

Contents

1	Stable Maching problema	4
1.1	Algoritmo Gale-Shapley	4
1.2	Alternativas	5
1.2.1	Diferentes cantidades de oferentes que requeridos	5
1.2.2	Preferencias incompletas	7
1.2.3	Preferencias con empates	8
1.2.4	Agrupacion de 1 a muchos	11
1.2.5	Agrupacion de muchos a 1	12
1.2.6	Agrupacion de y a x	14
1.2.7	Conjuntos no bipartios - Stable Roommate Problem	15
2	Analisis amortizado	16
2.0.1	Metodo de agregacion	16
2.0.2	Metodo del banquero	16
2.0.3	Metodo del potencial	16
2.0.4	Heap binomial y fibonacci	17
3	Algoritmos Greedy	17
3.1	Mochila fraccionaria	17
3.2	Cambio de moneda	18
3.3	Interval Scheduling: Algoritmo de Greedy Stay Ahead	19
3.4	Seam Carving - TODO	23

3.5	Caminimos Minimos - TODO	23
3.6	Compresión de datos - TODO	23
4	División y conquista	23
4.1	Teorema mestro - TODO	23
4.2	Mediana con datos separadas	23
5	Programación dinamica	24
5.1	Cambio de monedas	24
5.2	Problema de la Publicidad en la carretera	27
5.3	Programación de intervalos ponderados	30
5.4	Problema de Knapsack (mochila)	31
5.5	Problema de Subset Sum	32
5.6	Bellman Ford	33
5.7	Problema de Maximo subarreglo	36
5.8	Problema de cuadrados minimos	37
5.9	Problema del viajante	39
6	Redes de flujo	41
6.1	Conceptos	41
6.2	Algoritmo Ford-Fulkerson	43
6.3	Variante: Circulación con demanda	46
6.4	Bipartite Matching Problem	47
6.5	Diseño de encuestas	48

6.6	Problema de Selección de proyectos	50
7	Problemas NP	51
7.1	Clasificación	51
7.1.1	Clase P	51
7.1.2	Clase NP	51
7.2	Reducciones	52
7.3	Clase NP completo	53
7.3.1	Problema de satisfabilidad booleana - SAT	53
7.4	Problema de conjunto independiente	54
7.4.1	3-SAT	55
7.4.2	Reducción de 3-SAT a INDEPENDENT-SET	56
7.5	Problema de cobertura de vertices	57
7.6	Problema de cobertura de conjunto	58
7.7	Problema 3 Dimensional Matching	60
7.8	Ciclo Hamiltoniano	61
8	Algoritmos Randomizados	62
8.1	Mezcla aleatoria	64

1 Stable Maching problema

1.1 Algoritmo Gale-Shapley

Este algoritmo al terminar de ejecutarse se encuentra un matching perfecto si:

- Si existen n solicitantes con diferentes preferencias.
- Si existen n requeridos con diferentes preferencias.

Eligiendo las estructuras correctamente se puede plantear en $O(n)$.

```
1      Inicialmente M=Vacio
2
3      Mientras existe un solicitante sin pareja que no aun se haya
      postulado a todas las parejas
4
5          Sea s un solicitante sin pareja
6          Sea r el requerido de su mayor preferencia al que no le
              solicito previamente
7
8
9          if r esta desocupado
10             M = M U (s,r)
11             s esta ocupado
12          else
13             Sea s' tal que (s', r) pertenece a M
14
15             si r prefiere a s sobre s'
16                 M = M - {(s', r)} U (s,r)
17                 s esta ocupado
18                 s' esta libre
19      Retornar M
```

Listing 1: Algoritmo de Gale-Shapley

1.2 Alternativas

1.2.1 Diferentes cantidades de oferentes que requeridos

Dado n oferentes y m requeridos, con $m \neq n$, no se puede encontrar un matching estable.

Entonces, tenemos que redefinir el concepto de estable. Una pareja (s,r) es **estable** si:

- No existe requerido r' sin pareja al que s prefiera a su actual pareja.
- No existe un requerido r' en pareja, tal que s y r' se prefieran sobre sus respectivas parejas.
- No existe solicitante s' sin pareja al que r prefiera a su actual pareja.
- No existe un solicitante s' en pareja tal que r y s' se prefieran sobre sus respectivas parejas.

Por lo tanto un matching es estable si:

- No tienen parejas inestables bajo la condicion anterior.
- Que no queden requeridos y solicitantes sin pareja.

Soluciones para ajustar al modelo de Gale-Shapley:

1. Inventar $|n - m|$ elementos ficticios

- Los elementos ficticios se pondran en las listas de preferencias con menos elementos.
- Estos elementos ficticios se agregan al final y deben ser los menos preferidos.
- Luego ejecutar Gale-Shapley
- Por ultimo, eliminar las parejas con elementos ficticios. Estos seran los requeridos que quedan sin pareja.

2. Adecuar el Algoritmo

- Si hay mas **solicitantes** que requeridos, quitar de la *lista de solicitantes* sin parejas a aquellos que agotaron sus propuestas.
- Si hay mas **requeridos** que solicitantes, quitar de la *lista de parejas* a aquellas donde el requerido quedo sin pareja.

1.2.2 Preferencias incompletas

Las listas de preferencias de los oferentes y los requeridos son un subset de las contrapartes.

Son parejas **aceptables** de un elemento a aquellas contrapartes que figuran en su lista de preferencias.

Una pareja (s,r) es **estable** si:

- Son *aceptables* entre ellos.
- No existe requerido *acceptable* r' sin pareja al que s prefiera a su actual pareja.
- No existe un requerido *acceptable* r' en pareja, tal que s y r' se prefieran sobre sus respectivas parejas.
- No existe solicitante *acceptable* s' sin pareja al que r prefiera a su actual pareja.
- No existe un solicitante *acceptable* s' en pareja tal que r y s' se prefieran sobre sus respectivas parejas.

Un matching es estable si no tiene parejas inestables bajo la condicion anteriores.

```
1 Inicialmente M=Vacio
2
3 #Iterea mientras no haya acotado su sublista de preferencias
4 Mientras existe un solicitante sin pareja
5     'que no aun se haya postulado a todas las parejas'
6
7     Sea s un solicitante sin pareja
8     Sea r el requerido de su mayor preferencia al que no le
9         solicito previamente
10
11     # se condiera si es acceptable
12     if r considera 'acceptable' a s
13
14         if r esta desocupado
15             M = M U (s,r)
16             s esta ocupado
```

```
17     else
18         Sea  $s'$  tal que  $(s', r)$  pertenece a  $M$ 
19         si  $r$  prefiere a  $s$  sobre  $s'$ 
20              $M = M - \{(s', r)\} \cup \{(s, r)\}$ 
21              $s$  esta ocupado
22              $s'$  esta libre
23
24 # Retornar solo parejas aceptables
25 Retornar  $M$ 
```

Listing 2: Algoritmo para parejas incompletas

1.2.3 Preferencias con empates

INDIFERENCIA Y PREFERENCIA ESTRICTA

1. X es **indiferente** a " y " y a " z " si en su lista de preferencias estan el la misma posicion.
2. X es **prefiere estrictamente** a " y " sobre " z " si en su lista de preferencias no le son indiferentes y " y " se encuentra antes que " z " en la misma.

ESTABILIDAD DEBIL

Una pareja (s, r) es debilmente estable si no existe una pareja $(s' \text{ y } r')$ talque:

- s prefiere estrictamente a r' sobre r (*pareja actual de s*)
- r' prefiere estrictamente a s sobre s' (*pareja actual de r'*)

```
1     Inicialmente  $M = \text{Vacio}$ 
2
3     #Iterea mientras no haya acotado su sublista de preferencias
4     Mientras existe un solicitante sin pareja
5         'que no aun se haya postulado a todas las
6         parejas'
7
8         Sea  $s$  un solicitante sin pareja
9         Sea  $r$  el requerido de su mayor preferencia al que no le
10            solicito previamente
11
12         if  $r$  esta desocupado
13              $M = M \cup \{(s, r)\}$ 
```



```

13     s esta ocupado
14     else
15         Sea s' tal que (s', r) pertenece a M
16
17         # prefiere estrictamente
18         si r prefiere estrictamente a s sobre s'
19             M = M - {(s', r)} U (s,r)
20             s esta ocupado
21             s' esta libre
22
23     Retornar M

```

Listing 3: Algoritmo para parejas incompletas

En caso de que sea empate, se mantendra con su pareja actual.

ESTABILIDAD FUERTE

Una pareja (s,r) es debilmente estable si no existe una pareja (s' y r') talque:

- s prefiere estrictamente o le es indiferente a r' sobre r (*pareja actual de s*)
- r' prefiere estrictamente o le es indiferente a s sobre s' (*pareja actual de r'*)

Puede no existir un matching perfecto.

```

1     Inicialmente M=Vacio
2
3     Mientras existe un solicitante sin pareja y no exista
      solicitante que agoto sus parejas
4
5         Sea s un solicitante sin pareja
6         Sea r el requerido de su mayor preferencia al que pueda
      proponer
7         Por cada sucesor s' a s en la lista de preferencias de r
8         if (s',r) pertenece a M
9             M = M - {(s',r)}
10            s' esta libre
11            quitar s' de la lista de preferencias de r
12            quitar r de la lista de preferencias de s'
13
14        Por cada requerido r' que tiene multiples parejas
15        Por cada pareja s' en pareja con r'
16            M = M - {(s',r')}

```

```
17         quitar s' de la lista de preferencias de r'  
18         quitar r' de la lista de preferencias de s'  
19  
20     if estan todos en pareja  
21         Retornar M  
22     else  
23         No existe ningun matching super estable
```

Listing 4: Algoritmo para parejas super estables

En caso de que sea empate, se mantendra con su pareja actual.

1.2.4 Agrupacion de 1 a muchos

El solicitante puede tener varios cupos por lo tanto:

- Existen m requeridos, donde un requerido puede estar unicamente con 1 pareja.
- Existen n solicitantes, donde cada solicitante puede tener c cupos para armar parejas.

Existe un matching estable si la cantidad de requeridos es igual a la cantidad de solicitantes por la cantidad de cupos.

$$m = n * c \tag{1}$$

No cambia la definición de Gale Shampey para **matching estable**

```
1      Inicialmente M=Vacio
2
3      Mientras exista un solicitante con cupo disponible
4
5          Sea s un solicitante sin pareja
6          Sea r el requerido de su mayor preferencia al que no le
7              solicito previamente
8
9          if r esta desocupado
10             M = M U (s,r)
11             s decremente su disponibilidad de parejas
12          else
13             Sea s' tal que (s', r) pertenece a M
14
15             si r prefiere a s sobres s'
16                 M = M - {(s', r)} U (s,r)
17                 s decremente su disponibilidad de parejas
18                 s' incrementa su disponibilidad de parejas
19      Retornar M
```

Listing 5: Algoritmo de solicitantes con cupos

La complejidad algoritmica no se modifica porque solo se agrega un contador.

