Contents

1 Teoria de Colas **2**

1.1 Introducción . . . 2

1.1.1 Conceptos basicos . . . 2

1.1.2 Notación Kendall . . . 6

1.1.3 Ecuacion de estado de regimen permante . . . 6

1.1.4 Ecuacion simplificada de estado de regimen permante . . . 6

1.1.5 Preguntas y respuestas . . . 7

1.2 Modelo $P/P/1$ . . . 8

1.3 Modelo $P/P/1/N$ . . . 11

1.4 Modelo $P/P/1$ con impaciencia . . . 12

1.5 Modelo $P/P/M$ . . . 13

1.6 Modelo $P/P/M/N$ . . . 13

2 Gestión de stock **14**

2.1 Introducción . . . 14

2.2 Modelo básico . . . 14

2.3 Restricciones . . . 18

2.3.1 Restricciones Fisicas . . . 18

2.3.2 Restricciones Financieras . . . 18

2.3.3 Restricciones Administrativas . . . 18

2.3.4 Restricciones de condiciones de variable . . . 18

2.4 Modelo básico con protección de stock . . . 19

2.5 Modelo básico con agotamiento admitido . . . 21

2.6 Modelo Reposición no instantaneo . . . 23

2.7 Modelo Reaprovicionamiento Constantes - Descarga instantanea . . . 25

2.7.1 Hipotesis . . . 25

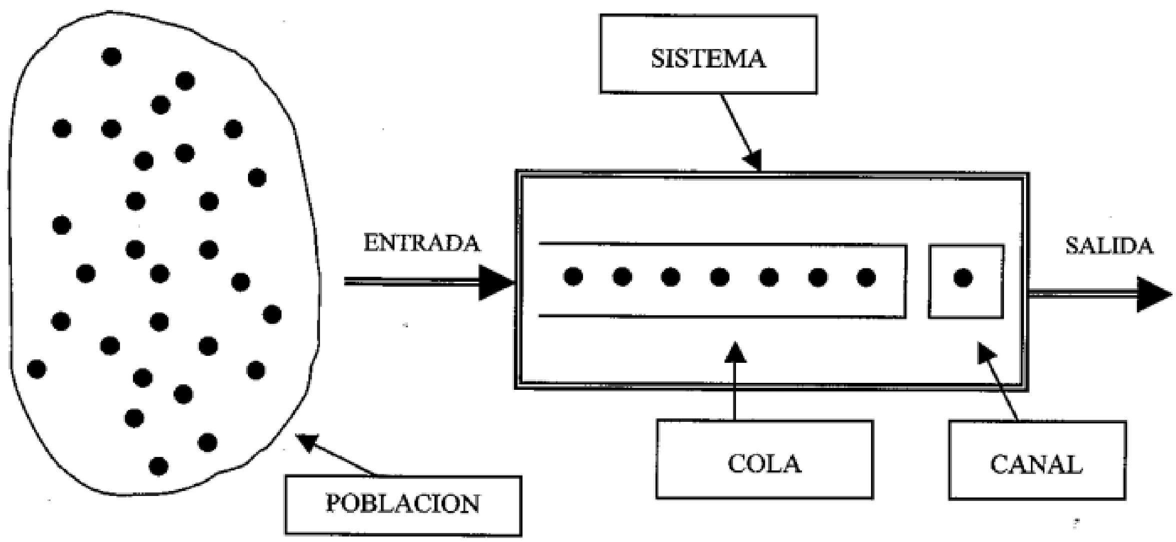
1 Teoria de Colas

1.1 Introducción

1.1.1 Conceptos basicos

Los fenónmenos de *congestión* o *espera* estan relacionados con los sistemas estocasticos y pueden describirse como sistemas integrados por uno o mas *centros de atención* donde se brinda un servicio. Cada centro de atención es, a su vez, un sistema constituido por:

- *canales (ó servidores)*: Entidades que prestan el servicio.
- *clientes (ó usuario)*: Entidades que reciben el servicio.



Las colas se forman cuando la demande de un servicio dado en un intervalo de tiempo exede la capacidad para proveerlo. El administrador del sistema de establecer un balance apropiado entre los costos asociados a la espera de los usuarios y los costos vinculados con la mejora del servicio (mas servidores, mayor velocidad de atención, etc). En la mayoria de los procesos de atención, los tiempos entre arribos de clientes y los tiempos de los servicios no son predecibles. En estas condiciones se aplica la denomida *teoría de colas* para determinar el comportamiento del sistema bajo diferentes alternativas. Se estudiaran aquellos sistemas que describan los procesos mas generales y que son los que pueden formularse como *cadenas markovianas de primer orden.* Se analisaran los sistemas en regimen permanente, a través de variables tales como la *longitud promedio de la cola*, el *tiempo de espera promedio* del cliente para recibir el servicio, el *tiempo de permanencia* en el sistema, etc. Esta información, junstamente con los costos relevantes, permitira al directivo determinar los valores apropiados de las variables de decisión. Las variables de decisión tipicas en los sistemas de colas estan referidas a la *capacidad de servicio*(numero de canales, velocidad de canales) ó la *capadidad de espera* (número de lugares).

La **población** es el conjunto de usuario potenciales del sistema. Puede ser finito o infini to.

En los **arribos** la llegada de los clientes puede ser deterministica o aleatoria. A menudo los intervalos entre llegadas son estadisticamente independientes y estacionarios a lo largo de prolongados periodos de tiempo, por lo que se puede suponer poissonianos.

SISTEMAS	EJEMPLO	CLIENTES	CANALES
TRANSPORTE	• PUERTOS • AEROPUERTOS • AUTOPISTAS • TERMINALES • CARGA Y DESCARGA	BARCOS AVIONES AUTOMÓVILES ÓMNIBUS CAMIONES	MUELLES PISTAS CASILLAS DE PEAJE PLATAFORMA ISLAS
COMPUTACIÓN	• PROCESAMIENTO • IMPRESIÓN	TRABAJOS TRABAJOS	CPU IMPRESORAS
TELEFONÍA	• CENTRALES	LLAMADOS	LÍNEAS
PRODUCCIÓN	• ELABORACIÓN • REPARACIÓN • CONTROL DE CALIDAD	PRODUCTOS SOLICITUDES PRODUCTOS	MAQUINAS OPERARIOS INSPECTORES
ATENCIÓN AL PÚBLICO	• BANCOS • SUPERMERCADOS • ESTACIONES DE SERVICIO • NEGOCIOS • ATENCIÓN MÉDICA • ALQUILER DE AUTOS	PERSONAS PERSONAS AUTOMÓVILES PERSONAS PACIENTES PERSONAS	CAJEROS CAJEROS SURTIDORES EMPLEADOS AMBULANCIAS EMPLEADOS
ADMINISTRACIÓN	• DPTO. COMPRAS • JUZGADOS	SOLICITUDES CAUSAS	COMPRADORES JUECES

TABLA 1.1 Ejemplos de sistemas de colas

La **impaciencia** se verifica cuando algunos usuarios que arriban al sistema se retiran sin recibir el servicio porque consideran que el tiempo de espera sera suficientemente largo. Se distingen dos tiempos de impaciencia:

1. **Rechazo** ($\overline{R}$): Un cliente que arriba, observa la cantidad de gente que esta delante de él esperando y en función de ello toma la decisión de incorporarse o no al sistema. **En la materia se trata unicamente este tipo de impaciencia**.

