Matemática para IA - Ejercicios de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales (clases 1 y 2)

Ejercicio 1

Se tiene el sistema de la figura 1 cuyo comportamiento está dado por la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2p}{dt^2} + kp + b\frac{dp}{dt} = u(t),\ \text{con}\ m, k, b = 1\ \text{y}\ p(0) = 0,\ \frac{dp}{dt}(0) = 0, t \geq 0$$

donde $u(t)$ es la entrada del sistema y $p(t)$ es la salida. Se supone que la entrada está definida en un espacio vectorial V , que garantiza la existencia y unicidad de la ecuación diferencial. De esta forma se puede establecer una función que, a cada entrada $u(t) \in V$ le asigna una salida $p(t) \in W$, donde W será un espacio vectorial. A esta función se la denota $T : V \to W$. Por ejemplo, si queremos saber cuál es la salida que le corresponde a $u(t) = 0$, debemos resolver $m\frac{d^2p}{dt^2} + kp + b\frac{dp}{dt} = 0$, cuyas soluciones están dadas por:

$$p_0(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} sin(w_0 t) + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t} cos(w_0 t)$$

con $w_0 = \sqrt{\frac{4mk-b^2}{4m^2}}$ (con $4mk > b^2$) y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ Pero, dado que debe satisfacer las condiciones iniciales nulas, entonces resulta $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, por lo tanto $p_0(t) = 0$. Es decir que $T(0) = 0$.

1. Explique por qué T es lineal.

Solución:

Por definición: sean V y W Espacios Vectoriales, entonces $T : V \to W$ será una aplicación lineal si se cumple que:

$$\forall x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$$
$$\forall x \in V, \forall\lambda \in \mathbb{R} : T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

Esto quiere decir que dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m\ddot{p} + k\dot{p} + bp = u(t)$$

1. Sí $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son soluciones de la ecuación para $u_1(t)$ y $u_2(t)$ respectivamente, entonces:

$$p_3(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

es solución para $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

1. Sí $p(t)$ es solución de la ecuación para $u(t)$, entonces para $\lambda \in \mathbb{R}$ $\alpha p(t)$ es la solución para $\alpha u(t)$,

Demostración de 1:

Si derivamos de ambos lados la ecuación de solución propuesta:

$$\dot{p_3}(t) = \dot{p_1}(t) + \dot{p_2}(t)$$
$$\ddot{p_3}(t) = \ddot{p_1}(t) + \ddot{p_2}(t)$$

Y reemplazamos este resultado en la ecuación original obtenemos:

$$m\ddot{p_3}(t) + k\dot{p_3}(t) + bp_3(t) = u_3(t)$$
$$m(\ddot{p_1}(t) + \ddot{p_2}(t)) + k(\dot{p_1}(t) + \dot{p_2}(t)) + b(p_1(t) + p_2(t)) = u_1(t) + u_2(t)$$
$$m\ddot{p_1}(t) + k\dot{p_1}(t) + bp_1(t) + m\ddot{p_2}(t) + k\dot{p_2}(t) + bp_2(t) = u_1(t) + u_2(t)$$
$$m\ddot{p_1}(t) + k\dot{p_1}(t) + bp_1(t) + m\ddot{p_2}(t) + k\dot{p_2}(t) + bp_2(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

Que sabemos es cierto porque por premisa $p_1(t)$ es solución de $u_1(t)$ y $p_2(t)$ es solución de $u_2(t)$.

Demostración de 2:

$$m\lambda\ddot{p(t)} + k\lambda\dot{p(t)} + b\lambda p(t) = \lambda u(t)$$
$$\lambda(m\ddot{p}(t) + k\dot{p}(t) + bp(t)) = \lambda u(t)$$

Dividiendo ambos lados por λ:

$$m\ddot{p}(t) + k\dot{p}(t) + bp(t) = u(t)$$

Que sabemos es cierto porque partimos de esa premisa.

1. Halla la salida correspondiente a $u(t) = e^{-t}$.

Solución:

CONSULTAR: Solución analítica por forma general, Taylor o aplicando alguna propiedad?. Ver qué estudiar en estos días de oscilador armónico y ODEs.

Verificación c/ sympy:

In [11]:

```
import numpy as np
from sympy.interactive import printing
printing.init_printing(use_latex=True)
from sympy import *
import sympy as sp
```

In [12]:

```
t = sp.Symbol('t')
m = sp.Symbol('m')
k = sp.Symbol('k')
b = sp.Symbol('b')
w = sp.Symbol('w')
```

In [13]:

```
p = sp.Function('p')(t)
u = sp.Function('u')(t)
```

In [14]:

```
diffeq = Eq(m*p.diff(t,t) + k*p + b*p.diff(t),exp(-t))
display(diffeq)
```

$$b\frac{d}{dt}p(t) + kp(t) + m\frac{d^2}{dt^2}p(t) = e^{-t}$$

In [15]:

```
dsolve(diffeq,p)
```

Out[15]:

$$p(t) = C_1 e^{\frac{t\left(-b-\sqrt{b^2-4km}\right)}{2m}} + C_2 e^{\frac{t\left(-b+\sqrt{b^2-4km}\right)}{2m}} + \frac{e^{-t}}{-b+k+m}$$

1. Halla la salida correspondiente a $u(t) = e^{-(t-1)}$.

Solución:

CONSULTAR: Ídem anterior.

