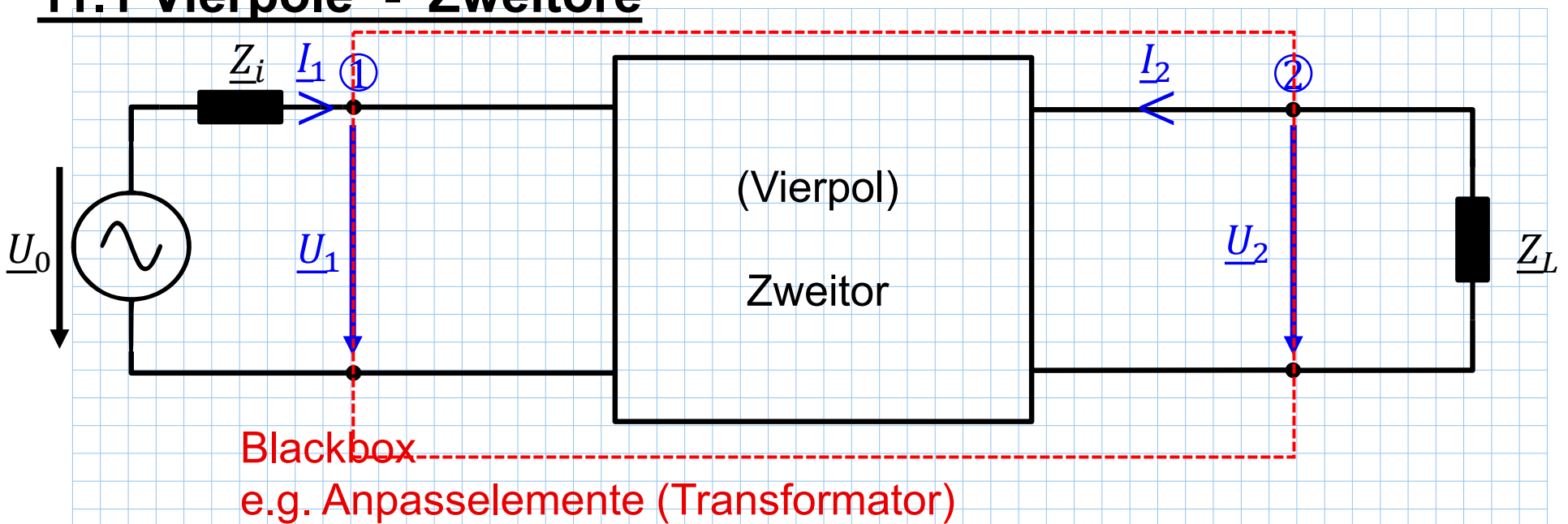
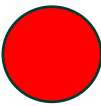
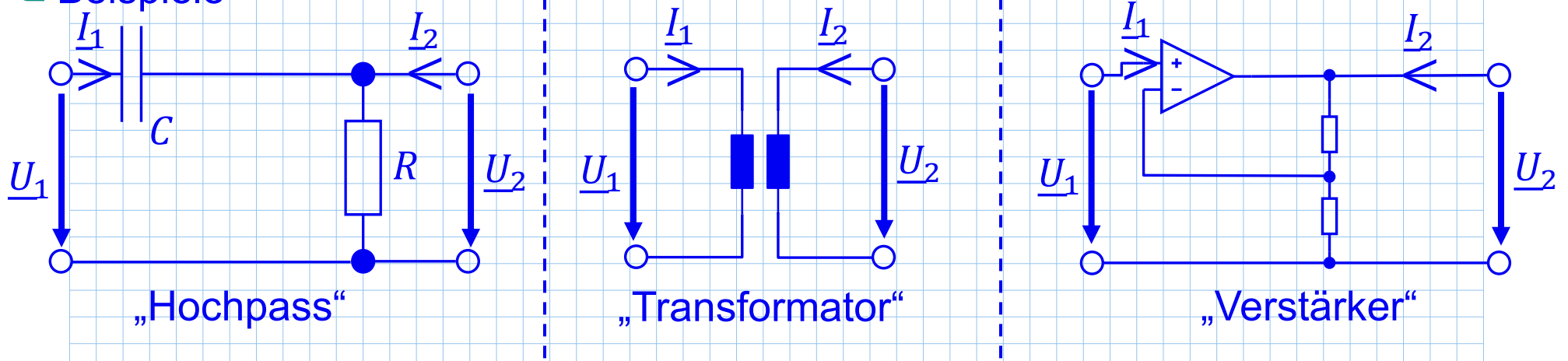


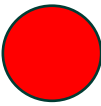
11.1 Vierpole - Zweitore



Beispiele

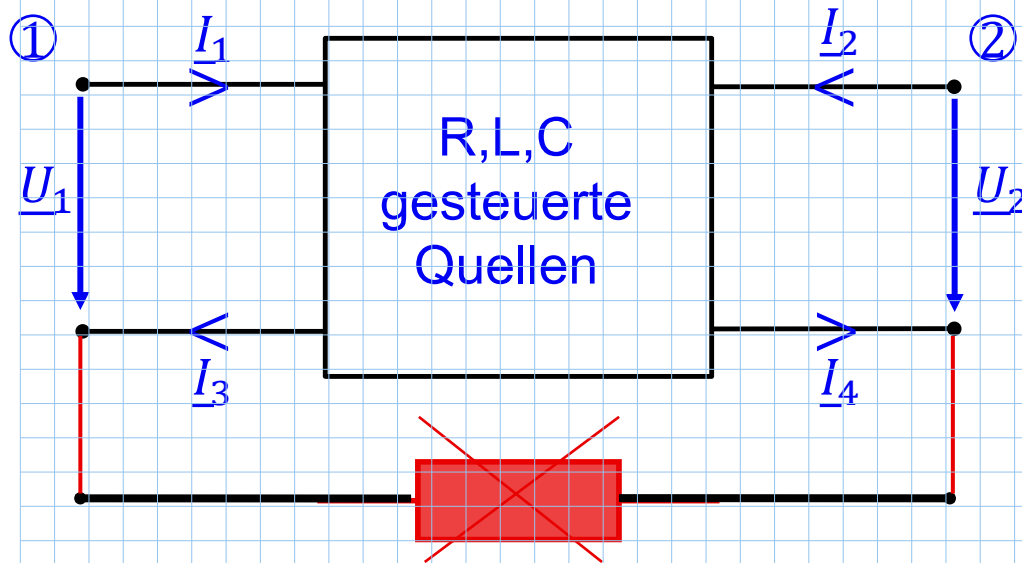


Definition des Vierpols/Zweiters



es gilt: $\underline{I}_1 \stackrel{!}{=} \underline{I}_3$
 $\underline{I}_2 \stackrel{!}{=} \underline{I}_4$ } Für Zweitor

Für Zweitor gilt nicht:

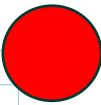


hier wäre

$$\underline{I}_1 \neq \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_2 \neq \underline{I}_4$$

Allgemeine Formulierungen:



■ Impedanzmatrix

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

■ Admittanzmatrix

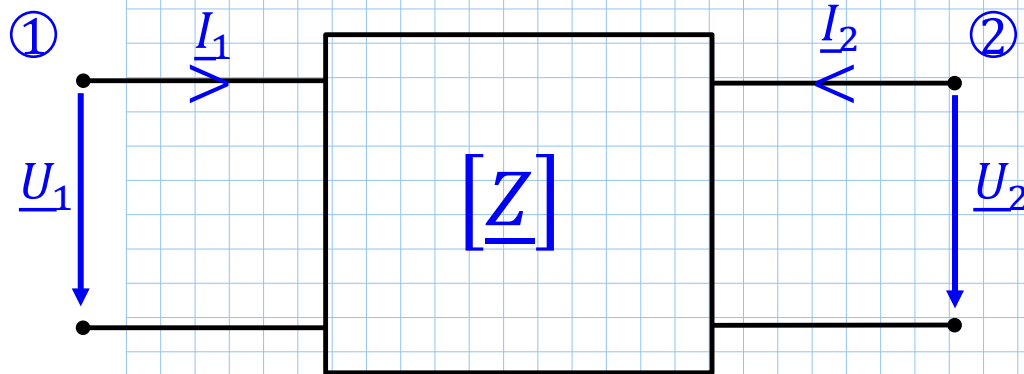
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\underline{Y}] = [\underline{Z}^{-1}]$$

■ Kettenmatrix

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Jedes Zweitor lässt sich als $[\underline{Z}]$, $[\underline{Y}]$, $[\underline{A}]$ darstellen!

11.2 Impedanzmatrix



$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$$

$$\Rightarrow \underline{U} = [\underline{Z}] \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{I}_2=0}$$

Eingangs-Leerlaufimpedanz

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{I}_1=0}$$

Ausgangs-Leerlaufimpedanz

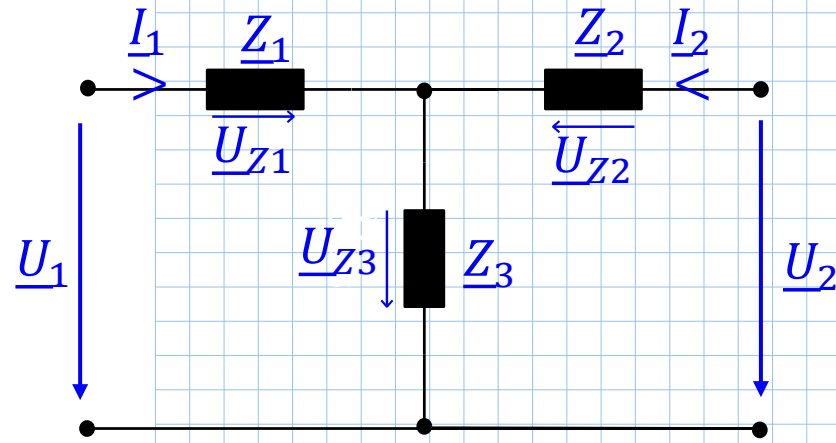
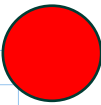
$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{I}_2=0}$$

Leerlauf-Kernimpedanz vorwärts

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{I}_1=0}$$

Leerlauf-Kernimpedanz rückwärts

Beispiel: T-Schaltung



$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{I}_2=0} = \underline{\underline{Z_1 + Z_3}}$$

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{I}_1=0} = \underline{\underline{Z_2 + Z_3}}$$

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{I}_2=0} \text{ bei } \underline{I}_2 = 0 \leadsto \underline{U_{Z_2}} = 0 \rightarrow \underline{U}_2 = \underline{U_{Z_3}}$$

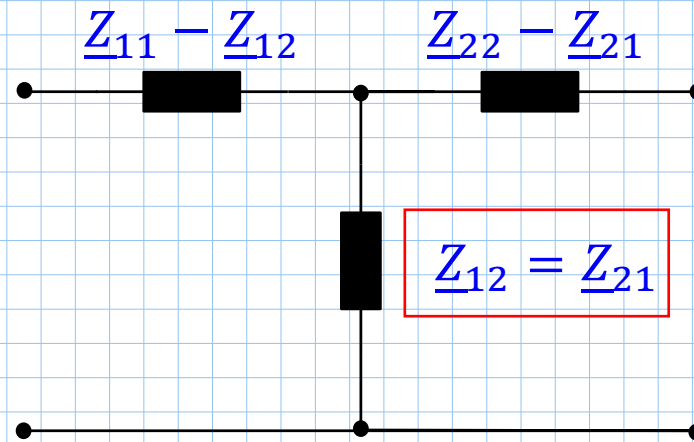
$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U_{Z_3}}}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{I}_2=0} = \underline{\underline{Z_3}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z_1 + Z_3} & \underline{Z_3} \\ \underline{Z_3} & \underline{Z_2 + Z_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{I}_1=0} = \underline{\underline{Z_3}}$$

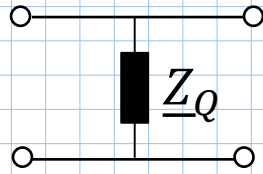
hier $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ kopplungssymmetrisch (reziprok)

Für Kopplungssymmetrie gilt:

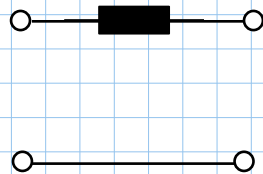


$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{21} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

Weitere Beispiele für passive Zweitore

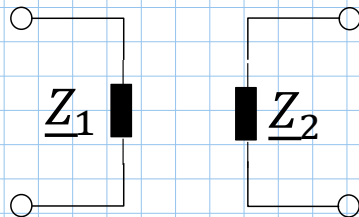


$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_Q & \underline{Z}_Q \\ \underline{Z}_Q & \underline{Z}_Q \end{bmatrix}$$



$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$$

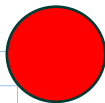
Nicht darstellbar!



