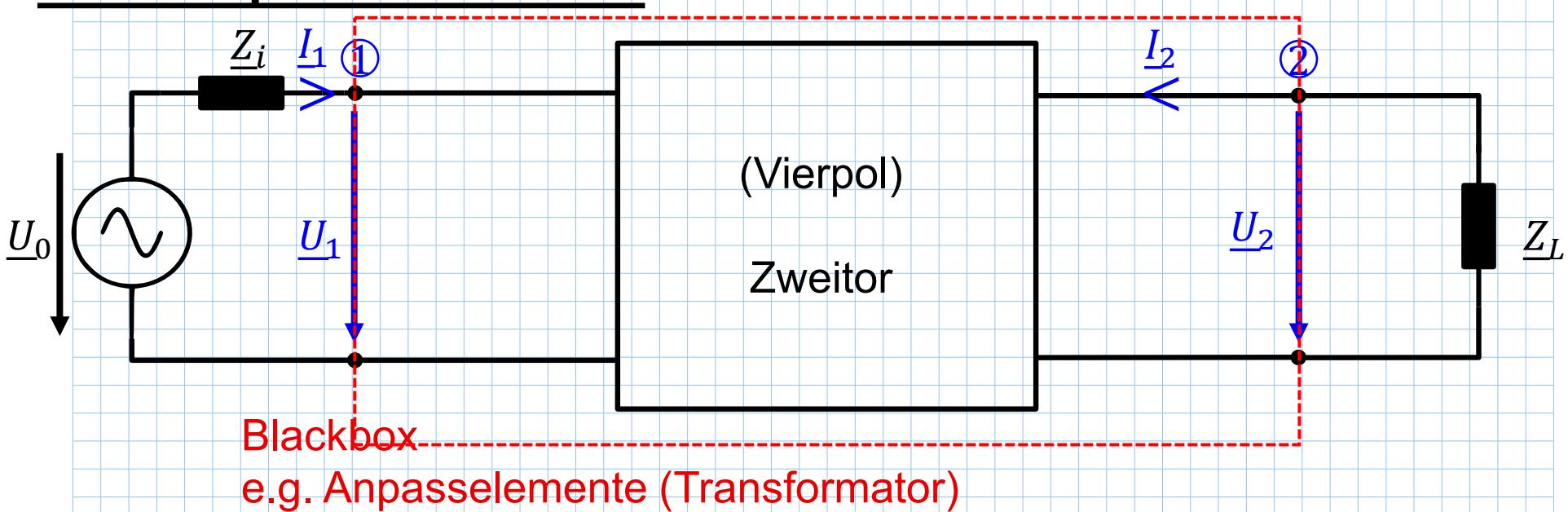
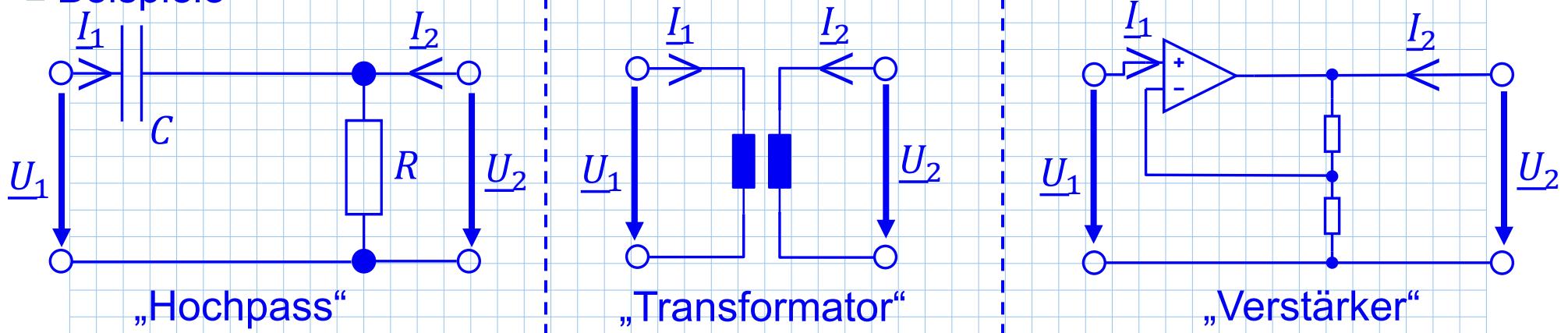


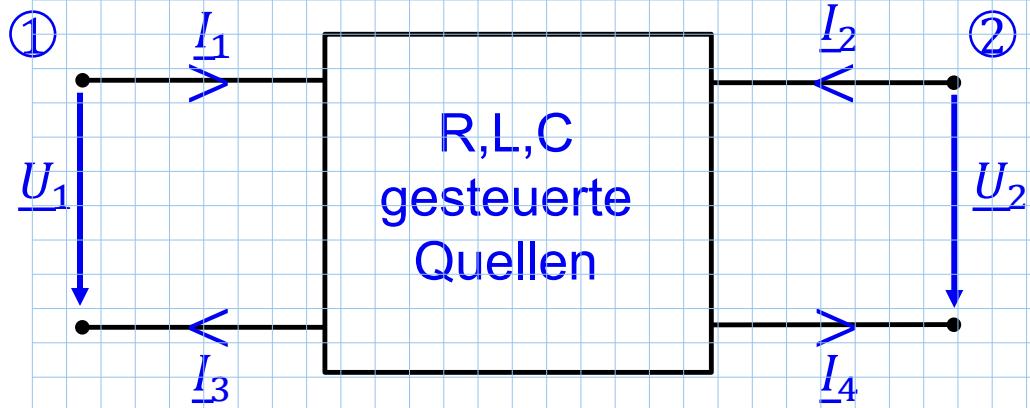
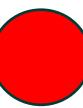
11.1 Vierpole - Zweitor



Beispiele



Definition des Vierpol/Zweitors



es gilt: $\underline{I_1} = \underline{I_3}$ } Für Zweitor
 !
 $\underline{I_2} = \underline{I_4}$ } Für Zweitor

Für Zweitor gilt nicht:

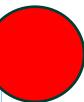


hier wäre

$$\underline{I_1} \neq \underline{I_3}$$

$$\underline{I_2} \neq \underline{I_4}$$

Allgemeine Formulierungen:



■ Impedanzmatrix

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

■ Admittanzmatrix

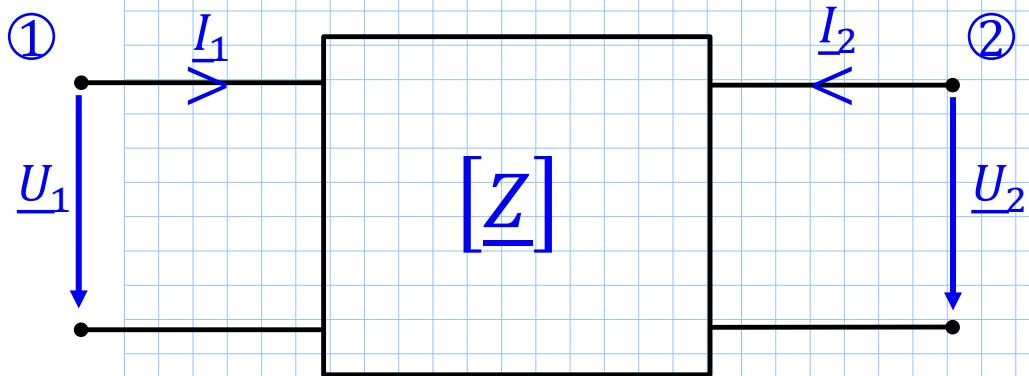
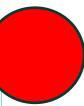
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\underline{Y}] = [\underline{Z}^{-1}]$$

■ Kettenmatrix

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Jedes Zweitor lässt sich als $[\underline{Z}]$, $[\underline{Y}]$, $[\underline{A}]$ darstellen!

11.2 Impedanzmatrix



$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$$

$$\Rightarrow \underline{U} = [\underline{Z}] \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \mid_{\underline{I}_2=0}$$

Eingangs-Leerlaufimpedanz

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \mid_{\underline{I}_1=0}$$

Ausgangs-Leerlaufimpedanz

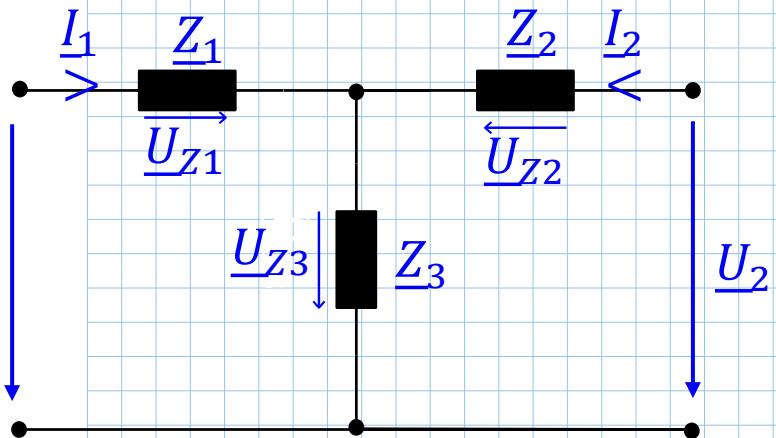
$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \mid_{\underline{I}_2=0}$$

Leerlauf-Kernimpedanz vorwärts

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \mid_{\underline{I}_1=0}$$

Leerlauf-Kernimpedanz rückwärts

Beispiel: T-Schaltung



$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \underline{\underline{Z_1 + Z_3}}$$

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \underline{\underline{Z_2 + Z_3}}$$

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \text{ bei } I_2 = 0 \quad \curvearrowright \quad U_{Z_2} = 0 \rightarrow U_2 = U_{Z_3}$$

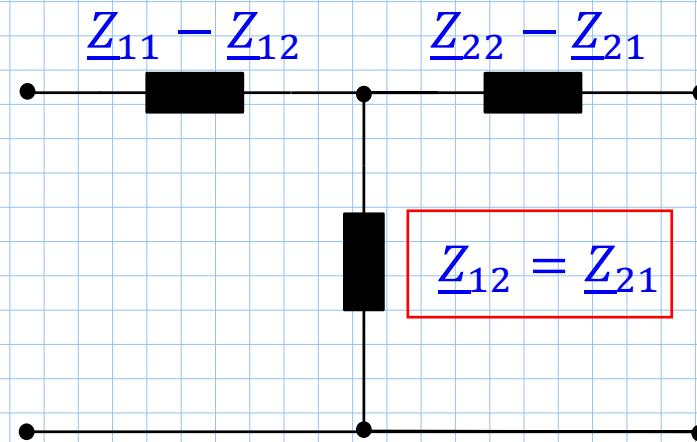
$$Z_{21} = \frac{U_{Z_3}}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \underline{\underline{Z_3}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \underline{\underline{Z_3}}$$

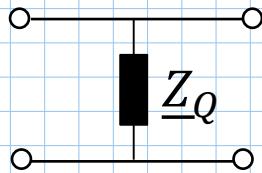
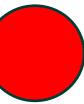
hier $Z_{12} = Z_{21}$ kopplungssymmetrisch (reziprok)

Für Kopplungssymmetrie gilt:

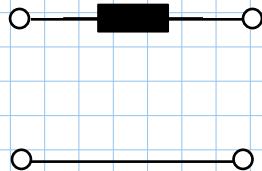


$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{21} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

Weitere Beispiele für passive Zweitore

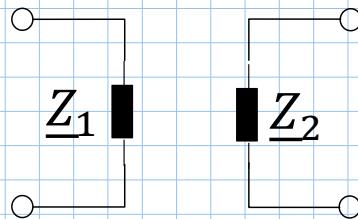


$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_Q & \underline{Z}_Q \\ \underline{Z}_Q & \underline{Z}_Q \end{bmatrix}$$



$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$$

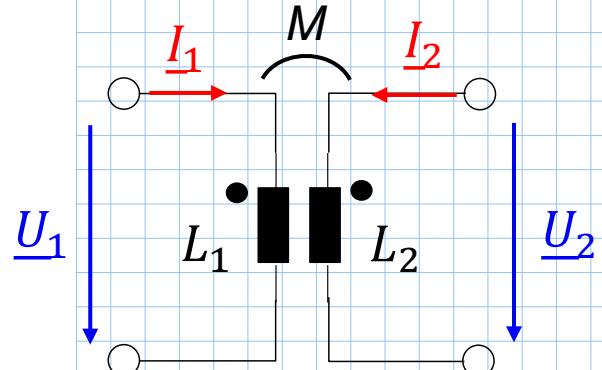
Nicht darstellbar!



