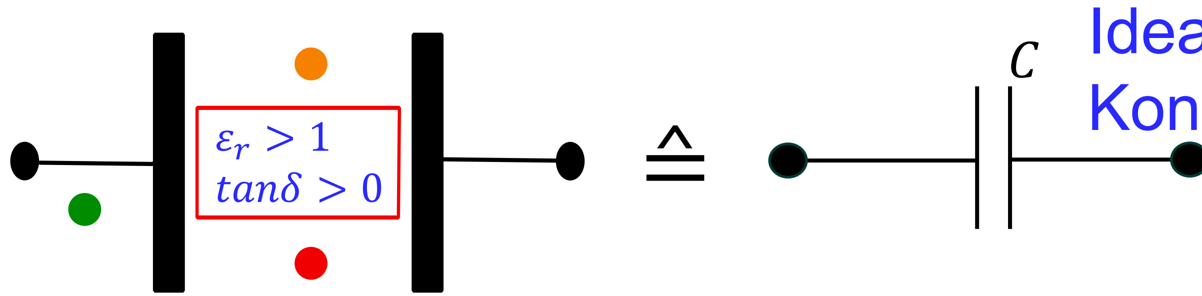
- Anschlussleitungen
- metallische Endkappen
- Idealer Widerstand *R*

Äquivalente Impedanz *Z*

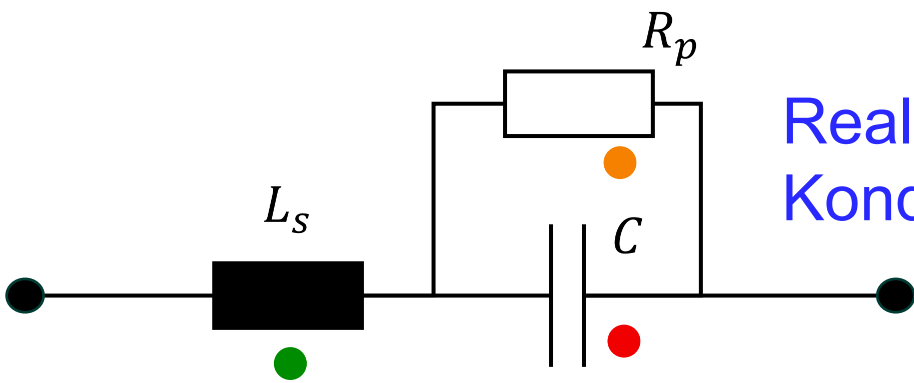




„Reales“ C