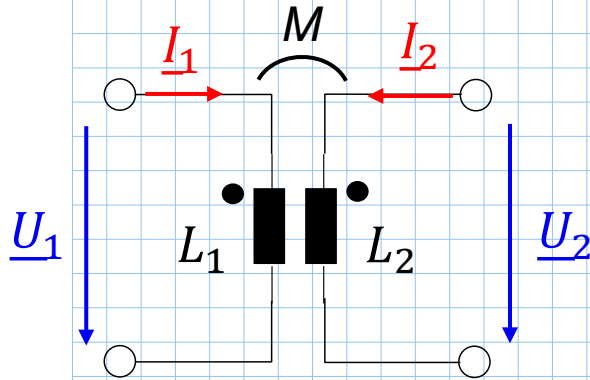
$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

falls Eingang und Ausgang entkoppelt!

Dagegen gilt für den idealen verlustlose Trafo (Kapitel 7.4-3)



Zugehörige Gleichungen für den Transformator:

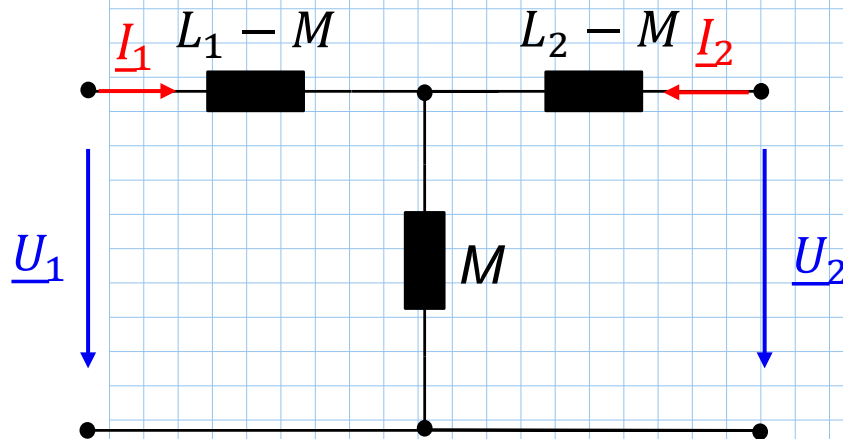


$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\omega M \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2$$

$$\Rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

Alternativ: T-Ersatzschaltung des verlustlosen Transformators:

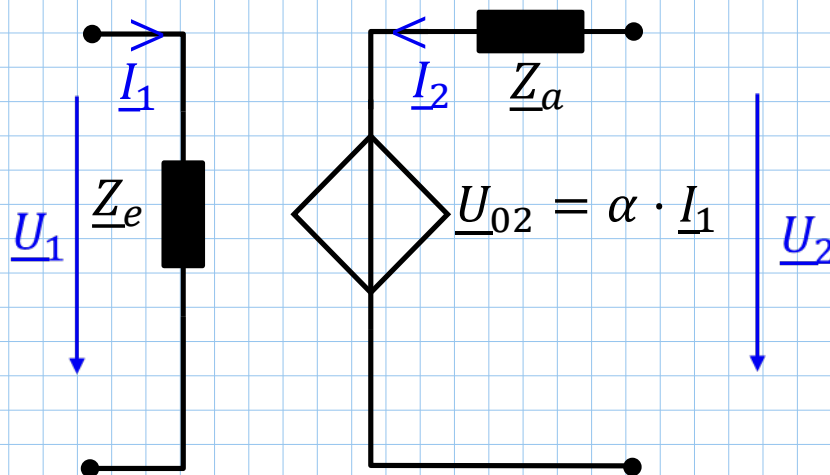


$$\underline{U}_1 = j\omega(L_1 - M) \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega(L_2 - M) \cdot \underline{I}_2 + j\omega M \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$\Rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Stromgesteuerte Spannungsquelle



$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \underline{\underline{Z_e}}$$

$$\underline{Z}_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \underline{\underline{Z_a}}$$

$$\underline{Z}_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \leadsto \quad \underline{U_{Z_a}} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U_2} = \underline{U_{02}} = \alpha \cdot \underline{I_1} \quad \leadsto \quad \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \underline{\underline{\alpha}}$$

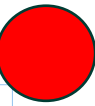
$$\underline{Z}_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \leadsto \quad \underline{U_1} = 0$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{\underline{0}}$$

Nicht Kopplungssymmetrisch!

$$\Rightarrow \underline{\underline{[Z]}} = \begin{bmatrix} \underline{Z_e} & 0 \\ \alpha & \underline{Z_a} \end{bmatrix}$$

11.3 Admittanz-Matrix



$$\underline{I} := \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \underline{U} := \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \underline{I} = [\underline{Y}] \cdot \underline{U}$$

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$$

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \big|_{U_2=0}$$

Kurzschluss-Admittanz am Eingang

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \big|_{U_1=0}$$

Kurzschluss-Admittanz am Ausgang

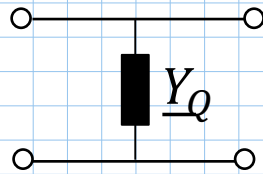
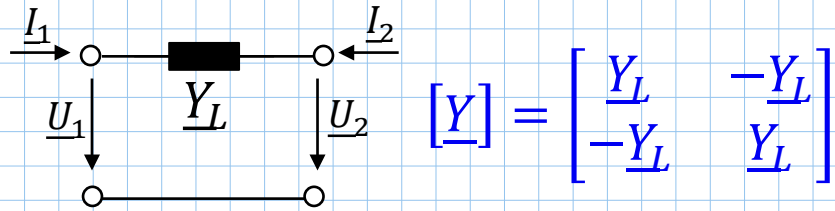
$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \big|_{U_2=0}$$

Kurzschluss-Kernadmittanz vorwärts

$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \big|_{U_1=0}$$

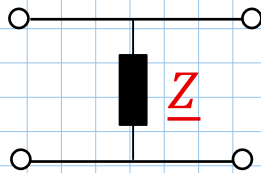
Kurzschluss-Kernadmittanz rückwärts

Einfache Beispiele:



$$\underline{[Y]} = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix} \text{ aber } \underline{[Z]} \text{ existiert}$$

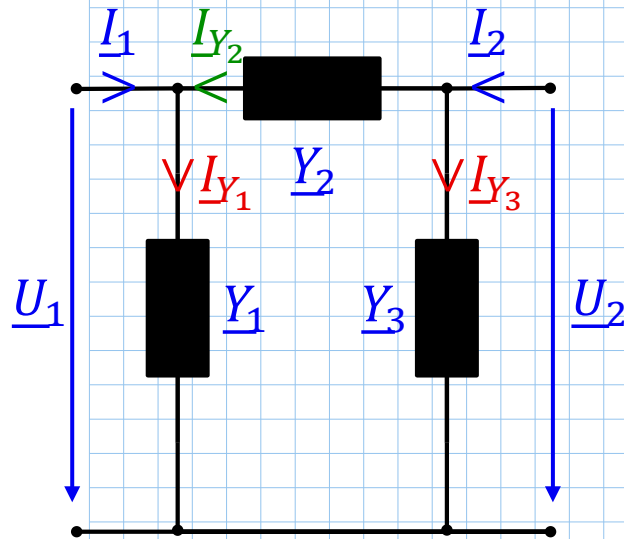
Grund:



Für Parallelwiderstand gilt:

$$KS \rightarrow \underline{Z} = 0 ; \underline{Y} \rightarrow \infty$$

Beispiel π -Matrix



$$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$\underline{Y}_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

Einfache
Parallelschaltungen

$$\underline{Y}_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad \underline{U}_1 = 0 \leadsto \underline{I}_{Y1} = 0 \leadsto \underline{I}_1 = -\underline{I}_{Y2}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{-Y}_2 \cdot \underline{U}_2$$

$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad \underline{U}_2 = 0 \leadsto \underline{I}_{Y3} = 0 \leadsto \underline{I}_2 = -\underline{I}_{Y2}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{-Y}_2 \cdot \underline{U}_1$$

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix}$$

kopplungssymmetrisch

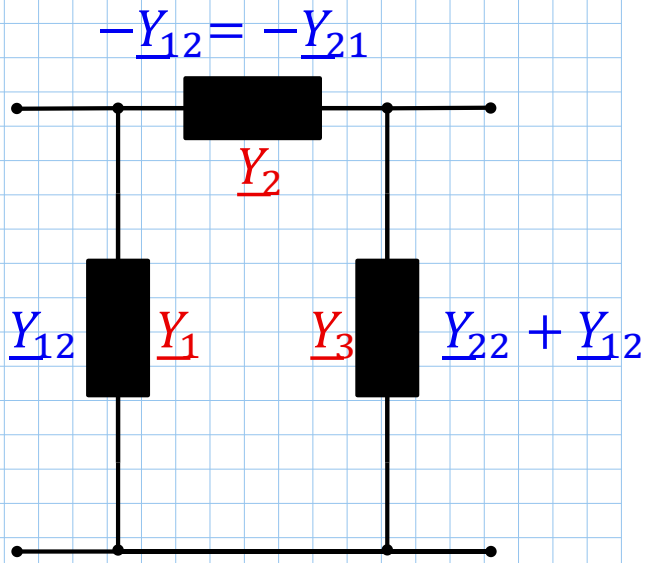
Matrix gegeben → Schaltung gesucht ?

