Probabilidad y Estadística para IA. Ejercicios clase 2 (incompleto)

Nota: en Anaconda, usar octave-cli en lugar de octave:

```
export OCTAVE_EXECUTABLE=octave-cli
```

In [77]:

```
pkg load statistics;
```

Ejercicio 1

Sean X, Y dos v.a. distribuidas normalmente, con distribucion conjunta normal bivariable f_{XY}. Demostrar que X, Y son independientes si y sólo si son v.a. descorrelacionadas (pista: usar $\rho = 0$ en f_{XY})

R:

Por definición, la distribución conjunta de dos variables independientes cumple la condición:

$$f_{XY} = f_X f_Y$$

Sean:

$$z_X = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$
$$z_Y = \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

las variables normalizadas que corresponden a X e Y, se puede escribir la pdf conjunta de distribución normal variable:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}(z_X^2 - 2\rho_{XY} z_X z_Y + z_Y^2)}$$

Si el coeficiente de correlación $\rho = 0$ entonces queda:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y 1} e^{-\frac{1}{2}(z_X^2 + z_Y^2)}$$

que puede reescribirse como:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2z_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2z_Y^2}}$$

y finalmente:

$$f_{XY}(x, y) = f_X f_Y$$

Ejercicio 2

Sean X,Y dos v.a. normales de media cero correlacionadas con $\rho_{XY} = 0.5$. Se tiene que $var[X] = 2var[Y] = 1$.

1. Encontrar la expresión de la pdf conjunta de X,Y.
2. Proyectar $x = [XY]^T$ sobre $\omega = [11]^T$ y encontrar la pdf de la proyección.

R:

1. $$\sigma_X^2 = 2\sigma_Y^2 = 1 \therefore \sigma_X = 1, \sigma_Y = \frac{1}{\sqrt(2)}$$

In [78]:

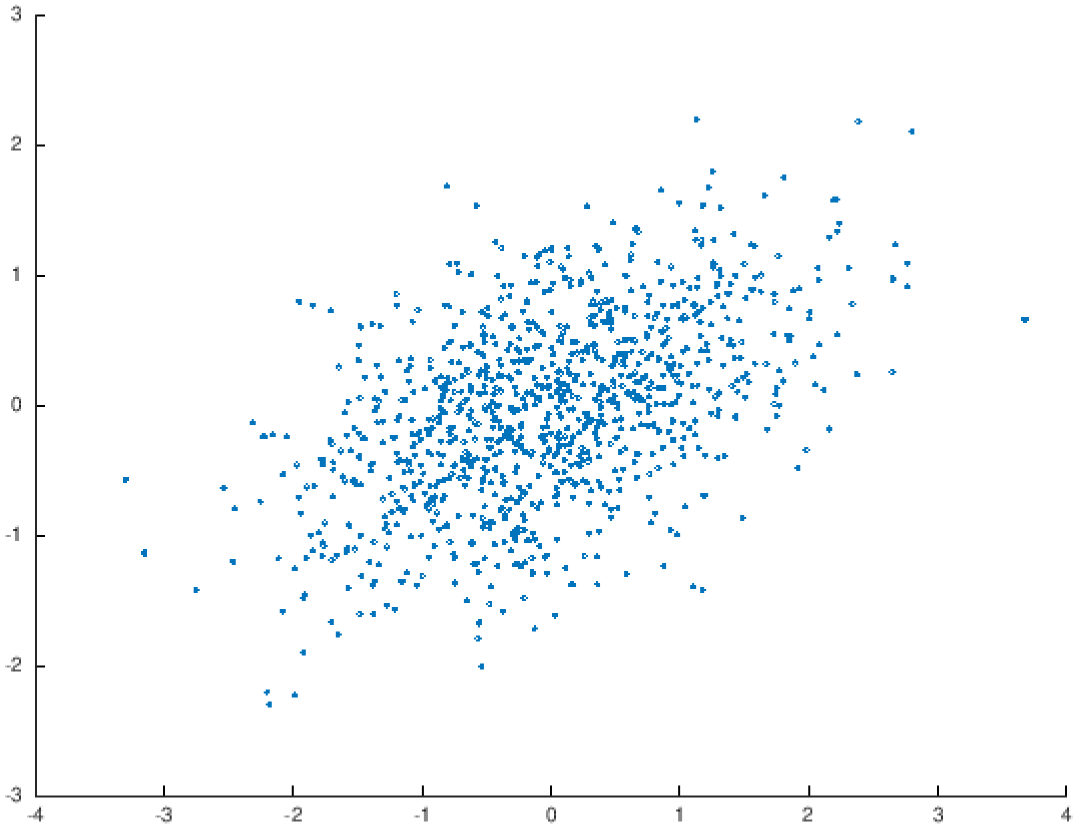
```
sigma_x = 1;
sigma_y = 1/sqrt(2);
mu = [0 0];
rho = 0.5;
sigma = [sigma_x.^2 rho*sigma_x*sigma_y; rho*sigma_x*sigma_y sigma_y.^2];
```

