TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

o0o

BÁO CÁO MÔN

PHƯƠNG PHÁP SỐ

ĐỀ TÀI
NỘI SUY NGƯỢC

Giảng viên hướng dẫn:	TS. Hà Thị Ngọc Yến	
Nhóm sinh viên thực hiện:	Lê Thị Hồng Nhung	20185392
	Đoàn Thị Thanh Hoa	20185356

HÀ NỘI, 2020

Mục lục

Mở đầu

Sau một thời gian học tập và thực hành, cùng với sự góp ý của cô **TS. Hà Thị Ngọc Yến** và các bạn trong lớp chúng em đã hoàn thành bài báo cáo.

Báo cáo bao gồm 3 phần chính: Mở đầu, Nội dung, Kết luận. Ngoài ra, phần Nội dung gồm 4 chương:

- Chương 1: Tổng quan.
- Chương 2: Cơ sở lý thuyết.
- Chương 3: Thuật toán .
- Chương 4: Ví dụ, Đánh giá.
- Chương 5: Ứng dụng.

Chương 1

Tổng quan

1.1 Bài toán

Bài toán nội suy ngược: Từ bảng số liệu đã cho dưới dạng $y = f(x)$; giá trị $\overline{y}$ đã cho không có trong bảng, hãy tìm $\overline{x}$ tương ứng.

Cho bảng số liệu dạng $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ trong đó các mốc nội suy là: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

x	x_1	x_2	x_2	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_2	...	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

Biết giá trị $\bar{y} = f(\bar{x})$ không có trong bảng, tìm giá trị $\bar{x}$ tương ứng?

1.2 Ý tưởng

Phân tích dữ liệu đầu vào:

- Kiểm tra điều kiện nội suy, sắp xếp x_i theo thứ tự tăng dần.
- Tìm các khoảng nội suy, đưa ra phương pháp sử dụng (đánh giá 2 phương pháp).

Sử dụng các đa thức nội suy theo hai hướng:

- Sử dụng đa thức nội suy ứng với hàm ngược.
  - Xem y_i là các mốc nội suy.
  - $x_i = g(y_i)$, $x = g(y)$ là hàm ngược của $y = f(x)$.

- Tìm đa thức nội suy $P_n(y)$ của $g(y)$.
- Từ $\bar{y}$, tìm được $P_n(\bar{y})$.

- Sử dụng đa thức nội suy Newton.
  - Xem x_i là các mốc nội suy.
  - Tìm đa thức nội suy $f_n(x)$ tương ứng với bảng giá trị đã cho.
  - Giải phương trình $\bar{y} = f_n(x)$ tìm được $\bar{x}$ là nghiệm của phương trình này.

Chương 2

Cơ sở lý thuyết

2.1 Nội suy Lagrange

Cho bảng số liệu dạng $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ trong đó các mốc nội suy là: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

x	x_1	x_2	x_2	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_2	...	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

Thỏa mãn điều kiện: $y_i = P_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$

Lập đa thức bậc n:

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$

$j = 0, n$. Dễ dàng thấy $L_j(x)$ là đa thức bậc n và có tính chất

$$L_j(x) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Từ đó ta chọn

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_i$$

Đa thức $P_n(x)$ là đa thức bậc n và dễ thấy thỏa mãn điều kiện:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_i = y_i, i = \overline{0, n}$$

Hay

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Đa thức trên được gọi là đa thức nội suy Lagrange

Để thuận lợi cho tính toán và đánh giá sai số sau này ta đặt:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) = \prod_{k=0}^{0}(x - x_k)$$

với x cố định, $x = x_i, i = \overline{0, n}$ thì

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

là sai số tại điểm x.Khi đó:

$$\mid R_n(x) \mid \leq \frac{M}{(n+1)!} \mid w_{n+1}(x) \mid$$

là công thức đánh giá sai số của đa thức nội suy tại điểm $x \neq x_i, (i = \overline{0, n})$