$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

falls Eingang und Ausgang entkoppelt!

Dagegen gilt für den idealen verlustlose Trafo (Kapitel 7.4-3)



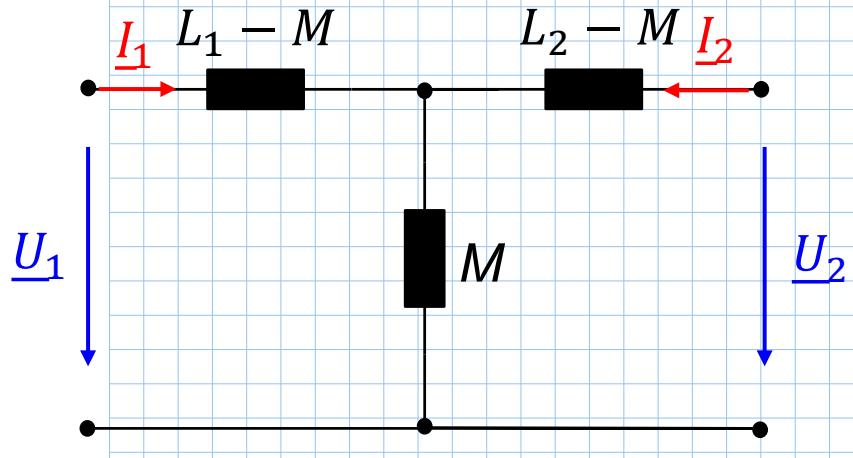
Zugehörige Gleichungen für den Transformator:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\omega M \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2$$

$$\rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

Alternativ: T-Ersatzschaltung des verlustlosen Transformators:

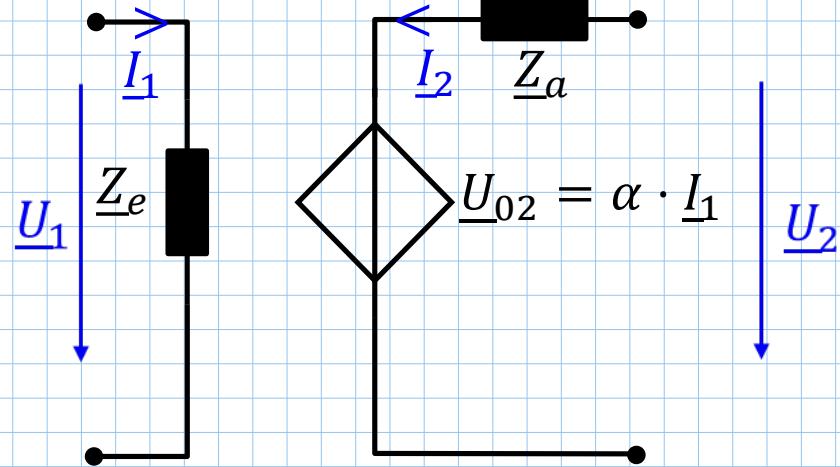


$$\underline{U}_1 = j\omega(L_1 - M) \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega(L_2 - M) \cdot \underline{I}_2 + j\omega M \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$\rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Stromgesteuerte Spannungsquelle



$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \underline{\underline{Z_e}}$$

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \underline{\underline{Z_a}}$$

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad \sim \quad U_{Z_a} = 0 \quad \rightarrow \quad U_2 = U_{02} = \alpha \cdot I_1$$

$$\sim \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \underline{\underline{\alpha}}$$

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad \sim \quad U_1 = 0$$

$$Z_{12} = \underline{\underline{0}}$$

Nicht Kopplungssymmetrisch!

$$\Rightarrow [Z] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z_e}} & 0 \\ \underline{\underline{\alpha}} & \underline{\underline{Z_a}} \end{bmatrix}$$

11.3 Admittanz-Matrix

$$\underline{I} := \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \underline{U} := \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\curvearrowright \underline{I} = [\underline{Y}] \cdot \underline{U}$$

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$$

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0}$$

Kurzschluss-Admittanz am Eingang

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0}$$

Kurzschluss-Admittanz am Ausgang

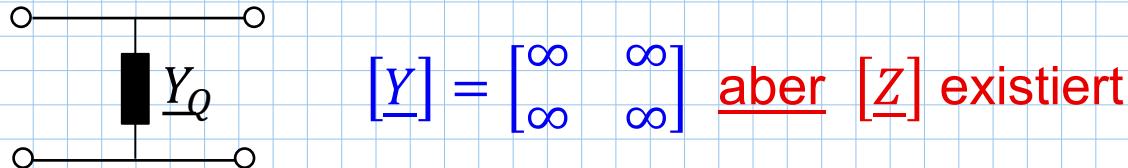
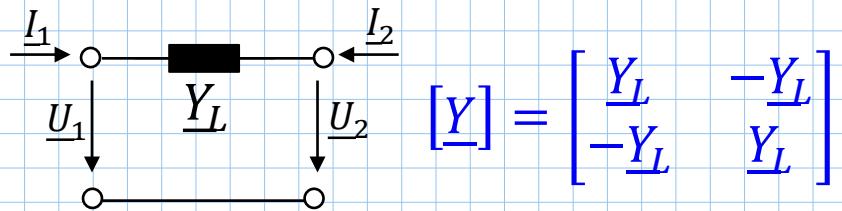
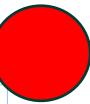
$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0}$$

Kurzschluss-Kernadmittanz vorwärts

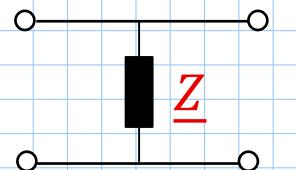
$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0}$$

Kurzschluss-Kernadmittanz rückwärts

Einfache Beispiele:



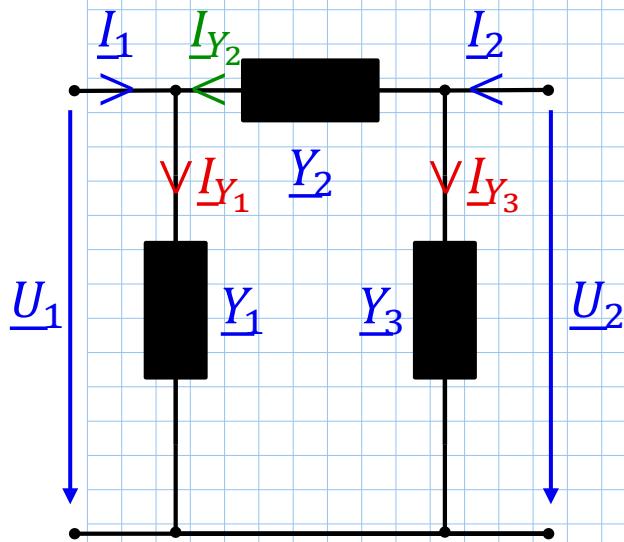
Grund:



Für Parallelwiderstand gilt:

$$KS \rightarrow \underline{Z} = 0 ; \underline{Y} \rightarrow \infty$$

Beispiel π -Martrix



$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0}$$

$$U_1 = 0 \rightsquigarrow I_{Y_1} = 0 \rightsquigarrow I_1 = -I_{Y_2}$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \underline{\underline{Y_1 + Y_2}}$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0} = \underline{\underline{Y_2 + Y_3}}$$

Einfache
Parallelenschaltungen

$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0}$$

$$U_2 = 0 \rightsquigarrow I_{Y_3} = 0 \rightsquigarrow I_2 = -I_{Y_2}$$

$$\underline{\underline{I_1 = -Y_2 \cdot U_2}}$$

$$\underline{\underline{I_2 = -Y_2 \cdot U_1}}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

kopplungssymmetrisch

Matrix gegeben → Schaltung gesucht ?



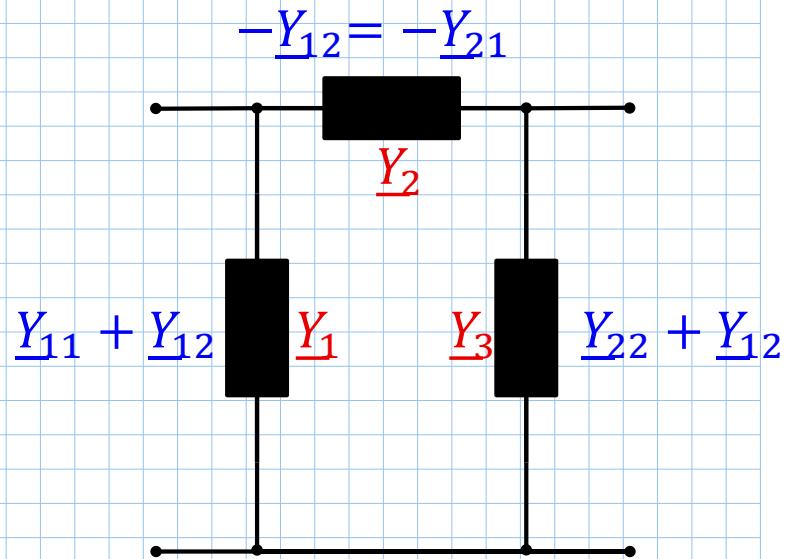
Beschränkt auf:

- a) Eingang und Ausgang beziehen sich auf dasselbe Potential
- b) Admittanzmatrix ist kopplungssymmetrisch

$$\underline{Y}_{21} \triangleq \underline{Y}_{12}$$

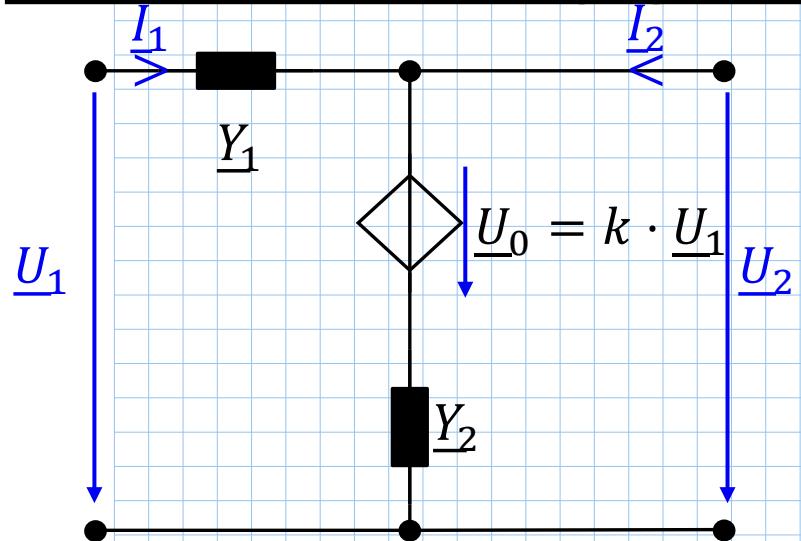
Gegeben:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$



Zwischenbemerkung: Admittanzmatrix kopplungssymmetrisch
→ Impedanzmatrix ist ebenfalls kopplungssymmetrisch

Beispiel: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle



$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & -\underline{Y}_1 \\ -(Y_1 + k \cdot Y_2) & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix}$$



Zur Berechnung von \underline{Y}_{21} :

$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

K

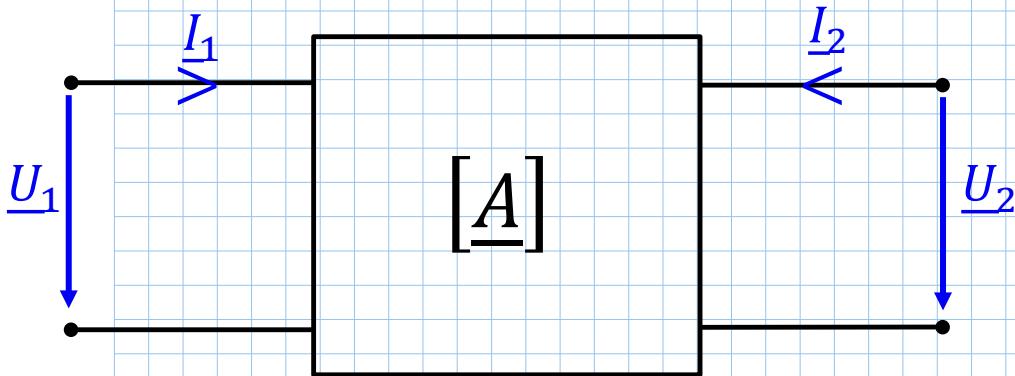
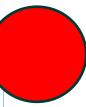
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3$$

M

$$\frac{1}{Y_2} \underline{I}_3 + \underline{U}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 + \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \cdot k \cdot \underline{U}_1 = 0$$

11.4 Kettenmatrix



$$A_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \mid \underline{I}_2 = 0$$

LL-Spannungsübersetzung

$$A_{22} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \mid \underline{U}_2 = 0$$

KS-Stromübersetzung

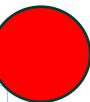
$$A_{21} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \mid \underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U}_1 = A_{11}\underline{U}_2 - A_{12}\underline{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \mid \underline{U}_2 = 0$$

Achtung Vorzeichen!

Weitere alternative Zweitordarstellungen



Grundsätzlich ist jede beliebige Kombination $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2$ möglich !

■ H-Matrix (Hybrid-Matrix)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

■ Parallelmatrix

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

→ H-Matrix üblich zur Beschreibung von Transistoren !

Achtung: Transistor ist ein nichtlineares Bauelement

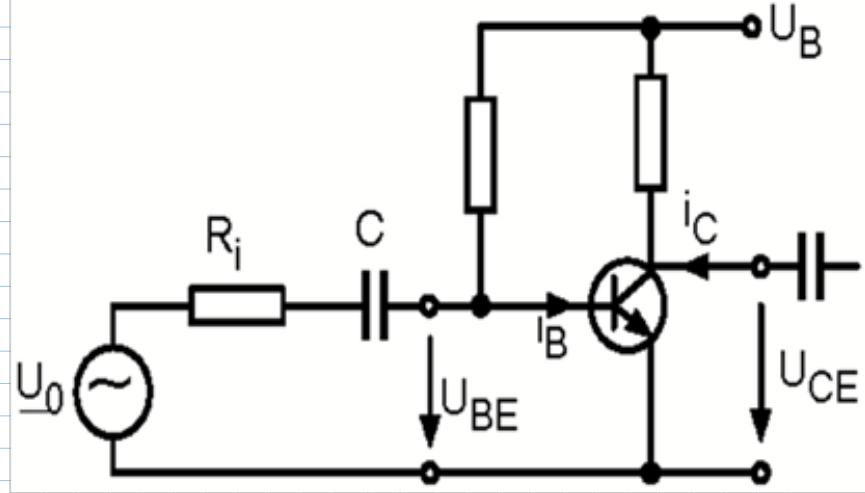
Aber: Linearisierung um Arbeitspunkt üblich
(Kleinsignaldarstellung)

Kleinsignaldarstellung für Transistorparameter



Üblich:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta U_2 \end{bmatrix}$$



mit

$$h_{11} = \frac{\partial U_{BE}}{\partial I_b} \mid_{U_{CE}=\text{const}}$$

differentieller Eingangswiderstand

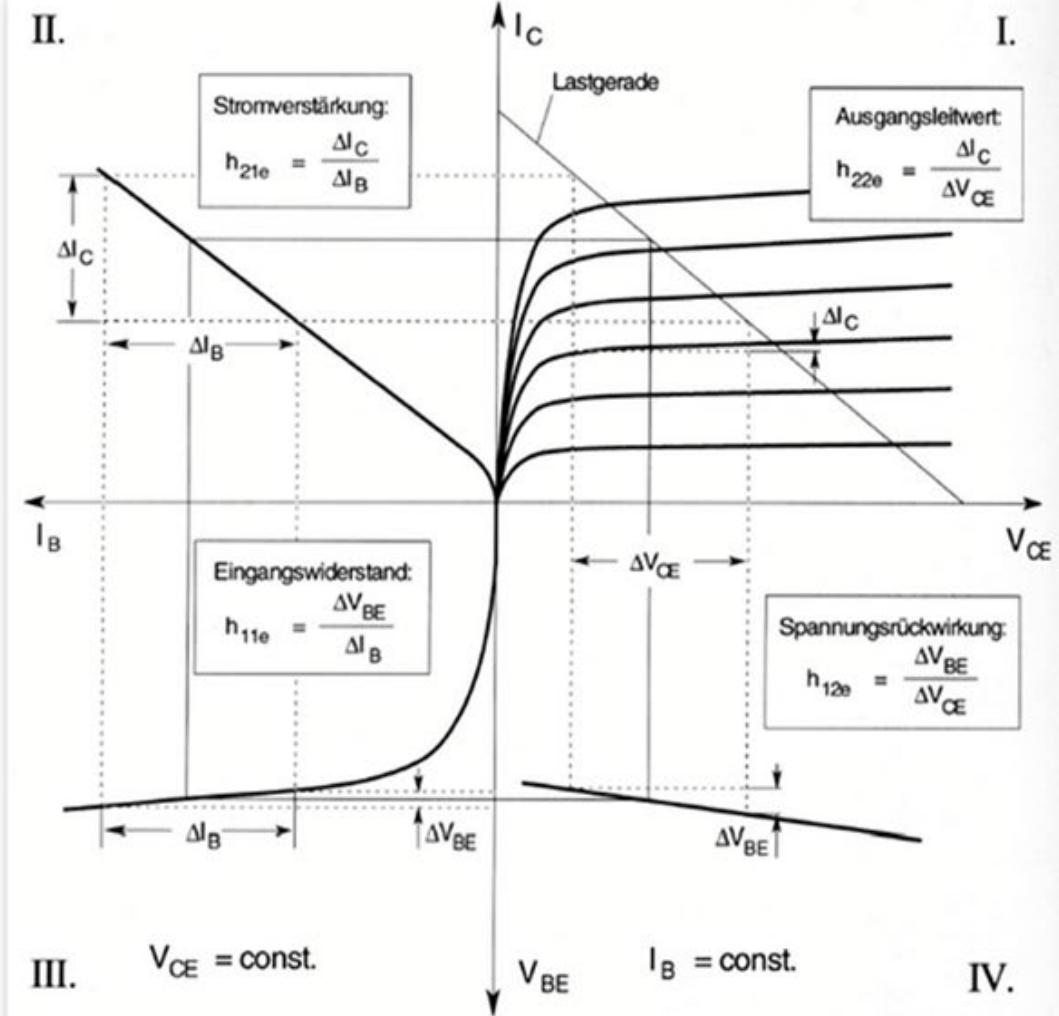
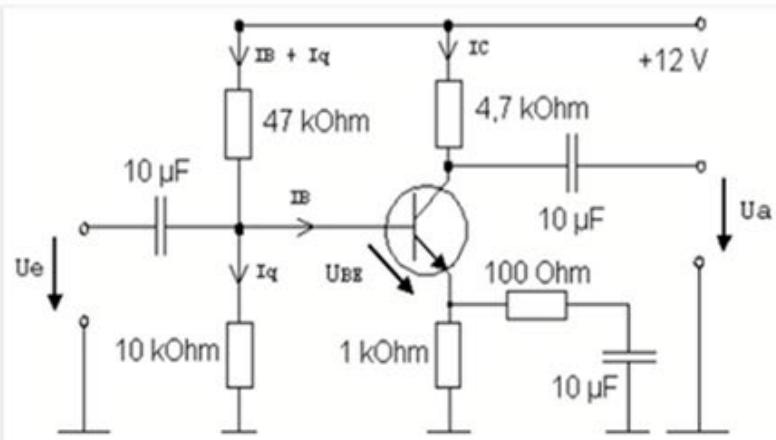
$$h_{21} = \frac{\partial I_C}{\partial I_b} \mid_{U_{CE}=\text{const}}$$

Stromverstärkung

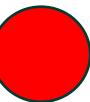
Transistor Vierquadrantendarstellung



$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



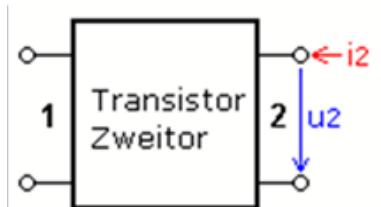
Beispiel: *h*-Parameter für den Transistor