1.2.5 Agrupacion de muchos a 1

El requerido puede tener varios cupos por lo tanto:

- Existen m requeridos, donde cada solicitante puede tener z cupos para armar parejas.
- Existen n solicitantes, donde un requerido puede estar unicamente con 1 pareja.

Existe un matching estable si la cantidad de solicitantes es igual a la cantidad de requeridos por la cantidad de cupos.

$$n = m * z \tag{2}$$

No cambia la definición de Gale Shampey para **matching estable**

```
1  Inicialmente M=Vacio
2
3  Mientras exista un solicitante con cupo disponible
4
5      Sea s un solicitante sin pareja
6      Sea r el requerido de su mayor preferencia al que no le
7          solicito previamente
8
9      if r tiene cupo
10         M = M U (s,r)
11         s esta ocupado
12         r decrementa su disponibilidad de parejas
13     else
14         Sea s' tal que (s', r) pertenece a M y
15             s' es el menos preferidos de las parejas r
16
17         si r prefiere a s sobres s'
18             M = M - {(s', r)} U (s,r)
19             s esta ocupado
20             s' esta libre
21 Retornar M
```

Listing 6: Algoritmo de requeridos con cupos

La complejidad algoritmica si se modifica.

Para conocer el solicitante de menor preferencia podemos utilizar un heap de minimos. Como el cupo es de z , la complejidad algoritmica para actualizar el heap es $\log(z)$.

1.2.6 Agrupacion de y a x

- Existen n solicitantes, donde cada solicitante puede tener c cupos para armar parejas.
- Existen m requeridos, donde cada requerido puede tener z cupos para armar parejas.

Existe un matching estable si:

$$n * c = m * z \tag{3}$$

No cambia la definición de Gale Shampey para **matching estable**
Para implementar se requieren las siguientes estructuras:

- Un heap de minimos para los requeridos.
- Un contador de cupos para los solicitantes.

La complejidad algoritmica es igual a la de los requeridos con cupos

1.2.7 Conjuntos no bipartios - Stable Roommate Problem

Pendiente

2 Analisis amortizado

2.0.1 Metodo de agregacion

2.0.2 Metodo del banquero

2.0.3 Metodo del potencial

2.0.4 Heap binomial y fibonacci

Revisar capitulo 19 del Corven.

Para el **heap binomial** se utilizan bosques de arboles binarios. Existe un proceso donde se van ordenando los arboles.

Al insertar, se parece al ejemplo de contador binario y la amortizacion es $O(1)$

Decrementar en un log binomial, es $\log(n)$ porque no es posible amortizar

Eliminar el minimo, es el el peor caso es $\log(n)$

Para el **heap fibonacci** ...

3 Algoritmos Greedy

Utiliza heuristica de seleccion para encontrar una solución global optima despues de muchos pasos.

3.1 Mochila fraccionaria

Dado un contener de capacidad W , y un conjunto de elementos n fraccionables de valor v_i y peso w_i

El objetivo es seleccionar un subconjunto de elemento o fracciones de ellos de modo de maximizar el valor almacenado y sin superar la capacidad de la mochila.

La complejidad es $O(n \log(n))$

3.2 Cambio de moneda

Es una solución es conocido como solución de cajero. Contamos con un conjunto de diferentes monedas de diferentes denominación sin restricción de cantidad.

$$\mathcal{S} = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$$

El objetivo es entregar la menor cantidad posible de monedas como cambio.

Tiene una complejidad de $O(n)$.

El sistema \mathcal{S} se conoce como **canonico** a aquel en el que para todo x , $greedy(\mathcal{S}, x) = optimo(\mathcal{S}, x)$.

Para saber si una base es canonica:

1. Basta con buscar un contraejemplo. Estaria entre la 3ra denominacion y la suma de las ultimas dos doniminaciones.
2. Utilizar un algoritmo Polinimico para determinar si es un sistema canonico.

Si el problema no es greedy, se puede construir un algoritmo utilizando programación dinamica.

3.3 Interval Scheduling: Algoritmo de Greedy Stay Ahead

Tenemos un conjunto de requests $\{1, 2, \dots, n\}$; el request i^{th} corresponde a un intervalo de tiempo que comienza al instante $s(i)$ y finaliza al instante $f(i)$. Diremos que un subconjunto de requests es compatible si no hay dos de ellos que al mismo tiempo se superponen, y nuestro objetivo es aceptar un subconjunto compatible tan grande como sea posible. El conjunto compatible con mayor tamaño sera el **óptimo**.

La idea básica en un algoritmo greedy para interval scheduling es usar una simple regla para seleccionar el primer request i_1 . Una vez que el request i_1 aceptado, rechazamos todos los request que no son compatibles con i_1 . Luego seleccionamos el siguiente request i_2 , y volvemos a rechazar todos los request que no son compatibles con i_2 . Continuamos de esta manera hasta que nos quedemos sin requests. El desafío en diseñar un buen algoritmo greedy esta en decidir que regla usar para la selección.

Pueden probar con varias reglas, pero la mas optimo es la siguiente idea: Aceptaremos el request que termina primero, o sea el request para el cual tiene el menor $f(i)$ posible. Asi nos aseguramos que nuestros recursos se liberen tan pronto como sea posible mientras satisfacemos un request. De esta manera podemos maximizar el tiempo restante para satisfacer otro request.

Para escribir el pseudo código, utilizaremos R para denotar al conjunto de request que aún no estan aceptados ni rechazados, y usaremos A para denotar al conjunto de los request aceptados.

```
1 Inicialmente R contiene todos los requests, y A es un conjunto
  vacio.
2
3 Mientras R no esta vacio
4
5     Seleccionar un request i de R que tenga el instante de
      finalizacion mas chico.
6     Agregar el registro i a A
7     Eliminar todos los request de R que no sean compatibles con el
      request i
8
9 Fin mientras
10
11 Retornar el conjunto A como el conjunto de los request aceptados.
```

Listing 7: Algoritmo de greedy para Interval Scheduling

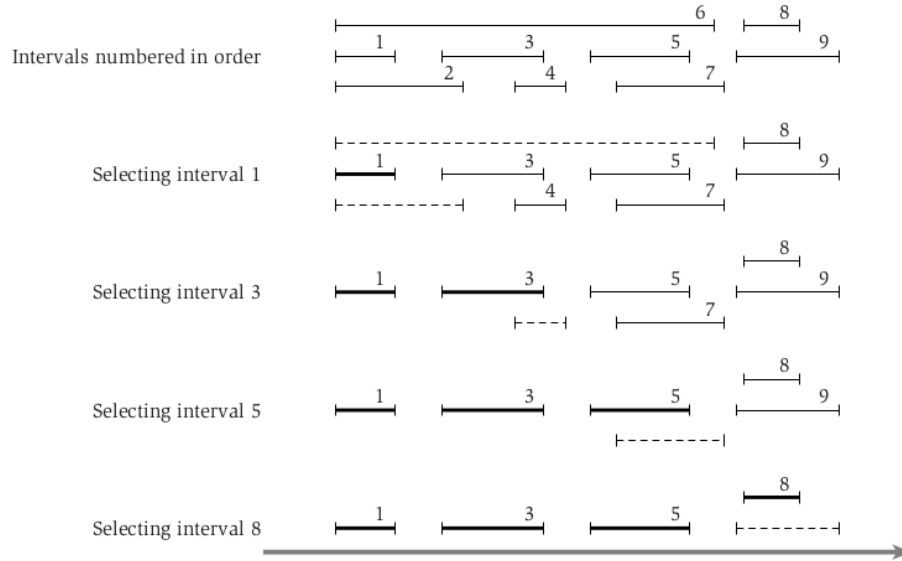


Figure 4.2 Sample run of the Interval Scheduling Algorithm. At each step the selected intervals are darker lines, and the intervals deleted at the corresponding step are indicated with dashed lines.

De forma inmediata podemos decir que el conjunto retornado tiene request compatibles.

Lo que necesitamos es demostrar que la solución es optima. Definimos a O , un conjunto de intervalos optimos. Luego, vamos a mostrar que $|A| = |O|$, o sea que el conjunto A tiene la misma cantidad de intervalos que O , y por lo tanto, A tambien es una solución optima.

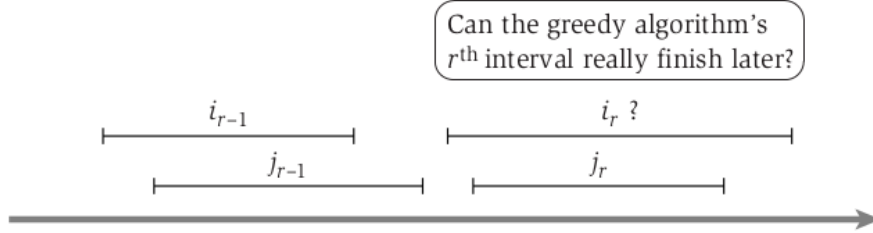
Para la prueba introduciremos la siguiente notación:

- Dado $\{i_1, \dots, i_k\}$ el conjunto de request en A en orden que fueron agregados a A . Notar que $|A| = k$.
- Dado $\{j_1, \dots, j_m\}$ el conjunto de request en O ordenos de izquierda a derecha. Notar que $|O| = m$.

El objetivo es probar que $k = m$.

La manera en que el algoritmo de greedy se mantenga adelante (**stays ahead**) es que cada uno de sus intervalos finalice al menos tan pronto como lo haga el

correspondiente intervalo en el conjunto O .



(3.1) Para todos los indices $r < k$ tenemos que $f(i_r) \leq f(j_r)$

Demostración: Probaremos la sentencia anterior mediante el método inductivo. Para $r = 1$ la sentencia anterior es cierta, el algoritmo empieza seleccionando el request i_1 con el menor tiempo de finalización.

Para el caso inductivo, o sea $r > 1$ asumiremos como nuestra hipotesis inductiva que la sentencia es verdadera para $r - 1$, y queremos probar que es tambien es lo es para r . La hipotesis inductiva nos dice que asumamos verdadero que $f(i_{r-1}) \leq f(j_{r-1})$. Queremos demostrar que $f(i_r) \leq f(j_r)$.