Sử dụng nội suy Lagrange trong nội suy ngược

Cho bảng số liệu dạng $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ trong đó các mốc nội suy là: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

x	x_1	x_2	x_2	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_2	...	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

có hãy tìm tương ứng, nghĩa là xem hàm ngược của hàm $y = f(x)$

Ta xem $y_i, i = \overline{0, n}$ là các mốc nội suy. Bằng đa thức nội suy Lagrange(hoặc Newton) ta sẽ thu được giá trị gần đúng.

$$\bar{x} = \psi(\bar{y}) \approx P_n(y) = \sum_{k=0}^{n} x_k \prod_{j \neq k} \frac{y - y_j}{y_k - y_j}$$

Thay $\bar{y}$ vào biểu thức trên, ta có được:

$$\bar{x} = P_n(\bar{y}) = \sum_{k=0}^{n} x_k \prod_{j \neq k} \frac{\bar{y} - y_j}{y_k - y_j}$$

là giá trị cần tìm

Sai số phương pháp Lagrange

$$\mid R_n(y) \mid \leq \frac{M}{(n+1)!} \mid w_{n+1}(y) \mid$$

2.2 Nội suy Newton

Cho bảng số liệu dạng $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ trong đó các mốc nội suy là: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

x	x_1	x_2	x_2	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_2	...	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

2.2.1 Tỷ hiệu

Định nghĩa ta gọi:

$$f[x_{i-1}, x_i] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, i = \overline{1, n}$$

là tỷ hiệu của một hàm $f(x)$

Tỷ hiệu của tỷ hiệu cấp 1 là tỷ hiệu cấp 2, ký hiệu là:

$$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{x_{i-1} - x_{i+1}}, i = \overline{1, n-1}$$

Tỷ hiệu của tỷ hiệu cấp $n-1$ là tỷ hiệu cấp n, ký hiệu là

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Tính chất:

- Tính chất 1:

  - Tỷ hiệu cấp k của tổng hàm số f và g bằng tổng các tỷ hiệu cùng cấp

  $$(f+g)[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = f[x_i, ..., x_{i+k}] + g[x_i, ..., x_{i+k}]$$

  - Hằng số nhân c được đưa ra ngoài dấu tỷ hiệu

  $$(cf)[x_i, ..., x_{i+k}] = c.f[x_i, ..., x_{i+k}]$$

- Tính chất 2: Tỷ hiệu các cấp có tính chất đối xứng

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = f[x_{i+k}, x_{i+k-1}, ..., x_i]$$

- Tính chất 3:

  - Tỷ hiệu của hằng số thì bằng 0

- Tỷ hiệu cấp m của đa thức bậc n có tính chất:

+ Nếu $m = n$ thì tỷ hiệu cấp m là hằng số.

+ Nếu $m > n$ thì tỷ hiệu cấp m bằng 0.

2.2.2 Đa thức nội suy Newton

Từ bảng mốc nội suy là $x_i, i = \overline{0,n}$. Newton đưa thêm vào mốc $x \in [a,b]$ bất kỳ gần x_0 và tính

$$f[x, x_0] = \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Thay tỷ hiệu các cấp vào ta được

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + ... + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,..,x_n] + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})(x-x_n)f[x,x_0,x_1,..,x_n]$$

Ta đặt

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + ... + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,..,x_n]$$

và

$$R_n(x) = \textstyle\prod_{n=0}^{k}(x-x_k)f[x,x_0,x_1,...,x_n]$$

thì ta được

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Đa thức $P_n(x)$ thỏa mãn điều kiện $y_i = P_n(x), i = \overline{0,n}$. Được gọi là đa thức nội suy Newton.

Đa thức

$$R_n(x) = \textstyle\prod_{n=0}^{k}(x-x_k)f[x,x_0,x_1,...,x_n]$$

là công thức đánh giá sai số cho đa thức nội suy Newton.

