<좌표, 옥타브, DOG 번호>를 가진 keypoint를 검출한 후, 주변의 data에 맞게 미세 조정을 진행합니다. 이 정보들로 저조도로 인해 노이즈에 민감하거나 edge에 분포한 점들을 제거할 수 있습니다.

접근 방법론 중 하나는, interpolate된 최대점을 결정하기 위해 지역 sample point에 3D quadratic function을 적용해서 매칭과 안정성을 개선하는 것입니다.

Scale-space function D(x, y, σ)를 테일러 확장을 통해

$$\mathrm{D}(\mathrm{x}) = \mathrm{D} + \frac{\partial \mathrm{D}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial \mathrm{x}^2}\mathrm{x}$$

로 변환시킵니다. 이 때 D와 도함수들은 sample point에서 evaluate되고 $\mathrm{x} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \sigma)^{\mathrm{T}}$는 이 점으로부터의 offset입니다. 일반적인 식의 극대, 극소를 구하는 것과 동일하게, X의 극댓값

$$\hat{x} = -\frac{\partial^2 D^{-1}}{\partial \mathrm{x}^2} \cdot \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{x}}$$

는 위 함수의 미분값을 0으로 설정하여 결정합니다.

Hessian과 D의 도함수들은 이웃한 sample point들의 차이를 이용하여 approximate됩니다. 3x3의 선형 시스템 결과는 최소 비용으로 해결될 수 있습니다. 만약 어떤 차원에서든 offset $\hat{x}$가 0.5보다 크다면, 극댓값이 다른 sample point에 가깝다는 뜻입니다. 이 경우, sample point는 변하고 그 점 대신 interpolation이 수행됩니다. 최종 offset $\hat{x}$는 지역 극점의 interpolate된 추정치를 얻기 위해 sample point의 지역에 추가됩니다. $\hat{x}$를 $\mathrm{D}(\mathrm{x})$에 대입한

$$\mathrm{D}(\hat{x}) = D + \frac{1}{2}\frac{\partial D^T}{\partial x}\hat{x}$$

는 저조도의 불안정한 극점들을 제거하는데 유용합니다. (논문에서는, $|\mathrm{D}(\mathrm{x})|$ 값이 0.03 미만이면 무시합니다.)

요약) 테일러 확장을 통해 좌표를 보정하고 저조도의 불안정한 극점을 제거합니다.

안정성을 위해서, 저조도 keypoint를 제거하는 것 만으론 충분하지 않습니다. DOG는 edge에 아주 강하게(민감하게) 반응하는데, edge 주변부, 즉 edge가 제대로 결정되지 않아 적은 양의 노이즈에도 불안정해도 마찬가지입니다.

poor하게 정의된 DOG의 극점peak은 edge를 가로질러 큰 주곡률principal curvature을 갖지만, 수직 방향의 (법선) 작은 주곡률을 가집니다. 주곡률은 keypoint의 location과 scale에서 계산된 2x2의 Hessian Matrix

$$H = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix}$$

로 계산될 수 있습니다. D의 도함수는 이웃한 sample points의 차이를 이용해 추정됩니다.

H의 eigenvalue는 D의 주곡률에 비례합니다. 비율만 알면 되니까, eigenvalue를 명확하게 계산하지 않아도 됩니다. α를 최대 eigenvalue, β를 그보다 작은 것으로 가정하면, H의 trace로부터 eigenvalue의 합을, determinant로부터 H의 곱을 알 수 있습니다.

$$\mathrm{Tr(H)} = \mathrm{D_{xx}} + D_{yy} = \alpha + \beta$$

$$\mathrm{Det(H)} = \mathrm{D_{xx}} D_{yy} - \left(D_{xy}\right)^2 = \alpha\beta$$