2. **Abandono** ($\overline{A}$): Un cliente que arriba, ingresa al sistema y al cabo de un tiempo toma la decisión de seguir esperando o no.

La **capacidad** es el número máximo de clientes que puede permanecer en el sistema simultaneamente(en espera y atendiéndose).

Para el **modo de arribo** los usuarios pueden llegar en forma individual o en masa(modo batch). En la mayoria de los sistemas que estudiaremos se hará la suposición de que los procesos de llegado son del tipo Poisson, lo que implica *arribos individuales*. Se puede considerar el arribo de grupos como clientes individuales.

Para la **prioridad de atención**, existen diversos criterios de atención en lo que se refiere al orden de selección de clientes para brindar el servicio. Ellos son:

- Base FIFO(first in, first out): Los clientes se atienden según el orden de llegada.
- Base LIFO(last in, first out): El último individuo que arriba es el primero en ser atendido.
- Base SIRO*(service in random order)*: Es una selección aleatoria de los clientes para brindales el servicio.
- Base con PRIORIDADES: Se establecen criterios de atención conforme a los atributos de los clientes.

La **duración del servicio** es el tiempo requerido por un canal para atender un cliente. Puede ser una variable deterministica o aleatoria con distribución de probabilidad conocida.

En el **modo de atención** un canal puede servicio de forma individual o multiples(en masa). En la mayoria de los sistemas reales, el modo de atención es individual.

Los **procesos poisson** son markovianos y tienen dos distribuciones que lo describen:

1. La distribución Poisson, en donde la variable es el número de eventos que se producen en un intervalo determinado de continuo.
2. La distribución Gamma, en la que la variable es el intervalo de continuo necesario para que se verifique un número determinado de eventos. Partucularmente, cuando la variable es el intervalo de tiempo de continuo necesario para que se verifique *un solo evento*, la distribución es conocida como **distribución Exponencial**.

Distribución Poisson La probabilidad de que se produzcan "n" eventos en un intervalo "t" estada dada por:

$$p(n) = \frac{(\lambda\Delta t)^n \cdot e^{-\lambda\Delta t}}{n!} \tag{1}$$

siendo $n = 1, 2, ...$ y $\lambda > 0$ La media de esta distribución es $a = \lambda.t$ y el desvio estandar $\sigma = \sqrt{\lambda t}$.

Distribución Gamma La función distribución de probabilidad de la **distribución exponencial** esta dada por la siguiente expresión:

$$f(t) = \lambda.e^{-\lambda t} \tag{2}$$

cuya media es $\frac{1}{\lambda}$ y cuyo desvio estandar es $\frac{1}{\lambda}$

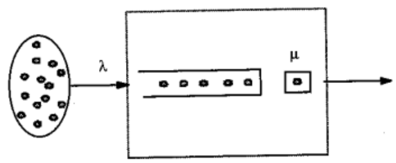
Si el proceso de arribos es de tipo Poisson significa que la variable "tiempo entre dos arribos sucesivos" tiene distribución *exponencial* y la variable "numero de clientes que arriban por unidad de tiempo" tiene distribución *Poisson*.

Ingresos y egresos de clientes: En los sistemas de capacidad finita o de población impaciente, no todos los clientes que arriban al sistema ingresan.

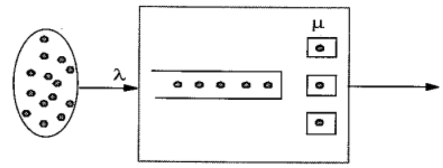
- $\overline{\lambda}$: Número promedio de clientes que ingresan efectivamente al sistema.
- $\overline{R}$: Número promedio de rechazados(es decir, que no ingresan al sistema).
- $\overline{\mu}$: Número promedio de clientes atendidos que egresan del sistema.
- $\overline{A}$: Tasa de clientes que ingresaron al sistema pero que decidieron abandonarlo sin recibir el servicio.

Estructuras de sistemas simples:

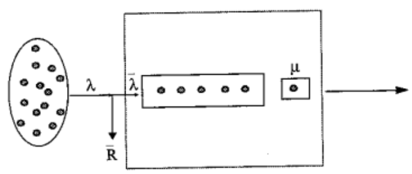
1. Cola simple, capacidad infinita, un canal de atención:



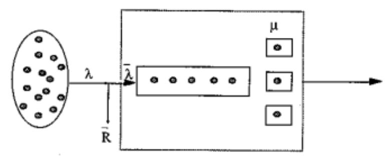
3. Cola simple, capacidad infinita, canales múltiples en paralelo:



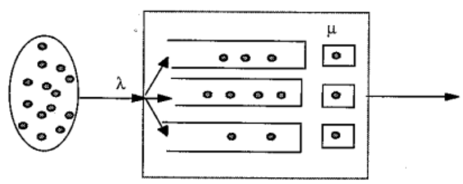
2. Cola simple, capacidad finita, un canal de atención:



4. Cola simple, capacidad finita, canales múltiples en paralelo:



5. Varias colas, una para cada canal dispuesto en paralelo:



1.1.2 Notación Kendall

Especifica las caracteristicas descriptivas de una unidad operativa de un sistema de colas. Es una notación de 6 posiciones:

$$1/2/3/4/5/6 \tag{3}$$

1. La posición 1 se refiere al patrón de arribos al sistema. Puede ser:
    - P: Proceso de Poisson.
    - D: Proceso deterministico.
    - G: Cualquier otro proceso.
2. La posición 2 indica el patrón de servicio en los canales.
    - P: Proceso de Poisson.
    - D: Proceso deterministico.
    - G: Cualquier otro proceso.
3. La posición 3 indica el número de canales de atención dispuestos en paralelo en la unidad operativa.
4. La posición 4 indica la capacidad de la unidad operativa del sistema(Los que pueden esperar en la cola mas los que se pueden atender). Se asume infinita y no se indica.
5. La posición 5 indica la prioridad de atension de la cola. Si no se especifica se asume de tipo FIFO.
    - FIFO
    - LIFO
    - SIRO
    - G: Cualquier otra modalidad de atención
6. La última posición (entre paréntesis) se refiere al tamaño de la población. Si no se indica, el tamaño es infinito.