Beschränkt auf:

- a) Eingang und Ausgang beziehen sich auf dasselbe Potential
- b) Admittanzmatrix ist kopplungssymmetrisch

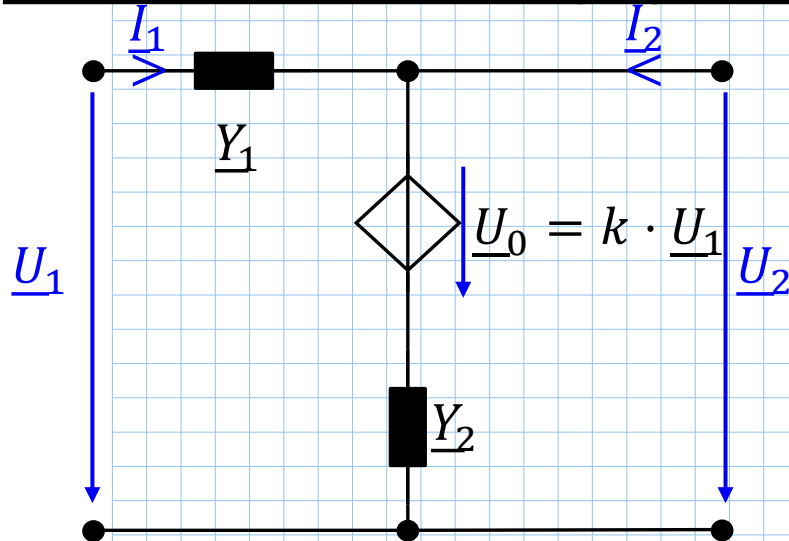
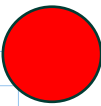
$$\underline{Y}_{21} \triangleq \underline{Y}_{12}$$

Gegeben:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$


**Zwischenbemerkung: Admittanzmatrix kopplungssymmetrisch
→ Impedanzmatrix ist ebenfalls kopplungssymmetrisch**

Beispiel: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle



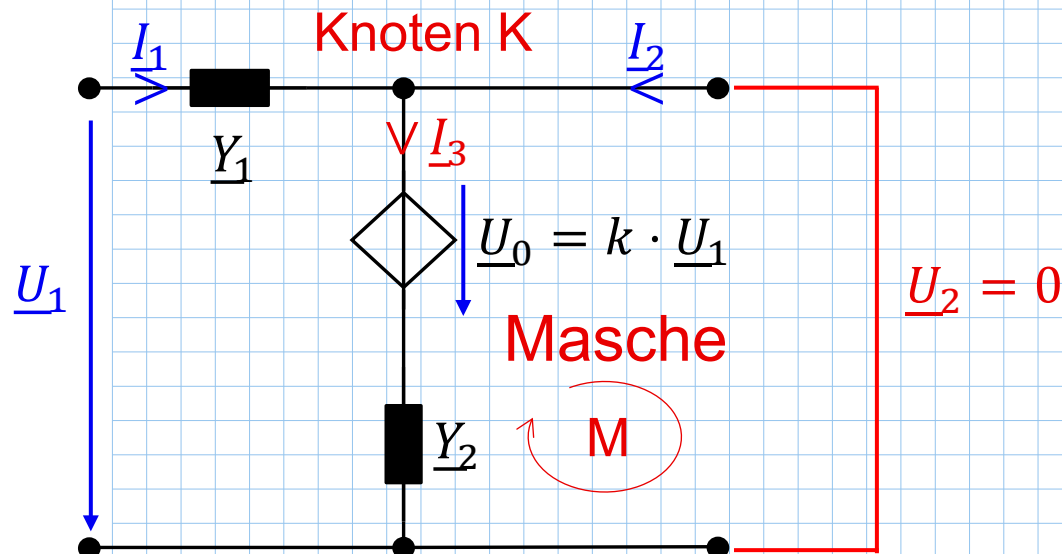
$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & -\underline{Y}_1 \\ -(\underline{Y}_1 + k \cdot \underline{Y}_2) & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \end{bmatrix}$$



Zur Berechnung von \underline{Y}_{21} :

$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

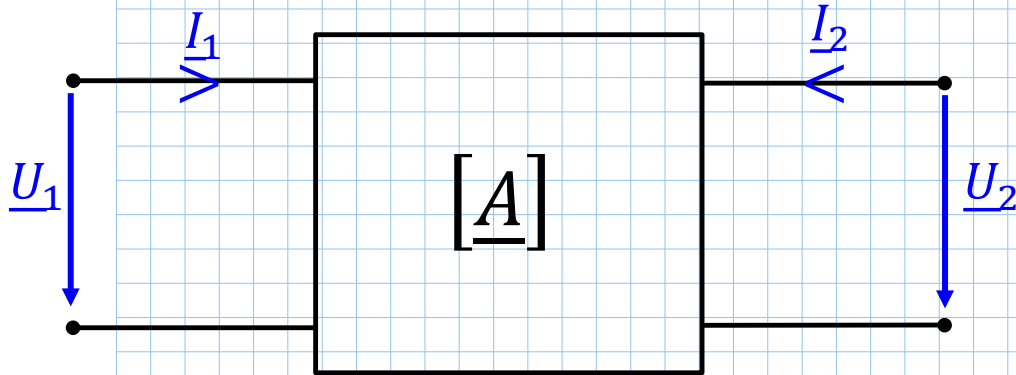


$$\textcircled{\text{K}} \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3$$

$$\textcircled{\text{M}} \quad \frac{1}{\underline{Y}_2} \underline{I}_3 + \underline{U}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 + \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \cdot k \cdot \underline{U}_1 = 0$$

11.4 Kettenmatrix



$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \big|_{\underline{I}_2=0} \quad \text{LL-Spannungsübersetzung}$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\ominus \underline{I}_1}{\underline{I}_2} \big|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{KS-Stromübersetzung}$$

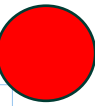
$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \big|_{\underline{I}_2=0}$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\ominus \underline{I}_2} \big|_{\underline{U}_2=0}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 \ominus \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 \ominus \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \ominus \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Achtung Vorzeichen!

Weitere alternative Zweitordarstellungen



Grundsätzlich ist jede beliebige Kombination $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2$ möglich !

■ H-Matrix (Hybrid-Matrix)

■ Parallelmatrix

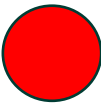
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{11} & \underline{P}_{12} \\ \underline{P}_{21} & \underline{P}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

 H-Matrix üblich zur Beschreibung von Transistoren !

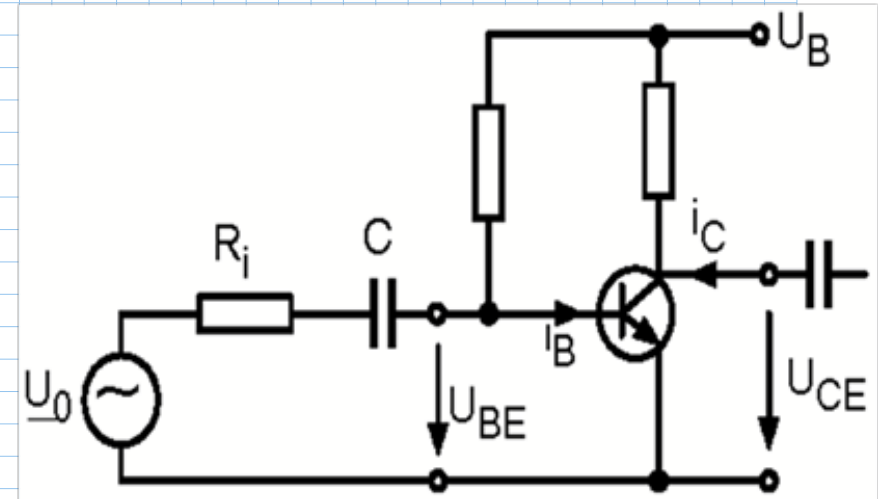
Achtung: Transistor ist ein nichtlineares Bauelement

Aber: Linearisierung um Arbeitspunkt üblich
(Kleinsignaldarstellung)



Üblich:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \Delta \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{I}_1 \\ \Delta \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



mit

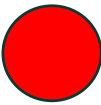
$$h_{11} = \left. \frac{\partial U_{BE}}{\partial I_b} \right|_{U_{CE}=const}$$

differentieller Eingangswiderstand

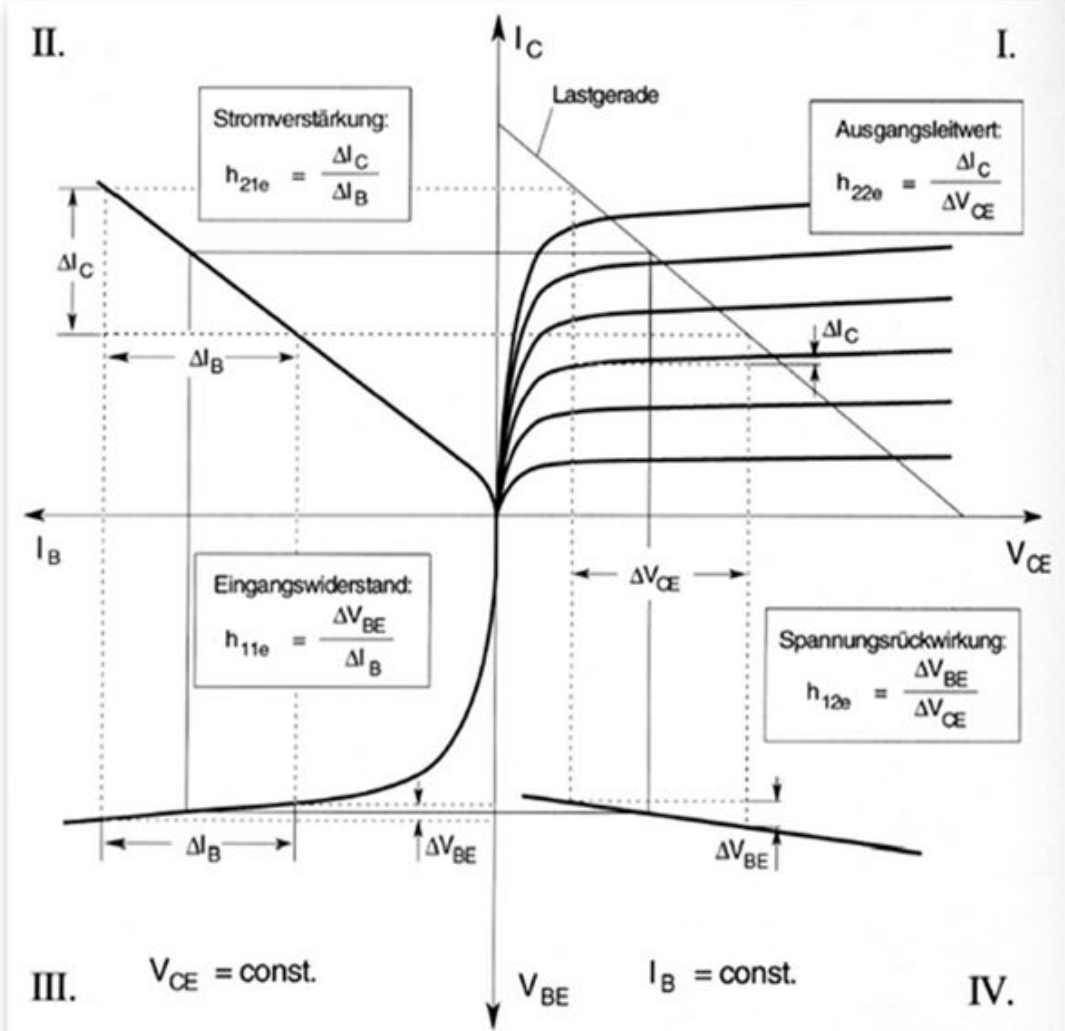
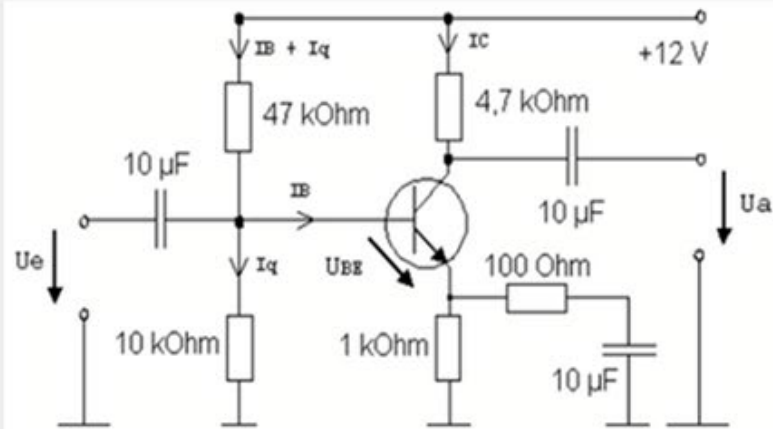
$$h_{21} = \left. \frac{\partial I_C}{\partial I_b} \right|_{U_{CE}=const}$$