Eingangsgröße i_1
Messgröße u_1
Ausgang:
Kurzschluss
 $u_2 = 0$

Eingangswiderstand

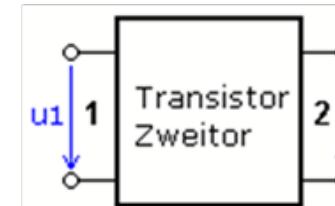
$$h_{11} = \frac{u_1}{i_1}$$



Eingang: offen
Eingangsgröße: u_2
Messgröße: i_2

Ausgangsleitwert

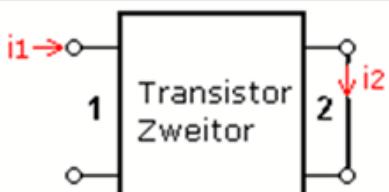
$$h_{22} = \frac{i_2}{u_2}$$



Eingang: offen $i_1 = 0$
Eingangsgröße: u_2
Messgröße: u_1

Spannungsrückwirkung

$$h_{12} = \frac{u_1}{u_2}$$



Ausgang: Kurzschluss
Eingangsgröße: i_1
Messgröße: i_2

Stromverstärkung

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}$$

Eingangswiderstand h_{11}

- Ausgang wird kurzgeschlossen
- Eingangsstrom wird eingespeist
- Eingangsspannung wird gemessen

Ausgangsleitwert h_{22}

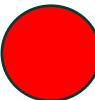
- Eingang bleibt offen
- An den Ausgang wird Spannung gelegt
- Ausgangsstrom wird gemessen

Spannungsrückwirkung h_{12}

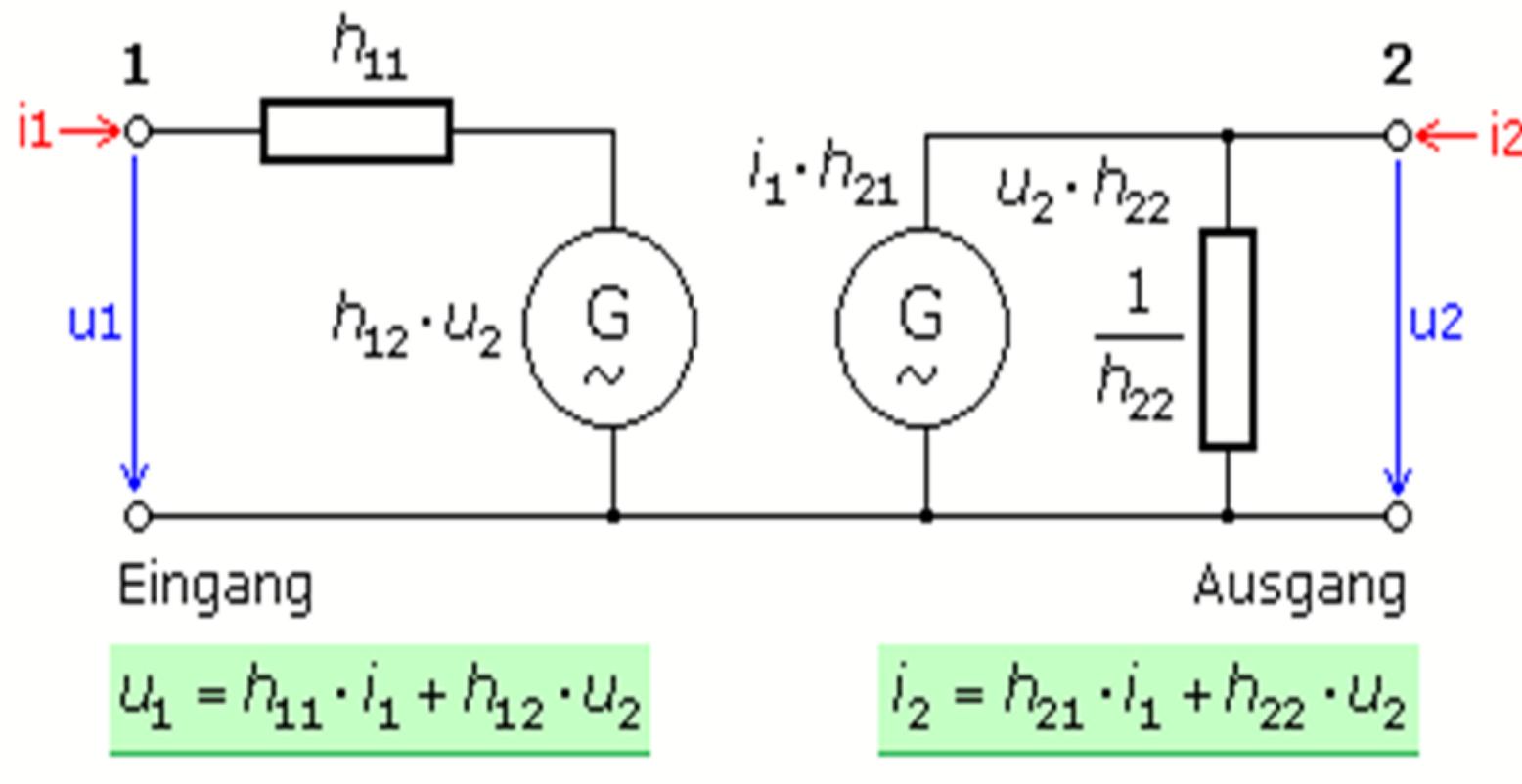
- Eingang bleibt offen, Eingangsstrom $I = 0$
- An den Ausgang wird Spannung gelegt
- Am Eingang wird Spannung gemessen

Stromverstärkung h_{21}

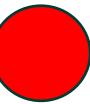
- Ausgang wird kurzgeschlossen
- Am Eingang wird Strom eingespeist
- Am Ausgang wird Strom gemessen



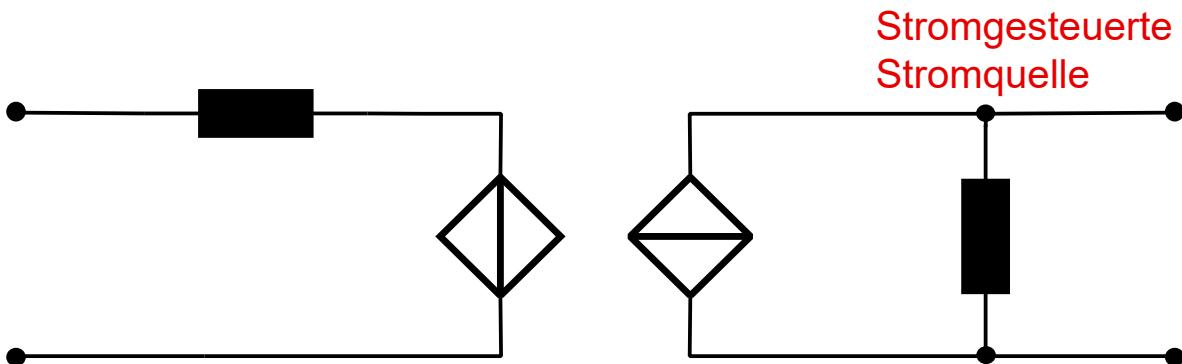
Aus den h-Parametern kann ein
Transistorersatzschaltbild erstellt werden



Vierpol-Matrizen und gesteuerte Quellen



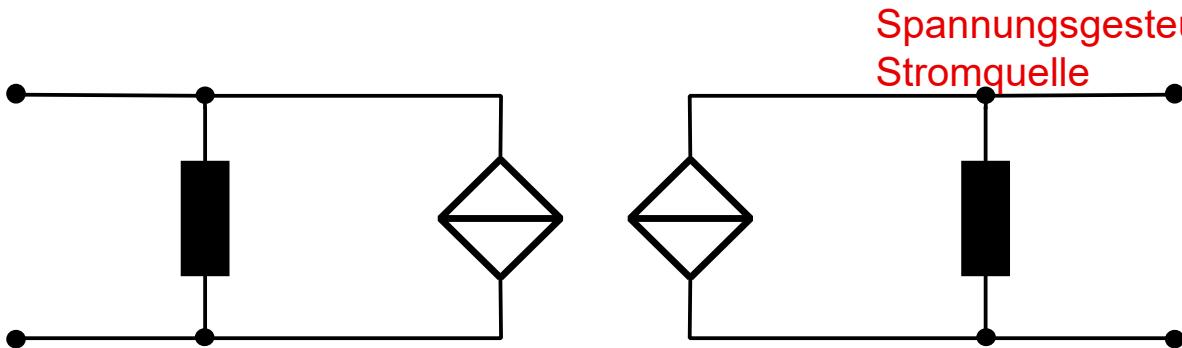
Das für den Transistor gelernte lässt sich verallgemeinern:



Stromgesteuerte
Stromquelle

H-Matrix

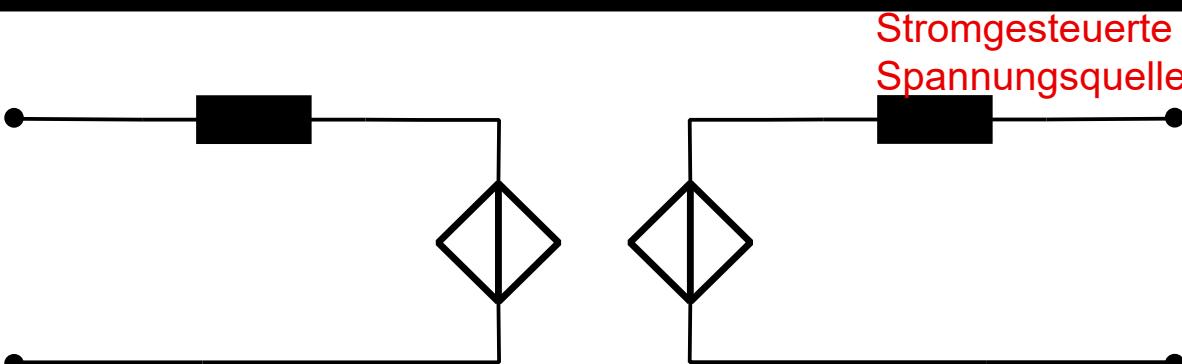
$$\blacksquare \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



Spannungsgesteuerte
Stromquelle

Y-Matrix

$$\blacksquare \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

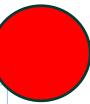


Stromgesteuerte
Spannungsquelle

Z-Matrix

$$\blacksquare \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

11.5 Umrechnung der Zweitor(Vierpol)-Matrizen



Es ist möglich, jede Matrix-Darstellung umzurechnen!

Beispiel: $[Z] \leftrightarrow [Y]$

Impedanzmatrix

$$[U] = [Z] \cdot [I]$$

mathematische Ergänzung

$$[Z]^{-1} \cdot [U] = ([Z]^{-1} [Z]) \cdot [I]$$

$[I]$ $[1]$

Mit $[Z]^{-1} [Z] = [1]$

$$\sim [Z]^{-1} [U] = [I]$$

$[1]$: Einheitsmatrix

$$[Y] \cdot [U] = [I]$$

$$\sim [Z]^{-1} = [Y]$$

11.6 Das Reziprozitätstheorem

Für kopplungssymmetrische Vierpole gilt:

$$\underline{Z}_{12} \stackrel{!}{=} \underline{Z}_{21} \Leftrightarrow \underline{Y}_{12} \stackrel{!}{=} \underline{Y}_{21} \Leftrightarrow \underline{H}_{12} \stackrel{!}{=} -\underline{H}_{21}$$

Dies gilt für sämtliche passiven linearen Vierpole!