Dado que O consiste en intervalos compatibles, sabemos que $f(j_{r-1}) \leq s(j_r)$. Combinando esto último con la hipotesis inductiva $f(i_{r-1}) \leq f(j_{r-1})$, obtenemos $f(i_{r-1}) \leq s(j_r)$. Asi el intervalo j_r esta en conjunto R de los intervalos disponibles al mismo tiempo cuando el algoritmo de greedy selecciona i_r . El algoritmo de greedy selecciona el intervalo con el *tiempo final mas chico* (i_r); y dado que intervalo j_r es uno de estos intervalos, tenemos que $f(i_r) \leq f(j_r)$, completando asi el paso inductivo.

De esta forma demostramos que nuestro algoritmo se mantiene adelante del conjunto optimo O . Ahora veremos porque esto implica optimalidad del conjunto A de algoritmo de greedy.

El algoritmo de greedy retorna un conjunto A óptimo.

Demostración: Para demostrarlo utilizaremos la contradicción. Si A no es optimo, entonces el conjunto O debe tener mas requests, o sea que tenemos $m > k$ y aplicando 3.1, cuando $r=k$, obtenemos que $f(i_k) \leq f(j_k)$. Dado que

$m > k$, existe un request j_{k+1} en O . Este request empieza despues que el request j_k termina y por consiguiente despues de que el request i_k termine. Entonces, despues de eliminar todos los requests que no son compatibles con los request i_1, \dots, i_k , el conjunto de posibles requests R aún contiene el request j_{k+1} . Pero el algoritmo de greedy se detiene con el request i_k y este supuestamente se detiene porque R esta vacio, lo cual es una contradicción.

3.4 Seam Carving - TODO

Es un algoritmo para adecuar imagenes. Analiza imagenes recortando pixeles de menor importancia. Retira tantas vetas como sea necesario para llegar a un tamaño optimo.

3.5 Caminimos Minimos - TODO

Dado dos nodos, uno inicial s y otro final t el algoritmo encuentra el camino minimo que los une, tambien entre s y el resto de los nodos.

3.6 Compresión de datos - TODO

El algoritmo de greedy arma un arbol de "huffman" para armar un arbol optimo de prefijos.

4 División y conquista

4.1 Teorema mestro - TODO

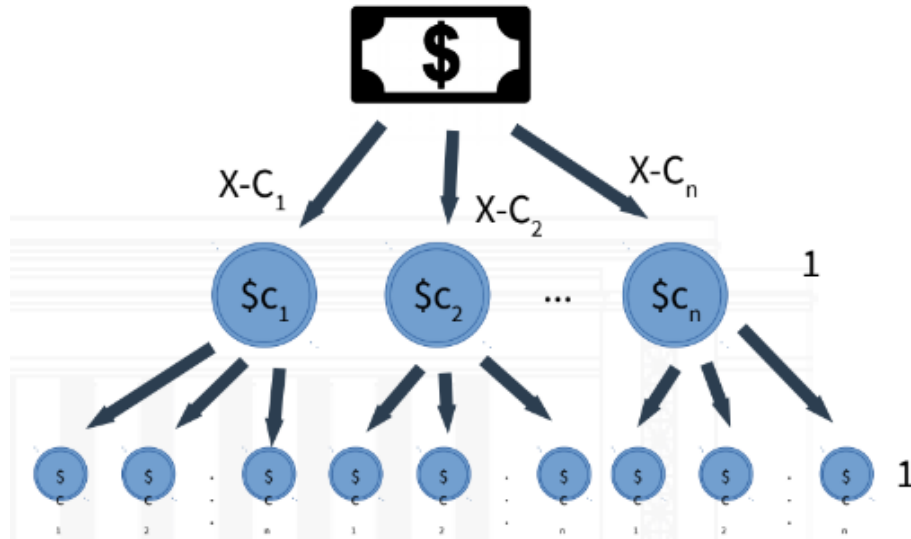
4.2 Mediana con datos separadas

5 Programación dinámica

5.1 Cambio de monedas

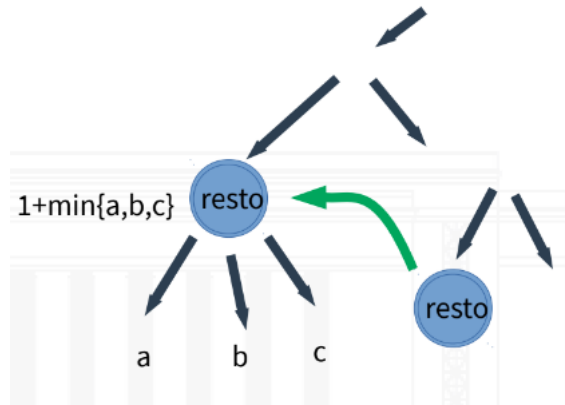
Contamos con un conjunto de monedas de diferente denominación sin restricción de cantidad. Representamos de esta manera $\$ = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ y tenemos un importe x a dar. Concluimos que no existe un algoritmo satisfactorio de greedy para resolver este problema.

Si buscamos la solución por **fuerza bruta**, se puede armar un árbol de decisión. Por cada moneda posible, se genera un subproblema.



Entonces el camino a la hoja con menor profundidad es la menor cantidad de monedas a dar. Esto hace que la complejidad sea $O(x^n)$.

Analizando el problema anteriores se pueden obtener algunas mejoras. Parte de los caminos del árbol son iguales. Hay distintas ramas con nodos que tienen el mismo resto, y por lo tanto se puede calcular solo una vez. Este caso de resto igual en varios nodos, lo llamaremos subproblemas.



Subproblema: Calcular el óptimo(OPT) del cambio x debe usar el mínimo entre los subproblemas $X - C_j$ para $j = 1 \dots n$.

Cada vez que paso por un subproblema se incrementa en 1 para contar la cantidad de monedas a dar. Que sería: $1 + \min\{\text{subproblemas}\}$.

Para la solución **recurrente**, podemos plantear:

$$\begin{cases} OPT(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ OPT(x) = 1 + \min\{OPT(x - C_i)\} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

El resultado con el mínimo cambio será $OPT(x)$ y para poder calcularlo, necesito calcular los $x - 1$ óptimos anteriores. Para evitar el recálculo, si calculo el óptimo de algún resto, lo almaceno para no volver a calcularlo de nuevo. Además en cada subproblema debo analizar n comparaciones, lo cual impacta en la complejidad.

SOLUCIÓN ITERATIVA

```

1
2 OPT[0] = 0
3 Desde i=1 a X
4     minimo = +infinito
5     Desde j=1 a n
6         resto = i - C[j]
7         si resto > 0 y minimo > OPT[resto]
8             minimo = OPT[resto]
9

```

```
10     OPT[i] = 1 + minimo
11
12 Retornar OPT[X]
```

Listing 8: Solución iterativa

La complejidad es $O(X * n)$ porque no solo depende de los diferentes tipos de monedas, también depende del parámetro de entrada X . Se dice que es un algoritmo pseudo polinomial.

RECONSTRUIR LAS ELECCIONES

```
1
2 OPT[0] = 0
3 elegida[0] = 0
4 Desde i=1 a X
5     minimo = +infinito
6     elegida[i] = 0
7     Desde j=1 a n
8         resto = i - C[j]
9         si resto > 0 y minimo > OPT[resto]
10             elegida[i] = j
11             minimo = OPT[resto]
12
13     OPT[i] = 1 + minimo
14
15 resto = x
16 Mientras resto > 0
17     Imprimir C[elegida[resto]]
18     resto = resto - C[elegida[resto]]
19
20 Imprimir OPT[x]
```

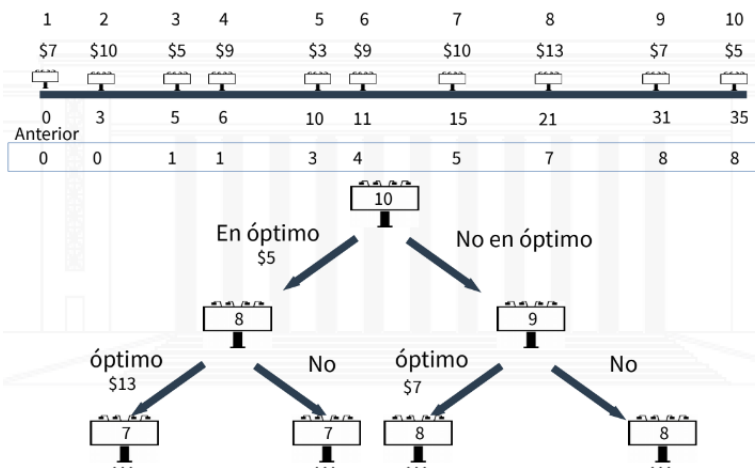
Listing 9: Solución iterativa con reconstrucción

5.2 Problema de la Publicidad en la carretera

Sea una carretera de longitud M km, un conjunto de n carteles publicitarios en el intervalo $[0, M]$, cada cartel i tiene una posición x_i y un valor de ganancia r_i . Entonces queremos seleccionar carteles para maximizar la ganancia. Como restricción ningún cartel puede estar a menos de 5 km de otro.



Podemos armar un árbol de decisión utilizando una función de $anteriores(i)$. La función anterior nos dice cual es el cartel anterior al i que cumple con la restricción.



Para la solución **recurrente**, podemos plantear:

$$\begin{cases} OPT(i) = 0 & \text{si } i = 0 \\ OPT(i) = \max\{r_i + OPT(\text{anterior}(i)), OPT(i-1)\} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

El resultado con la máxima ganancia sera: $OPT(n)$.

SOLUCIÓN ITERATIVA

```
1
2 OPT[0] = 0
3 OPT[1] = r[1]
4
5 Desde i=2 a n
6
7     estaCartel = r[i] + OPT[anterior(i)]
8     noEstaCartel = OPT[i-1]
9
10    OPT[i] = max (estaCartel, noEstaCartel)
11
12 Retornar OPT[n]
```

Listing 10: Solución iterativa

SOLUCIÓN ITERATIVA - CARTELES SELECCIONADOS

```
1
2 OPT[0] = 0
3 OPT[1] = r[1]
4 elegidos[0] = false
5 elegidos[1] = true
6
7 Desde i=2 a n
8
9     estaCartel = r[i] + OPT[anterior(i)]
10    noEstaCartel = OPT[i-1]
11
12    Si estaCartel > noEstaCartel
13        elegido[i] = true
14    sino
15        elegido[i] = false
16
17    OPT[i] = max (estaCartel, noEstaCartel)
18
19 Retornar OPT[n]
```

Listing 11: Solución iterativa con reconstrucción

La complejidad temporal es $O(n)$ ya que solo hago sumas y comparaciones. La complejidad espacial es $O(n)$ porque se almacenan los n óptimos en un array.