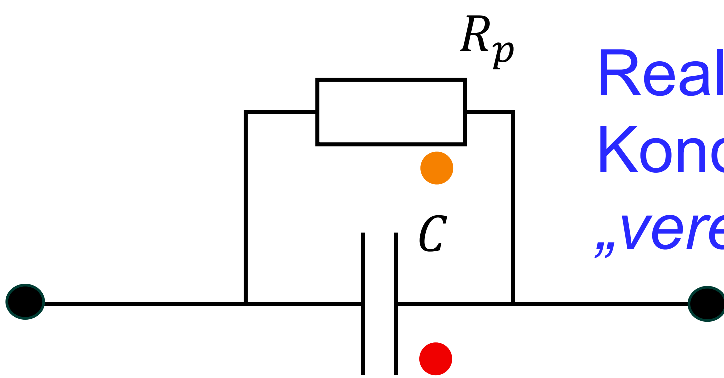


Idealer Kondensator

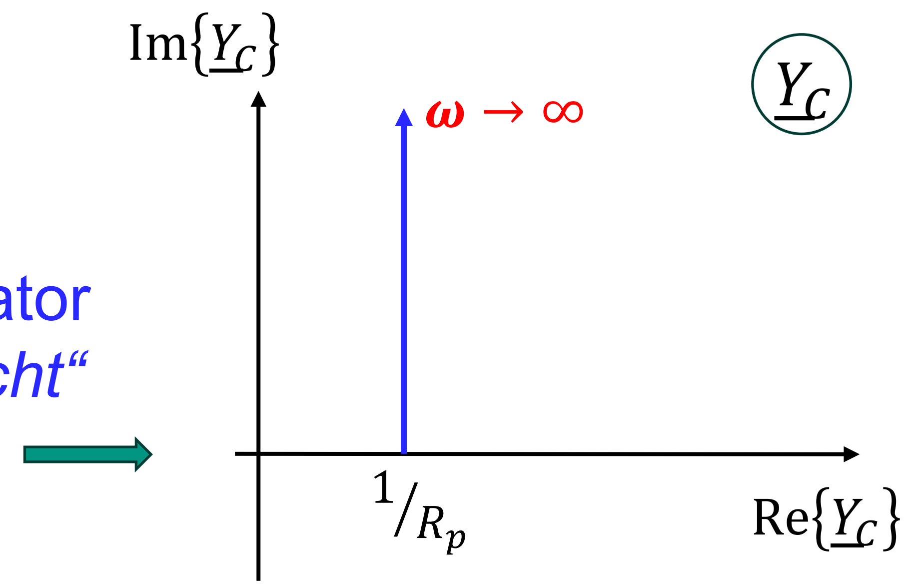


Realer Kondensator

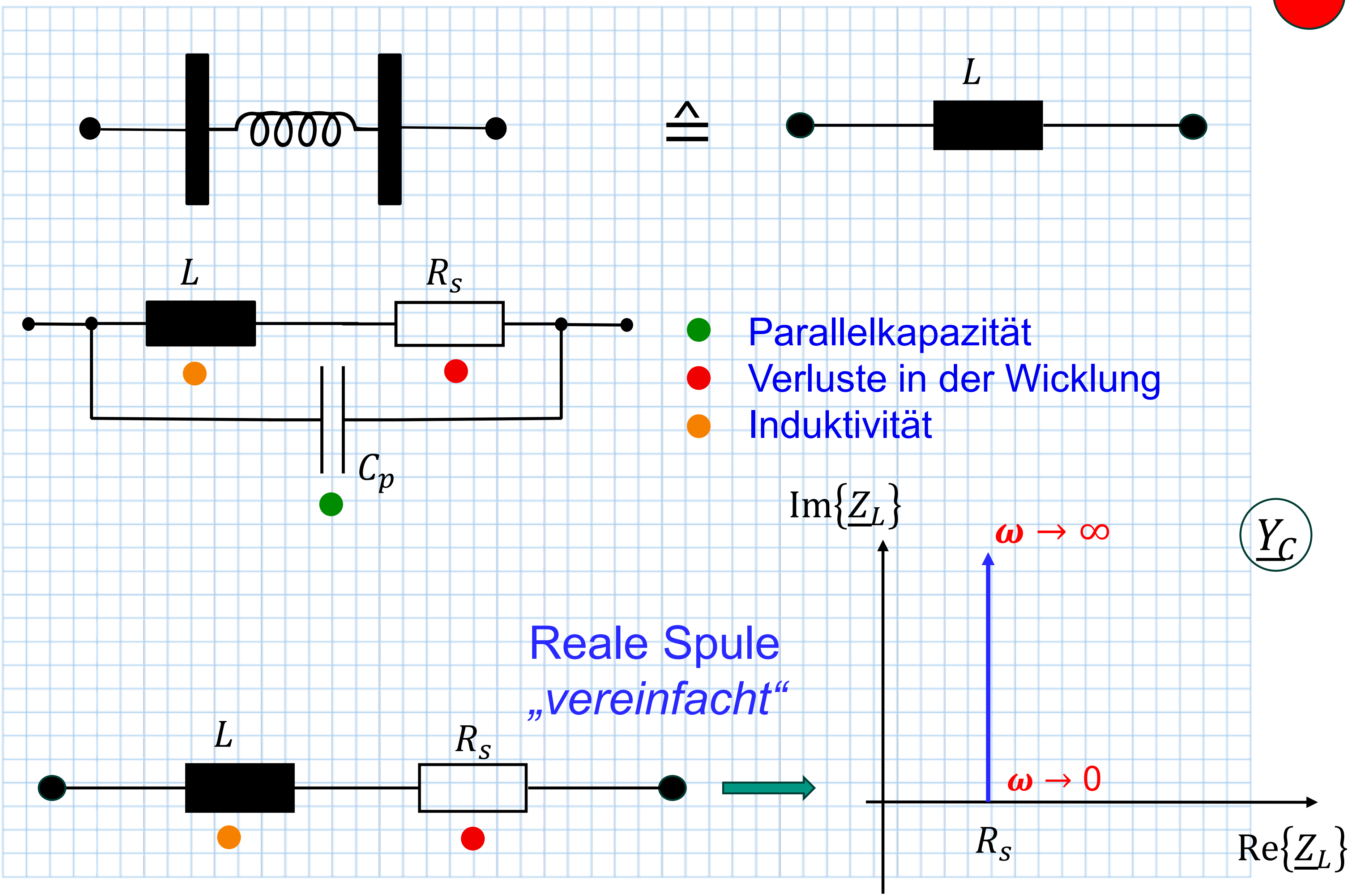
- Anschlussleitungen
- Verluste im Material
- Idealer Kondensator