Stromverstärkung

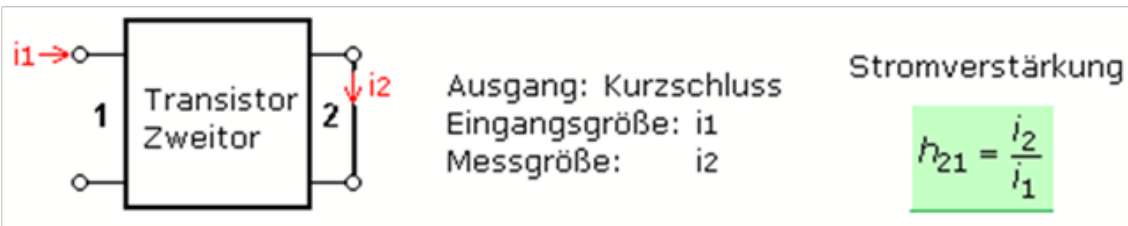
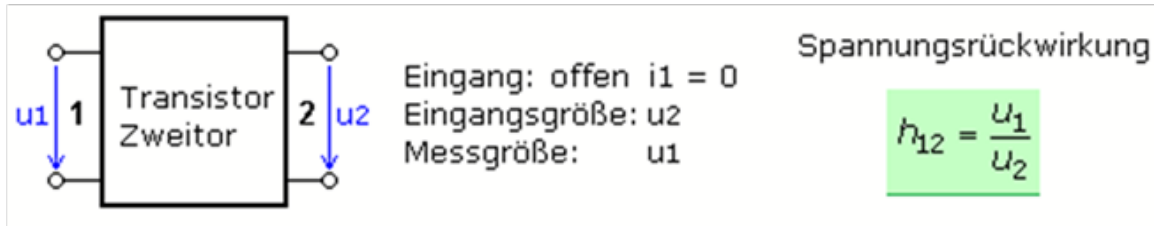
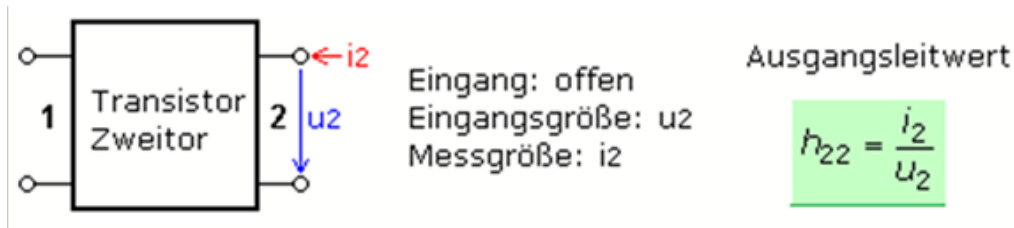
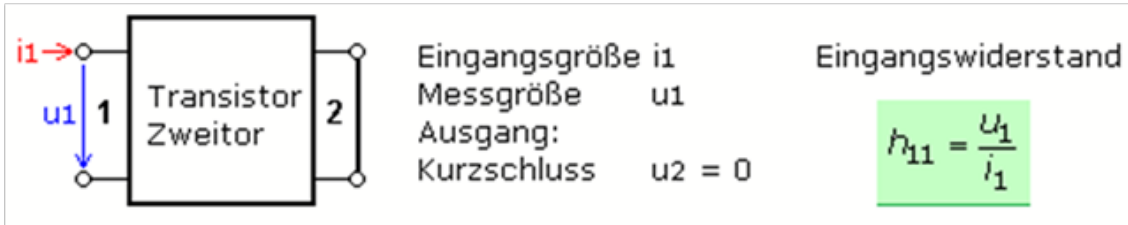
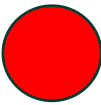
Transistor Vierquadrantendarstellung



$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



Beispiel: h -Parameter für den Transistor



Eingangswiderstand h_{11}

- Ausgang wird kurzgeschlossen
- Eingangsstrom wird eingespeist
- Eingangsspannung wird gemessen

Ausgangsleitwert h_{22}

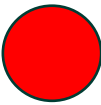
- Eingang bleibt offen
- An den Ausgang wird Spannung gelegt
- Ausgangsstrom wird gemessen

Spannungsrückwirkung h_{12}

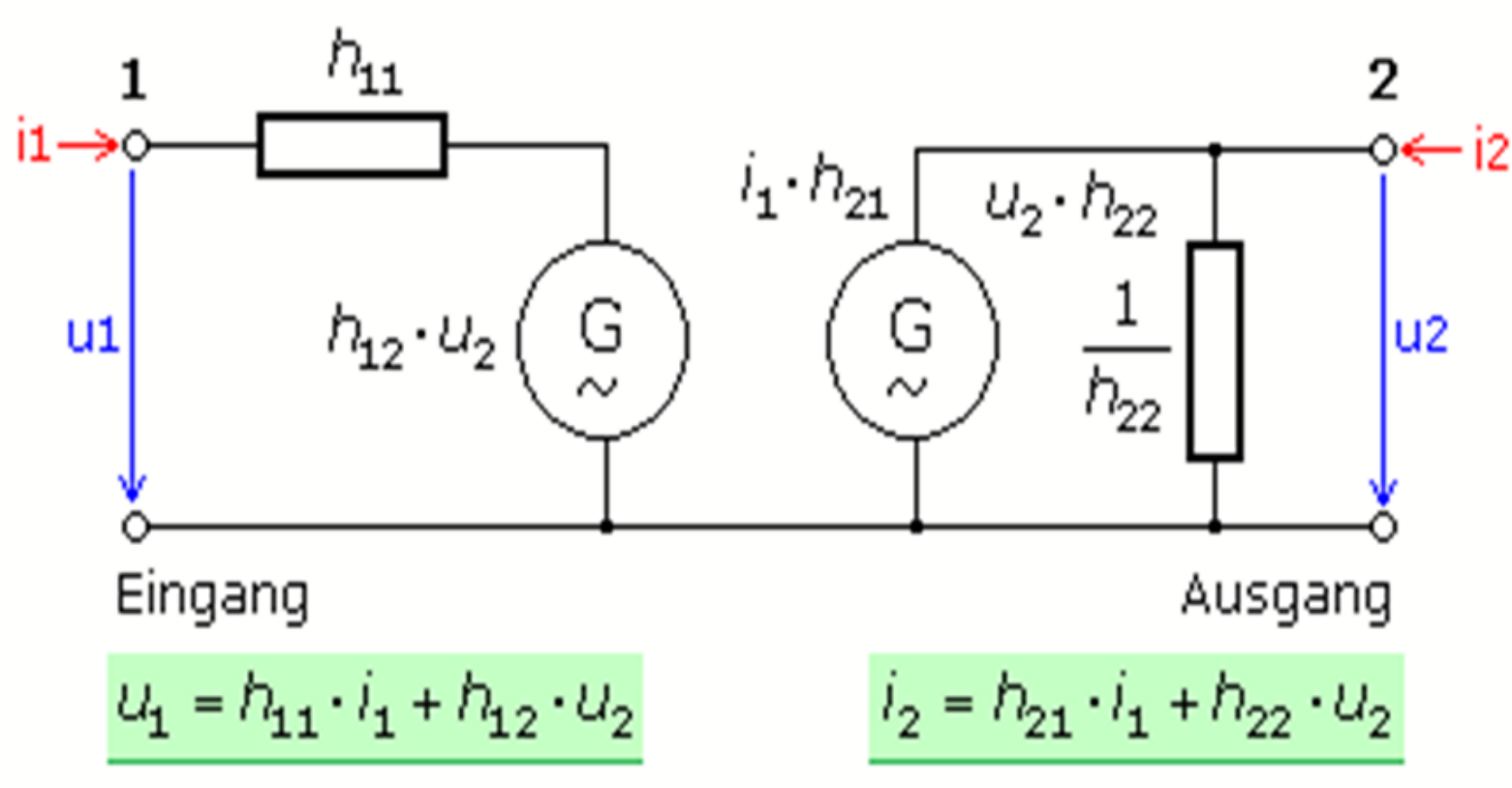
- Eingang bleibt offen, Eingangsstrom $I = 0$
- An den Ausgang wird Spannung gelegt
- Am Eingang wird Spannung gemessen

Stromverstärkung h_{21}

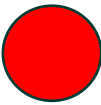
- Ausgang wird kurzgeschlossen
- Am Eingang wird Strom eingespeist
- Am Ausgang wird Strom gemessen



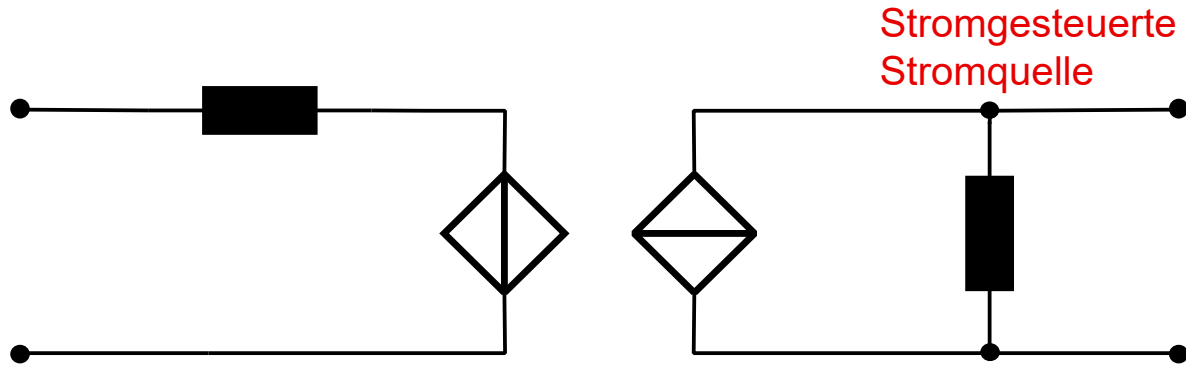
Aus den h-Parametern kann ein Transistorersatzschaltbild erstellt werden



Vierpol-Matrizen und gesteuerte Quellen



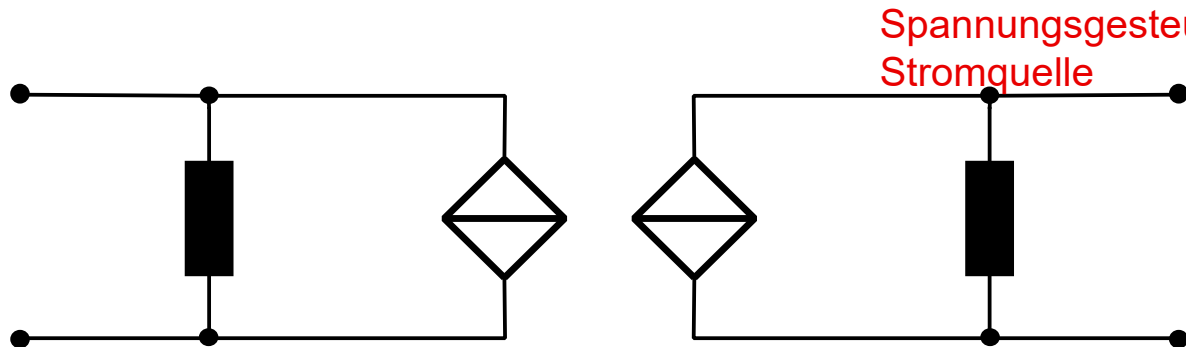
Das für den Transistor gelernte lässt sich verallgemeinern:



Stromgesteuerte
Stromquelle

H-Matrix

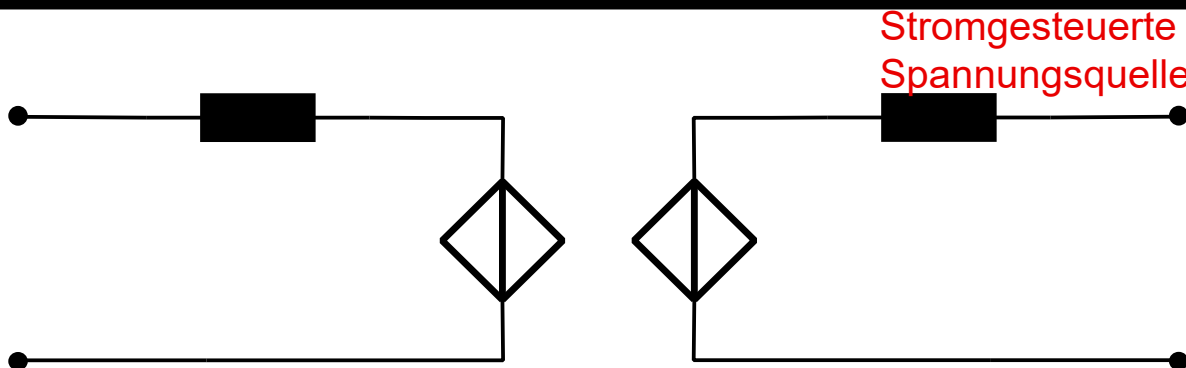
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



Spannungsgesteuerte
Stromquelle

Y-Matrix

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



Stromgesteuerte
Spannungsquelle

Z-Matrix

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

11.5 Umrechnung der Zweitor(Vierpol)-Matrizen

Es ist möglich, jede Matrix-Darstellung umzurechnen!

