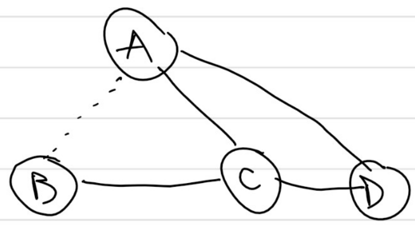
Bài tập lần 1 STT: 29 MSSV: 23127106

1.3 Một nhóm gồm n người ($n \geq 4$) thỏa tính chất "cứ chọn ra 4 người bất kỳ trong nhóm thì luôn luôn có ít nhất một người quen biết với cả ba người còn lại". Chứng minh rằng có ít nhất một người trong nhóm quen biết với tất cả $(n-1)$ người còn lại.

Vì 4 người bất kỳ tồn tại người quen cả 3 người còn lại nên mỗi người không quen tối đa 2 người, gọi một trong số những người đó là A.

- TH1. A không quen 0 người (thì A quen $n-1$ người còn lại) được điều phải chứng minh

- TH2. A không quen đúng 1 người, gọi người đó là B.



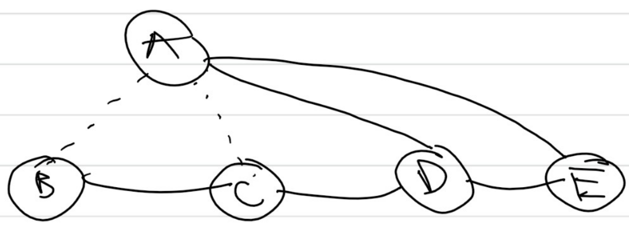
bất kỳ

Xét 2 người C, D (khác A và B), khi đó A quen C và D

Trong 4 người A, B, C, D; giả sử C quen 3 người còn lại

Ta kết luận được C quen A, B và 1 người D bất kỳ khác ⇒ C quen $n-1$ người còn lại

- TH3. A không quen đúng 2 người (gọi là B, C)



Xét người D bất kỳ ($\neq$ A, B, C), khi đó D phải quen A, B, C

Ta có A không quen C, nếu $n > 4$ chọn E bất kỳ (khác A, C, B, D) thì D phải quen E (giống TH2)

Như vậy D quen n-1 người còn lại.

1.6 Tìm số đỉnh của một đồ thị có

a) 12 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 3.
b) 10 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 4.
c) 21 cạnh với 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại đều có bậc bằng 3.
d) 24 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng nhau.

a/

$\sum deg = 2|E| = 2.12 = 24 = 3.x$ (x là số đỉnh)

$\Rightarrow x = 8$ đỉnh

b/

$\sum deg = 2|E| = 20 = 4.x$

$\Rightarrow x = \frac{20}{4} = 5$ đỉnh

c/

$\sum deg = 2.21 = 42 = 3.\overset{\text{bậc}}{4} + x.\overset{\text{bậc}}{3}$

$\Rightarrow x = 10$

Tổng số đỉnh là: $3 + 10 = 13$ đỉnh.

d/

$\sum deg = 2.24 = 48 = \underset{\text{số đỉnh}}{x}.\underset{\text{bậc}}{y}$

x	y	Trường hợp	x	y	Trường hợp
48	1	48 đỉnh bậc 1	1	48	1 đỉnh bậc 48
24	2	24 đỉnh bậc 2	2	24	2 đỉnh bậc 24
16	3	...	3	16	....
12	4	...	4	12	....
8	6	...	6	8	....

$\Rightarrow$ SL đỉnh $\in U(48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$

1.15 Cho đồ thị đơn vô hướng G có 15 cạnh và $\overline{G}$ có 13 cạnh. Khi đó G có bao nhiêu đỉnh?

$G \cup \overline{G}$ là một đồ thị đơn vô hướng đầy đủ

có $15 + 13 = 28$ cạnh

Gọi n là số đỉnh của G.

Khi đó $|V_G| = |V_{\overline{G}}| = |V_{G \cup \overline{G}}| = n$

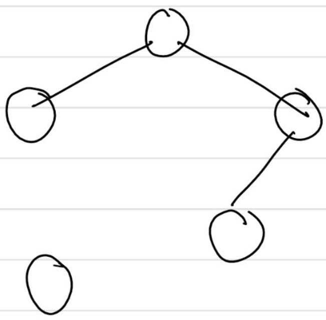
Vì $G \cup \overline{G}$ là đồ thị đơn vô hướng đầy đủ nên:

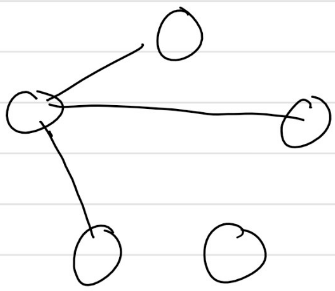
$$C_n^2 = 28 \Leftrightarrow n = 8 \text{ (đỉnh)}$$