SOLUCIÓN ITERATIVA - RECONSTRUIR

```
1
2 i = n
3
4 Mientras i>0
5     si elegido[i]
6         Imprimir i
7         i = anterior[i]
8     sino
9         i = i-1
10
11 Retornar OPT[n]
```

Listing 12: Solución iterativa

La complejidad temporal es $O(n)$. La complejidad espacial es $O(n)$.

CALCULO anterior de i

Se hace un apareo entre las posiciones del cartel x y el limite del mismo. El objetivo es armar un array de anteriores.

```
1
2 i=n
3 j=n-1
4
5 Mientras i>1
6     Si limite(n) >= posicion(j)
7         anterior[i] = j
8         i=i-1
9     sino
10         j=j-1
```

Listing 13: Solución iterativa

5.3 Programación de intervalos ponderados

5.4 Problema de Knapsack (mochila)

5.5 Problema de Subset Sum

Sea un conjunto de n elementos $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ donde cada elemento e_i cuenta con un peso asociado w_i .

Queremos seleccionar un subset de elementos de E con el mayor peso posible que no supere un valor W de peso máximo.

Para plantear una solución por **fuerza bruta**, un elemento puede estar o no. O sea que si tengo n elementos pueden existir 2^n combinaciones. Entonces la complejidad total esta acotado por $O(2^n)$.

5.6 Bellman Ford

Se extiende el problema de hallar caminos mínimos utilizando **aristas ponderadas negativas**. Se puede haber un camino global que pase por aristas ponderadas negativamente y que sea el óptimo, en vez de utilizar un algoritmo de reedy de *Dijkstra* que para este caso no sería óptimo.

Una solución por **fuerza bruta** sería, calcular para un grafo ponderado **sin ciclos negativos**:

- Todos los costos de los caminos posibles de s a t de longitud 1.
- Todos los costos de los caminos posibles de s a t de longitud 2.
- ...
- Todos los costos de los caminos posibles de s a t de longitud $n-1$.

El camino mínimo tendrá longitud $n-1$ como máximo sin ciclos negativos.

El algoritmo de **Bellman-Ford** halla el camino mínimo con aristas negativas utilizando programación dinámica.

ANÁLISIS

Para llegar desde "s" a un nodo n_i puede haber utilizado diferentes caminos y longitudes. Lo puede hacer a través de sus nodos predecesores $pre[n_i]$.

Para poder llegar a n_i en j pasos, tengo que haber llegado a sus predecesores en $j - 1$ pasos. Así sucesivamente hasta "s" se puede ir resolviendo *sub casos*.

Definimos $minPath(n, j)$ al camino mínimo hasta el nodo n_i con longitud máxima j .

SOLUCIÓN RECURRENTE

$$\begin{aligned}
\minPath('s', j) &= 0 \\
\minPath(n_i, 0) &= +\infty & n_i \neq s \\
\minPath(n_i, j) &= \min \begin{cases} \minPath(n_i, j-1) \\ \min\{\minPath(n_x, j-1) + w(n_x, n_i)\} \end{cases} & n_x \in \text{pred}(n_i)
\end{aligned}$$

- El camino mínimo a 's' para cualquier longitud es siempre 0.
- El camino mínimo a n_i al comienzo es infinito.
- TODO

SOLUCIÓN ITERATIVA

Definimos a $OPT[l][v]$ como el camino mínimo de "s" al nodo n con longitud l

El nodo "s" se encuentra en $v=0$ El nodo "t" se encuentra en $v=n$

```

1  Desde l=0 a n-1
2      OPT[l][0] = 0
3  Desde v=0 a n-1
4      OPT[0][v] = +infinito
5
6
7  Desde l=1 a n-1 // max longitud del camino
8      Desde v=1 a n // nodo
9          OPT[l][v] = OPT[l-1][v]
10         Por cada p predecesor de v
11             si OPT[l][v] > OPT[l-1][p] + w(p,v)
12                 OPT[l][v] = OPT[l-1][p] + w(p,v)
13
14  retornar OPT[n-1, n]
```

Listing 14: Algoritmo de requeridos con cupos

La complejidad del primer loop esta acotado por n . La segunda parte se ejecuta m veces por cada predecesor. O sea es $O(m * n)$

La complejidad espacial es $m*n$ porque la matriz ocupa $n*m$

RECONSTRUIR LAS ELECCIONES

Agregar un nodo predecesor y almacenar en la posición i cual fue el predecesor del nodo.

¿Que pasa si hay un ciclo negativo?

Si en una iteración despues de haber llegado a la longitud maxima, cambia el minimo de al menos un nodo, entonces el grafo *tiene ciclos negativos*.

5.7 Problema de Maximo subarreglo

Se necesita calcular un subconjunto *contiguo de elementos* S tal que la suma de los valores sea la máxima posible.

El maximo subvector que termina en el elemento i , esta relacionado con el máximo subvector que termina en el elemento $i - 1$.

SOLUCIÓN RECURRENTE

$$MAX(1) = v[1]$$

$$MAX(i) = \max\{MAX(i - 1), 0\} + v[i]$$

SOLUCIÓN ITERATIVA

```
1
2   MaximoGlobal = v[1]
3   MaximoLocal = v[1]
4   IdxFinMaximo = 1
5
6   Desde i=2 a n
7       MaximoLocal = max(MaximoLocal, 0) + v[i]
8
9       si MaximoLocal > MaximoGlobal
10           MaximoGlobal = MaximoLocal
11           IdxFinMaximo = i
12
13   Retornar MaximoGlobal
```

Listing 15: Solución iterativa

5.8 Problema de cuadrados minimos

Dado un conjunto de puntos $P = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Usamos p_i para indicar un punto (x_i, y_i) .

Queremos aproximar mediante segmentos los puntos de P minimizando el error cometido. Los segmentos se forman mediante *rectas de aproximación* hallando a y b . El calculo del error cometido se obtiene sumando las distancias de los puntos a las rectas.

Se agrega un parametro de penalización $C > 0$ por cada segmento que se agrega.

- A mayor "C" entonces: menos segmentos
- A menor "C" entonces: menos error

Al analizar una solución por **fuerza bruta** se obtiene una complejidad de $O(2^{n*n})$.

SOLUCIÓN RECURRENTE

Como no conocemos cual es el ultimo segmento, se elige el último segmento como aquel que **minimice el error general**. O sea que queremos minimizar el error del segmento, mas la constante c mas el error conocido en el *subproblema que contiene los puntos de segmentemos anteriores* sea el minimo entre todos los posibles.

$$OPT(i) = \min_{1 \leq x \leq i} (e_{x,i} + C + OPT(x - 1))$$
$$OPT(0) = 0$$

SOLUCIÓN ITERATIVA

```
1  OPT[0] = 0
2
3  Para todo para i,j con i <= j
4      Calcular e[i][j]
5
6  Desde j=1 a n
7      OPTIMO[j] = +infinito
```

```
8
9     Desde i=1 a n
10         segmento = e[i][j] + C + OPT[i-1]
11
12         si OPTIMO[j] > segmento
13             OPTIMO[j] = segmento
14
15 Retornar OPT[n]
```

Listing 16: Solución iterativa

Analizando la **complejidad temporal**, el calculo del optimo es $O(n)$, pero se calculan n óptimos, Por lo tanto esta partes es $O(n^2)$.

Pero como en la primer se itera sobre todos los pares posibles es $O(n)$. Y como el calculo del error es $O(n)$, la primer interacción termina siendo $O(n^3)$, y este le gana a $O(n^2)$.

La complejidad total es $O(n^3)$.

Para el calculo de la **complejidad espacial**, los errores se almacenan en $O(n^2)$, mientras que los óptimos en $O(n)$. Por lo tanto la complejidad espacial total es de $O(n^2)$.

5.9 Problema del viajante

Sea un conjunto de n ciudades "C", un conjunto de rutas de costo de tránsito, existe una ruta que une cada par de ciudades.

Queremos obtener el circuito de menor costo que inicie y finalice en una ciudad y que pase por el resto de las ciudades *una y solo una vez*

Mediante **fuerza bruta** tenemos que calcular todos los ciclos posibles, y por lo tanto existen $(n-1)!$ ciclos de longitud $n-1$. Luego por cada ciclo calculamos su costo y nos quedamos con el mínimo. Por lo tanto la complejidad total es $O(n!)$.

Mediante el **algoritmo Belman-Held-Karp** lo resuelvo utilizando programación dinámica. Se puede decomponer como el mínimo entre los subproblemas menores con $(n-1)!$ hojas.

SOLUCIÓN RECURRENTE

Dado S un subconjunto de ciudades e i la ciudad donde estoy parado. **start** es la ciudad de partida. La siguiente es la ecuación de recurrencia:

$$\begin{aligned} OPT(i, \{S\}) &= \min_{j \in \{S\}} (w(i, j) + OPT(j, \{S - j\})) \\ OPT(i, \emptyset) &= w(i, start) \end{aligned}$$

- El optimo i con el subconjunto s va a ser igual al minimo de los subproblemas que son elegir alguna de las ciudades que estan en s . Sumando el peso de i a j mas el optimo de partir de j hacia el resto de las ciudades ($s-j$).
- En el caso base, ya no quedan ciudades para visitas, entonces solo queda sumar el peso de ir de i a la ciudad de inicio *Start*.

SOLUCIÓN ITERATIVA Llamamos a C al conjunto de todas las ciudades, 1 es la ciudad inicial, y el resto de las ciudades estan numeradas de 2 a n .

```

1
2   Desde i=2 a n
3       OPT[i][0] = w[i][1]
```

```
4
5 Desde k=1 a n-2
6     Para todo subset S de C-{1} de tamaño k
7         Para cada elemento i de S
8             OPT[i, S-{i}] = +infinito
9
10        Por cada elemento j de S - {i}
11            r=OPT[j, S-{i,j}] + w[j][i]
12
13            si (r<OPT[i, S-{i}])
14                OPT[i, S-{i}] = r
15
16
17 CamininoMinimo=+infinito
18 Desde j=2 a n
19     ciclo = OPT[i, S-{1, i}] + w[1, i]
20     Si (CamininoMinimo>ciclo)
21         CamininoMinimo = ciclo
22
23 Retornar CamininoMinimo
```

Listing 17: Solución iterativa

- La primer iteración se cargan los casos bases para las n ciudades.
- Despues desarrollamos los subproblemas, primero iteramos las ciudades que quedan por visitar
- Luego generamos las variantes de subset y por cada uno calculo el minimo y utilizo los subproblemas de tamaño menor, ver cual de todos es el minimo.

La complejidad total es $O(n^2 2^n)$

6 Redes de flujo

6.1 Conceptos

Se trata de problemas de flujos de tráfico en redes. Por ejemplo, tubos de gas, autopistas, rutas de aviones, redes electricas.