Beispiel: $[\underline{Z}] \leftrightarrow [\underline{Y}]$

Impedanzmatrix

$$[\underline{U}] = [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}]$$

mathematische Ergänzung

$$\underbrace{[\underline{Z}]^{-1} \cdot [\underline{U}]}_{[\underline{I}]} = \underbrace{\left([\underline{Z}]^{-1} [\underline{Z}]\right)}_{[1]} \cdot [\underline{I}]$$

Mit $[\underline{Z}]^{-1} [\underline{Z}] = [1]$

$$\leadsto [\underline{Z}]^{-1} [\underline{U}] = [\underline{I}]$$

$$[\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] = [\underline{I}]$$

[1]: Einheitsmatrix

$$\leadsto \boxed{[\underline{Z}]^{-1} = [\underline{Y}]}$$

11.6 Das Reziprozitätstheorem

Für kopplungssymmetrische Vierpole gilt: $\underline{Z}_{12} \stackrel{!}{=} \underline{Z}_{21} \Leftrightarrow \underline{Y}_{12} \stackrel{!}{=} \underline{Y}_{21} \Leftrightarrow \underline{H}_{12} \stackrel{!}{=} -\underline{H}_{21}$

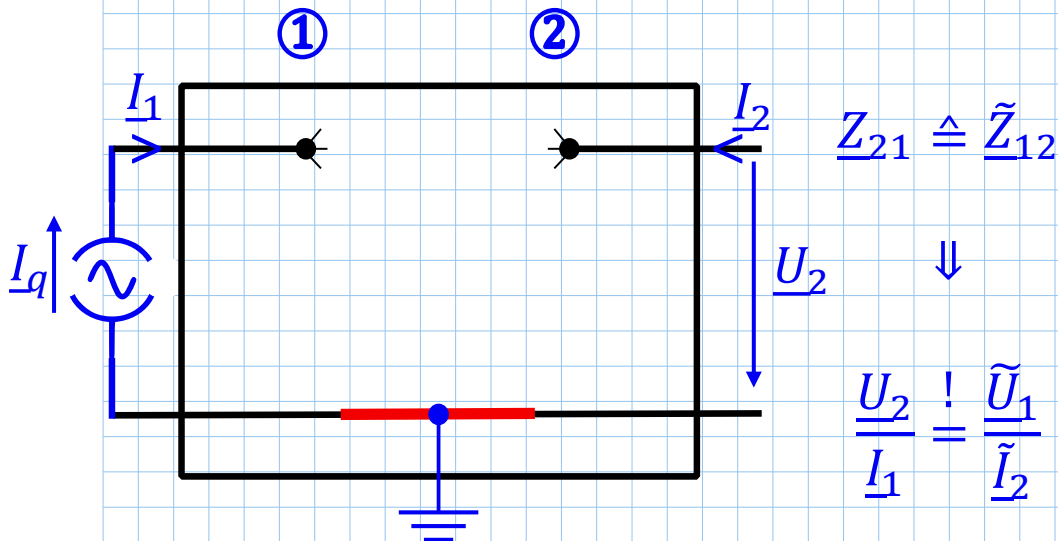
Dies gilt für sämtliche passiven linearen Vierpole!
 → Berechnung von passiven Vierpolen vereinfacht sich
 von 4 Unbekannten auf nur noch 3 Unbekannte

Darüber hinaus gilt für symmetrische Vierpole:

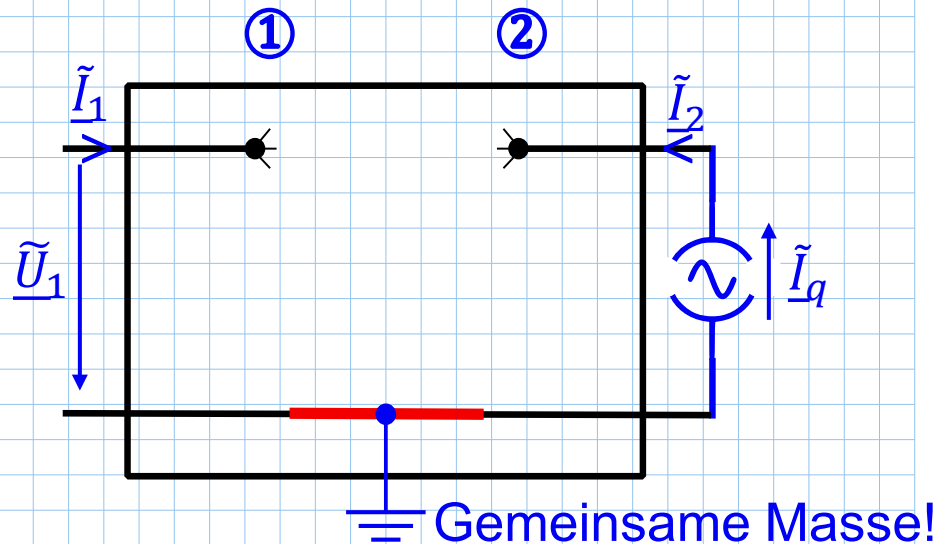
$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} \text{ bzw. } \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} \\ \text{bzw. } \det\{\underline{H}\} \stackrel{!}{=} 1$$

■ Annahme: Beliebige passive Schaltung

A



B (alle Größen mit Tilde!)



Zum Beweis das Knotenpunktpotentialverfahren anwenden:

Es galt

- 0.) Spannungsquellen → Stromquellen
- 1.) Auswahl Bezugspotential (\perp) + Bezeichnung Knoten
- 2.) Aufstellen der Knotengleichungen
- 3.) Gleichungssystem nach Knotenpotentialen auflösen

(A)

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(B)

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \\ \vdots \\ \tilde{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \vdots \\ \tilde{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{I}_q \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anregungsstrom
mit allen Quellen!

Lösung mittels Cramer'sche Regel

$$\text{Einschub } [A] \cdot \vec{X} = \vec{b} \Rightarrow x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

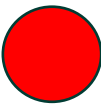
$$\textcircled{A} \quad V_2 = \frac{D_2}{D} \quad \text{mit} \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} G_{11} & I_q & G_{13} & G_{1N} \\ G_{21} & 0 & G_{23} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & 0 & G_{N3} & G_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{B} \quad \tilde{V}_1 = \frac{D_1}{D} \quad \text{mit} \quad D_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & G_{13} & G_{1N} \\ I_q & G_{22} & G_{23} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & G_{N2} & G_{N3} & G_{NN} \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det\{A_{ij}\} \quad \text{Entwicklung nach i-ter Zeile}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det\{A_{ij}\} \quad \text{Entwicklung nach j-ter Spalte}$$



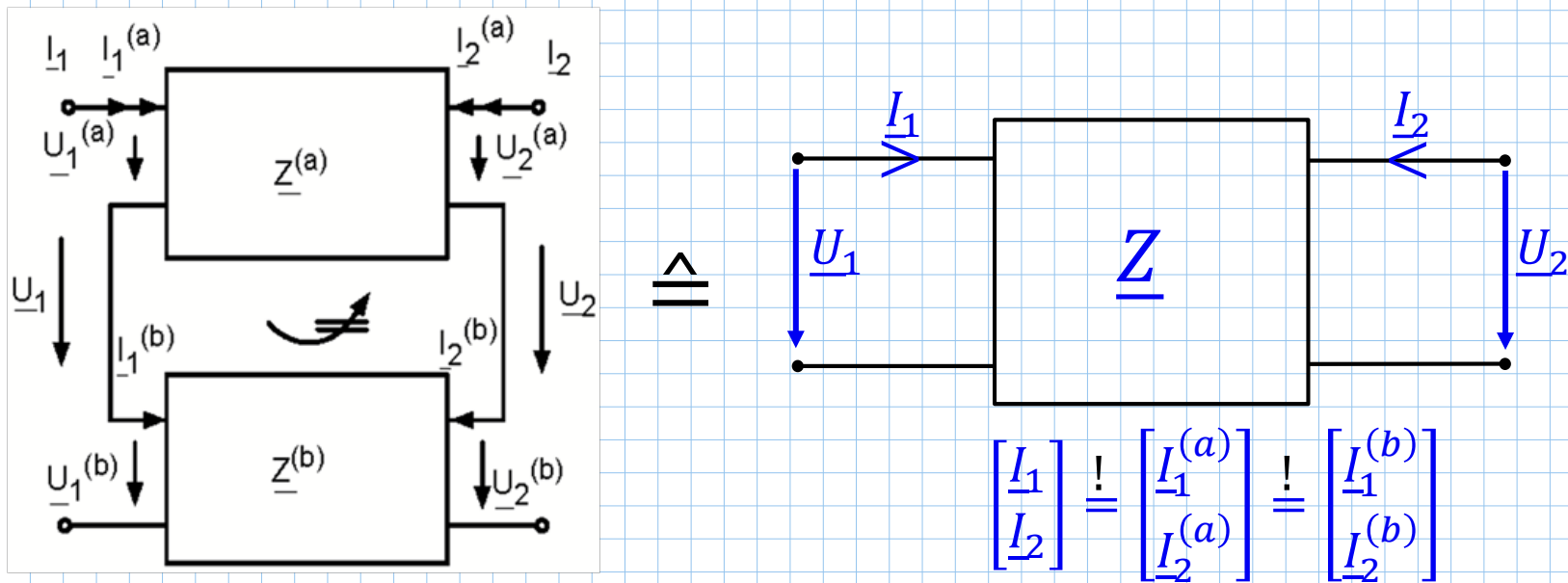
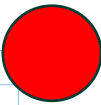
$$\begin{aligned}
 D_2 &= \det \left(\begin{array}{c|ccc} \underline{G}_{11} & I_q & \underline{G}_{13} & \cdots \\ \underline{G}_{21} & 0 & \underline{G}_{23} & \cdots \\ \underline{G}_{31} & 0 & \underline{G}_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) = I_q \cdot \det \left(\begin{array}{ccc} \underline{G}_{21} & \underline{G}_{23} & \underline{G}_{24} \cdots \\ \underline{G}_{31} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} \cdots \\ \underline{G}_{41} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) =: I_q \cdot \det\{\underline{G}_2\} \\
 D_1 &= \det \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \cdots \\ I_q & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} & \cdots \\ 0 & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) = I_q \cdot \det \left(\begin{array}{ccc} \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \underline{G}_{14} \cdots \\ \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} \cdots \\ \underline{G}_{42} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) =: I_q \cdot \det\{\underline{G}_1\}
 \end{aligned}$$

- $\underline{G}_{ij} = \underline{G}_{ji}$ weil Leitwert zwischen Knoten i und j genau der Leitwert zwischen j und i ist
- Zwei Matrizen $[\underline{G}_1]$ und $[\underline{G}_2]$ besitzen die gleiche Determinante, wenn nur Zeilen und Spalten vertauscht sind (transponiert)

$$\underline{Z}_{12} = \frac{V_2}{I_q} \leadsto \underline{Z}_{12} = \frac{D_2}{D \cdot I_q} ; \underline{Z}_{21} = \frac{V_1}{I_q} \leadsto \underline{Z}_{21} = \frac{D_1}{D \cdot I_q}$$

$$\boxed{D_1 = D_2 \leadsto \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}}$$