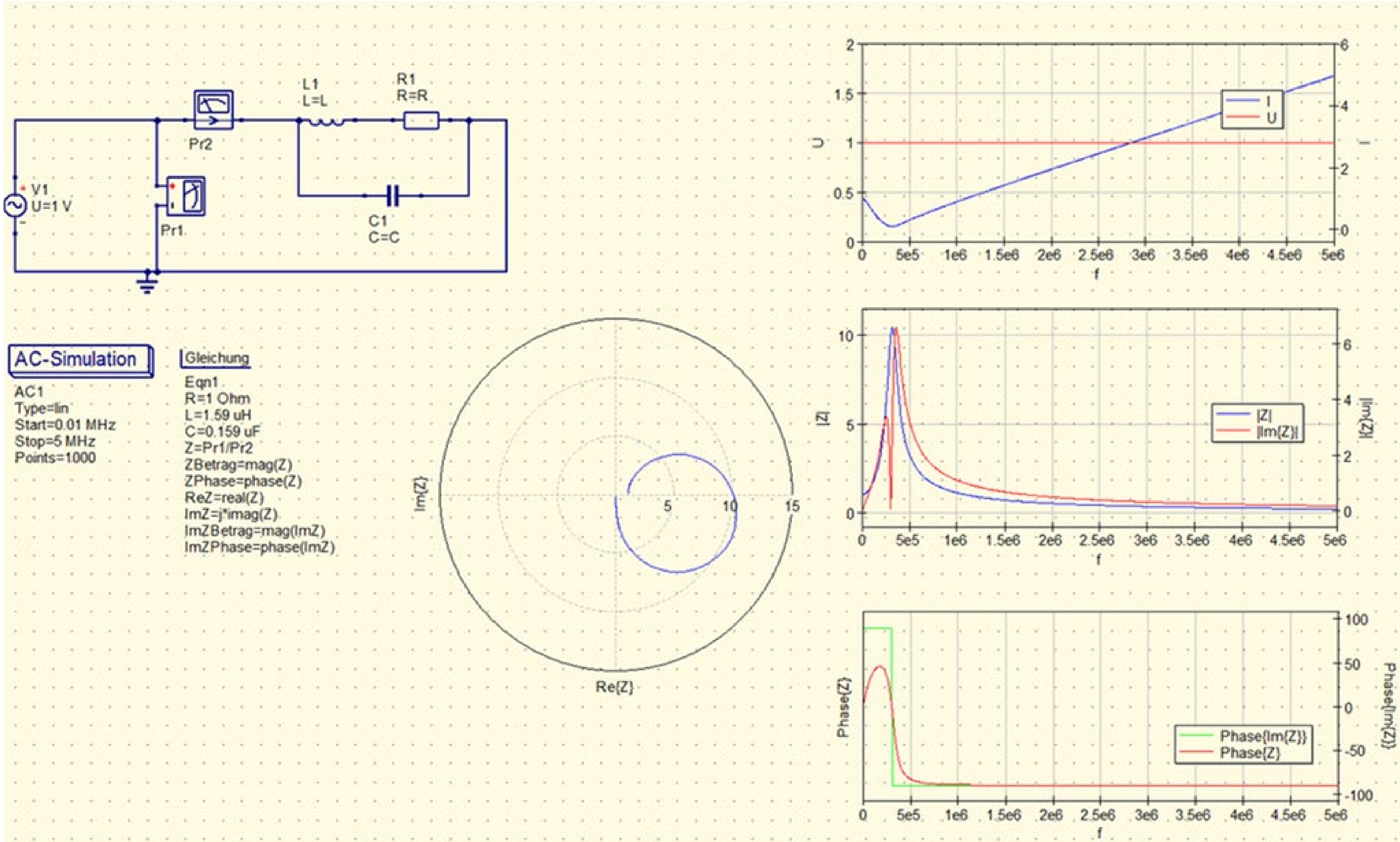
Realer Kondensator *„vereinfacht“*



„Reales" L



Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik



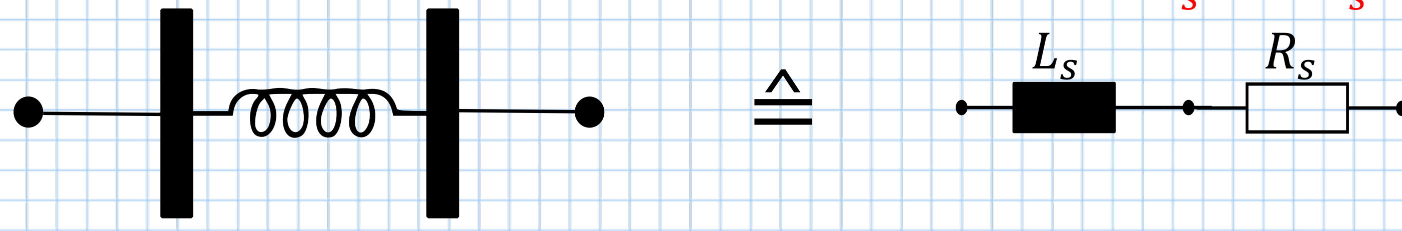
L1
L=L
R1
R=R
Pr2
V1
U=1 V
Pr1
C1
C=C
AC-Simulation
AC1
Type=lin
Start=0.01 MHz
Stop=5 MHz
Points=1000