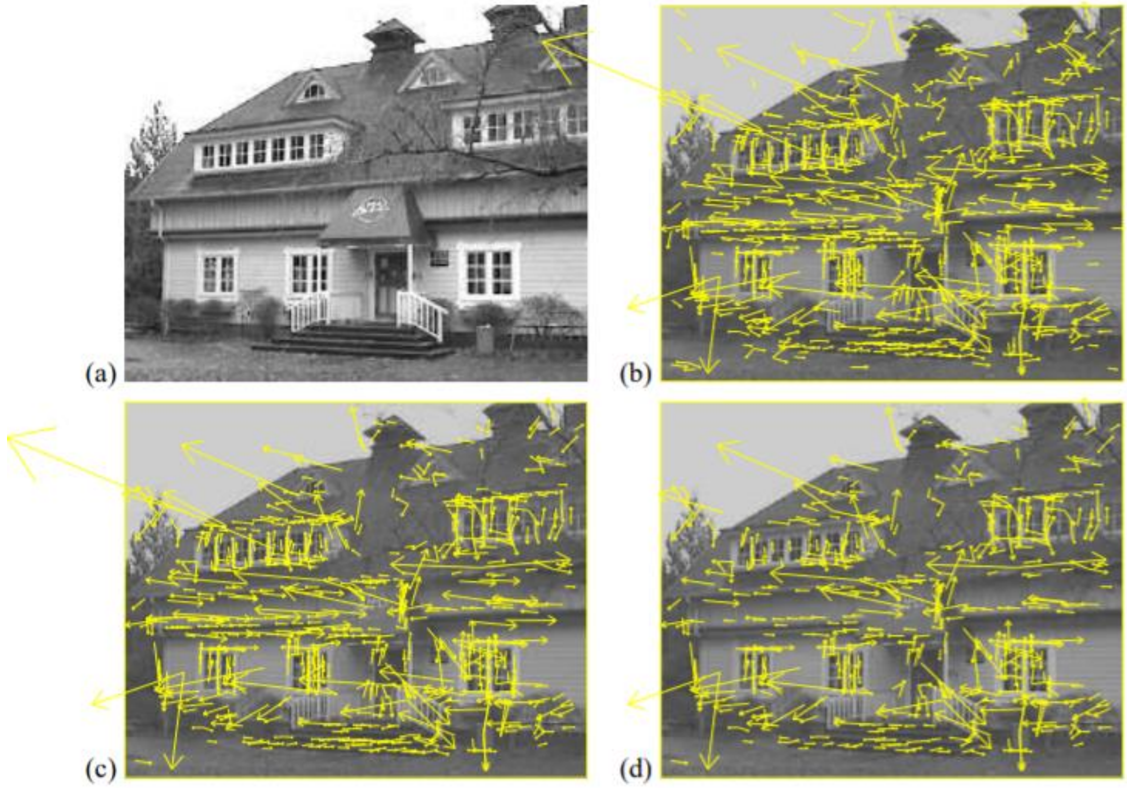
혹시라도 determinant가 음수라면, 곡률은 다른 sign을 가지고 따라서 point는 극점이 아닌 것으로 무시됩니다. $\mathrm{r} = \beta / a$ 라고 하면,

$$\frac{\mathrm{Tr(H)}^2}{Det(H)} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{(r\beta + \beta)^2}{r\beta^2} = \frac{(r+1)^2}{r}$$

이는 그들의 individual values보다는 오직 eigenvalue의 비율에만 의존합니다.
Quantity $(r+1)^2/r$ 는 두 eigenvalue가 동일할 때 최소이고, r에 비례합니다. 따라서 주곡률의 비율이 임계값 r보다 낮은지 확인하기 위해선 위의 식만 확인하면 됩니다.

이것은 각각의 keypoint를 테스트하기 위해 요구되는 20자리 이하의 소수점 계산을 하기에 매우 효과적입니다. 논문에서의 실험은 r=10을 사용했는데, 10개 이상의 주곡률 사이의 keypoint를 제거합니다.

요약) edge 주변 keypoint 제거를 위해 H matrix의 eigenvalue의 비율, 즉 주곡률을 구합니다.



위의 그림은 keypoint 선택 과정입니다. (너무 지저분하게 많이 잡히는 것을 피하기 위해서, 저해상도의 이미지(233x189)를 사용하고, keypoint는 <좌표[location], 크기[scale], 방향[orientation]>의 값을 가지는 벡터로 나타냈습니다.)

(a) 원본

(b) DOG의 검출된 극점 keypoint

(c) 저조도 임계값[threshold] 적용 후

(d) 주곡률[Principal curvatures] 임계값 적용 후 최종 결과