1.1.3 Ecuacion de estado de regimen permante

$$0 = p(n-1) \cdot \lambda_{n-1} - p(n) \cdot [\lambda_n + \mu_n] + p(n+1) \cdot \mu_{n+1} \tag{4}$$

1.1.4 Ecuacion simplificada de estado de regimen permante

$$p(n) = p(n-1) \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \tag{5}$$

1.1.5 Preguntas y respuestas

- ¿Qué características posee la población?
  Rta: Puede ser Finita o infinita

- ¿En qué consiste el fenómeno de impaciencia? ¿cuántos tipos de impaciencia hay? ¿en qué consisten?
  Rta: Ver punto de impaciencia mas arriba.

- ¿Qué características posee el sistema?
  Rta: Dependiendo de las hipotesis, puede uno o varios canales, con una o varias colas, y la cola puede ser finita o infinita

- ¿Qué se entiende por capacidad del sistema?
  Rta: Es el numero máximo de clientes que pueden estar en todo el sistema

- ¿Con qué notación identificamos cada uno de los ítems enunciados?
  - L_c: La cantidad promedio de clientes que están esperando para recibir el servicio en un determinado momento.
  - L: La cantidad promedio de clientes que se encuentran en el sistema en un determinado momento, ya sea esperando ser atendidos como atendiéndose.
  - W_c: El tiempo promedio que un cliente debe esperar para ser atendido.
  - W: El tiempo promedio que un cliente permanece en el sistema, ya sea esperando ser atendido como atendiéndose.
  - λ: La cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en un determinado momento.
  - $\overline{\lambda}$: la cantidad promedio de clientes que ingresan al sistema en un determinado momento.
  - $\overline{\mu}$: La cantidad promedio de clientes que egresan del sistema luego de ser atendidos.
  - μ: La velocidad promedio de atención de un canal.
  - ρ: Factor de transito (o de trafico).
    $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{6}$$
  - T_a: El tiempo promedio entre arribos.
    $$T_a = \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$
  - T_s: El tiempo promedio del servicio.
    $$T_s = \frac{1}{\mu} \tag{8}$$
  - H: La cantidad promedio de canales ocupados.
  - PA: El porcentaje de actividad de cada canal.

- ¿Cuál es la diferencia entre “la cantidad promedio de clientes que arriban al sistema en un determinado momento” y “la cantidad promedio de clientes que ingresan al sistema en un determinado momento”?
  Rta: No todos los clientes que arriban al sistema, ingresan. Y por esos se diferencia los que arriban, y dentro de estos lo que finalmente ingresan.

- ¿Qué significa que se encuentren en régimen permanente o estacionario?
  Cuando los valores de las variables no dependen de las condiciones iniciales del sistema.

- ¿qué se indica cada una de las posiciones de la notación Kendall?
  Rta: Se describen mas arriba
- ¿Qué características posee el modelo $P/P/1$?
  Se refiere a una unidad operativa de un sistema de colas con arribo Poisson, servicio Poisson, un canal, con capacidad infinita, en modalidad FIFO ya que no especifica y con población infinita
- ¿Cuánto debe valer ρ en un $P/P/1$? ¿Por qué?
- Según el modelo $P/P/1/N$ ¿Cuáles son sus características según la notación de Kendall?
- En el modelo $P/P/1/N$, ¿debe verificarse lo mismo que en el $P/P/1$ respecto del valor de ρ? ¿Por qué?
- ¿Qué ejemplos de la vida cotidiana se podrían plantear en cada uno de los modelos mencionados?

1.2 Modelo $P/P/1$

Sistemas de un solo canal, capacidad infinita y poblacion infinita
HIPOTESIS

- El *proceso de arribos* de clientes es de tipo **Poisson**.
- El *proceso de servicio* tambien es de tipo **Poisson**.
- El sistema se encuentra en condiciones estables.
- Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
- La diciplina de atención es FIFO.
- Se dispone de **un solo canal** de atención.
- La capacidad del sistema es ilimitada.
- Los clientes que llegan al sistema **no presentan impaciencia**.
- La *población de clientes* potenciales del sistema es **infinita**.

FORMULAS para el modelo $P/P/1$

- Determinacion de probabilidades.

  Dado que no hay impaciencia ni restricciones de capacidad en el sistema, la probabilidad de ingresar es 1 para cualquier "n", por lo tanto la tasa de arribos promedio λ_n es siempre igual a la tasa de arribos promedio λ.
  La tasa de egresos es μ_n es cero cuando el sistema esta vacio (n=0). Para cualquier otro valor de "n", la tasa esperada de egresos es igual a la velocidad promedio de atención, es decir, μ.

$$\lambda_n = \lambda \ si \quad n = 1, 2, 3, ...$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 \quad si \qquad n = 0 \\ \\ \mu \quad si \quad n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

  Reemplazando en la ecuación simplificada de regimen en estado estacionario y mediante inducción para $n = 1, 2, 3$ se obtiene:

$$p(n) = \rho^n \cdot p(0) \tag{9}$$
$$p(0) = 1 - \rho \tag{10}$$

- Calculo de L: La longitud de sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya n clientes. Es decir:

$$L = \sum_{0}^{\infty} n \cdot p(n) \tag{11}$$

Remplazando la expresión de $p(n)$ y utilizando una serie gemotrica, obtenemos:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{12}$$

- Calculo de L_c: Esperanza de haya $n-1$ clientes en la cola, ya que solo hay un canal en el sistema.

$$L = \sum_{1}^{\infty} (n-1) \cdot p(n) \tag{13}$$

Distribuyendo y remplazando por L y ρ, se obtiene:

$$L_c = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{14}$$

- Calculo de H: H es el número promedio de canales activos. Para el estado n=0 no hay canales ocupados, mientras que para cualquier otro estado, *hay un canal ocupado*. Entonces:

$$H = \sum_{1}^{\infty} p(n) = 1 - p(0) \tag{15}$$

Remplazando por el valor de ρ:

$$H = 1 - p(0) = \rho \tag{16}$$

- Porcentaje de actividad: Dado que la cantidad de canales es uno $M = 1$

$$PA = \frac{H}{M} = H = \rho \tag{17}$$

- Calculo de $\overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda} = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n \cdot p(n)$$

Dado que λ_n vale λ para todo n, entonces:

$$\overline{\lambda} = \sum_{0}^{\infty} \lambda \cdot p(n) = \lambda \cdot \sum_{0}^{\infty} p(n) = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda \tag{18}$$

Esto se debe a que no hay restricciones de capacidad en el sistema y que los clientes no presentan el fenomeno de impaciencia. Por lo tanto, todo lo arriba al sistema, ingresa al sistema.

- Calculo de $\overline{\mu}$:

$$\overline{\mu} = \sum_{0}^{\infty} \mu_n \cdot p(n)$$

Dado μ_0 vale cero para $n = 0$ y que μ_n vale μ para $n >= 1$, entonces:

$$\overline{\mu} = \sum_{1}^{\infty} \mu \cdot p(n) = \mu \cdot \sum_{1}^{\infty} p(n) = \mu \cdot [1 - p(0)]$$

$$\overline{\mu} = \mu.\rho = \mu.H \tag{19}$$

Como el sistema se encuentra en equilibrio, $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$, todo lo que entra sale, no perdemos ningun cliente en ningun lado.