Gleichung
Eqn1
R=1 Ohm
L=1.59 uH
C=0.159 uF
Z=Pr1/Pr2
ZBetrag=mag(Z)
ZPhase=phase(Z)
ReZ=real(Z)
ImZ=j*imag(Z)
ImZBetrag=mag(ImZ)
ImZPhase=phase(ImZ)
Im{Z}
Re{Z}
U
I
f
|Z|
|Im{Z}|
Phase{Z}
Phase{Im{Z}}

Vereinfachte Serien – Parallel - Umwandlung

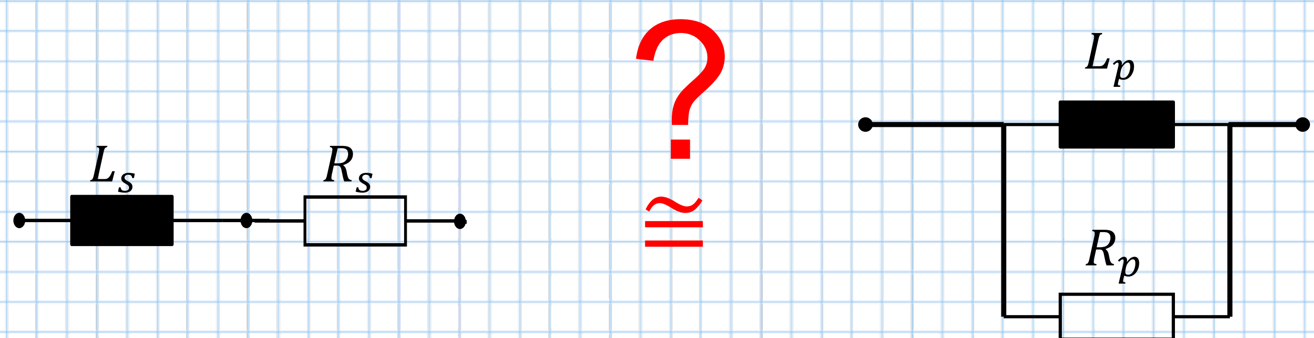
Annahmen:

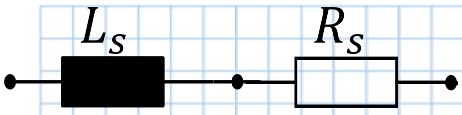
- C_S vernachlässigbar
- $R_s \ll \omega L_s$C

Beispiel: Vereinfachte reale Spule

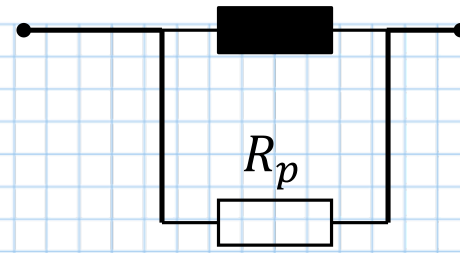


Können wir den vereinfachten Serienkreis als Parallelkreis darstellen?





$\overset{?}{\cong}$



$$\underline{Y}_s = \frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{j\omega L_s + R_s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{(R_s^2 + \omega^2 L_s^2)}$$

$$\xrightarrow{R_s \overset{!}{\ll} \omega L_s}$$

$$\sim \frac{R_s - j\omega L_s}{\omega^2 L_s^2} \sim \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

Imaginärteil:

$$\frac{\omega L_s}{\omega^2 L_s^2} = \frac{1}{\omega L_p}$$

$$\curvearrowright \boxed{L_s \sim L_p}$$

Realteil:

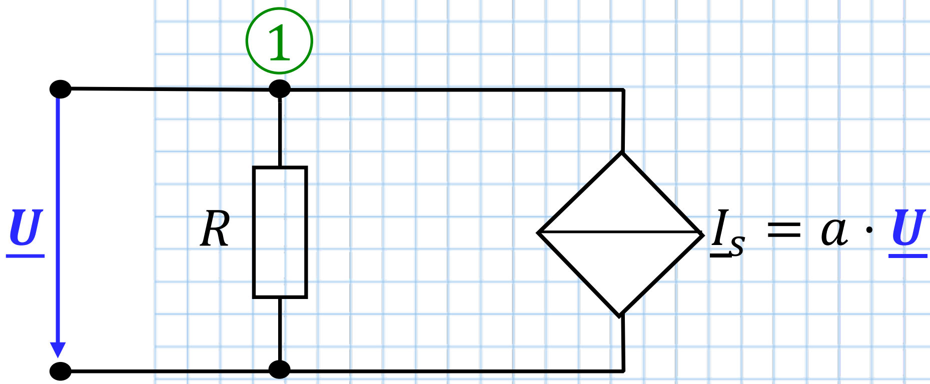
$$\frac{R_s}{\omega^2 L_s^2} = \frac{1}{R_p}$$

$$\boxed{R_p = \frac{\omega^2 L_s^2}{R_s}}$$

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

9.2 Lineare Zweipole mit gesteuerten Quellen

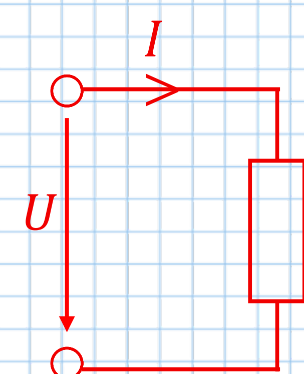
Beispiel: spannungsgesteuerte Stromquelle