2.2.3 Đa thức nội suy Newton mốc cách đều

Đây là trường hợp đặc biệt của nội suy Newton khi các mốc nội suy $x_i, i = \overline{0, n}$ có khoảng cách đều nhau: $h = x_{i+1} - x_i, i = \overline{1, n-1}$

Sai phân hữu hạn (hiệu hữu hạn)

Định nghĩa: Ký hiệu $\triangle x = h (h > 0)$ là gia số của đối số(là số cố định) và gọi h là bước. Biểu thức $\triangle f(x) = f(x + h) - f(x)$gọi là sai phân cấp 1 của hàm số $f(x)$ tại điểm x.
Sai phân của sai phân cấp một gọi là sai phân cấp 2, ký hiệu là:

$$\triangle^2 f(x) = \triangle(\triangle f(x)) = \triangle[f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

Sai phân của sai phân cấp $n-1$ gọi là sai phân cấp n, ký hiệu là

$$\triangle^n f(x) = \triangle(\triangle^{n-1} f(x)), n = 2, 3, ..$$

hay

$\triangle y_i = y_(i + 1) - y_i, i = \overline{0, n-1}$ (sai phân cấp một)

$\triangle^2 y_i = \triangle(\triangle y_i) = \triangle y_{n+1} - \triangle y_i, i = \overline{0, n-2}$

...

$\triangle^n y_i = \triangle(\triangle^{n-1} y_i) = \triangle^{n-1} y_1 - \triangle^{n-1} y_0$ (n cấp)

Liên hệ giữa sai phân và tỷ hiệu

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \tfrac{1}{k!h^k} \triangle^k y_0$$

Đa thức mốc nội suy cách đều
Công thức

$$f(x) \approx P_n(x) = P_n(x_0 + ht)$$
$$= \mathrm{y}_0 + \tfrac{\triangle y_0}{1!} t + \tfrac{\triangle^2 y_0}{2!} t(t-1) + ... + \tfrac{\triangle^n y_0}{2!} t(t-1)...(t-n+1)$$

được gọi là công thức nội suy mốc cách đều
Sai số

$$R_n(x) \approx \tfrac{\triangle^{n+1}}{(n+1)!} \prod_{n=0}^{k} (t-k)$$

Sử dụng nội suy Newton trong nội suy ngược

Với ý tưởng xây dựng một công thức lặp, sau đó dùng phương pháp lặp đơn để giải quyết bài toán $x = \varphi(x)$. Do đó, ta cần xây dựng công thức lặp phù hợp để có thể giải quyết bài toán

Newton tiến:

Từ bảng số liệu $y_i = f(x_i)(i = \overline{0n})$, có các mốc cách đều nhau, có bước $h = x_{i+1} - x_i(i = \overline{0, n-1})$

Theo công thức nội suy Newton tiến (xuất phát từ x_0) ta có :

$$y \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1)$$

Ta thực hiện rút $\Delta y_0 t$ về 1 vế :

$$\Delta y_0 t \approx y - (y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1))$$

Chia cả 2 vế cho Δy_0:

$$t = \varphi(t) \approx \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}(t)(t-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{3!\Delta y_0}(t)(t-1)(t-2) - \ldots$$

Trong đó : $t = \frac{x - x_0}{h}$

Dùng phương pháp lặp đơn, giải phương trình $t = \varphi(t)$ với xấp xỉ đầu $t_0 = \frac{\overline{y} - y_0}{\Delta y_0}$

Quá trình lặp được tính theo công thức : $t_m = \varphi(t_{m-1})$

Sau m bước, ta xem $\overline{t} \approx t_m \Rightarrow \overline{x} \approx x_0 + h t_m$

Thông thường, với bài toán nội suy ngược, việc sử dụng 3,4 mốc đã cho đạt 1 kết quả có sai số tương đối tốt. Vậy nên, khi lập trình, ta thường dùng công thức lặp :

$$t = \varphi(t) \approx \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}(t)(t-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{3!\Delta y_0}(t)(t-1)(t-2)$$

Newton lùi:

Cách xây dựng tương tự với Newton tiến , ta có công thức Newton lùi được xây dựng :

$$y \approx y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\ldots(t+n-1)$$

Biến đổi tương tự với công thức Newton tiến, ta được một công thức lặp:

$$t = \varphi(t) \approx \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}} - \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\Delta y_{n-1}}(t)(t+1) - \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\Delta y_{n-1}}(t)(t+1)(t+2) - \ldots$$

