4. SVD

4.1 Ejercicio

Dada: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Halle sin usar un software de cálculo su descomposición en valores singulares.

Desarrollo

Se busca obtener una matriz de 2x2, por lo tanto se calcula:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Se obtienen los autovalores de $A.\,A^T$:

$$det(AA^T - \lambda I) = 0$$
$$det(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}) = 0$$
$$det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}) = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
$$\therefore \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

Paso 2. Construcción de matriz Σ de misma dimensión que AA^T.

$$\lambda_i = \sigma_i^2 \therefore \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$
$$\sigma_1 = \sqrt{3}$$
$$\sigma_2 = 1$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Se obtienen los autovectores de $A.\,A^T$

Para $\lambda_1 = 3$:

$$(AA^T - \lambda_1 I)X = 0$$
$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\therefore x_1 = x_2$$
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$:

$$(AA^T - \lambda_2 I)X = 0$$
$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\therefore x_1 = -x_2$$
$$u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Construcción de U a partir de autovectores u_1 y u_2 normalizados:

$$U = [\,\hat{u_1} \qquad \hat{u_2}\,] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Calcular V.

$$V = [\,v_1 \qquad v_2 \qquad v_3\,]$$

dónde:

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_i} A^T u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$
$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^T u_2 = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y:

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$A = U\Sigma V^T$$

siendo:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

4.2 Ejercicio

Dada: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Halle sin usar un software de cálculo su descomposición en valores singulares.

Desarrollo

Se busca obtener una matriz de 2x2, por lo tanto se calcula:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Se obtienen los autovalores de $A^T A$:

$$det(A^T A - \lambda I) = 0$$
$$det(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}) = 0$$
$$det(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}) = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$$
$$\therefore \lambda_1 = 2+\sqrt{2}, \lambda_2 = 2-\sqrt{2}$$

Paso 2. Construcción de matriz Σ de misma dimensión que $A^T A$.

$$\sigma_1 = \sqrt{\sqrt{2}+2}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\sqrt{2}-2}$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}+2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sqrt{2}-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Se obtienen los autovectores de A^TA

Para $\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{2}+2}$:

$$(A^TA - \lambda_1 I)X = 0$$
$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 3-\sqrt{\sqrt{2}+2}1 & \\ 1 & 1-\sqrt{\sqrt{2}+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\therefore x_2 = -\frac{1}{1-\sqrt{2}} x_1$$
$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = \sqrt{\sqrt{2}-2}$:

$$(A^TA - \lambda_2 I)X = 0$$
$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 3-\sqrt{\sqrt{2}-2} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{\sqrt{2}-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\therefore x_2 = -\frac{1}{1+\sqrt{2}} x_1$$
$$v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Construcción de V a partir de autovectores v_1 y v_2 normalizados:

$$V = [\, \hat{v_1} \quad \hat{v_2} \,] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \end{bmatrix}$$

Paso 5. Calcular U.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

dónde:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

y:

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$A = U \Sigma V^T$$

siendo:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}+2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \end{bmatrix}$$

4.3 Ejercicio

Suponga que A es una matriz hermítica ¿cómo es su descomposición en valores singulares?

In [1]:

```
# TODO: Ver cómo plantear
```

4.4 Ejercicio

Halle una matriz diagonalizable cuya descomposición en autovalores y autovectores no coincida con su SVD.

In [2]:

```
# TODO: Ver cómo plantear
```