$\curvearrowright$ Knotengleichung am Knoten 1:

$$\underline{I} - \underline{I}_R + \underline{I}_s = 0 \curvearrowright \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} - a \cdot \underline{U} = \underline{U}\left(\frac{1}{R} - a\right)$$

$$\curvearrowright \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\frac{1}{R} - a}$$



$\underline{Z} > 0$ **Last**

$\underline{Z} < 0$ **Generator**

Beispiel: $\underline{a} = 1 \cdot \frac{1}{\Omega}$; $R = 10\Omega$

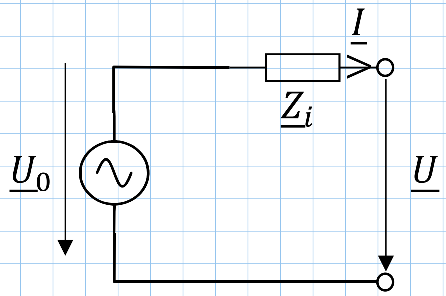
$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{10} - 1} = -\frac{10}{9}$$

$\curvearrowright$ Reelle negative Zahl! $\curvearrowright$ **Generator!**

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

9.3 Umwandlung von Spannungsquellen in Stromquellen

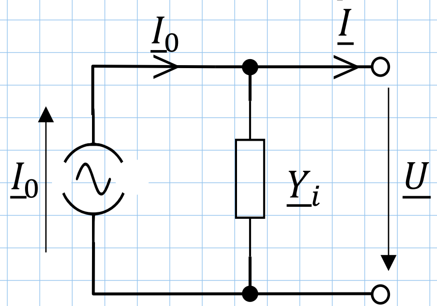
Lineare Spannungsquelle:



$$\underline{U} = \underline{U}_0 - \underline{Z}_i \cdot \underline{I} \;;$$

$\underline{U}_0$: Leerlaufspannung
$\underline{Z}_i$: Quellenimpedanz

Lineare Stromquelle:



$$\underline{I} = \underline{I}_0 - \underline{Y}_i \cdot \underline{U} \;;$$

$\underline{I}_0$: Kurzschlussstrom
$\underline{Y}_i$: Quellenadmittanz

Spannungsquelle	Stromquelle
Leerlaufspannung: $\underline{U}_{LL} = \underline{U}_0$	$\underline{U}_{LL} = \dfrac{\underline{I}_0}{\underline{Y}_i}$
Kurzschlussstrom: $\underline{I}_{KS} = \dfrac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i}$	$\underline{I}_{KS} = \underline{I}_0$

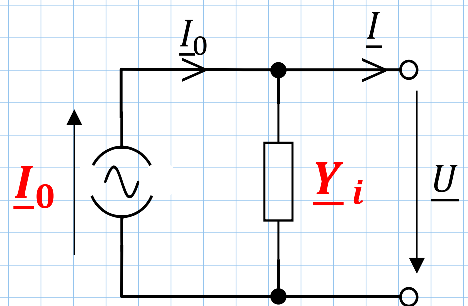
9.3 Umwandlung von Spannungsquellen in Stromquellen

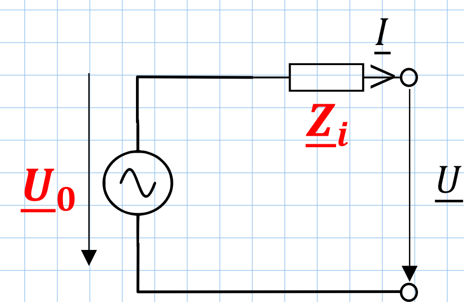
Lineare Strom-/Spannungsquellen sind bestimmt durch:

1.) KS-Strom

2.) LL-Spannung

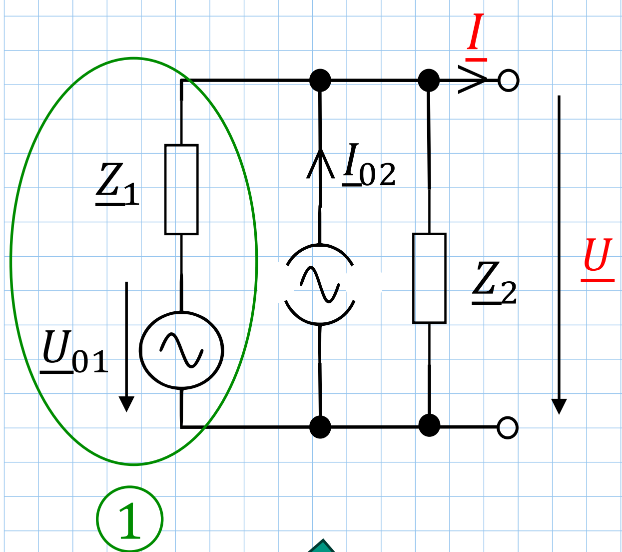
Äquivalente Stromquelle		Äquivalente Spannungsquelle	
KS-Strom:	$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i}$	LL-Spannung:	$\underline{U}_0 = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Y}_i}$
Innenwiderstand	$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$	Innenwiderstand:	$\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i}$

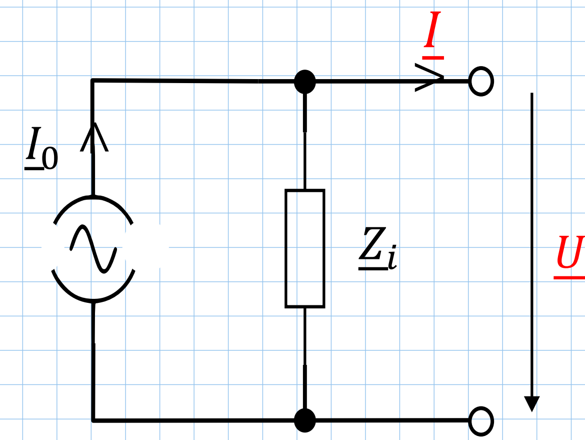


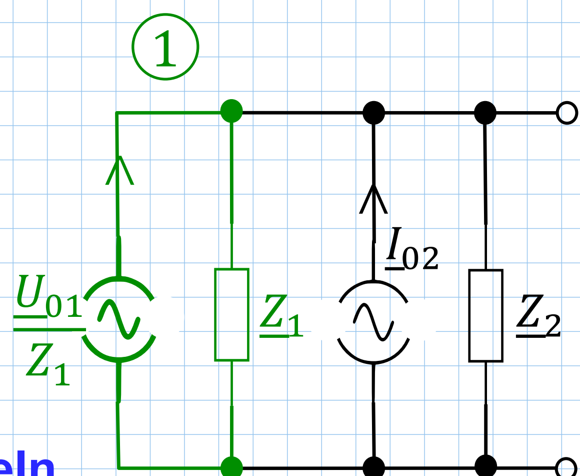


9.4 Lineare Zweipole mit unabhängigen Quellen

Frage: Beliebiger Zweipol ↷ äquivalente Strom- / Spannungsquelle?







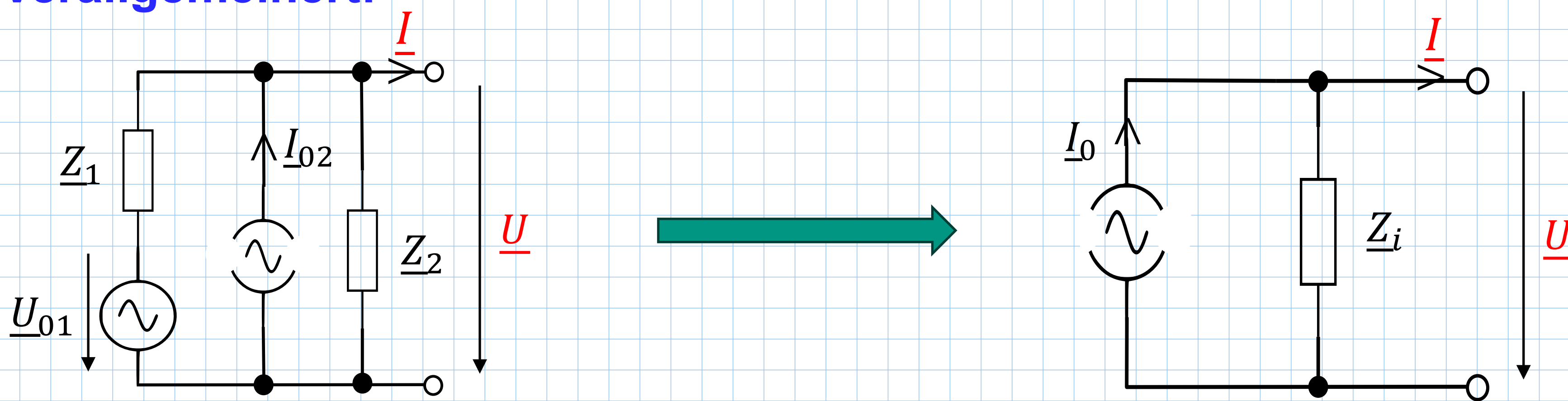
1.) Spgs.-quelle in Stromquelle umwandeln