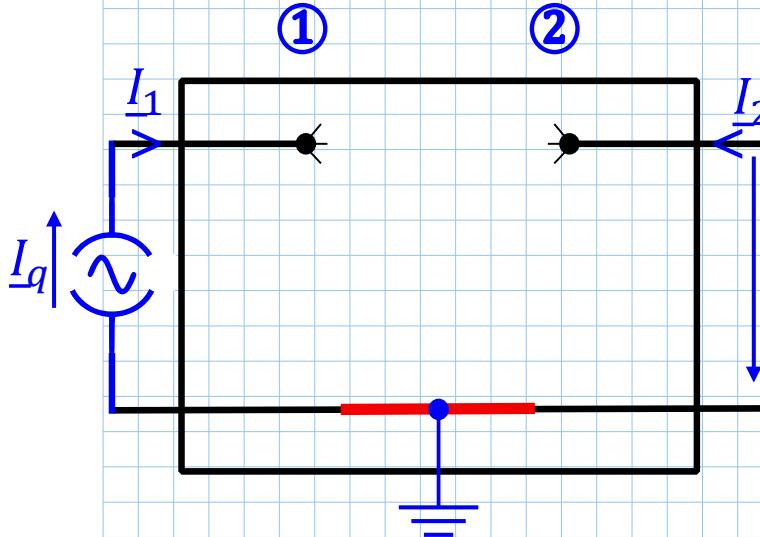
→ Berechnung von passiven Vierpolen vereinfacht sich
von 4 Unbekannten auf nur noch 3 Unbekannte

Darüber hinaus gilt für symmetrische Vierpole:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} \text{ bzw. } \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} \\ \text{bzw. } \det\{\underline{H}\} \stackrel{!}{=} 1$$

■ Annahme: Beliebige passive Schaltung

(A)

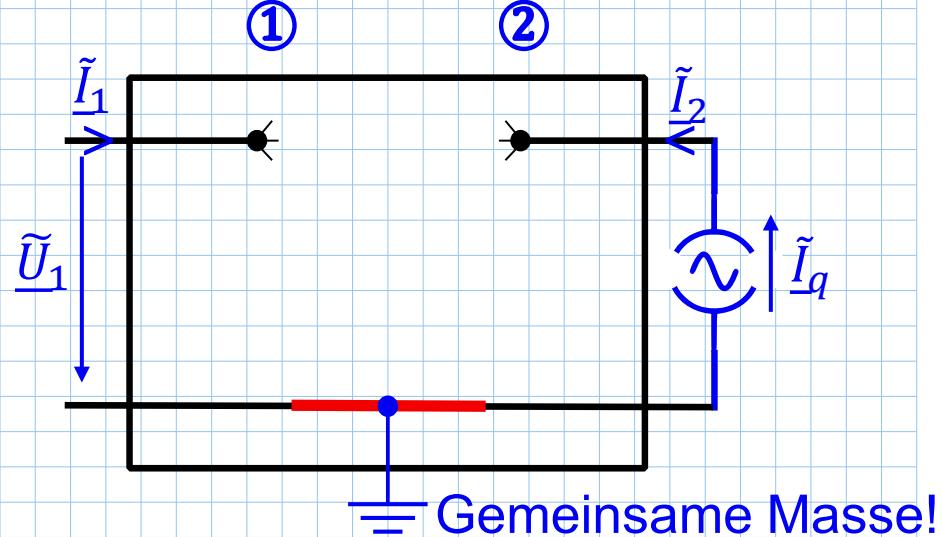


$$\underline{Z}_{21} \stackrel{!}{=} \underline{Z}_{12}$$

↓

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \stackrel{!}{=} \frac{\tilde{\underline{U}}_1}{\tilde{\underline{I}}_2}$$

(B) (alle Größen mit Tilde!)



Gemeinsame Masse!

Zum Beweis das Knotenpunktpotentialverfahren anwenden:

Es gilt

- 0.) Spannungsquellen → Stromquellen
- 1.) Auswahl Bezugspotential (\perp) + Bezeichnung Knoten
- 2.) Aufstellen der Knotengleichungen
- 3.) Gleichungssystem nach Knotenpotentialen auflösen

A

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

B

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \\ \vdots \\ \tilde{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \vdots \\ \tilde{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{I}_q \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anregungsstrom
mit allen Quellen!

Lösung mittels Cramer'sche Regel



$$\text{Einschub } [A] \cdot \vec{X} = \vec{b} \Rightarrow x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

(A) $V_2 = \frac{D_2}{D}$ mit $D_2 = \det \begin{pmatrix} G_{11} & I_q & G_{13} & G_{1N} \\ G_{21} & 0 & G_{23} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & 0 & G_{N3} & G_{NN} \end{pmatrix}$

(B) $\tilde{V}_1 = \frac{D_1}{D}$ mit $D_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & G_{13} & G_{1N} \\ I_q & G_{22} & G_{23} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & G_{N2} & G_{N3} & G_{NN} \end{pmatrix}$

Allgemein gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det \{A_{ij}\} \quad \text{Entwicklung nach i-ter Zeile}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det \{A_{ij}\} \quad \text{Entwicklung nach j-ter Spalte}$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & |_{\underline{q}} & \underline{G}_{13} & \dots \\ \underline{G}_{21} & 0 & \underline{G}_{23} & \dots \\ \underline{G}_{31} & 0 & \underline{G}_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = I_q \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{G}_{21} & \underline{G}_{23} & \underline{G}_{24} & \dots \\ \underline{G}_{31} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} & \dots \\ \underline{G}_{41} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =: I_q \cdot \det \{\underline{G}_2\}$$

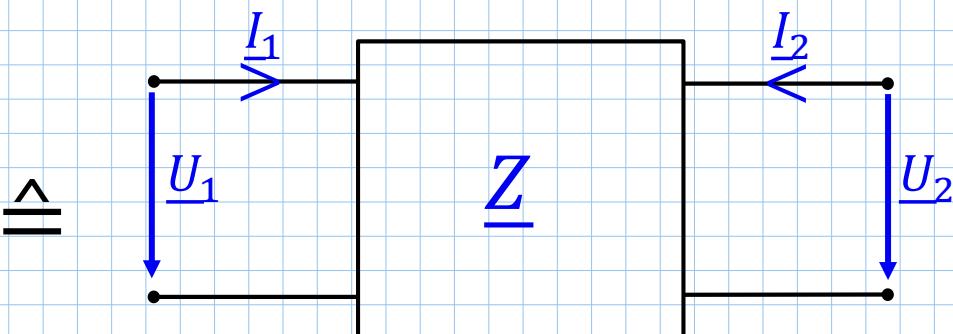
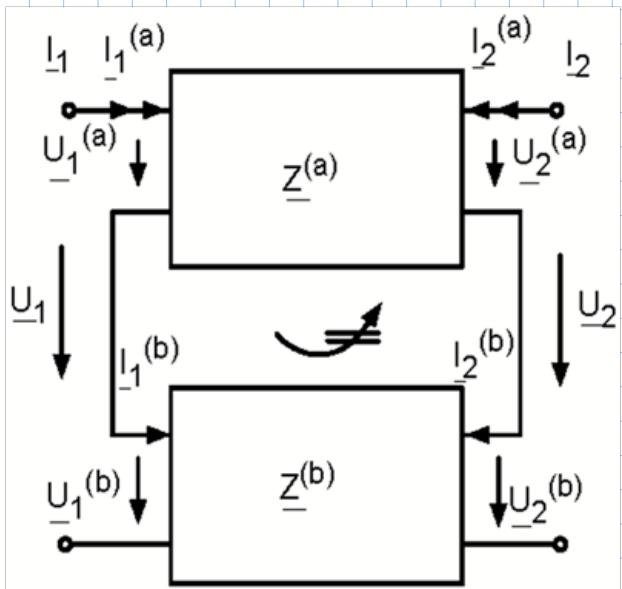
$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \dots \\ I_q & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} & \dots \\ 0 & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = I_q \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \underline{G}_{14} & \dots \\ \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} & \dots \\ \underline{G}_{42} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =: I_q \cdot \det \{\underline{G}_1\}$$

- $\underline{G}_{ij} = \underline{G}_{ji}$ weil Leitwert zwischen Knoten i und j genau der Leitwert zwischen j und i ist
- Zwei Matrizen $[\underline{G}_1]$ und $[\underline{G}_2]$ besitzen die gleiche Determinante, wenn nur Zeilen und Spalten vertauscht sind (transponiert)

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{V}_2}{I_q} \sim \underline{Z}_{12} = \frac{D_2}{D \cdot I_q} ; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{\underline{V}_1}{I_q} \sim \underline{Z}_{21} = \frac{D_1}{D \cdot I_q}$$

$$D_1 = D_2 \sim \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$$

11.7 Reihenschaltung, Parallelschaltung und Ketten schaltung



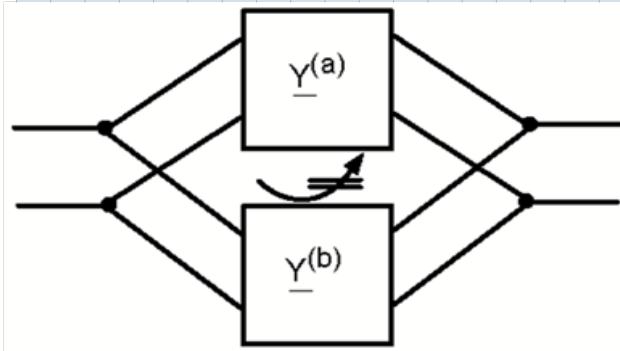
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(a)} \\ \underline{I}_2^{(a)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(b)} \\ \underline{I}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(a)} + \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{U}_2^{(a)} + \underline{U}_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(a)} \\ \underline{U}_2^{(a)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{U}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{U} = [Z^{(a)}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(a)} \\ \underline{I}_2^{(a)} \end{bmatrix} + [Z^{(b)}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(b)} \\ \underline{I}_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \underline{Z}_{ges} = [Z^{(a)}] + [Z^{(b)}]$ Reihenschaltung

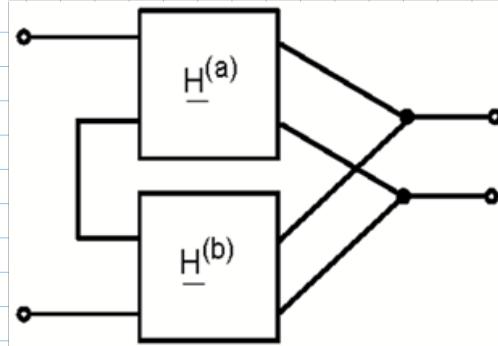
Parallelschaltung



$$[\underline{Y}_{ges}] = [\underline{Y}^{(a)}] + [\underline{Y}^{(b)}]$$

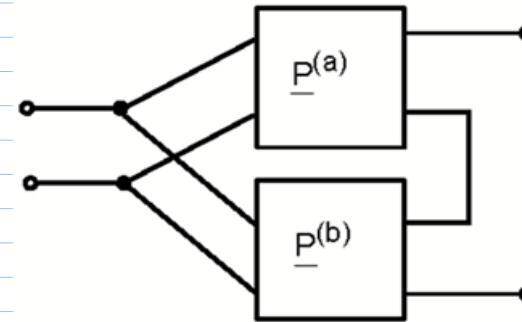
- Ströme addieren sich
- Spannungen sind alle gleich