Definiciones:

- Los **ejes** transportan algun tipo de flujo
- Los **vértices** actúan como conmutador de tráfico entre los diferentes ejes.
- Capacidad: cantidad máxima que un eje puede transportar.
- Fuente: Vértices que generan tráfico saliente.
- Sumidero: Vértice que absorbe tráfico entrante.
- Flujo: Cantidad transportada por eje.

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, para todo $e \in E$ llamamos $C_e \geq 0$ (valor entero) a su capacidad. Existe un único $s \in V$ llamado fuente (source). O sea no tiene ejes entrantes. Existe un único $t \in V$ llamado sumidero (sink). O sea no tiene ejes salientes. El resto de los vertices son internos como si fueran conmutadores de fuentes.

DEFINICION DE FLUJO El flujo $s - t$ es una funcion f que mapea cada e a un número real no negativo, $f : E \mapsto R^+$. Un flujo tiene las siguientes características:

- (Condición de capacidad) Para cada $e \in E$, tenemos que $0 \leq f(e) \leq C_e$.
- (Condición de conservación) Para cada nodo v que no sean s y t , tenemos que:

$$\sum_{e \text{ into } v} f(e) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e)$$

PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO

Definimos **corte de grafo** como:

Dos cortes diferentes, tienen capacidades de transporte maxima diferentes.

6.2 Algoritmo Ford-Fulkerson

Calcula el maximo flujo a travez de una red.

Grafo residual

Dado un red de flujo G y un flujo f en G , **definimos el grafo residual G_f (de G con respecto a f)** a:

- Los mismos vértices de G ,
- **Ejes hacia adelante:** Para cada $e = (u, v) \in E$ en el que $f(e) < C_e$. Lo incluimos en G_f con capacidad $C_e - f(e)$ [**capacidad residual** de flujo].
- **Ejes hacia atras:** Para casa $e = (u, v) \in E$ en el que $f(e) > 0$. Incluimos $e' = (v, u)$ con capacidad $f(e)$.

Cuello de botella

Sea P un **camino simple** $s - t$ en G_f , o sea que P no visita más de una vez el mismo vértice.

Difinimos **bottleneck(P,f)** a la capacidad residual mínima de cualquier eje de P con repecto al flujo f .

Lo máximo que se puede transportar es 20, para que no deje cumplir la condición de capacidad.

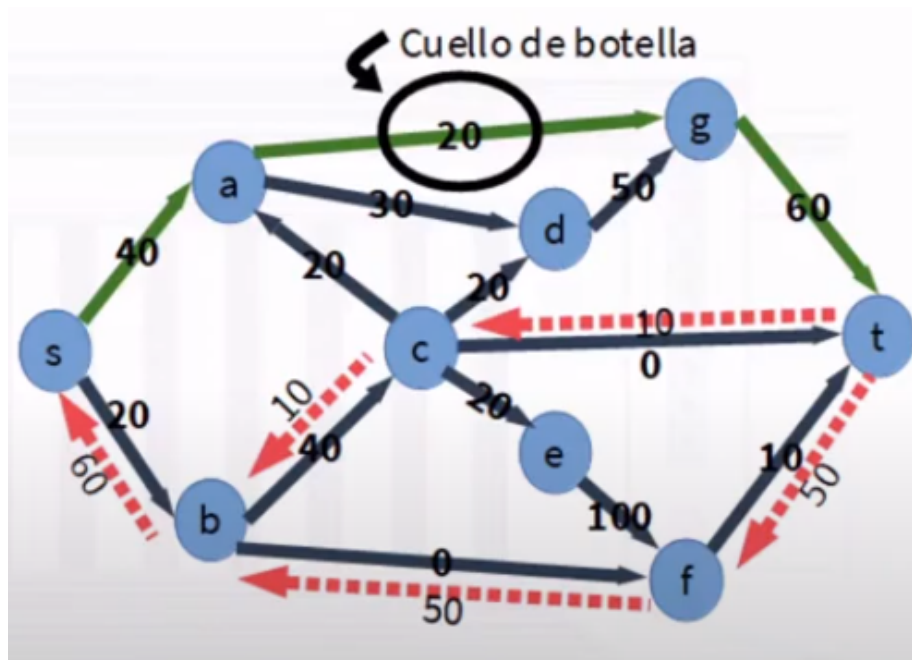
Con el grafo residual, podemos redireccionar el flujo en el camino original para aumentar el flujo total de la red.

Tambien nos ayuda a saber cuanto flujo se esta trasportando por ese eje.

Llamamos P al camino de aumento (**augmenting path**):

- P es una caminio simple que va de s a t en G_f .
- P no visita el mismo nodo mas de una vez.

Ahora definimos la operación **augment(f,P)** el cual cede un nuevo flujo f' en eG



```

1 augment(f, p)
2   Sea b = bottleneck(P, f)
3   Para cada eje e=(u, v) perteneciente a P
4     Si e=(u,v) eje hacia adelante
5       f(e) += b en G
6     sino si es eje para atras
7       e' = (v,u)
8       f(e') -= b en G
9   Retornar f

```

Listing 18: Operación de augment

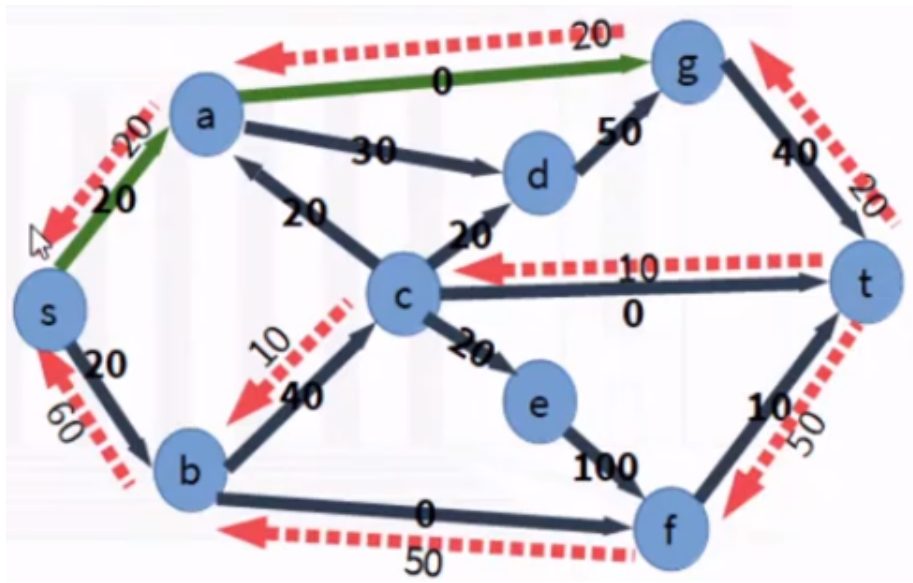
¿Es valido el nuevo flujo? PENDIENTE

Con el grafo residual y el camino de aumento definimos el *pseudocódigo* de Ford-Fulkerson.

```

1 Max-Flow
2   Inicialmente f(e)=0 para todo 'e' en G
3
4   Mientras haya un camino s-t en Gf
5
6     Sea P un caminio s-t simple en Gf
7     f' = augment(f,P)
8

```



```

9      Actualizar f para ser f'
10     Actualizar Gf para ser Gf'
11
12
13     Retornar f

```

Listing 19: Operación de augment

La **complejidad** es $O(|E| * C)$ donde $|E|$ es la cantidad de ejes y C es la suma de todas las C_e de los ejes que salen de la fuente.

¿Es óptimo? PENDIENTE

El flujo retornado por el algoritmo Ford-Fulkerson es el flujo máximo

Ademas podemos mediante BFS en G_f construir el corte mínimo s-t (A,B) obteniendo A y por diferencia B.

Consideraciones si las capacidades no son enteras:

- Si son racionales, multiplicar por minimo comun multiplo
- Si son irracionales, *no esta asegurado que el algoritmo termine.*

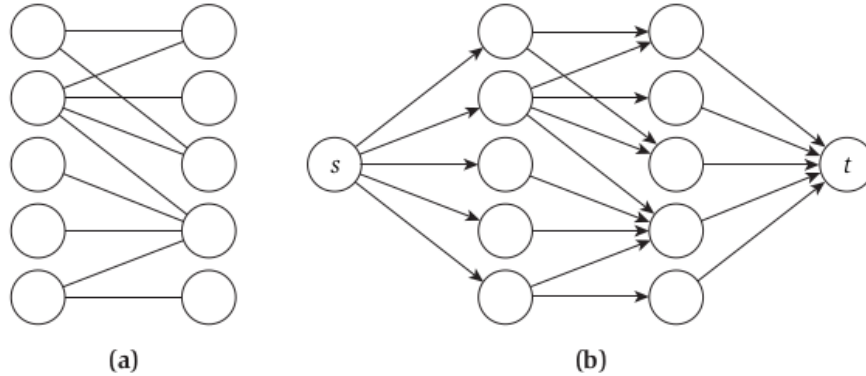
6.3 Variante: Circulación con demanda

Cada nodo puede ser productor o consumidor de flujo. O un nodo que no es consumidor ni productor de flujo.

6.4 Bipartite Matching Problem

Llamamos un grafo bipartito a $G = (V, E)$ un *grafo no dirigido*, puede particionarse en como $V = X \cup Y$, con la propiedad de que cada eje $e \in E$ se conecta en una punta con un nodo en X y la otra punta un nodo en Y . Un *matching* M en G es un subconjunto de ejes $M \subseteq E$ tal que cada nodo aparece en al menos un eje en M . Se necesita encontrar el set M de mayor tamaño posible. O sea la mayor cantidad de parejas.

Resolvemos el matching utilizando el problema de flujo máximo. Construimos una red de flujo G' como la siguiente imagen. Pasamos todos los ejes a ejes dirigidos de X a Y . Luego agregamos el nodo s y un eje (s, x) desde s a cada nodo en X . Tambien agregamos el nodo t y un eje (y, t) desde cada nodo en Y a t . Finalmente, le damos una capacidad de 1 a cada eje en G'



Resolvemos el problema de red de flujo máximo con G' . Obtenemos el flujo máximo $s - t$. Entonces *El valor del flujo total es igual al tamaño del matching máximo.*

Análisis Pendiente

6.5 Diseño de encuestas

Considere el problema de una compañía que vende k productos y que tiene una base de datos con el historias de las compras de todos sus clientes. La compañía desea enviar encuestas con preguntas personalizadas a un grupo particular de n clientes, para determinar que productos la gente prefiere sobre el total.