2.) Äquivalente Quelle ermitteln

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_{01}}{\underline{Z}_1} + \underline{I}_{02}$$

$$\underline{Y}_{01} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

Verallgemeinert:



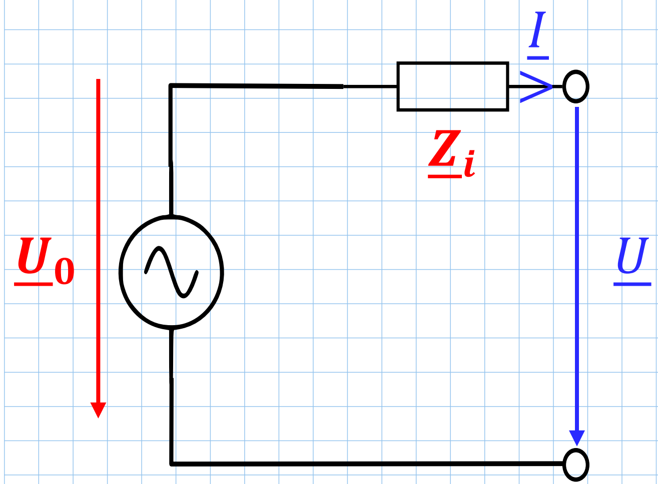
- **Quellenimpedanz:** - alle Quellen auf null!
- Stromquelle offen lassen
- Spannungsquelle kurzschließen
- **Leerlaufspannung:** Ausgang offen lassen

oder

- **Kurzschlussstrom:** Ausgang kurzschließen

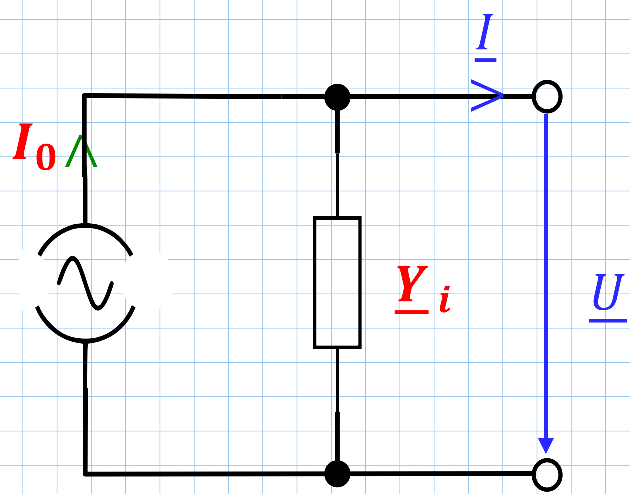
Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik

2 komplexe Größen für „Blackbox“ Beschreibung!



- **„Thevenin“ Ersatzschaltung**

  Kenngrößen: $\underline{U}_0$ und $\underline{Z}_i$



- **„Norton“ Ersatzschaltung**

  Kenngrößen: $\underline{I}_0$ und $\underline{Y}_i$