In [79]:

```
X = mvnrnd(mu,sigma,(1000));
```

In [80]:

```
scatter(X(:,1),X(:,2))
```



1. $$Z = \omega^T x \sim \mathcal{N}(\omega^T \mu, \omega^T \Sigma \omega)$$

In [81]:

```
w = [1;1];
mu_Z = w'*[0;0];
sigma_Z = w'*sigma*w % ver
Z = mvnrnd(mu_Z,sigma_Z,(1000));
```

```
sigma_Z =  2.2071
```

In [82]:

```
%scatter(Z(:,1),Z(:,2))
```

Ejercicio 3

1. Usando el método de la transformada inversa, calcular la pdf de la distribución exponencial para:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Usar un valor arbitrario de λ > 0.

Respuesta:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = 1 - e^{-\lambda y}$$
$$X = F_y^{-1}(U) \therefore U = F_Y(Y) \therefore U = 1 - e^{-\lambda y}$$
$$e^{-\lambda y} = 1 - U$$
$$-\lambda y = ln(1 - U)$$
$$Y = \frac{-ln(1 - U)}{\lambda}$$

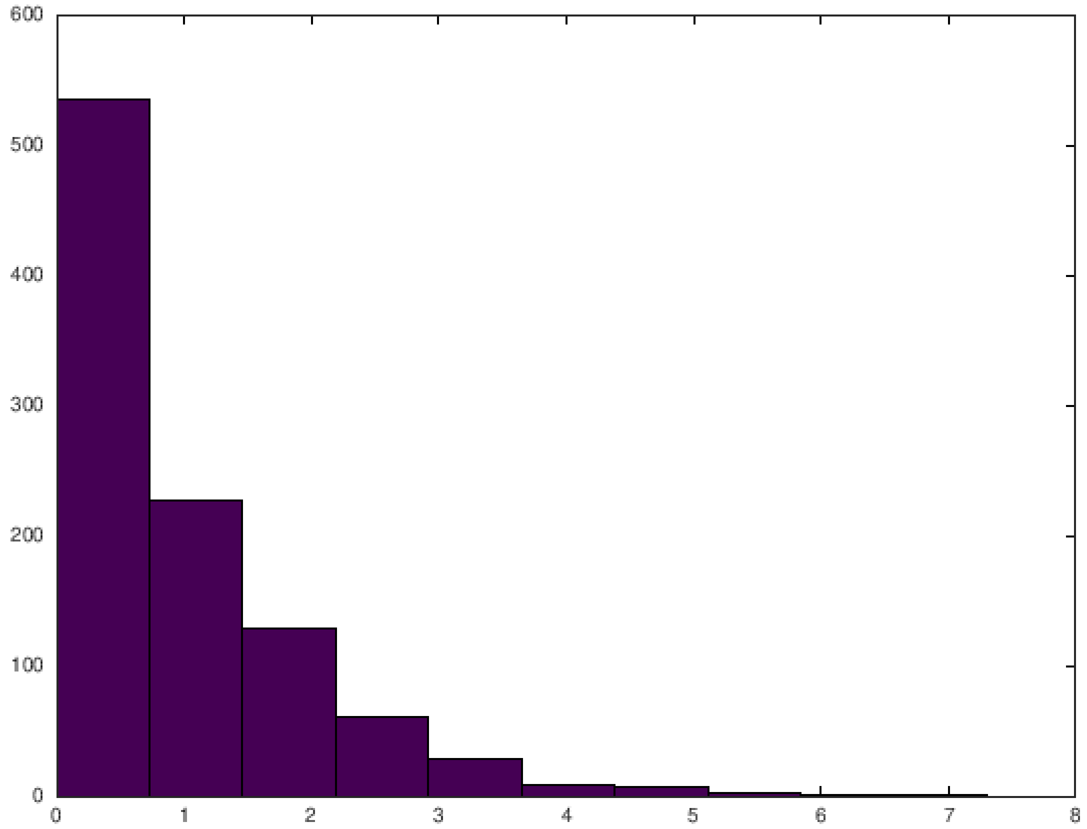
1. Simular en Octave.

In [83]:

```
function samples = exp_rv(l, n_samples)
    u = unifrnd(0,1,n_samples,1);
    samples = -log(1-u)/l;
endfunction
```

In [84]:

```
N_SAMPLES = 1000;
series = exp_rv(1,N_SAMPLES);
hist(series);
```



Ejercicio 4

Sea $x = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}$ un vector de v.a. Definamos $y = T(x)$, con $T = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2$, con g_1 , g_2 diferenciables.

1. Encontrar la expresión de la pdf del vector transformado y en función de $f_{X_1 X_2}$
2. Resolver la pdf de y para el caso del vector x del Ejercicio 2 con:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   y simular en Octave.

R: Ver.