Lineamientos para la encuesta:

- Cada cliente recibira preguntas acerca de cierto subconjunto de productos.
- Un cliente solo puede contestar sobre los productos que él o ella haya comprado.
- Cada cliente sera preguntado sobre un número de productos entre c_i y c'_i
- Cada producto debe tener entre p_j y p'_j preguntas de clientes distintos.

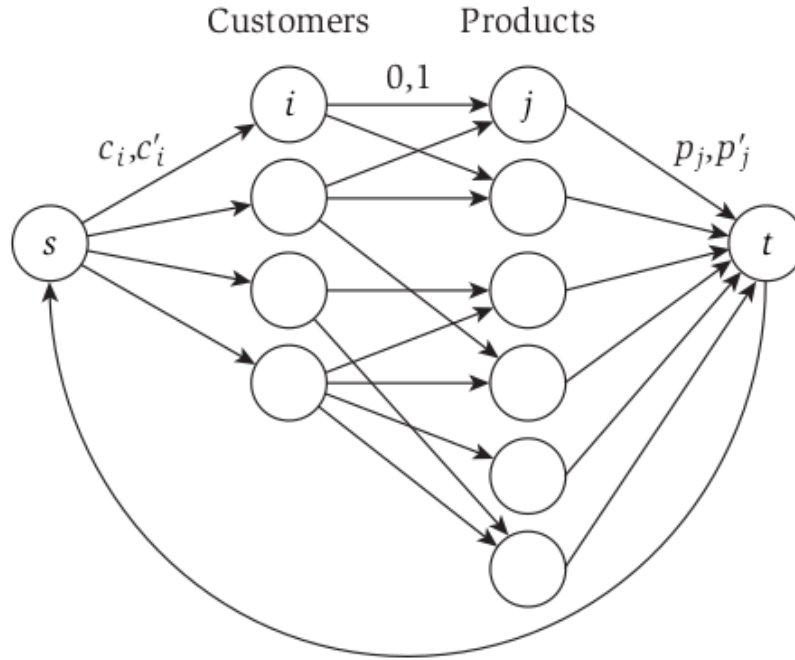
El problema de diseño de encuestas toma como input un *grafo bipartito* G cuyos nodos son clientes y productos, y hay un eje entre un cliente i y un producto j si el cliente compro el producto j . Mas aún, por cada cliente $i = 1, 2, \dots, n$ tenemos la limitante de $c_i \leq c'_i$ en el numero de productos en el que un cliente puede constestar; por cada producto $j = 1, \dots, k$, tenemos la limitante $p_j \leq p'_j$ en el número de cliente distintos que se pueden consultar por cada producto.

El problema se resuelve reduciendo este a un problema de red de flujo en G' con demanda y un limite inferior.

Para obtener un grafo G' de G , necesitamos:

- Orientar los ejes de G desde los clientes a los productos.
- Agregar un nodo ficticio s con los ejes (s, i) por cada cliente $i = 1, \dots, n$.
- Agragar un nodo ficticio t con los ejes (j, t) por cada producto $j = 1, \dots, k$.

La circulacion en la red, corresponde con la manera en la que se tienen que realizar las preguntas.



Se debe pasar de un problema de circulación con *demanda y limite inferior* a un problema de circulación con demanda y luego a un problema de flujo máximo. Finalmente se resuelve con Ford-Fulkerson.

Una vez obtenido el flujo máximo:

- El flujo que va de (t, s) corresponde al número total de preguntas a realizar.
- El flujo en los ejes (s, i) es el número de productos que deben contener el cuestionario para cada cliente i .
- El flujo en los ejes (j, t) corresponde con él numero de clientes que deben ser preguntados para el producto j .
- Por ultimo, aquellos ejes (i, j) con flujo 1, corresponden a preguntar al cliente i sobre el producto j .

6.6 Problema de Selección de proyectos

Dado un conjunto P de proyectos para seleccionar y cada proyecto $i \in P$ tiene asociado una ganancia p_i , el cual puede ser *positivo* como *negativo*. Algunos proyectos son requisitos de otros proyectos, y modelaremos esta relación mediante un *grafo dirigido sin ciclos* $G = (P, E)$. Los nodos de G son los proyectos y hay un eje (i, j) para indicar que un proyecto i puede ser seleccionado solo si el proyecto j es también seleccionado. Un proyecto i puede tener muchos prerrequisitos, y puede haber muchos proyectos j que pueden ser parte de esos prerrequisitos. Un conjunto de proyecto de $A \subseteq P$ es *viable* si los prerrequisitos de cada proyecto de A también pertenecen a A :

Por cada $i \in A$ y cada eje $(i, j) \in E$, tenemos que $j \in A$

Estos prerrequisitos vendrían a ser las *restricciones de precedencia*. La ganancia del conjunto de proyectos se define como:

$$profit(A) = \sum_{i \in A} p_i$$

El *problema de selección de proyectos* seleccionar el conjunto de proyectos viables con la máxima ganancia.

7 Problemas NP

7.1 Clasificación

7.1.1 Clase P

La clase P consiste en aquellos problemas que pueden resolverse en tiempo polinomial (eficientemente).

Un algoritmo A resuelve **eficientemente** un problema S si para toda instancia I de S , encuentra la solución en tiempo polinómico, entonces existe una constante $k/A = O(n^k)$ y donde n es el tamaño de la entrada del problema. Ejemplo, Gale Shapley resuelve el problema de "Stable Marriage Problem" en $O(n^2)$

Se conoce como P al conjunto de problemas de decisión para los que existe un algoritmo que lo resuelva en *forma eficiente*.

Un algoritmo B **certifica eficientemente** un problema de decisión S si para toda instancia I de S , dado un certificado t que contiene evidencia de la solución $s(i)$ es "Si", entonces existe una constante $k/B = O(n^k)$.

O sea que el algoritmo B va a recibir dos parametros, la instancia I y el certificado T . Responde si o no. Por ejemplo, en el problema de la moneda, seria las cantidades de monedas a dar, y certificado seria la solución conocida. Para validar, se ejecuta el algoritmo de certificación con el certificado T .

7.1.2 Clase NP

Se conoce como NP al conjunto de problemas de decisión para los que existe un algoritmo que lo verifique (certifique) en tiempo polinomial (eficientemente).

$P \subseteq NP$?. Si el problema $Q \in P$, existe un algoritmo $A = O(n^k)$ que lo resuelve. Y podemos definir como:

```
1  B(I, t)
2      s = A(I)
3      Si s == t
4          retornar "si"
5
```

```
6      retornar "no"
```

Listing 20: Algoritmo B

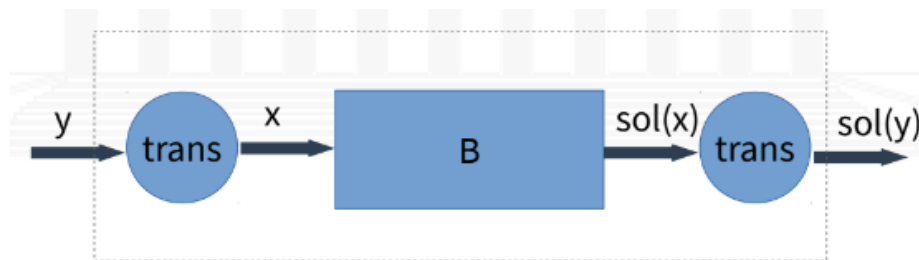
Que certifica el problema Q y lo hace en tiempo polinomial. Entonces se cumple:

$$Q \in P \implies Q \in NP$$

¿ $NP \subseteq P$? Es un problema sin resolver.

7.2 Reducciones

Reducir un problema a otro conocido.



Una reducción polinomial corresponde a una reducción en la que ambas transformaciones se realizan en tiempo polinomial.

Sean X, Y problemas, diremos $Y \leq_p X$, se lee Y es polinomialmente reducible (en tiempo) a " X ".

Si podemos transformar cualquier instancia de Y en una instancia de X en tiempo polinómico (tractable).

Para **comparar problemas** con reducciones, sean X, Y problemas, si $Y \leq_p X$, diremos que el problema X es al menos tan difícil que el problema Y .

Para **acotar un problema** a la clase P .

- Sean X, Y problemas si $X \in P$ y $Y \leq_p X$ entonces $Y \in P$, porque X es

igual de complicado que Y . Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{MAXMATCHING} &\leq_p \text{MAXFLOW} \\ \text{MAXFLOW} \in P &\implies \text{MAXMATCHING} \in "P" \end{aligned}$$

- Sean X, Y problemas si $Y \notin P$ y $Y \leq_p X$ entonces $X \notin P$, porque X es igual de complicado que Y .

Las siguientes son propiedades de reducciones:

- *Equivalencia*: Sean X, Y problemas si $Y \leq_p X$ y $X \leq_p Y$ entonces X e Y tiene la misma complejidad.
- *Transitividad*: Si $Z \leq_p Y$ y $Y \leq_p X$ entonces $Z \leq_p X$

7.3 Clase NP completo

7.3.1 Problema de satisfabilidad booleana - SAT

Dado un conjunto de variable booleanas que definen una expresión booleana, determinar si existe una asignación de valores de las variables, tal que el resultado de la expresión es "TRUE".

Sea una instancia I del problema **SAT** $\in NP$ y un certificado que corresponde a un valor de asignación de cada variable.

Podemos certificar en tiempo polinomial si esa asignación de variables producen un resultado "TRUE".

El **teorema de Cook-Levin** dice, sea $X \in NP$ entonces $X \leq_p$ Boolean satisfiability problem (SAT). O sea, **que todo problema perteneciente a NP es a lo sumo tan complejo de resolver que SAT**.

NP-HARD: Sea un problema X tal que para todo problema $Y \in NP$ y $Y \leq_p X$, entonces $X \in NP - HARD$. **X es al menos igual de difícil que cualquier problema NP**.

NP-Complete: Sea un problema X tal que para todo problema $X \in NP-HARD$ y $Y \in NP$, entonces $X \in NP - C$. **X es uno de los problemas mas difíciles dentro de NP**.

Ejemplo de uso, para cada problema de $X \in NP$ que analiza Richard Carp, toma un problema demostrado como NP-C y lo reduce a X , con esto X pasa a ser un problema **NP-C**.