- Calculo de W_c: Tiempo de espera en cola

$$W_c = \frac{L_c}{\overline{\lambda}} \tag{20}$$

$$W_c = \frac{\lambda}{\mu.(\mu - \lambda)} \tag{21}$$

- Calculo de W: Tiempo de *permanencia* en el sistema.

$$W = W_c + Tc \tag{22}$$

$$W = \frac{L}{\overline{\lambda}} \tag{23}$$

Entonces reemplazando L y $\overline{\lambda}$:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{24}$$

1.3 Modelo $P/P/1/N$

Sistemas de un solo canal, capacidad finita y poblacion infinita
HIPOTESIS

- El *proceso de arribos* de clientes es de tipo **Poisson**.
- El *proceso de servicio* tambien es de tipo **Poisson**.
- El sistema se encuentra en condiciones estables.
- Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
- La diciplina de atención es FIFO.
- Se dispone de **un solo canal** de atención.
- La capacidad del sistema es **finita**, esta limitada a un valor N.
- Los clientes que llegan al sistema **no presentan impaciencia**.
- La *población de clientes* potenciales del sistema es **infinita**.

FORMULAS para el modelo $P/P/1/N$

- Determinacion de probabilidades
  La probabilidad de ingresar al sistema siempre es 1, excepto cuando el sistema esta completo (n=N), en cuyo caso la probabilidad es cero.
  La tasa promedio de egresos μ_n, es cero cuando el sistema esta vacio (n=0). Para cualquier otro valor de "n", la tasa esperada de egresos es igual a la velocidad promedio de atención del canal, es decir, μ.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & si \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0 & si \quad n = N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 0 \\ \mu & si \quad n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

  Remplazando los valores en la ecuación de regimen de estado estacionario, se obtiene:

$$P(n) = \rho^n.p(0) \tag{25}$$

$$P(0) = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \cdots + \rho^N} \tag{26}$$

- Calculo de L: valor esperado de que en el sistema haya n clientes.

$$L = P(1) + 2.P(2) + 3.P(3) + \cdots + N.P(N) \tag{27}$$

- Calculo de L_c: Cantidad promedio de clientes esperando a ser antendidos.

$$L = 1.P(2) + 2.P(3) + 3.P(4) + \cdots + (N-1).P(N) \tag{28}$$

- Calculo de H: Cantidad canales activos.

$$H = P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(N) = 1 - P(0) \tag{29}$$

- Calculo de $\overline{\lambda}$: La tasa promedio de ingreso de clientes al sistama $\overline{\lambda}$, esta dada por la expresión.

$$\overline{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n \cdot p(n)$$

pero como $\lambda_n = \lambda$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, ..., N-1$ y dado que $\lambda_N = 0$, entonces:

$$\overline{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n \cdot p(n) = \sum_{0}^{N-1} \lambda \cdot p(n) = \lambda \cdot \sum_{0}^{N-1} p(n) = \lambda \cdot [1 - P(N)] \tag{30}$$

- Calculo de $\overline{\mu}$:

$$\overline{\mu} = \sum_{0}^{\infty} \mu_n \cdot p(n)$$

Pero como $\mu_0 = 0$ y dado que μ_n vale μ para $n >= 1$, entonces:

$$\overline{\mu} = \sum_{1}^{\infty} \mu \cdot p(n) = \mu \cdot [1 - P(0)] = \mu \cdot H \tag{31}$$

- Calculo de $\overline{R}$: El número promedio de clientes rechazados por unidad de tiempo $\overline{R}$ es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de no ingresar $[p(N)]$:

$$\overline{R} = \lambda \cdot p(N) \tag{32}$$

- Calculo de W_c: Tiempo de espera en cola

$$W_c = \frac{L_c}{\overline{\lambda}} \tag{33}$$

- Calculo de W: Tiempo de *permanencia* en el sistema.

$$W = W_c + Tc \tag{34}$$

$$W = \frac{L}{\overline{\lambda}} \tag{35}$$

1.4 Modelo $P/P/1$ con impaciencia

Sistemas de un solo canal, capacidad infinita y poblacion infinita
HIPOTESIS

- El *proceso de arribos* de clientes es de tipo **Poisson**.
- El *proceso de servicio* tambien es de tipo **Poisson**.
- El sistema se encuentra en condiciones estables.
- Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
- La diciplina de atención es FIFO.
- Se dispone de **un solo canal** de atención.
- La capacidad del sistema es ilimitada.
- Los clientes que llegan al sistema **presentan impaciencia**. El fenómeno de impaciencia del tipo que **toma la desición antes de ingresar al sistema**.
- La *población de clientes* potenciales del sistema es **infinita**.

1.5 Modelo $P/P/M$

Sistemas con M canales de atención, capacidad infinita y poblacion infinita
HIPOTESIS

- El *proceso de arribos* de clientes es de tipo **Poisson**.
- El *proceso de servicio* tambien es de tipo **Poisson**.
- El sistema se encuentra en condiciones estables.
- Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
- La diciplina de atención es FIFO.
- **Hay varios canales de atención dispuestos en paralelo. Todos tienen la misma velocidad de atención**.
- La capacidad del sistema es ilimitada.
- Los clientes que llegan al sistema **no presentan impaciencia**.
- La *población de clientes* potenciales del sistema es **infinita**.

1.6 Modelo $P/P/M/N$

Sistemas con M canales de atención, capacidad finita y poblacion infinita
HIPOTESIS

- El *proceso de arribos* de clientes es de tipo **Poisson**.
- El *proceso de servicio* tambien es de tipo **Poisson**.
- El sistema se encuentra en condiciones estables.
- Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
- La diciplina de atención es FIFO.
- Hay varios canales de atención dispuestos en paralelo. Todos tienen la misma velocidad de atención.
- La capacidad del sistema es finita. Esta limitada a un valor N.
- Los clientes que llegan al sistema **no presentan impaciencia**.
- La *población de clientes* potenciales del sistema es **infinita**.

2 Gestión de stock

2.1 Introducción

Se puede absorber fluctuaciones de demanda.

Se debe identificar :

- ¿Qué producto se estudiara?
- ¿Qué que cantidad podemos pedir?
- ¿Cuantas veces se pediran?
- ¿En que momento se pediran?

Se debe entender el tipo de demanda:

- Idenpendiente
- Dependiente
- Estocastica: Aleatoriedad en los ingresos y egresos al sistema.
- Deterministica: Baja aleatoriedad. Se utilizan metodos cuantitativos.

Lead time o plazo de entrega: Tiempo que transcurre desde que se emite el pedido hasta que se realiza la reposición.

Costos intevinientes:

- Costo de adquisición: $b[\$/u]$
- Costo de almacenamiento: $c_1[\$/u.t]$
- Costo de agotamiento: $c_2[\$/u.t]$
- Costo de orden: $k[\$]$

Mediante la formulación de modelos matemáticos se busca balancear estos costos de modo de determinar la cantidad de unidades a solicitar que minimice el costo total esperado del proceso.