11.7 Reihenschaltung, Parallelschaltung und Kettenschaltung

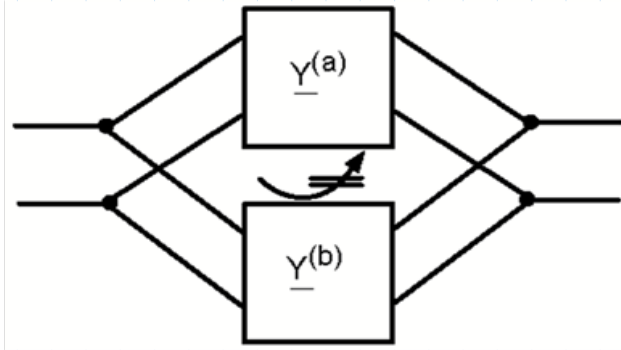


$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(a)} + \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{U}_2^{(a)} + \underline{U}_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(a)} \\ \underline{U}_2^{(a)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{U}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{U} = [\underline{Z}^{(a)}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(a)} \\ \underline{I}_2^{(a)} \end{bmatrix} + [\underline{Z}^{(b)}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(b)} \\ \underline{I}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{Z}_{ges} = [\underline{Z}^{(a)}] + [\underline{Z}^{(b)}] \quad \text{Reihenschaltung}$$

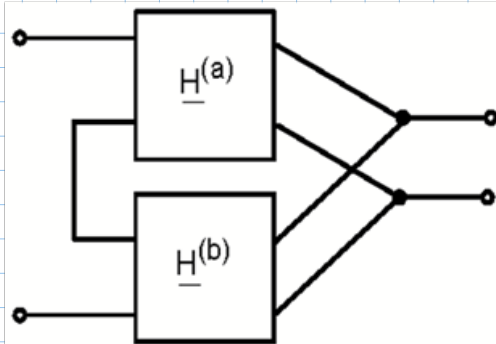
Parallelschaltung



$$[\underline{Y}_{ges}] = [\underline{Y}^{(a)}] + [\underline{Y}^{(b)}]$$

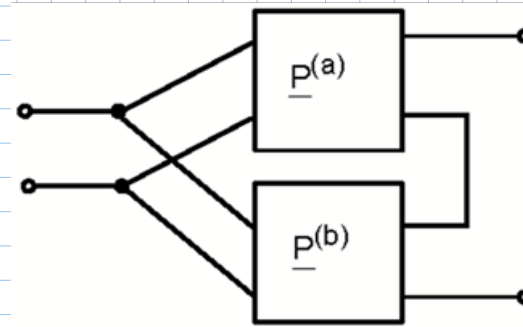
- Ströme addieren sich
- Spannungen sind alle gleich

Reihen-Parallelschaltung



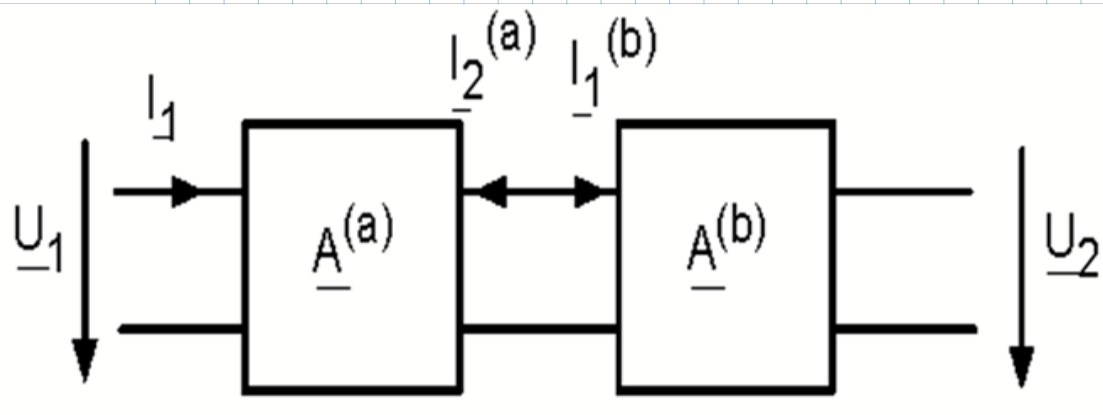
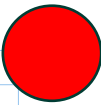
$$[\underline{H}] = [\underline{H}^{(a)}] + [\underline{H}^{(b)}]$$

Parallel-Reihenschaltung



$$[\underline{P}] = [\underline{P}^{(a)}] + [\underline{P}^{(b)}]$$

Kettenschaltung



$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(a)} \\ \underline{I}_1^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2^{(a)} \\ -\underline{I}_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{I}_1^{(b)} \end{bmatrix}$$

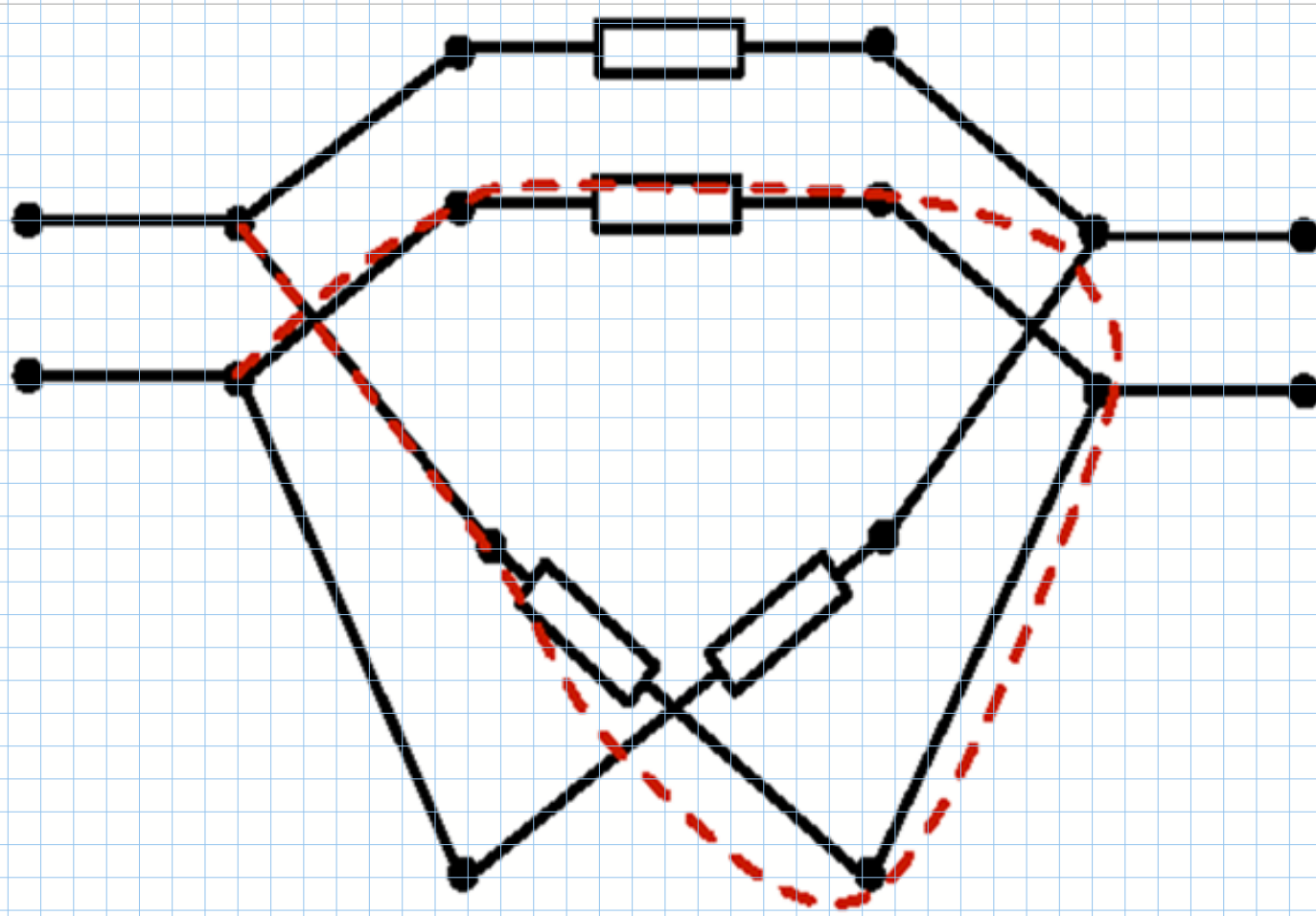
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_2^{(b)} \\ \underline{I}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}^{(a)}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2^{(a)} \\ -\underline{I}_2^{(a)} \end{bmatrix} = [\underline{A}^{(a)}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{I}_1^{(b)} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{[\underline{A}^{(a)}] \cdot [\underline{A}^{(b)}]}_{[\underline{A}]} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2^{(b)} \\ -\underline{I}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

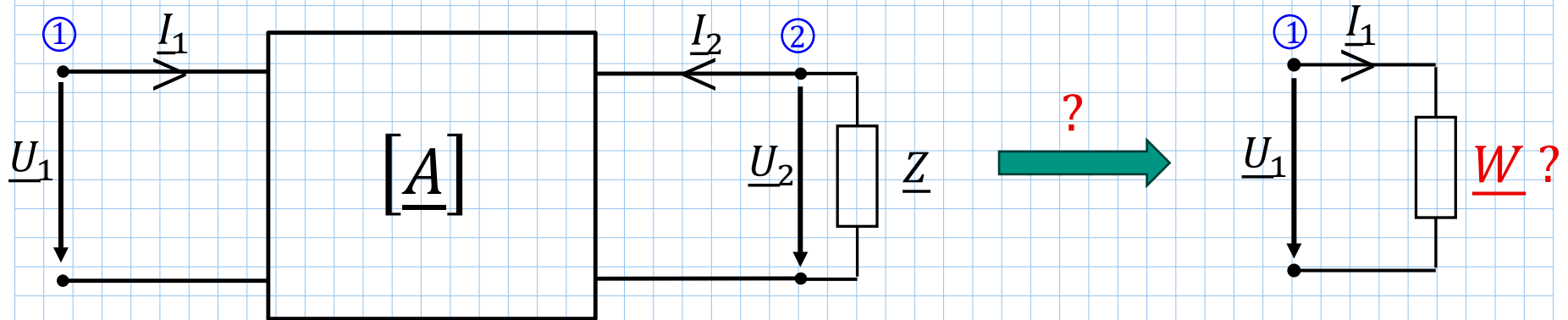
$$\Rightarrow \boxed{[\underline{A}] = [\underline{A}^{(a)}] \cdot [\underline{A}^{(b)}]} \Rightarrow \text{Produkt der Kettenmatrizen}$$

Die Formeln können nicht angewendet werden auf Zusammenschaltungen, bei denen Kreisströme auftreten können!



11.8 Impedanztransformation

Frage: Welche Eingangs-impedanz \underline{W} gehört zum Zweitor $[\underline{A}]$ und der Impedanz $[\underline{Z}]$?