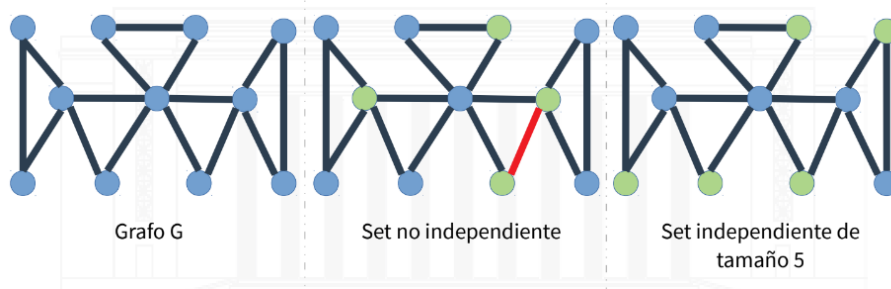
Probar que un problema es NP-C. Sea el problema X de decisión. Probamos:

- Probar que $X \in NP$, definiendo un certificado eficiente:
- Probar que $X \in NP\text{-HARD}$, dado un problema $Y \in NP\text{-C}$, reducir polinomialmente Y a X . Eligiendo el problema Y correcto para reducir, podemos obtener $Y \leq_p X$ y agregar a X en la clasificación de los problemas $NP\text{-C}$.

7.4 Problema de conjunto independiente

Sea un grafo $G = (V, E)$, un valor K , determinar si existe un conjunto independiente de nodos de como mucho tamaño k .

Definimos un conjunto de nodos $C \subseteq V$ es independiente si no existe $a, b \in C$ tal que existe eje $(a, b) \in E$ y el **tamaño del conjunto independiente** corresponde con la cantidad de nodos dentro del conjunto C .



Dado un grafo $G = (V, E)$ con tamaño k de conjunto y un certificado T igual al subconjunto de nodos. Si se puede verificar en tiempo polinomial con $|T| = K$ que:

$$\forall a, b \in T, \exists (a, b) \in E \implies \text{INDEPENDENTSET} \in NP$$

7.4.1 3-SAT

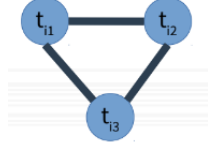
Es una variante de SAT donde cualquier instancia de SAT se puede reducir polinomialmente a 3SAT:

$$SAT \leq_p 3SAT \implies 3SAT \in NPComplete$$

Dado $X = x_1, \dots, x_n$ conjunto de n variables booleanas $= \{0, 1\}$ y k *clausulas* booleanas $T_i = (t_{i1} \vee t_{i2} \vee t_{i3})$ con cada $t_{ij} \in X \cup \overline{X} \cup 1$. Entonces debemos **determinar si existe asignación de variables** tal que $T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_k = 1$

7.4.2 Reducción de 3-SAT a INDEPENDENT-SET

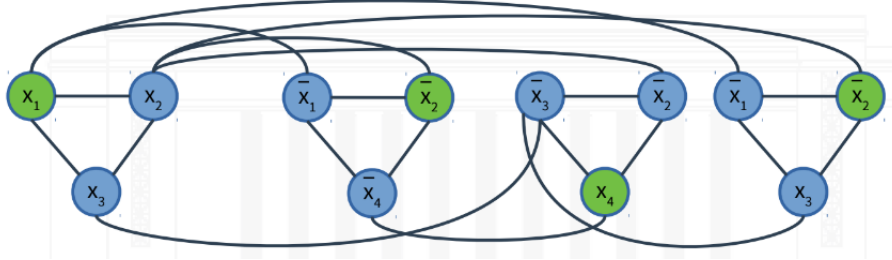
Por cada *clausula* $T_i = (t_{i1} \vee t_{i2} \vee t_{i3})$ **vamos a generar tres vertices entre si**. Y por cada $t_{ij} = x_a, t_{kl} = \overline{x_a}$, crear un eje entre t_{ij} y t_{kl} .



El grafo resultante G corresponde a una instancia del problema *INDEPENDENT-SET* con k =número de cláusulas en la expresión. Ejemplo, sea la expresión:

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

Reducimos polinomialmente y resolvlo:



Entonces, luego resolvlo 3SAT con $x_1 = 1, \overline{x_2} = 1 \implies x_2 = 0, x_4 = 1$ y elijo $x_3 = 0$ porque en este caso es indistinto.

Por lo tanto, como $INDEPENDENT-SET \in NP$ y $3SAT \leq_p INDEPENDENTSET$ NP.

Entonces $INDEPENDENT-SET \in NPComplete$

7.5 Problema de cobertura de vertices

Sea un grafo $G = (V, E)$ diremos que existe un conjunto $S \subseteq V$ es una cobertura de vértices si:

$$\forall e \in E = (u, v), u \in S \text{ y/o } v \in S$$

Donde u y/o v pertenecen al conjunto S .

El **problema de decisión** sera que dado un grafo $G = (V, E)$, determinar si existe una cobertura de vértices (VERTEX-COVER) de tamaño al menos k . El **problema de optimización** busca el subconjunto de menor tamaño.

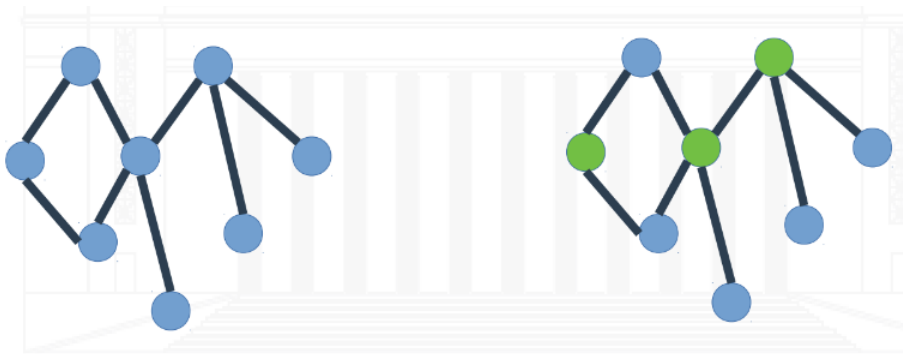


Figure 1: Ejemplo de cobertura de vertices de $k=3$.

Para ver si VERTEX-COVER pertenece a un **problema NP**, verificamos de la siguiente manera:

Sea un grafo $G = (V, E)$ y un certificado T como un conjunto de nodos de V que forman el cubrimiento. Verificamos que:

$$\forall e \in E = (u, v), \text{ si } u \in T \text{ o } v \in T \implies O(V * E)$$

observamos si uno de estos vertices pertenece al certificado y lo podemos ver en tiempo polinomial de $O(V * E)$ y si ademas $|T| = k$, entonces el certificado nos da la respuesta con tamaño k , y por lo tanto **VERTEX-COVER** \in "NP"

Para ver si VERTEX-COVER pertenece a un **problema NP-Completo**, utilizaremos INDEPENDENT-SET.

7.6 Problema de cobertura de conjunto

Sea un conjunto U de n elementos. Una colección S_1, \dots, S_m de subconjuntos de U . Problema de decisión: ¿Existe una colección de como mucho k de los subconjuntos cuya unión es igual a U ?

La idea es probar que SET-COVER es NP-COMPLETO. Sea U un conjunto de elementos, K tamaño buscado, los subconjuntos S_1, \dots, S_m y un T certificado con los índices de los subconjuntos del conjunto.

Verificamos que $|T| = k$ para todo elemento en U , si existen en algunos de los subconjuntos de T . Por lo tanto se puede hacer en tiempo polinomial y se puede afirmar que **SET-COVER** es "NP".

Luego elegimos un problema que previamente se haya demostrado que es NP-Completo. Para esto vamos a usar VERTEX-COVER. Vamos a intentar demostrar que $\text{VERTEX-COVER} \leq_p \text{SET-COVER}$. El algoritmo de reducción será:

Para la **reducción de VERTEX-COVER a SET-COVER**, partimos de $G = (V, E)$ y k . Queremos que todos los ejes queden cubiertos y construimos un conjunto de elementos $U=E$. Por cada vertice $v \in V$, creamos un subconjunto S_v con todos los ejes incidentes a el, y mantenemos en k la cantidad de subconjuntos a buscar para cubrir U . Toda esta transformación se puede hacer en tiempo polinomial.

Si encontramos el subconjunto, eso nos dira que vertices seleccionar.

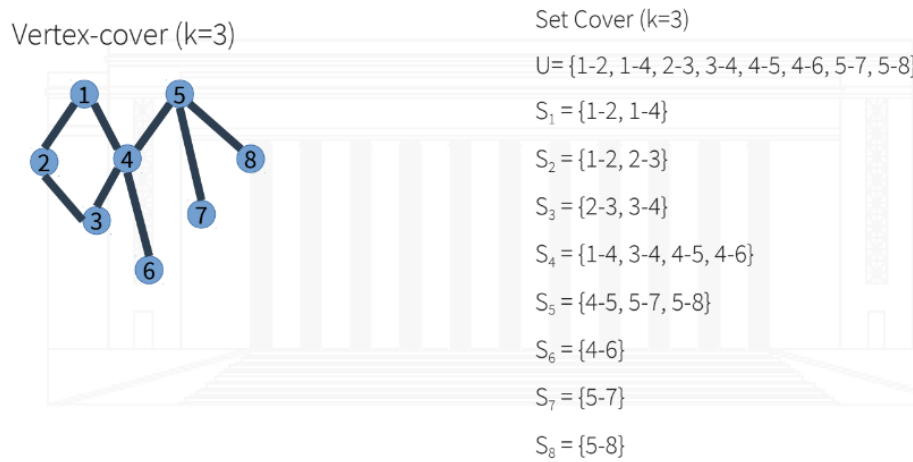


Figure 2: *Ejemplo de reducción de VERTEX-COVER a SET-COVER.*

Si se resuelve SET-COVER, se obtiene los subconjuntos que corresponden a los nodos resultantes en el problema de VERTEX-COVER.

Resumiendo, demostramos que SET-COVER es NP-COMPLETO, porque reducimos VERTEX-COVER a SET-COVER en tiempo polinomial, y si resolvemos cualquier instancia de set-cover, podemos resolver cualquier instancia de vertex-cover.

7.7 Problema 3 Dimensional Matching

Dado 3 conjuntos disjuntos X, Y, Z de tamaño n cada uno y un conjunto $C \subset X \times Y \times Z$ de triplas X, Y, Z las ordenadas. Determinar si existe un subconjunto de n triplas en C tal que cada elemento de $X \cup Y \cup Z$ sea contenido exactamente en una de esas triplas.