Reihen-Parallelschaltung



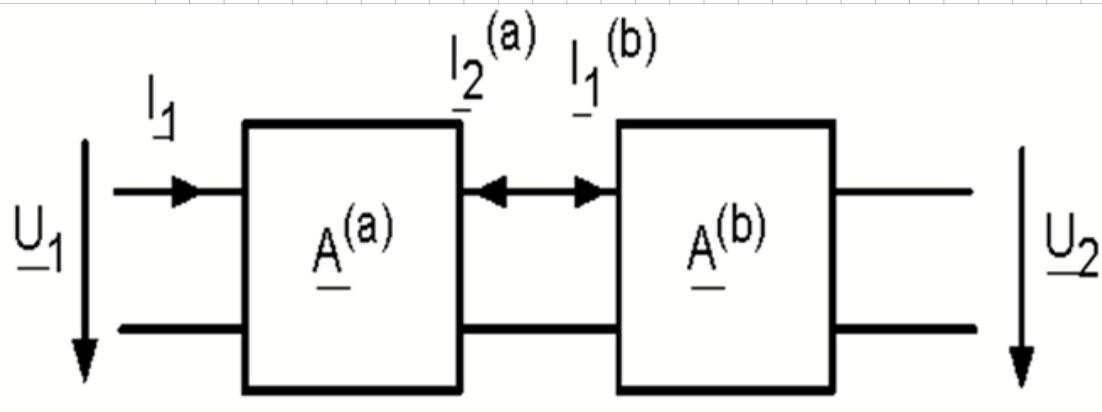
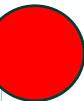
$$[\underline{H}] = [\underline{H}^{(a)}] + [\underline{H}^{(b)}]$$

Parallel-Reihenschaltung



$$[\underline{P}] = [\underline{P}^{(a)}] + [\underline{P}^{(b)}]$$

Kettenschaltung



$$\left[\begin{array}{c} U_1 \\ I_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} U_1^{(a)} \\ I_1^{(a)} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} U_2^{(a)} \\ -I_2^{(a)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} U_1^{(b)} \\ I_1^{(b)} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} U_2 \\ I_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} U_2^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} U_1 \\ I_1 \end{array} \right] = \left[\underline{A}^{(a)} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} U_2^{(a)} \\ -I_2^{(a)} \end{array} \right] = \left[\underline{A}^{(a)} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} U_1^{(b)} \\ I_1^{(b)} \end{array} \right]$$

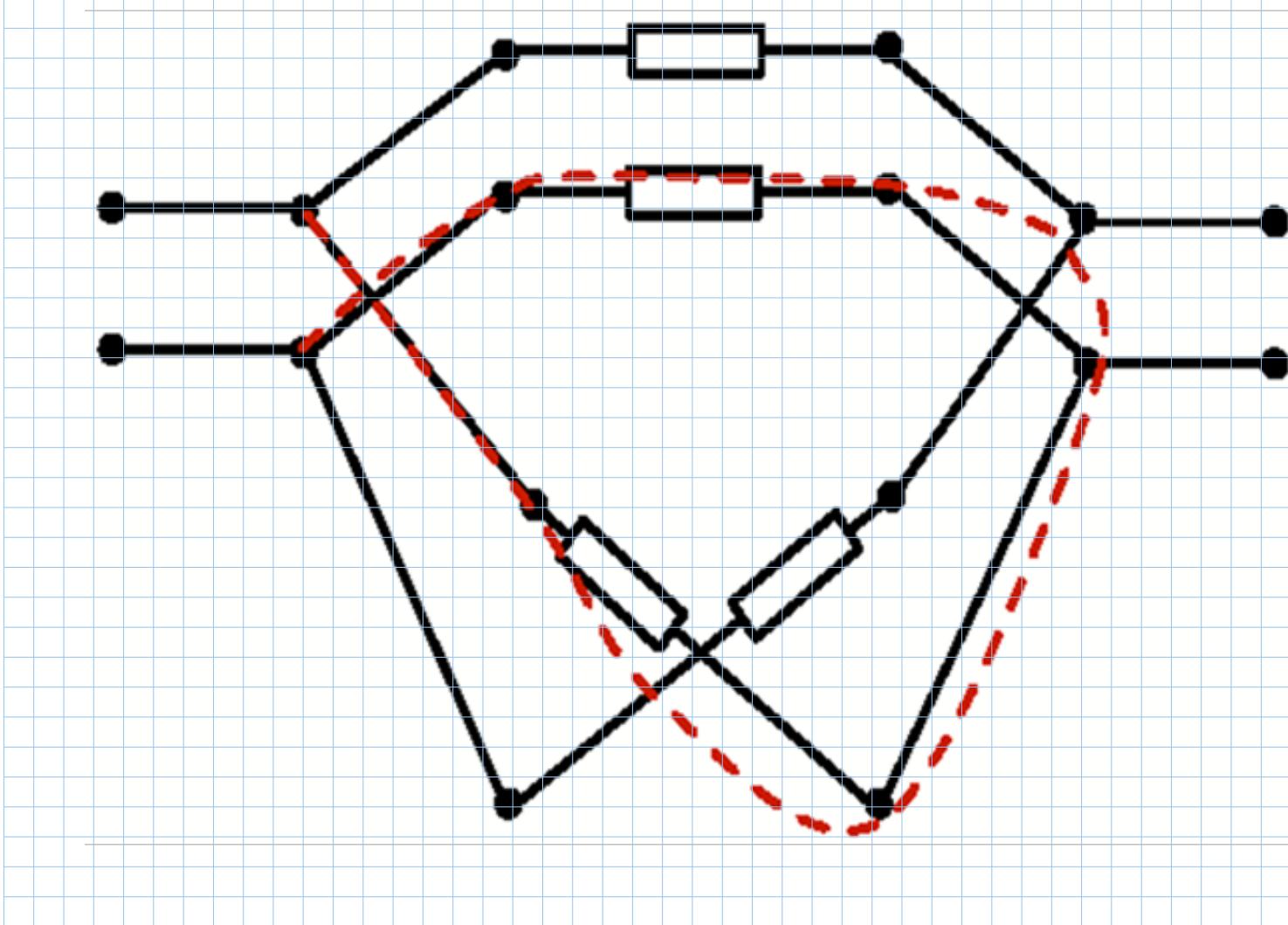
$$= \left[\underline{A}^{(a)} \right] \cdot \left[\underline{A}^{(b)} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} U_2^{(b)} \\ -I_2^{(b)} \end{array} \right]$$

$\underbrace{\phantom{\left[\underline{A}^{(a)} \right] \cdot \left[\underline{A}^{(b)} \right]}}_{\left[\underline{A} \right]}$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\underline{A} \right] = \left[\underline{A}^{(a)} \right] \cdot \left[\underline{A}^{(b)} \right]} \Rightarrow \text{Produkt der Kettenmatrizen}$$



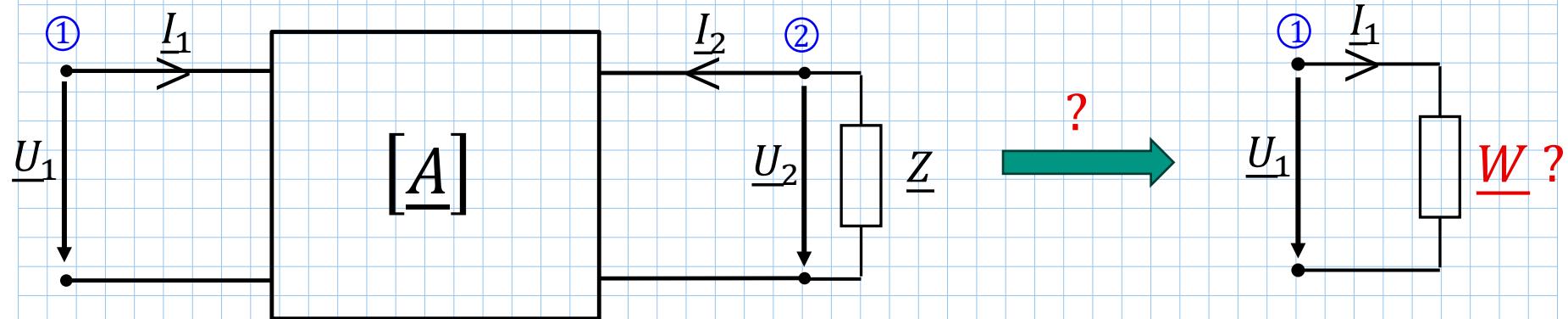
Die Formeln können nicht angewendet werden auf Zusammenschaltungen, bei denen Kreisströme auftreten können!



11.8 Impedanztransformation



Frage: Welche Eingangs-impedanz \underline{W} gehört zum Zweitor $[A]$ und der Impedanz \underline{Z} ?



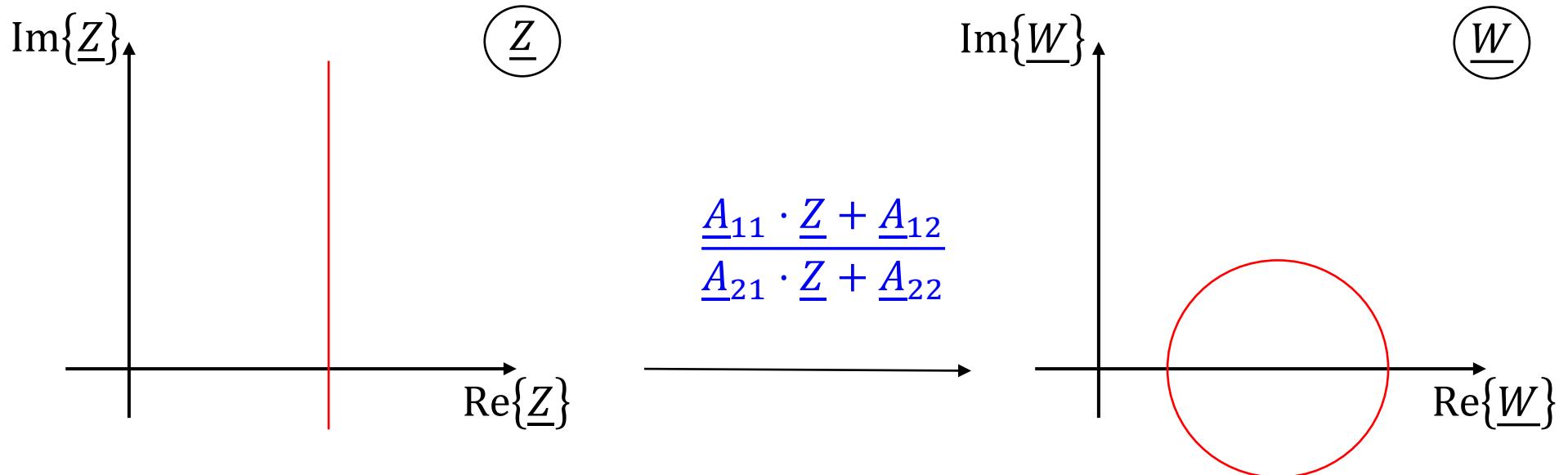
$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2)$$

$$I_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z} \cdot (-\underline{I}_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_1}{I_1} = \underline{W} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2)}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2)} \quad \downarrow \quad \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}(-\underline{I}_2) + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2)}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}(-\underline{I}_2) + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2)}$$