2.2 Modelo básico

El objetivo del problema que se encara es determinar el tamaño del lote de adquisición de un producto que minimice el costo de total esperado.

<u>HIPOTESIS:</u>

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y se efectúa a tasa constante.
4. El plazo de entrega ("lead time") del producto solicitado, es conocido y constante.
5. La reposición se hace exactamente cuando el nivel de stock es cero.
6. El aprovisionamiento es instantaneo. Tasa de reposición es infinita.
7. El horizonte de planeamiento es de largo plazo.

8. El costo de agotamiento es infinitamente alto.
9. El costo de adquisición "b", cost. uni. de almacenamiento "c_1" y el costo de pedido "k" son independientes de la cantidad a pedir "q".
10. No hay restricciones sobre el tamaño a tomar del lote.
11. Todos los parametros monetarios estan expresados en moneda constante.
12. El producto se mide en una unidad continua. (Litros, kilogramos, etc).

PARAMETROS:

- D[u/t]: Demanda del producto.
- d[u/t]: Tasa de egreso del producto.
- b[$/u]: Costo unitario de adquisición.
- $c_1[\$/u.t]$: Costo unitario de almacenamiento.
- k[$]: Costo de orden.
- T=1: Parámetro de dimensionamiento que sirve para referenciar todos los parámetros temporales a la misma unidad de tiempo.
- LT[t]: Lead time.

VARIABLES:

- q: tamaño del lote.
- t: intervalo del ciclo.
- n[pedidos/t]: Cantidad de ciclos.
- $CTE[\$/t]$: Costo total esperado referido al período estratégico del tiempo.
- $SR[u]$: Stock de reorden.

MODELADO:

Para un ciclo cualquiere i, el **costo total de adquisición** será:

$$b.q$$

El costo total de almacenamiento para un ciclo, es el area bajo la curva.

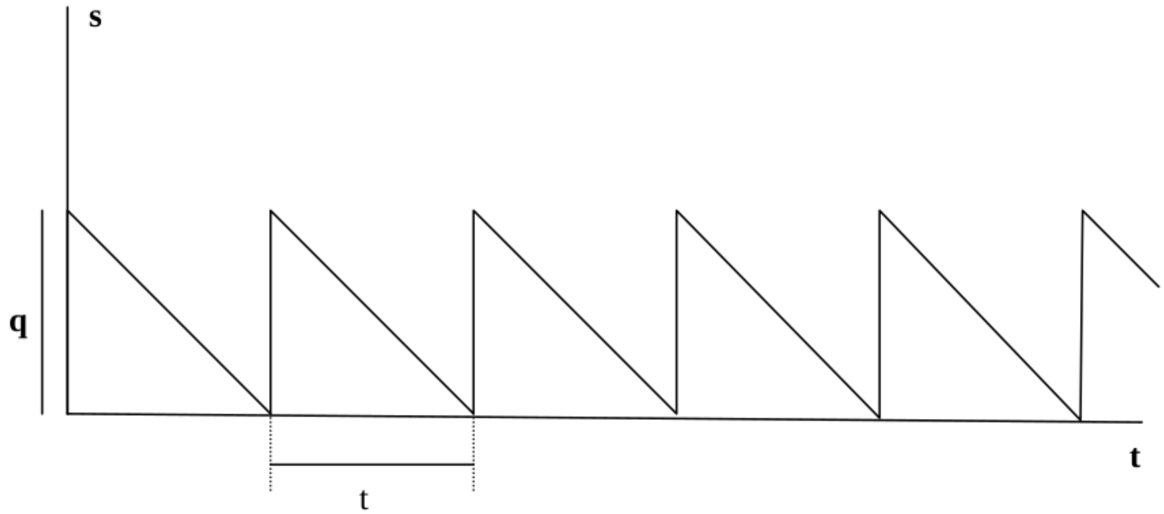
$$\frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t$$

Por ultimo el **costo total de orden** es siplemente k porque se emite un solo pedido por ciclo. Por lo tanto, el **costo total esperado** por ciclo es:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t + k \tag{36}$$

El número de ciclos por periodo de referencia (ej: un año) es el cosiente entre la **demanda anual** D y la cantidad solicitada en cada ciclo q; o también el cociente entre el parametro T (equivale a 1) y t (duración de un ciclo, expresada en unidad de año).

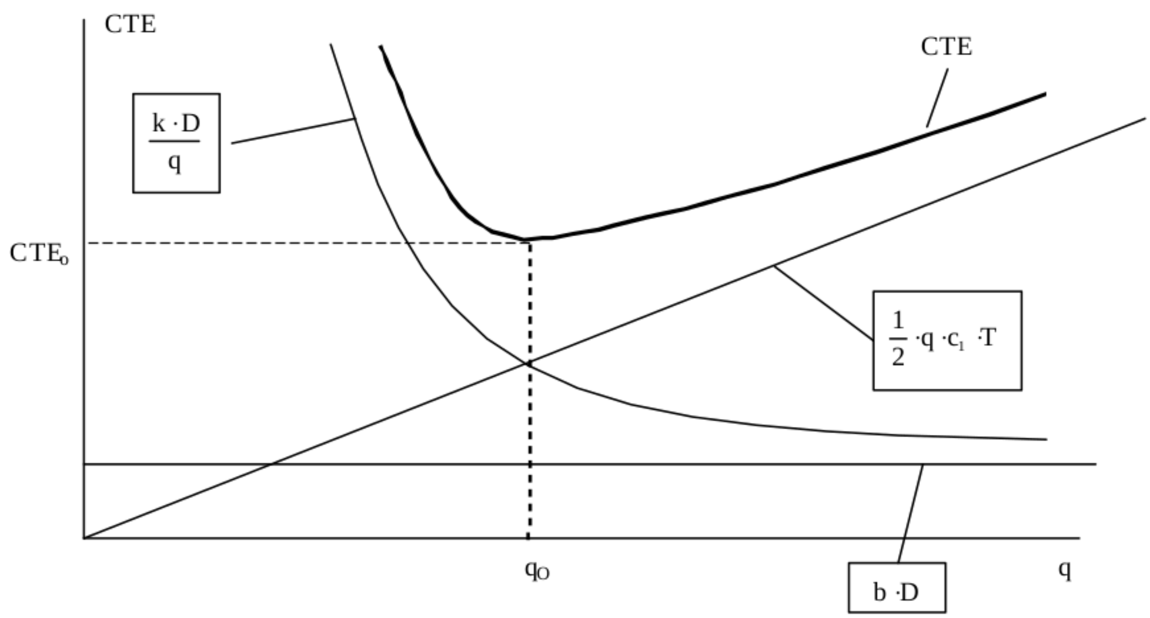
$$n = \frac{D}{q} = \frac{T}{t} \tag{37}$$



Luego, multiplicamos CTE_i y n, obtenemos el **costo total esperado anual**:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \tag{38}$$

Esta última función es la que necesitamos minimizar siendo q la variable a derivar y luego igualando a cero.



$$\frac{\partial CTE}{\partial q} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - k \cdot \frac{D}{q^2} = 0$$

Como la derivada segunda es positiva, tendremos un minimo en ese punto. Despejando q_o:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \tag{39}$$

Este es el tamaño de lote óptimo.