$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2)$$

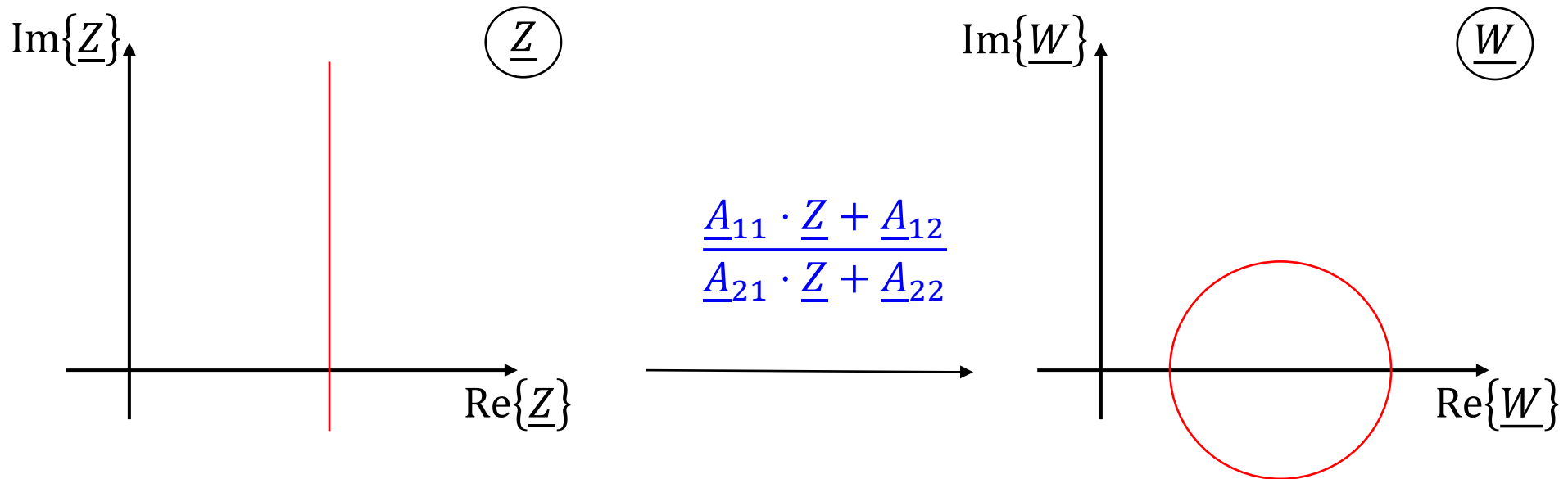
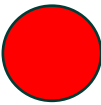
$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z} \cdot (-\underline{I}_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{W} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2)}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2)} \quad \downarrow \quad = \quad \frac{\underline{A}_{11} \cdot \cancel{\underline{Z}(-\underline{I}_2)} + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2)}{\underline{A}_{21} \cdot \cancel{\underline{Z}(-\underline{I}_2)} + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2)}$$

$$\underline{W} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{22}}$$

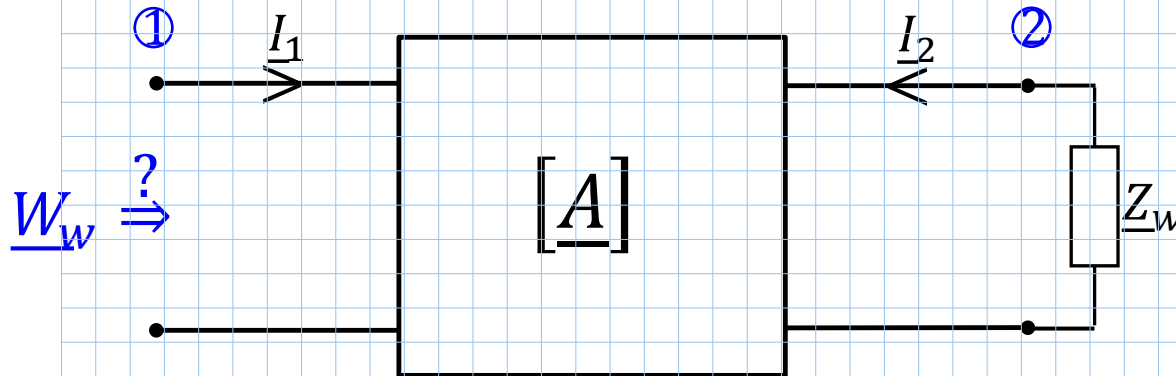
Dies ist eine lineare Abbildung (Mathematik: Moebius-Transformation):



→ Falls eine Impedanz mit einer bestimmten Ortskurve gesucht wird, kann man von einem einfachen Bauelement ausgehen und sucht die zugehörige komplexe Abbildung

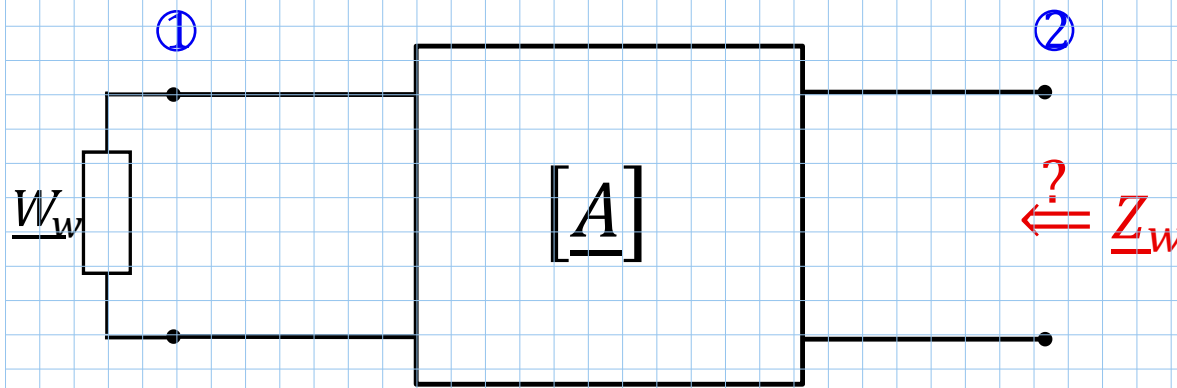
11.9 Wellenwiderstand

Aus 12.8 ist bekannt:



$$\underline{W}_w = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_w + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_w + \underline{A}_{22}}$$

In gleicherweise gilt für ein kopplungssymmetrisches



$$\underline{Z}_w = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{W}_w + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{W}_w + \underline{A}_{11}}$$

Mit den beiden Gleichungen:

$$\underline{W}_w = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_w = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{W}_w + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{W}_w + \underline{A}_{11}}$$

→ 2 Gleichungen für die beiden Unbekannten \underline{W}_w und \underline{Z}_w :

$$\underline{W}_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}$$

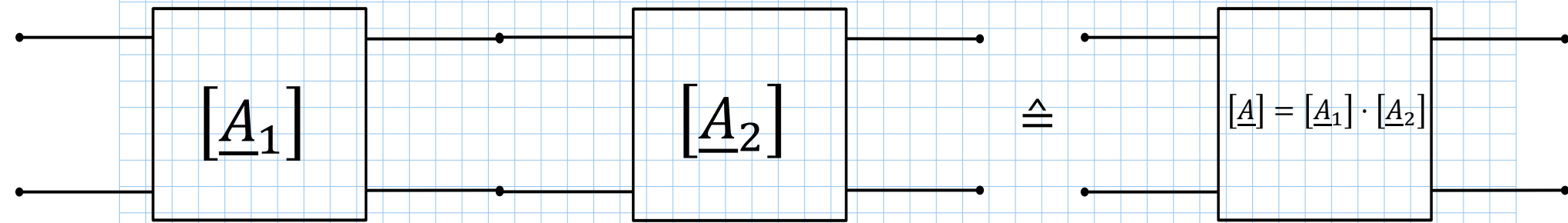
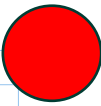
$$\underline{Z}_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$$

Wenn $\underline{Z}_w = \underline{W}_w$:

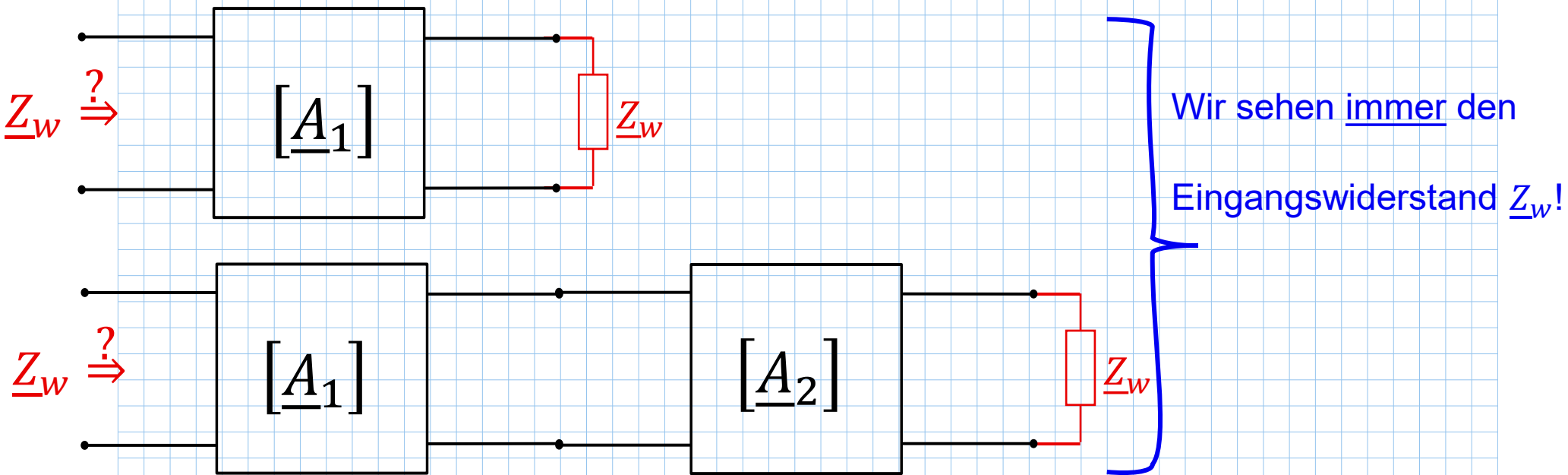
$$\Rightarrow \underline{Z}_{11} \stackrel{!}{=} \underline{Z}_{22}; \quad \underline{Y}_{11} \stackrel{!}{=} \underline{Y}_{22}; \quad \underline{A}_{11} \stackrel{!}{=} \underline{A}_{22} \rightarrow \text{Widerstandssymmetrie!}$$