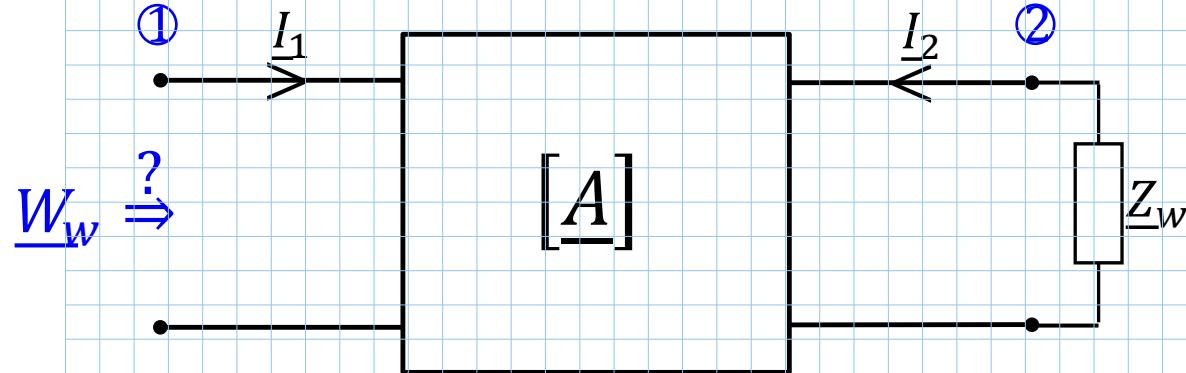
$$\boxed{\underline{W} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{22}}}$$



→ Falls eine Impedanz mit einer bestimmten Ortskurve gesucht wird, kann man von einem einfachen Bauelement ausgehen und sucht die zugehörige komplexe Abbildung

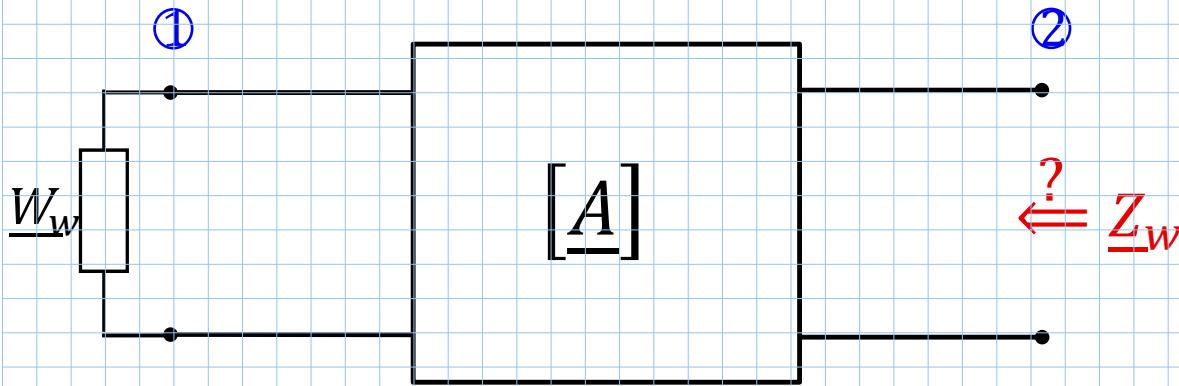
11.9 Wellenwiderstand

Aus 12.8 ist bekannt:



$$W_w = \frac{A_{11} \cdot Z_w + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_w + A_{22}}$$

In gleicherweise gilt für ein kopplungssymmetrisches



$$Z_w = \frac{A_{22} \cdot W_w + A_{12}}{A_{21} \cdot W_w + A_{11}}$$



Mit den beiden Gleichungen:

$$\underline{W}_w = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z} + \underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_w = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{W}_w + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{W}_w + \underline{A}_{11}}$$

→ 2 Gleichungen für die beiden Unbekannten \underline{W}_w und \underline{Z}_w :

$$\underline{W}_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}$$

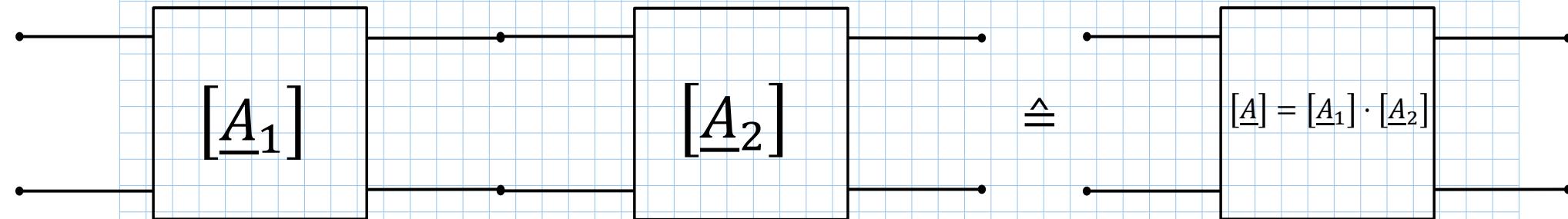
$$\underline{Z}_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$$

Wenn $\underline{Z}_w = \underline{W}_w$:

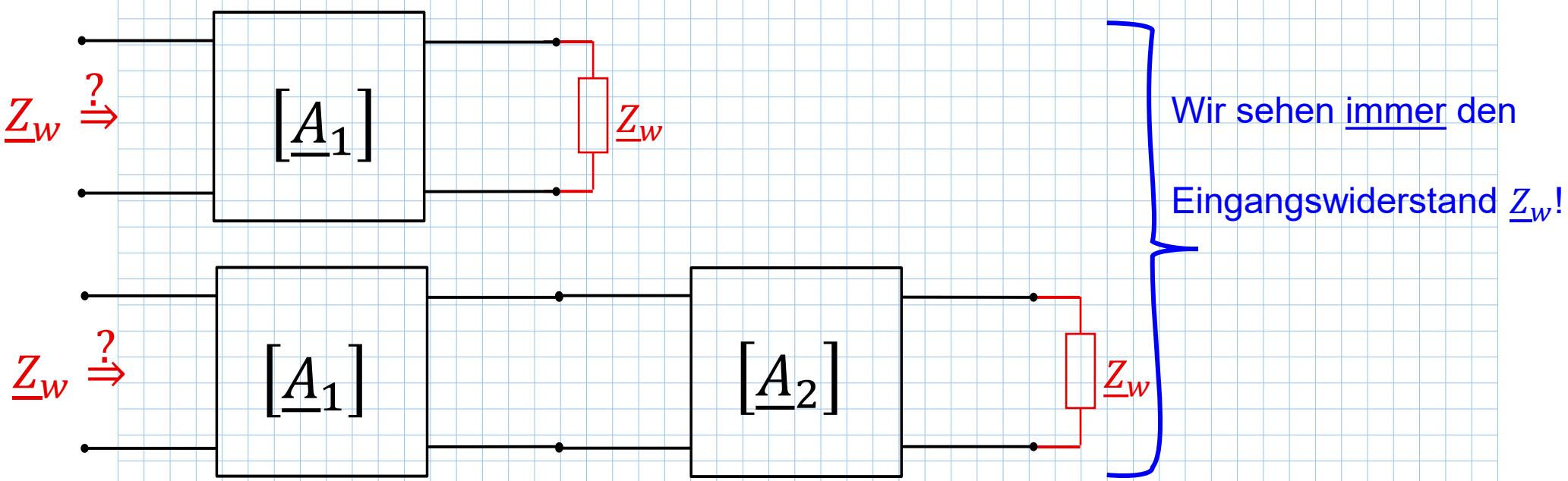
$$\Rightarrow \underline{Z}_{11} \stackrel{!}{=} \underline{Z}_{22}; \quad \underline{Y}_{11} \stackrel{!}{=} \underline{Y}_{22}; \quad \underline{A}_{11} \stackrel{!}{=} \underline{A}_{22} \rightarrow \text{Widerstandssymmetrie!}$$

Definition des Wellenwiderstands: $\underline{Z}_w \hat{=} \underline{W}_w$

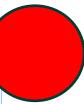
Für die Ketten schaltung gilt zusätzlich für die Verkettung von zwei Matrizen $[A_1]$ und $[A_2]$:



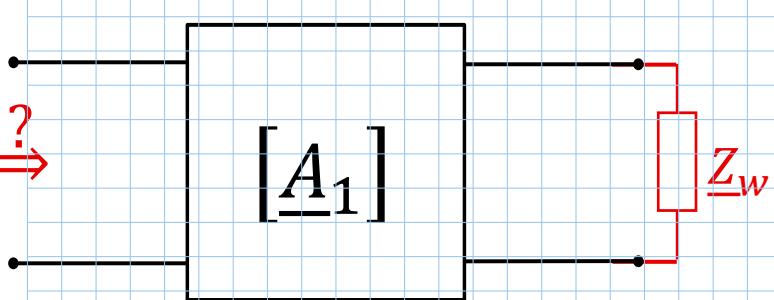
Frage: Welche Eingangsimpedanz sehen wir beim Hintereinanderschalten zweier widerstandssymmetrischer Matrizen mit $A_{11} = A_{22}$?