Luego, hallamos el **Costo Total Esperado** óptimo, reemplazando q_o en CTE:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \tag{40}$$

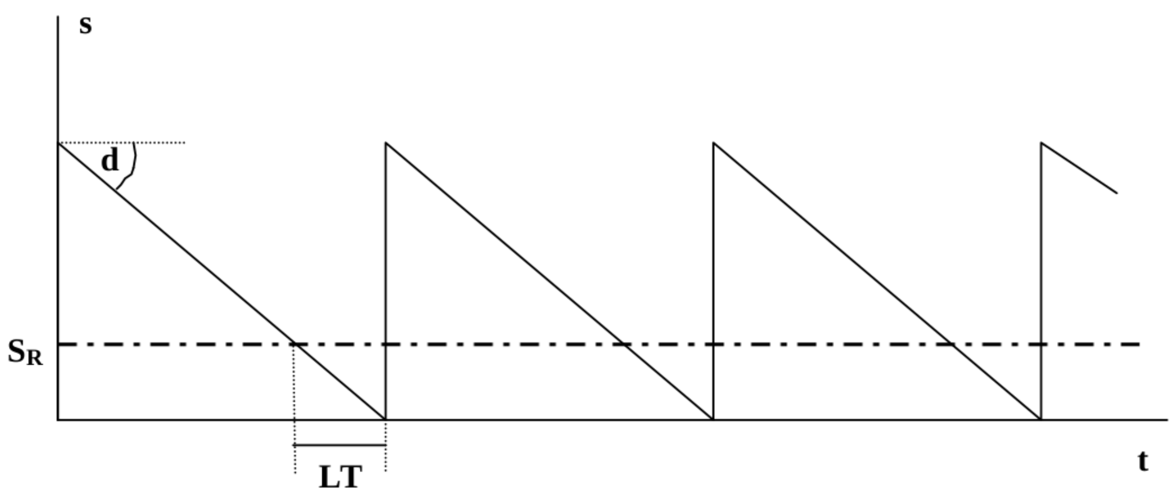
A partir de la formula de n, obtenemos a t_o y a n_o:

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1}} \tag{41}$$

$$n_o = \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot D}{2 \cdot k}} \tag{42}$$

Tambien se puede determinar el **stock de reorden** o punto de pedido, en base al *lead time* y la *tasa de demanda* d:

$$S_R = LT \cdot d \tag{43}$$



2.3 Restricciones

Ahora si plenteamos distintas variantes de restricciones que puede haber a partir de este modelo:

- Fisicas
- Administrativas.
- Financieras:
- Operativas
- Condiciones de la variable.

2.3.1 Restricciones Fisicas

Definimos:

- SU: Superficie ocupada por cada unidad de producto.
- SUPTOT: Superficie total disponible.

Se debe cumplir la resticción $SUP \cdot q \leq SUPTOT$ despues de calcular el q_o. Si no se cumple se debe calcular el nuevo lote de compra $q*$ que no sera el óptimo:

$$q* = \frac{SUBTOT}{SU} \tag{44}$$

2.3.2 Restricciones Financieras

Existe una restricción de capital máximo a inmovilizar. Entonces definimos, CMI como el capital máximo a inmovilizar, y se debe cumplir la restricción $b \cdot q \leq CMI$, utilizando el q_o.

Si no se cumple la restricción, se debe calcular el nuevo lote de compra $q*$ que no sera el óptimo:

$$q* = \frac{CMI}{b} \tag{45}$$

2.3.3 Restricciones Administrativas

Existe una cantidad de ordenes a emitir. Se defino CMO como la cantidad máxima de ordenes a emitir y se debe cumplir la restricción $\frac{D}{q} \leq CMO$, utilizando el q_o.

Si no se cumple la restricción, se debe calcular el nuevo lote de compra $q*$ que no sera el óptimo:

$$q* = \frac{D}{CMO} \tag{46}$$

Notar que si se quiere hallar CTE no se debe utilizar la formula de CTE_o, sino que se debe partir de la formula general remplando q por $q* = \frac{D}{CMO}$.

2.3.4 Restricciones de condiciones de variable

Si se impone como restricción que el *stock debe ser cero* al finalizar el periodo de estudio, Entonces la restricción es que la **cantidad de ciclos debe ser entero**.

Si al calcular $n_o = \frac{D}{q_o}$ no cumple la restricción, se debe calcular los CTE (con la formula sin derivar) para los valores de q para dos valores enteros de n entre los valores de n_o y nos quedamos que el n con menor costo total esperado (CTE).

2.4 Modelo básico con protección de stock

El **Stock de Protección** es un nivel de existencias que se mantiene a los fines de absorber situaciones imprevistas.
<u>HIPOTESIS:</u>

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y se efectúa a tasa constante.
4. El plazo de entrega ("lead time") del producto solicitado, es conocido y constante.
5. **Se mantiene un stock de seguridad. Es stock que no se utiliza operativamente**.
6. El aprovisionamiento es instantaneo. Tasa de reposición es infinita.
7. El horizonte de planeamiento es de largo plazo.
8. **No se admite agotamiento.**
9. El costo de adquisición "b", cost. uni. de almacenamiento "c_1" y el costo de pedido "k" son independientes de la cantidad a pedir "q".
10. No hay restricciones sobre el tamaño a tomar del lote.
11. Todos los parametros monetarios estan expresados en moneda constante.
12. El producto se mide en una unidad continua. (Litros, kilogramos, etc).

<u>PARAMETROS:</u>

- Idem parametro de modelo básico.
- S_P: Stock de protección

<u>VARIABLES:</u>

- Idem variables de modelo básico.
- S: Stock máximo.