Verificación c/ sympy:

In [16]:

```
diffeq = Eq(m*p.diff(t,t) + k*p + b*p.diff(t),exp(-(t-1)))
display(diffeq)
```

$$b\frac{d}{dt}p(t) + kp(t) + m\frac{d^2}{dt^2}p(t) = e^{1-t}$$

In [17]:

```
dsolve(diffeq,p)
```

Out[17]:

$$p(t) = C_1 e^{\frac{t\left(-b-\sqrt{b^2-4km}\right)}{2m}} + C_2 e^{\frac{t\left(-b+\sqrt{b^2-4km}\right)}{2m}} + \frac{e^{1-t}}{-b+k+m}$$

1. Halla la salida correspondiente a $u(t) = e^{iwt}$.

Solución:

CONSULTAR: Ídem anterior.

Verificación c/ sympy:

In [18]:

```
diffeq = Eq(m*p.diff(t,t) + k*p + b*p.diff(t),exp(-1j*w*t))
display(diffeq)
```

$$b\frac{d}{dt}p(t) + kp(t) + m\frac{d^2}{dt^2}p(t) = e^{-1.0itw}$$

In [19]:

```
dsolve(diffeq,p)
```

Out[19]:

$$p(t) = C_1 e^{\frac{t\left(-b-\sqrt{b^2-4km}\right)}{2m}} + C_2 e^{\frac{t\left(-b+\sqrt{b^2-4km}\right)}{2m}} - \frac{e^{-1.0itw}}{ibw - k + mw^2}$$

Ejercicio 2

Supongamos que V es un espacio vectorial, y $A \subseteq V$ $A \neq \emptyset$, es un subconjunto de V. Dados dos elementos $x, y \in A$, el segmento que une estos puntos, se puede escribir como $\alpha x + (1-\alpha)y$ con $0 \geq \alpha \geq 1$. Se dice que A es convexo si dados dos elementos cualquiera $x, y \in A$, el segmento está contenido en A.

1. Explique por qué todo subespacio es un conjunto convexo.

Solución:

Si $A \subseteq V$ y V es un Espaciol Vectorial, entonces A hereda muchas de las propiedades de V directamente. Esto incluye las propiedades del grupo Abeliano, la propiedad distributiva, la propiedad asociativa, y el elemento neutro (0).

Para determinar si $(A, +, \cdot)$ es un subespacio de V se debe demostrar:

1. $A \neq \emptyset$, en particular interesa que $0 \subseteq A$.
2. Cerradura de A:
    - Con respecto a la operación externa: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in A : \lambda x \in A$
    - Con respecto a la operación interna: $\forall x, y \in A : x + y \in A$

Entonces, si A es un subespacio entonces están definidas y cerradas las operaciones $(+, \cdot)$ sobre sus elementos, y por lo tanto, también $\alpha x + (1-\alpha)y$ con $0 \geq \alpha \geq 1$ están contenidos en él.

1. Una variedad lineal ¿Es convexa?. ¿Por qué?

Solución:

Por definición, dado un Espacio Vectorial V y $x_0 \in V$, $U \subseteq V$, una variedad lineal L es un conjunto dado por:

$$L = x_0 + U := \{x_0 + u : u \in U\}$$

Anteriormente se vío que todo subespacio es convexo, por lo tanto U a es convexo. Como se cumple la clausura de $(+,\cdot)$ entonces L también es convexa.

1. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ de un ejemplo de un conjunto convexo que no sea un subespacio.

Solución:

El conjunto de puntos encerrados en una circunferencia es convexo pero no es un subespacio porque no cumple el axioma de cerradura.

$$C = \{x, y \in \mathbb{R}^2, R \in \mathbb{R}, R > 0 : x^2 + y^2 \ \leq R\}$$

1. Demuestre que la intersección de conjuntos convexos es convexa.

Solución: ¶

Sean A y B conjuntos convexos.

Si $A \cap B = \emptyset$ ó $A \cap B$ es un conjunto con un único punto como elemento, entonces por definición es convexo.

Si $C = A \cap B$ es un conjunto de más de un elemento, entonces se debe probar que para cualquier $x, y \in C$ está contenido también en C el segmento dado por: $\alpha x + (1 - \alpha)y$ con $0 \geq \alpha \geq 1$.

Si se toman dos puntos x, y de C y z es un punto contenido en el segmento entre ellos, entonces $z \in A$ porque es A es convexo y $z \in B$ por la misma razón, por lo tanto $z \in C$.

Ejercicio 3

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \mathbb{R}^2$ describa el conjunto de todas las transformaciones lineales de $V \to W$.

Solución:

(intento fallido, CONSULTAR)

Si $p_v = (x_v, y_v, z_v) \in V$ y $p_w = (x_w, y_w) \in W$ interesan todas las transformaciones $T : V \to W$ que cumplan:

$$T(\lambda p_v + \beta p_w) = \lambda T(p_v) + \beta T(p_w), \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $T(p_v) = p_w = Ap_v$:

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w = x_v a_{11} + x_v a_{12} + x_v a_{13} \\ y_w = y_v a_{21} + y_v a_{22} + y_v a_{23} \\ z_w = 0 = z_v a_{31} + z_v a_{32} + z_v a_{33} \end{bmatrix}$$

CONSULTAR: seguir este camino restringe la solución a que todas las transformaciones sean de esta forma: Ap_v