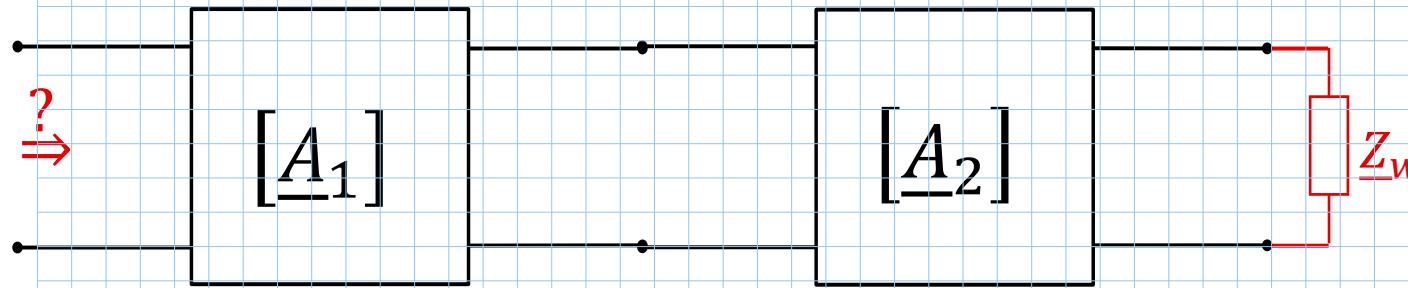
Wir erweitern die Verkettung auf eine Anzahl N Vierpole:



$\underline{Z}_w \Rightarrow ?$



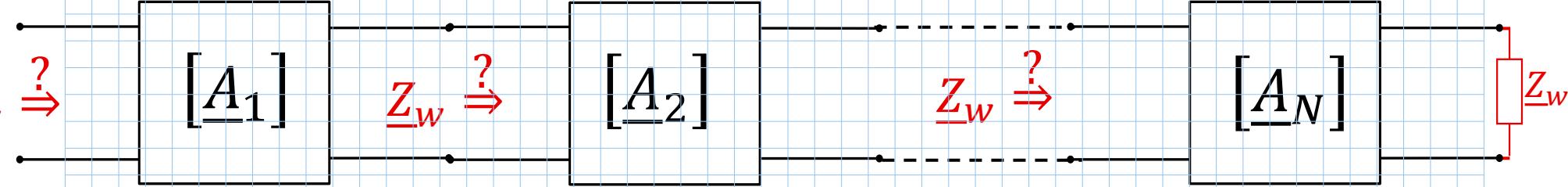
$\underline{Z}_w \Rightarrow ?$



$\underline{Z}_w \Rightarrow ?$

$\underline{Z}_w \Rightarrow ?$

$\underline{Z}_w \Rightarrow ?$



Egal wie lang die Kette ist, die Eingangsimpedanz bleibt \underline{Z}_w !

■ Anwendung auf die Übertragung von elektromagnetischen Wellen:



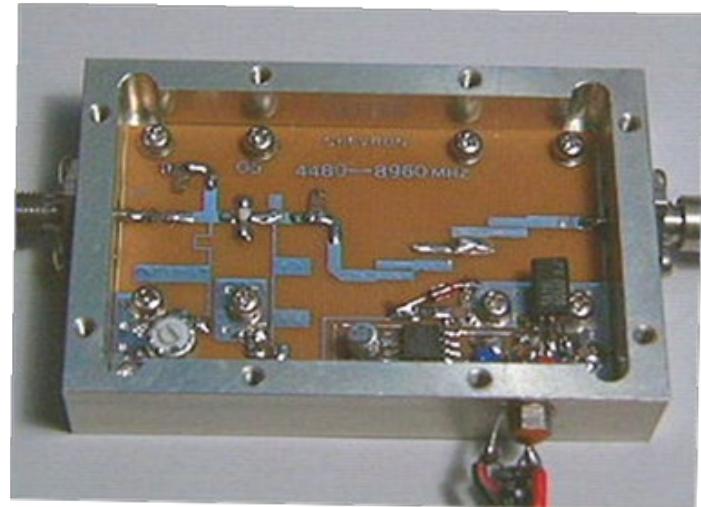
Paralleldrahtleitung



Koaxialleitung



Mikrostreifenleitung

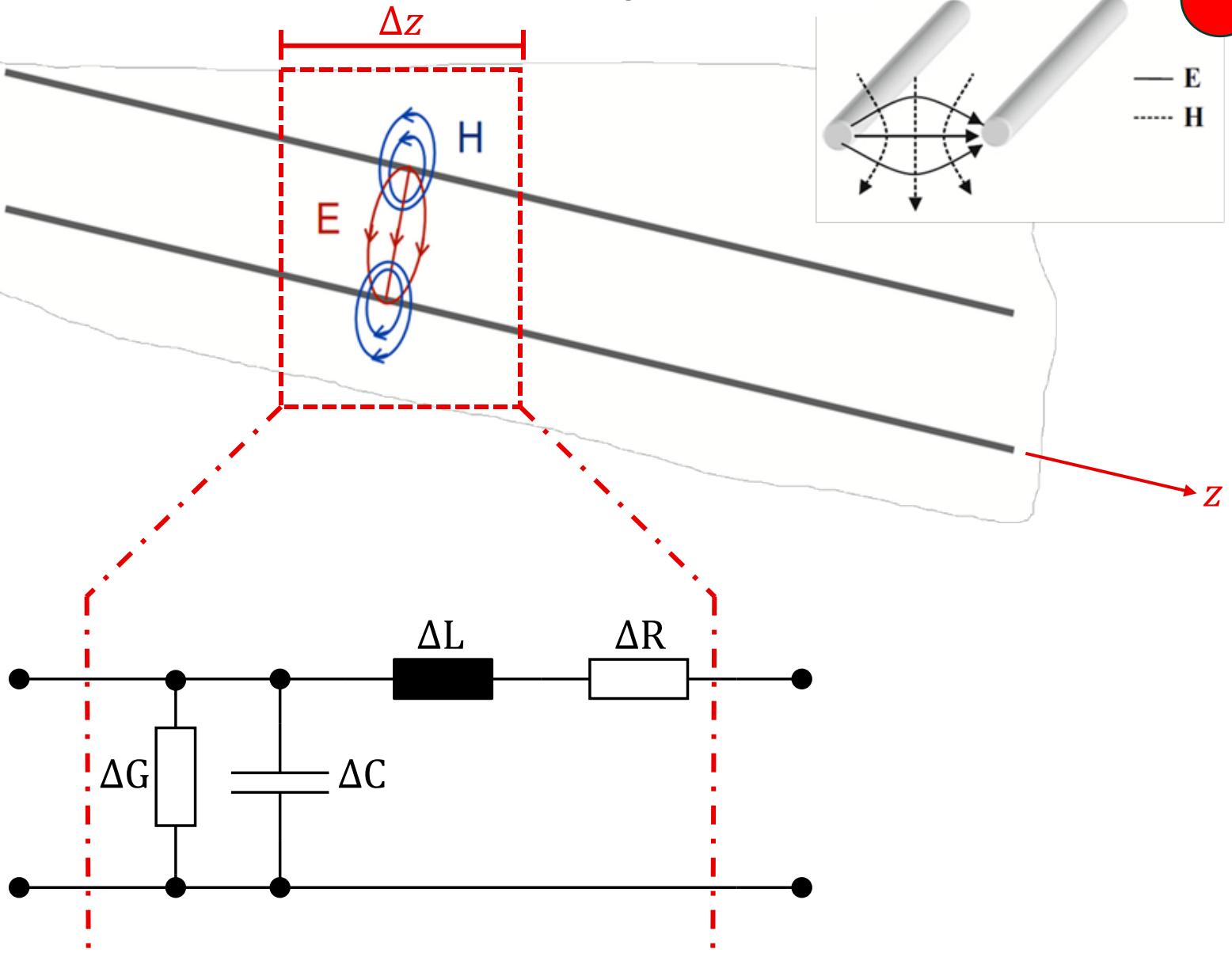


Leitungsgebunden:

Aber auch bei der
Übertragung im
homogenen Medium:

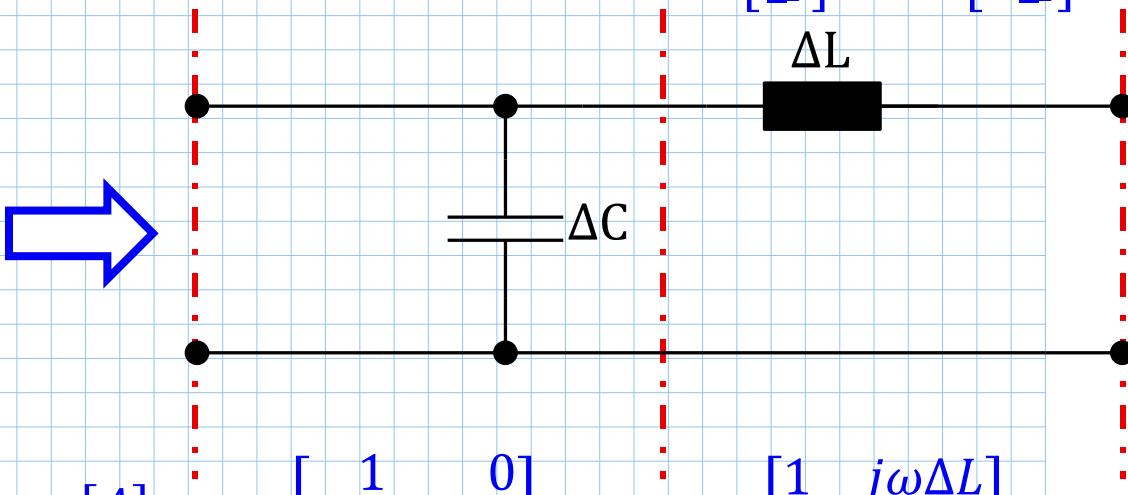
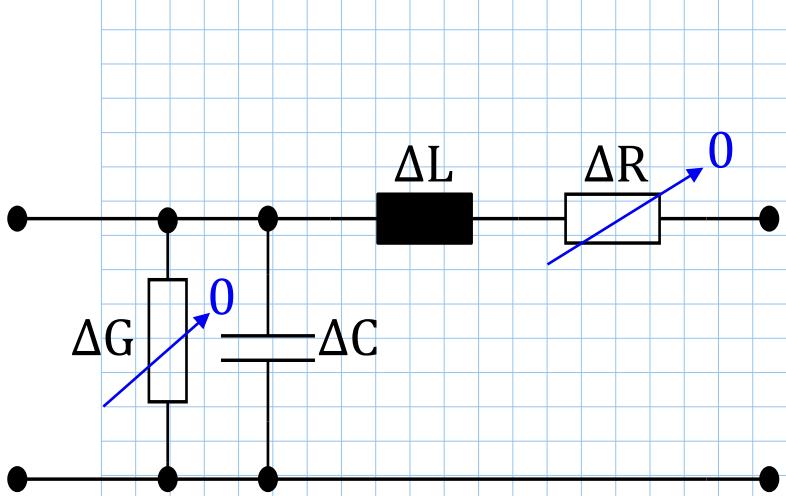


Jetzt betrachten wir ein infinitesimal kleines Leitungselement:



■ Für ideale verlustlose Leitung gilt: $\Delta G = 0$ und $\Delta R = 0$

Wir betrachten die verlustlose Leitung und berechnen die Kettenmatrix:



Für $\omega^2 \ll \omega_0^2 = \frac{1}{\Delta L \Delta C}$:

$$[A] \approx \begin{bmatrix} 1 & j\omega\Delta L \\ j\omega\Delta C & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & j\omega\Delta L \\ j\omega\Delta C & 1 - \omega^2 \Delta L \Delta C \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_w = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}} \approx \sqrt{\frac{1 \cdot j\omega\Delta L}{j\omega\Delta C \cdot 1}} = \sqrt{\frac{\Delta L}{\Delta C}}$$

Für ein 50Ω Kabel gilt somit $Z_w = \sqrt{\frac{\Delta L}{\Delta C}} = 50 \Omega$