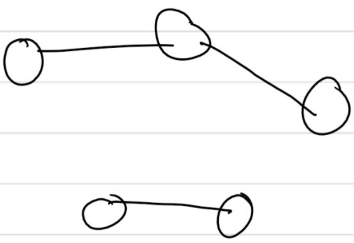
1.24 Có bao nhiêu đồ thị đơn vô hướng không đẳng cấu có

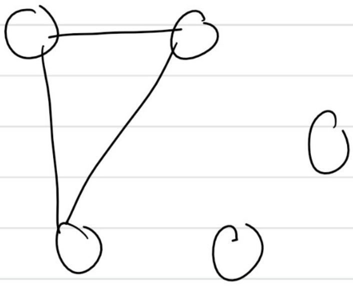
a) 5 đỉnh và 3 cạnh? b) 6 đỉnh 4 cạnh?

a/



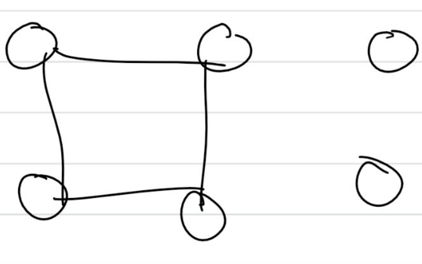


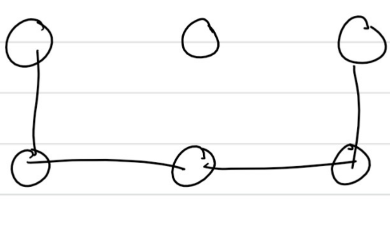


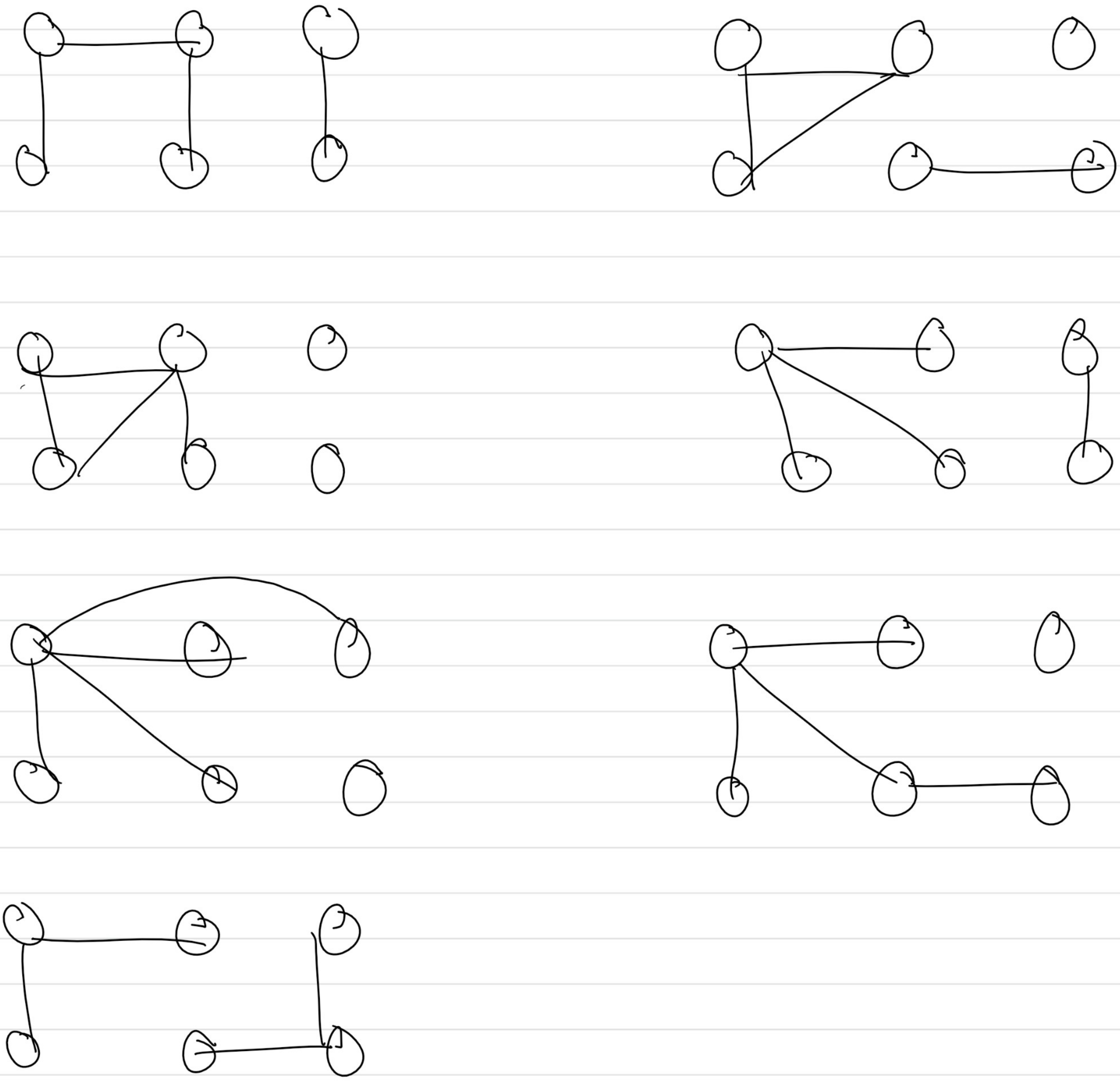


Có 4 đồ thị thỏa mãn

b/





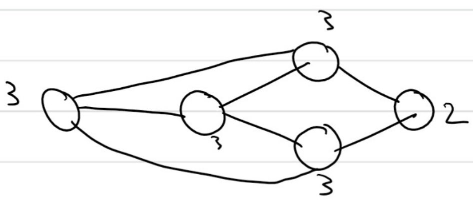


Có 9 đồ thị thoả mãn

1.26 Có hay không đơn đồ thị vô hướng có 5 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây ? Nếu có thì vẽ minh họa mỗi trường hợp. Nếu không thì giải thích tại sao ?

a) 3, 3, 3, 3, 2	c) 4, 4, 3, 2, 1	e) 3, 2, 2, 1, 0
b) 5, 4, 3, 2, 1	d) 4, 4, 3, 3, 3	f) 4, 3, 3, 2, 2

a/ $3,3,3,3,2 \to 2,2,2,2 \to 2,1,1$



b/ $\sum deg = 5+4+3+2+1 = 15$ lẻ nên ko tồn tại c/ Đơn đồ thị vô hướng 5 đỉnh đã có 2 đỉnh bậc 4 thì các đỉnh còn lại bậc tối thiểu bằng 2, nhưng giả thiết có đỉnh bậc 1 nên không tồn tại.

1.27 Có hay không đơn đồ thị vô hướng có 6 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây ? Nếu có thì vẽ minh họa mỗi trường hợp. Nếu không thì giải thich tại sao ?