Definition des Wellenwiderstands: $\underline{Z}_w \hat{=} \underline{W}_w$

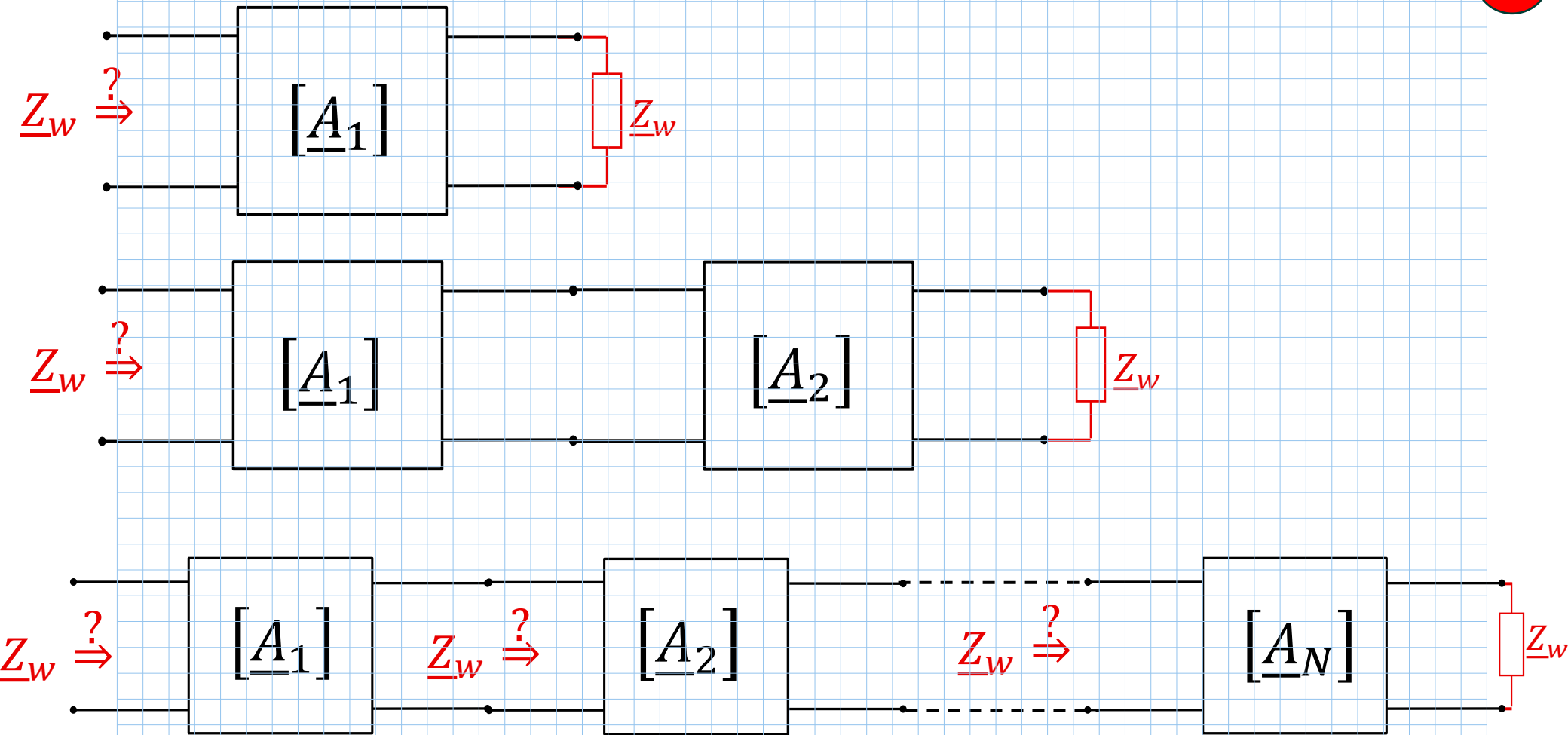
Für die Kettenschaltung gilt zusätzlich für die Verkettung von zwei Matrizen $[\underline{A}_1]$ und $[\underline{A}_2]$:



Frage: Welche Eingangsimpedanz sehen wir beim Hintereinanderschalten zweier widerstandssymmetrischer Matrizen mit $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$?

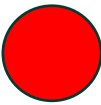


Wir erweitern die Verkettung auf eine Anzahl N Vierpole:



➡ Egal wie lang die Kette ist, die Eingangsimpedanz bleibt \underline{Z}_w !

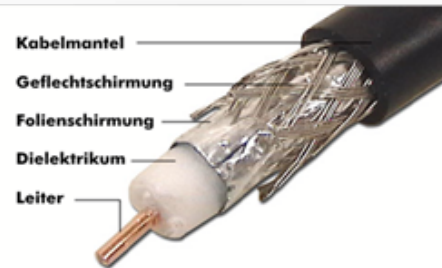
■ Anwendung auf die Übertragung von elektromagnetischen Wellen:



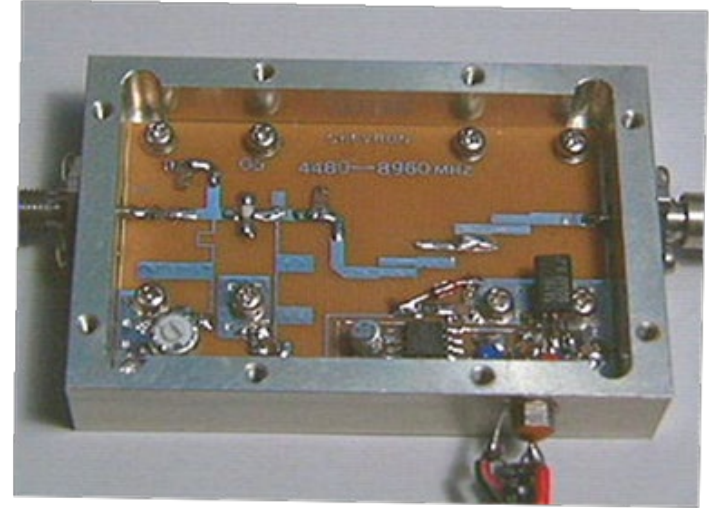
Paralleldrahtleitung



Koaxialleitung



Mikrostreifenleitung

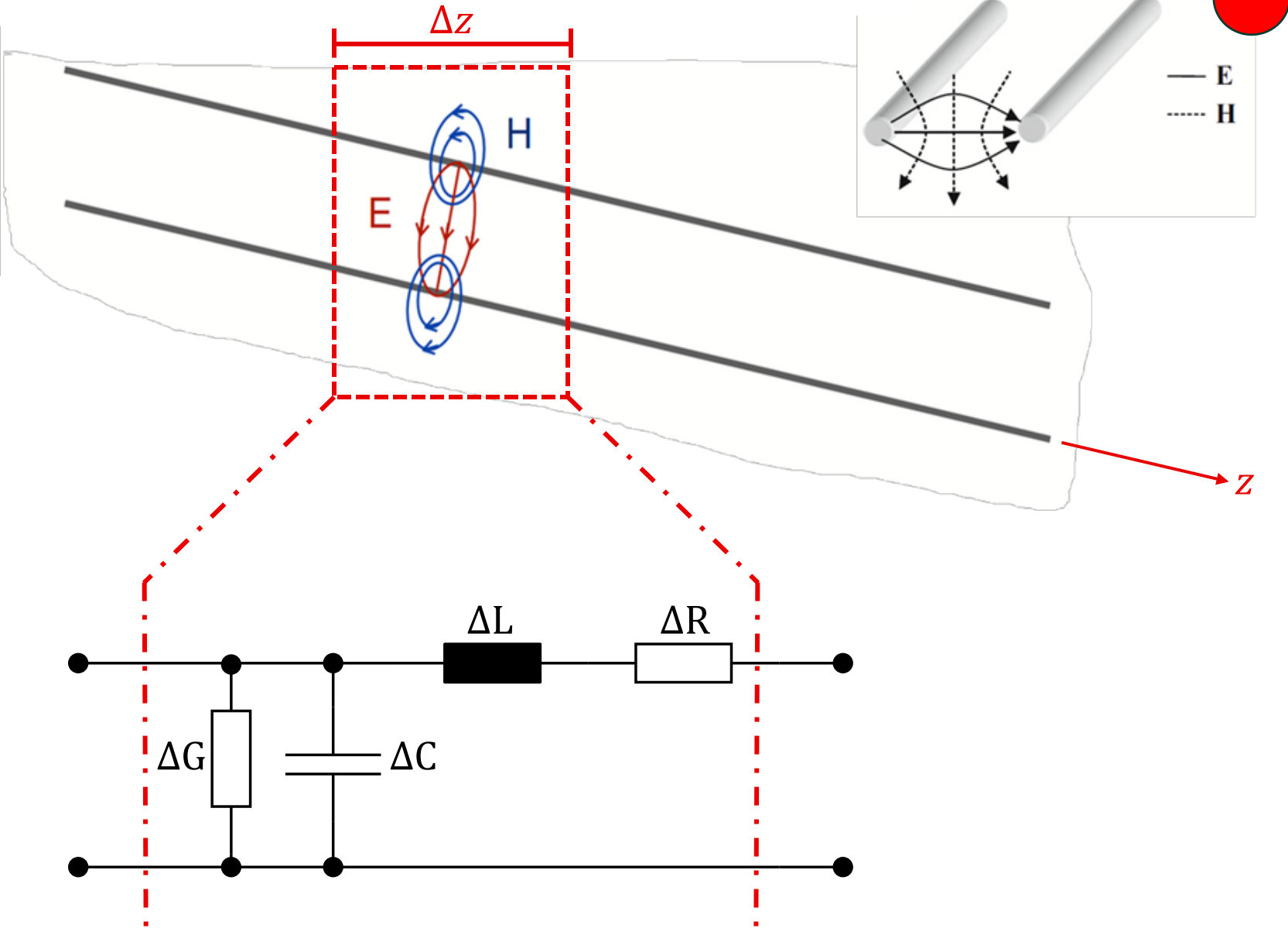


Leitungsgebunden:

Aber auch bei der
Übertragung im
homogenen Medium:

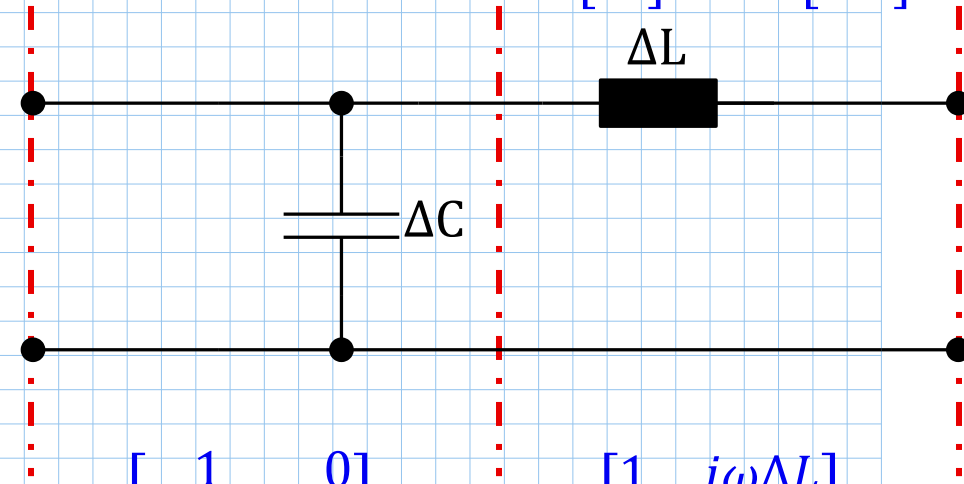
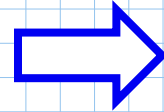
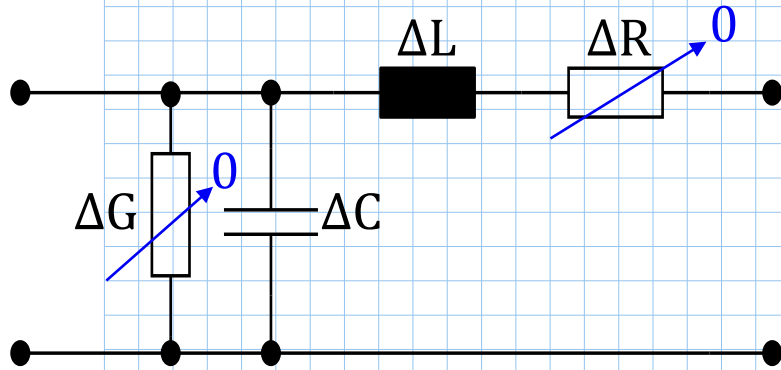


Jetzt betrachten wir ein infinitesimal kleines Leitungselement:



■ Für ideale verlustlose Leitung gilt: $\Delta G = 0$ und $\Delta R = 0$

Wir betrachten die verlustlose Leitung und berechnen die Kettenmatrix:



Es gilt: $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega\Delta C & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & j\omega\Delta L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & j\omega\Delta L \\ j\omega\Delta C & 1 - \omega^2\Delta L\Delta C \end{bmatrix}$$

Für $\omega^2 \ll \omega_0^2 = \frac{1}{\Delta L\Delta C}$:

$$[A] \approx \begin{bmatrix} 1 & j\omega\Delta L \\ j\omega\Delta C & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}} \approx \sqrt{\frac{1 \cdot j\omega\Delta L}{j\omega\Delta C \cdot 1}} = \sqrt{\frac{\Delta L}{\Delta C}}$$

Für ein 50 Ω Kabel gilt somit $Z_W = \sqrt{\frac{\Delta L}{\Delta C}} = 50 \Omega$ ✓