<u>Modelado</u>
Para un ciclo cualquiera, tendremos la siguiente expresión del costo total esperado:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t + k + S_P \cdot c_1 \cdot t \tag{47}$$

Multiplicando por n obtenemos:

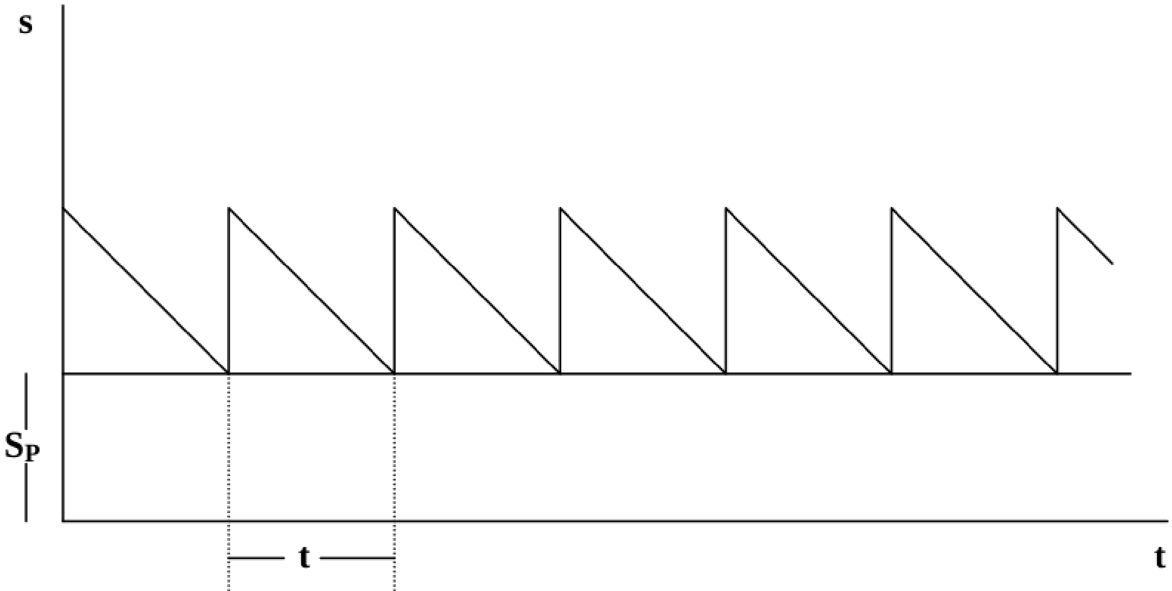
$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_P \cdot c_1 \cdot T \tag{48}$$

Obtenemos el valor optimo de q, el cual es independiente del nivel de stock de protección:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \tag{49}$$

Obtenemos el **costo total esperado** con stock de protección:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} + S_P \cdot C_1 \cdot T \tag{50}$$



Tambien hayamos t_o y n_o

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1}} \tag{51}$$

$$n_o = \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot D}{2 \cdot k}} \tag{52}$$

Luego, al **stock de reorden** se suma el stock de protección:

$$S_R = LT \cdot d + S_P \tag{53}$$

En conclución el **stock de protección** no impacta en el tamaño del lote q, pero si impacta en el punto de pedido S_R o punto de reorden. Sobre el stock de protección se pueden montar otros modelos.

2.5 Modelo básico con agotamiento admitido

El agotamiento de las existencias se verifica cuando no quedan más unidades disponibles para satisfacer la demanda.

<u>HIPOTESIS:</u>

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y se efectúa a tasa constante.
4. El plazo de entrega (”lead time”) del producto solicitado, es conocido y constante.
5. La reposición se hace exactamente cuando el nivel de stock es cero.
6. **El agotamiento esta permitido**.
7. El horizonte de planeamiento es de largo plazo.
8. El costo de adquisición ”b”, cost. uni. de almacenamiento ”c_1” y el costo de pedido ”k” son independientes de la cantidad a pedir ”q”.
9. No hay restricciones sobre el tamaño a tomar del lote.
10. Todos los parametros monetarios estan expresados en moneda constante.
11. El producto se mide en una unidad continua. (Litros, kilogramos, etc).
12. **El costo de agotamiento esta dado por el costo en el que se incurre por unidad de tiempo de deficit.**

<u>PARAMETROS:</u>

- Idem parametro de modelo básico.
- c_2: Costo de agotamiento por unidad de tiempo de postergarción.

<u>VARIABLES:</u>

- Idem variables de modelo básico.
- t_1: Periodo de entrega de mercadería.
- t_2: Periodo de déficit de mercadería.
- S_A: Cantidad máxima de unidades agotadas.

<u>MODELADO:</u>

El costo total esperado por ciclo sera:

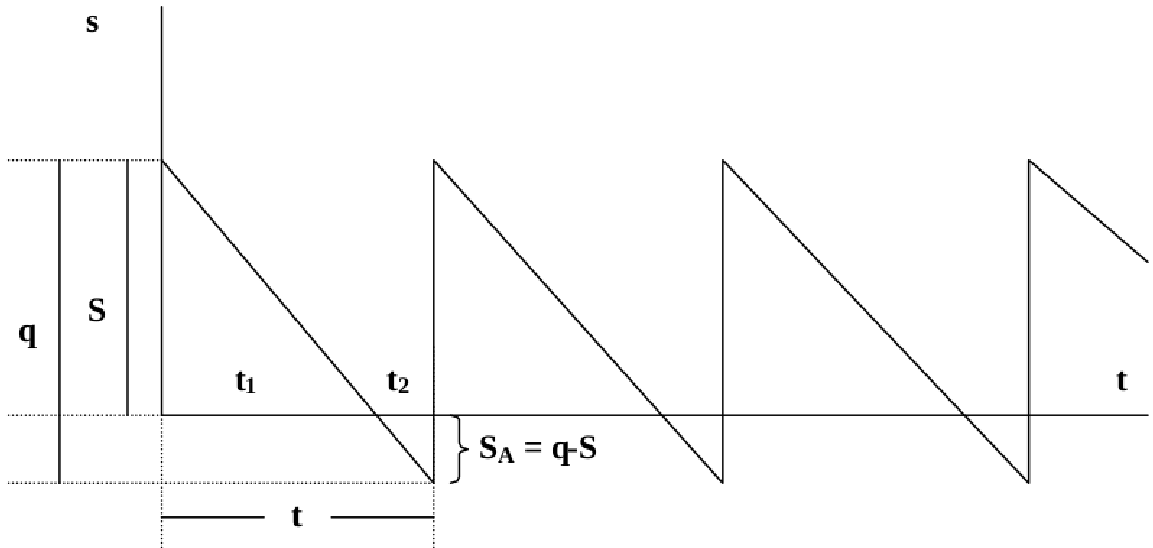
$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot (q - S) \cdot c_2 \cdot t_2 + k \tag{54}$$

La expresión de **lote optimo de adquisición** es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} \tag{55}$$

La expresión del valor óptimo de la **cantidad máxima a almacenar** S:

$$S_o = \frac{q_o \cdot c_2}{c_1 + c_2} \tag{56}$$



La expresión para la **cantidad máxima agotada óptima** por período:

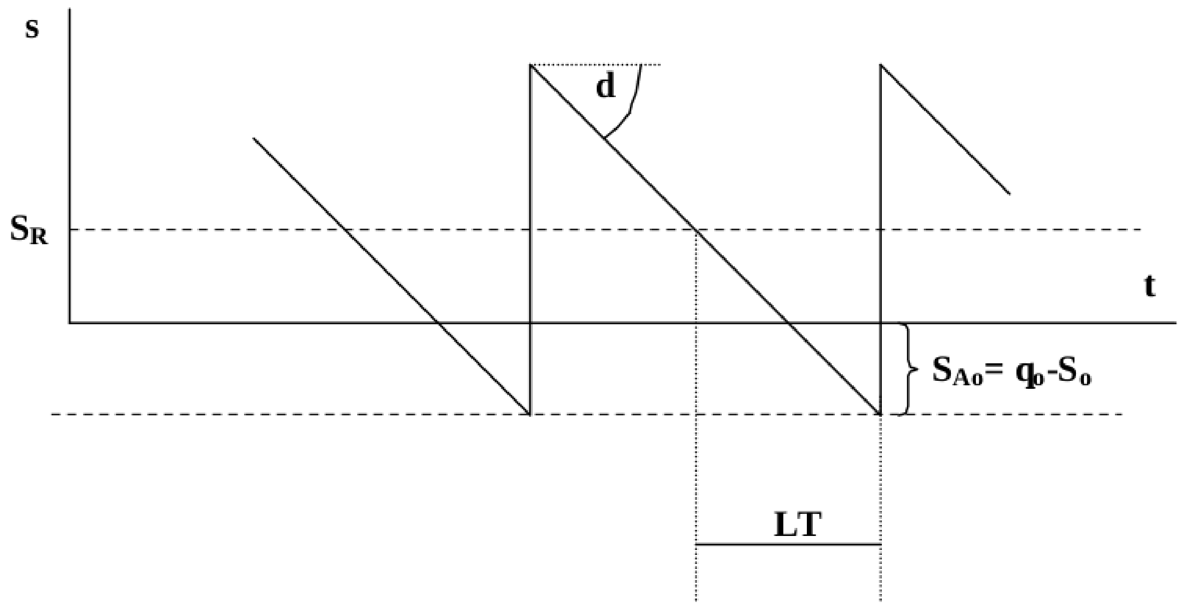
$$S_{Ao} = q_o \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} \tag{57}$$

Luego, hallamos el **Costo Total Esperado** óptimo, sera:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} \tag{58}$$

Finalmente, obtendremos el stock de reorden de:

$$S_R = LT \cdot d - S_{Ao} \tag{59}$$



2.6 Modelo Reposición no instantaneo

El ingreso de producto al almacen no es instantanea y se realiza a tasa constante.
HIPOTESIS:

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y se efectúa a tasa constante.
4. El plazo de entrega ("lead time") del producto solicitado, es conocido y constante.
5. La reposición no es instantaneo. La tasa de aprovisionamiento es finita.
6. El horizonte de planeamiento es de largo plazo.
7. El costo de agotamiento es infinitamente alto. El agotamiento no está permitido.
8. El costo de adquisición "b", cost. uni. de almacenamiento "c_1" y el costo de pedido "k" son independientes de la cantidad a pedir "q".
9. No hay restricciones sobre el tamaño a tomar del lote.
10. Todos los parametros monetarios estan expresados en moneda constante.
11. El producto se mide en una unidad continua. (Litros, kilogramos, etc).

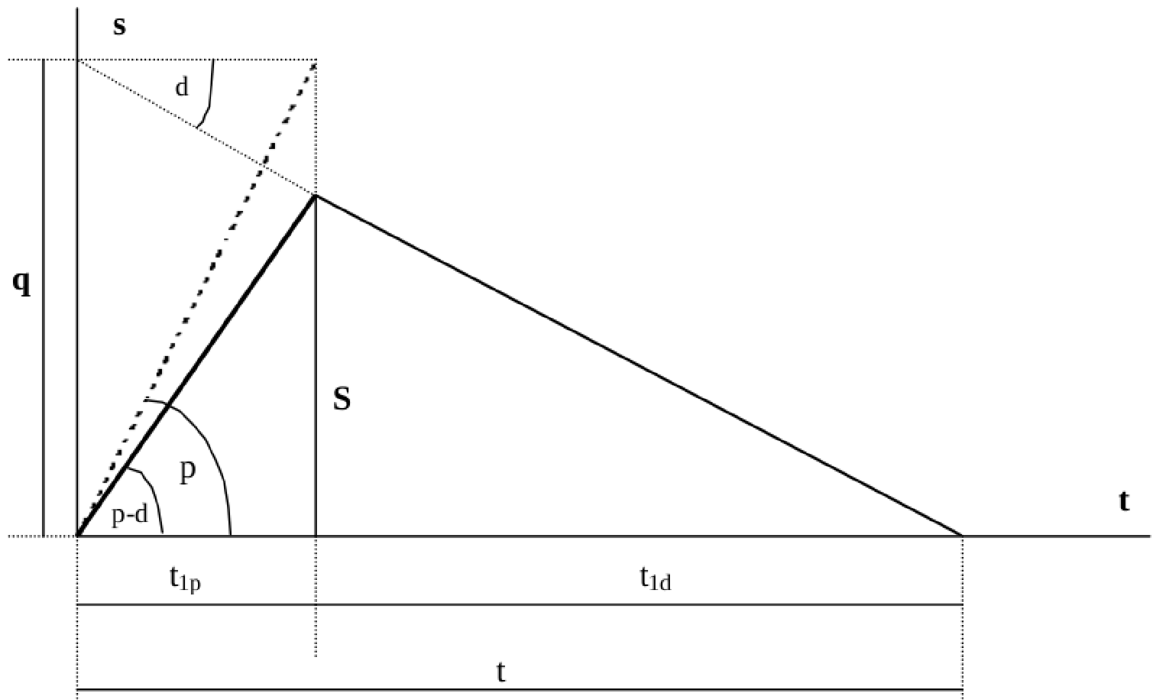
PARAMETROS:

- Idem parametro de modelo básico.
- $P[u/t]$: Reposición del producto a un periodo t.
- $p[u/t]$: Tasa de reposición

VARIABLES:

- Idem variables de modelo básico.
- t_1: Periodo de aprovisionamiento.
- t_2: No hay ingreso de mercaderia. Solo hay egresos.

<u>MODELADO:</u>



Determinar el CTE en cada ciclo i:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t + k \tag{60}$$

Del grafico se puede obtener S y t_1:

$$q = p \cdot t_1 \implies t_1 = \frac{q}{p} \tag{61}$$

$$S = q \cdot (1 - \frac{d}{p}) \tag{62}$$

Remplazando S, entonces el costo esperado total para los n ciclos sera(la ecuación a minimizar):

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot (1 - \frac{d}{p}) \cdot c_1 \cdot T + \frac{k \cdot D}{q} \tag{63}$$

Derivando y despejando, obtenemos el q_o:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot (1 - \frac{d}{p})}} \tag{64}$$

Reemplazando el q_o, obtenemos el CTE_o óptimo:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot (1 - \frac{d}{p})} \tag{65}$$

2.7 Modelo Reaprovicionamiento Constantes - Descarga instantanea

2.7.1 Hipotesis

- Se admite un unico item.
- La producción es conocida y se efectúa