a) 5, 4, 3, 2, 1, 0

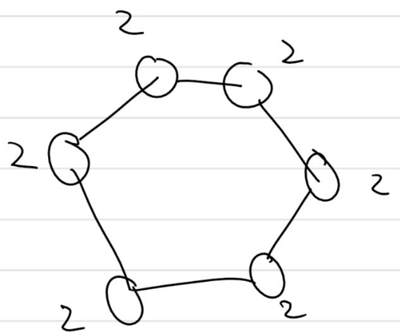
b) 6, 5, 4, 3, 2, 1

c) 2, 2, 2, 2, 2, 2

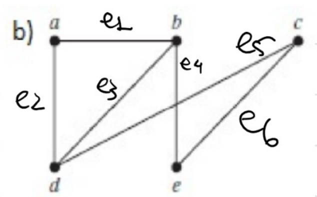
a/ $\sum deg = 15$ lẻ $\Rightarrow$ ko tồn tại

b/ $\sum deg = 21$ lẻ $\Rightarrow$ ko tồn tại

c/



1.28 Viết ma trận kề và ma trận liên kết của các đồ thị dưới đây :



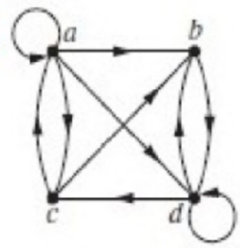
Liên kết :

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kề :

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c)



5.7/ MA TRẬN LIÊN KẾT CỦA ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG:

Cho $G = (V, U)$ có $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, $U = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \}$ và G không có vòng (tập hợp V và U *đều được sắp thứ tự*).

Với $1 \le i \le n$ và $1 \le j \le p$, đặt $a_{ij} = 1$ (nếu v_i là đỉnh đầu của cạnh ε_j),

$a_{ij} = -1$ (nếu v_i là đỉnh cuối của cạnh ε_j) và $a_{ij} = 0$ (nếu v_i không kề với cạnh ε_j).

Ký hiệu $A_G = A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ và ta nói A_G là *ma trận liên kết* của G.