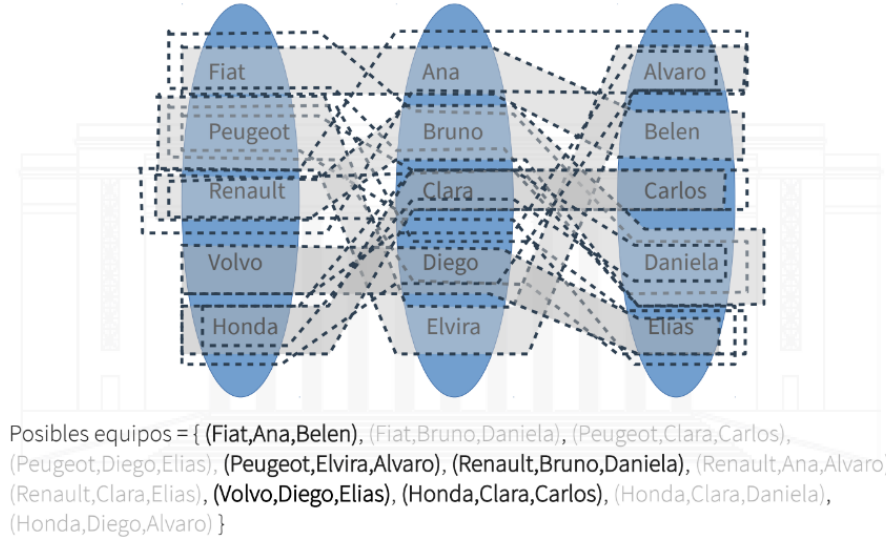


Figure 3: Ejemplo de uso de 3DM.

Para verificar que 3DM pertenece a NP, dado 3 conjuntos disjuntos X, Y, Z , $C = (x, y, z)$ conjunto de triplas y un certificado T , de triplas con un subconjunto de C .

Podemos certificar en tiempo polinomial que todo elemento en X, Y y Z , se encuentra 1 y solo 1 vez en algun T_i . Y si $|T| = n$, entonces:

$$3DM \in NP$$

Ahora queremos probar que 3DM pertenece a los problemas NP-HARD. Probamos que $3SAT \leq_p 3DM$.

Sea I instancia de 3SAT con n variables x_1, \dots, x_n y k clausulas c_1, \dots, c_k , reducimos en tiempo polinomial la instancia I a un problema 3DM.

PENDIENTE DE REDUCCION Y DEMOSTRACION.

7.8 Ciclo Hamiltoniano

Sea un grafo $G=(V,E)$ dirigido definimos un ciclo C en G como hamiltoniano si visita cada vértice 1 y solo 1 vez. Es un recorrido que inicia y finaliza en el mismo vertices.

El problema de decisión sera HAM-CYCLE, sea $G=(V,E)$ grafo dirigido, ¿existe un ciclo hamiltoniano?

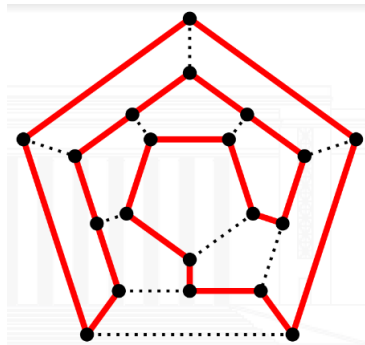


Figure 4: Ejemplo de un ciclo de hamilton.

Para saber si el HAM-CYCLE pertenece a NP, dado un grafo $G=(V,E)$ y un certificado $T = \{t_0, \dots, t_{|V|}\}$ lista ordena de vertices. Puedo verificar en tiempo polinomial los siguientes puntos:

1. La cantidad nodos en T es igual a la cantidad de vertices en V . $|T| = |V|$ y $t_0 = t_{|V|}$.
2. Todos los vértices de V estan en T .
3. Para todo par de vertices $t_i, t_{i+1} \in T$ existe un eje direccionado $(t_i, t_{i+1}) \in E$ que los une. O sea seguimos el camino ordenado de nodos.

Por lo tanto podemos afirmar que **HAM-CYCLE** $\in NP$.

NP C - PENDIENTE

8 Algoritmos Randomizados

Un algoritmo randomizado es aquel que resuelve un problema P utilizando como parametro extra una cadena aleatoria " r ". Las decisiones de ejecución se realizan teniendo en cuenta la lectura de la cadena aleatoria.

Clase de complejidad RP: Se conoce como "RP" o "R" a aquellos problemas de decisión para los que existe un programa "M" randomizado que se ejecuta en tiempo polinomial. Y que para toda instancia I del problema:

- Si la instancia I debe tener como resultado "Si", entonces:

$$\text{Probabilidad}(M(I, r) = \text{"Si"}) \geq 1/2$$

- Si la instancia I debe tener como resultado "No" (no debe tener falsos positivos), entonces:

$$\text{Probabilidad}(M(I, r) = \text{"No"}) = 0$$

Clase de complejidad co-RP: Se conoce como "RP" o "R" a aquellos problemas de decisión para los que existe un programa "M" randomizado que se ejecuta en tiempo polinomial. Y que para toda instancia I del problema:

- Si la instancia I debe tener como resultado "Si" (no debe tener falsos negativos), entonces:

$$\text{Probabilidad}(M(I, r) = \text{"No"}) = 0$$

- Si la instancia I debe tener como resultado "No", entonces:

$$\text{Probabilidad}(M(I, r) = \text{"No"}) \geq 1/2$$

Clase de complejidad ZPP: Se conoce como *zero-error probabilistic P* (ZPP) a aquellos problemas de decisión que pertenecen a "RP" y "co-RP". Implica que para toda instancia I del problema podemos ejecutar el algoritmo en RP y co-RP, entonces en tiempo polinomial tendremos 3 respuestas posibles: "Si", "No" y "No es posible".

La repetición de un número no determinado de ejecuciones nos asegura obtener el resultado correcto. Este tipo de clase de complejidad corresponde a los algoritmos de **Las Vegas**, en la intersección $RP \cap co-CP$.

Clase de complejidad BPP: Se conoce como *bounded-error probabilistic P* (BPP) a aquellos problemas de decisión para los que existe un programa "M" randomizado que se ejecuta en tiempo polinomial. Y que para toda instancia I del problema:

- Si la instancia I debe tener como resultado "Si", entonces:

$$\text{Probabilidad}(M(I, r) = \text{"Si"}) \geq 2/3$$

- Si la instancia I debe tener como resultado "No", entonces:

$$\text{Probabilidad}(M(I, r) = \text{"Si"}) \leq 1/3$$

No podemos estar seguros. Si el resultado es correcto, podemos afirmarlo con "alta probabilidad". Este tipo de clase de complejidad corresponde a los algoritmos de **Monte Carlo**.

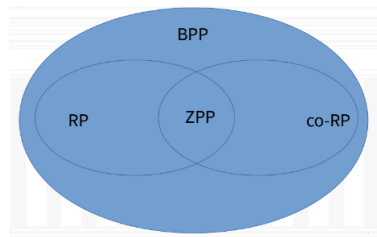


Figure 5: *Relación entre clases.*

8.1 Mezcla aleatoria

Sea un conjunto A de n elementos que queremos generar un listado de A ordenado aleatoriamente. Mezclar conjuntos se utilizan en *juegos de azar*, *reproducción de musica aleatoria*, *modelos estadísticos simulaciones*, *pruebas de complejidad algorítmica y otros mas*.

Permutación por ordenamientos: Para cada i elemento en A , generaremos un numero p_i aleatorio como su clave. Utilizando p_i para cada elemento a_i como "clave", ordenaremos "A". Podemos elegir cualquier metodo de ordenamiento como caja negra para resolverlo. O sea ordenamos basandonos en la clave aleatoria que generamos para cada elemento.

```
1 Sea A[1..n] conjunto a ordenar
2 Sea P[1..n] vector numerico // vector de prioridades.
3
4 Desde j=1..n
5     P[j] = random_value(1..x)
6
7 Ordenamos A utilizando P como clave
8
9 Retornar A
```

Listing 21: Algoritmo de permutación por odenamiento

Este algoritmo tiene un problema y es que si se generan claves repetidas, en metodos de ordenamientos como los estables, no se realizara la permutación y de esta forma no se podra obtener una permutación aleatoria uniforme (en terminos de probabilidad).

Para disminuir la posibilidad de claves repetidas, tenemos que tomar las siguientes acciones:

1. Podemos establecer un valor de X muy alto. $X \gg n$ (Por ejemplo n^5).
2. Se puede agregar un registro de claves utilizadas y volver a seleccionar otra clave si surge una ya utilizada. En el peor de los casos, se puede obtener siempre la misma clave y por consiguiente entrar en un loop infinito, si se elige mal el valor de x .

La complejidad temporal es $O(n \log(n))$ por que la generación de claves es $O(n)$ y el ordenamiento es $O(n \log(n))$ por lo que mandan el ordenamiento. La

complejidad espacial es $O(n)$.

Según el análisis de uniformidad cualquier permutación tiene probabilidad $1/n!$. Por lo tanto este método genera una *permutación aleatoria uniforme*.

Algoritmo de mezcla de Fisher-yates: También se conoce como "barajado de sombrero". Se introducen todos los números en un sombrero, se agita el contenido(se mezclan) y se van sacando de a uno y se listan el mismo orden en el que se sacan hasta que no queden ninguno.

La descripción algorítmica es, para cada elemento $A[i]$, generamos un valor x al azar entre i y n . Luego intercambiamos $A[i]$ con $A[x]$.

```

1 Sea A[1..n] conjunto a ordenar
2
3 Desde i=1...n
4     intercambiar A[i] con A[random_value(i...n)]
5
6 Retornar A

```

Listing 22: Algoritmo de Fisher-yates

Según el análisis de uniformidad cualquier permutación tiene probabilidad $1/n!$. Por lo tanto este método genera una *permutación aleatoria uniforme*.

La complejidad temporal es $O(n)$ porque tenemos n interacciones, y dentro de cada interacción tenemos un intercambio que es $O(1)$ y un random que también es $O(1)$. La complejidad espacial es $O(1)$ porque todo el algoritmo se puede hacer sobre el mismo vector.

Ejemplo con $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

i	Rand	Intercambio
1	[1 a 4] → 2	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \rightarrow \{a_2, a_1, a_3, a_4\}$
2	[2 a 4] → 3	$\{a_2, a_1, a_3, a_4\} \rightarrow \{a_2, a_3, a_1, a_4\}$
3	[3 a 4] → 3	$\{a_2, a_3, a_1, a_4\} \rightarrow \{a_2, a_3, a_1, a_4\}$
4	-	$\{a_2, a_3, a_1, a_4\}$

Figure 6: Ejemplo de mezcla de Fisher-yates

8.2 Algoritmos de aproximación

8.3 Problema del balanceo de carga

Dado un conjunto de maquinas M_1, M_2, \dots, M_m , un conjunto de n tareas donde cada tarea j requiere T_j de tiempo de procesamiento. El objetivo es asignar las tareas a las maquinas de tal forma que la carga quede balanceada (El tiempo asignado a cada maquina sea lo mas parejo posible).