Không định nghĩa ma trận liên kết cho đồ thị có hướng, có khuyên

Ma trận kề:
(dạng 2)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.30 Mỗi cặp đồ thị vô hướng có ma trận kề như dưới đây có đẳng cấu với nhau không ? Tại sao ?

a) $\underset{G}{\overset{M_G}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}, \underset{G'}{\overset{M_{G'}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$

$M_G, M_{G'}$ đối xứng

Xem G, G' như đơn đồ thị vô hướng.

$$|E_G| = \frac{\sum m_{G}ij}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$|E_{G'}| = \frac{\sum m_{G'}ij}{2} = \frac{10}{2} = 5 \neq |E_G|$$

Như vậy G không đẳng cấu với G'

b) $\underset{G}{\overset{M_G}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}, \underset{G'}{\overset{M_{G'}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$

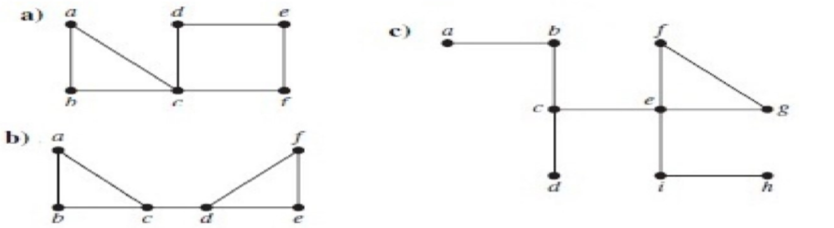
G, G' là đơn đồ thị vô hướng.

$$|E_G| = \frac{\sum m_{Gij}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$|E_{G'}| = \frac{\sum m_{G'ij}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \neq |E_G|$$

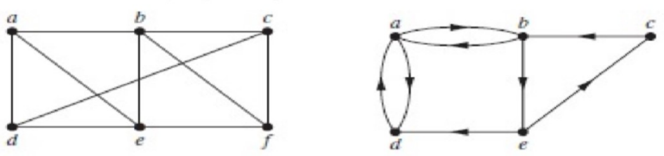
Như vậy G không đẳng cấu với G'

1.34 Xác định số liên thông đỉnh và liên thông cạnh của những đồ thị sau:



Câu	Số LT cạnh	Số LT đỉnh
a	2	1
b	1	1
c	1	1

1.35 Cho đồ thị G_1 và G_2 như sau:



G_1 G_2

Hãy tìm số đường đi từ c đến d trong đồ thị G_1 và đường đi từ a đến e trong đồ thị G_2 có độ dài lần lượt là 2, 3, 4, 5, 6 và 7.

Ma trận kề của G_1.

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 7 & 7 & 5 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 9 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 9 & 4 \\ 7 & 10 & 4 & 9 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 7 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 23 & 20 & 21 & 15 & 25 & 20 \\ 20 & 35 & 17 & 28 & 26 & 25 \\ 21 & 17 & 24 & 10 & 28 & 15 \\ 15 & 28 & 10 & 24 & 17 & 21 \\ 25 & 26 & 28 & 17 & 35 & 20 \\ 20 & 25 & 15 & 21 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

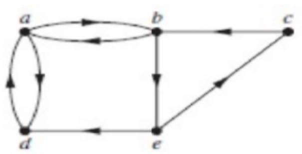
$$A^5 = \begin{bmatrix} 60 & 89 & 55 & 69 & 78 & 66 \\ 89 & 88 & 88 & 63 & 108 & 78 \\ 55 & 88 & 42 & 73 & 63 & 69 \\ 69 & 63 & 73 & 42 & 88 & 55 \\ 78 & 108 & 63 & 88 & 88 & 89 \\ 66 & 78 & 69 & 55 & 89 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 236 & 259 & 224 & 193 & 284 & 222 \\ 259 & 363 & 229 & 285 & 318 & 284 \\ 224 & 229 & 230 & 160 & 285 & 193 \\ 193 & 285 & 160 & 230 & 229 & 224 \\ 284 & 318 & 285 & 229 & 363 & 259 \\ 222 & 284 & 193 & 224 & 259 & 236 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 736 & 966 & 674 & 744 & 910 & 767 \\ 966 & 1090 & 932 & 806 & 1191 & 910 \\ 674 & 932 & 582 & 739 & 806 & 744 \\ 744 & 806 & 739 & 582 & 932 & 674 \\ 910 & 1191 & 806 & 932 & 1090 & 966 \\ 767 & 910 & 744 & 674 & 966 & 736 \end{bmatrix}$$

Vậy số đường đi từ $c \to d$.

Độ dài	Số đường đi
2	0
3	8
4	10
5	73
6	160
7	739



G_2

Ma trận kề G_2 :

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 10 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^7 = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 5 & 17 & 3 \\ 18 & 7 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 10 & 2 \\ 12 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Vậy số đường đi từ $a \to e$.

Độ dài	Số đường đi
2	1
3	0
4	2
5	1
6	5
7	3