Sử dụng 4 mốc nội suy, ta có công thức :

$$t = \varphi(t) \approx \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}} - \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\Delta y_{n-1}}(t)(t+1) - \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\Delta y_{n-1}}(t)(t+1)(t+2)$$

- Sai số phương pháp Newton

$$R_n(x) \approx \tfrac{\triangle^{n+1}}{(n+1)!} \prod_{n=0}^{k}(t-k)$$

- Sai số phương pháp lăp đơn

$$\mid x - x_{n-1} \mid < \xi$$

2.2.4 Phương pháp nội suy Bessel

Sử dụng $2n+2$ mốc nội suy cách đều, được đánh số :

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n-1}$$

Xuất phát từ x0, sử dụng công thức Gauss II, sau đó viết lại công thức dưới dạng xuât phát từ x_1 với $x - x_0 = ht$. Sau đó lấy trung bình cộng của công thức vừa tìm được với công thức Guass I , ta được công thức nội suy Bessel:

$$P(x) = P(x_0 + ht) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{t(t-1)(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0)}{2!2}$$

$$+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!}.\Delta^3 y_{-1}+\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}.\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}$$

$$+\frac{(t-\frac{1}{2})(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}.\Delta^5 y_{-2}+\dots+$$

$$\frac{(t+n-1)(t+n-2)\dots(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{2n!}\frac{\Delta^2 y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}$$

$$\frac{(t-\frac{1}{2})(t+n-1)\dots(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n}$$

Sử dụng nội suy Bessel trong nội suy ngược

Trường hợp $n=1$ ta có 4 mốc nội suy là x_{-1}, x_0, x_1, x_2, khi đó ta được :

$$P(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+(t-\frac{1}{2})\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}.\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}$$
$$=y_0+t\Delta y_0-\frac{t(t-1)}{4}(\Delta y_1-\Delta y_{-1})$$

Đối với công thức nội suy Bessel, ta sẽ sử dụng ngay 4 mốc nội suy cách đều, được đánh số: x_{-1}, x_0, x_1, x_2,để thuận tiện trong việc tính toán. Với trường hợp 4 mốc nội suy cho đa thức nội suy Bessel, ta đã có được công thức :

$$y\approx y_0+t\Delta y_0-\frac{t(t-1)}{4}(\Delta y_1-\Delta y_{-1})$$

$$\Rightarrow t\Delta y_0=y-y_0+\frac{t(t-1)}{4}(\Delta y_1-\Delta y_{-1})$$

Chia cả 2 vế cho Δy_0, Ta được hàm lặp có công thức là:

$$t=\varphi(t)\approx\frac{y-y_0}{\Delta y_0}+\frac{t(t-1)}{4}.\frac{(\Delta y_1-\Delta y_{-1})}{\Delta y_0}$$

2.3 Phân tích dữ liệu

2.3.1 Điều kiện có hàm ngược

- Để có hàm ngược $x=\psi(y)$ thì y_i cần xếp theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần

2.3.2 Điều kiện nội suy

- Giá trị y_i cần đôi một khác nhau, kết hợp với giá trị ban đầu, ta cóx_i và y_i trong bảng cần tương ứng 1-1.
- Điểm $\bar{y}$ nội suy cần ở trong khoảng đơn điệu, hay $\bar{y} \in [minx_i; maxy_i]$

2.3.3 Đánh giá tổng quan của 2 phương pháp

- Với các đoạn có 2 mốc nội suy phương pháp lanrange sẽ cho kết quả sai số lớn
- Với các hàm số mà có điểm uốn thì sử dụng phương pháp Newton sẽ tốt hơn phương pháp Lanrange.(các hàm số mà khi x biến thiên nhanh còn y thì biên thiên rất chậm)
- Với mốc nội suy x_i không cách đều, hoặc các mốc y_i cách đều thì việc dùng phương pháp tìm hàm ngược (Lanrange)có thể sẽ tốt hơn phương pháp Newton.
- Phương pháp Lanrange khi điểm mà gần ở hai đầu mốc nội suy thì sẽ dẫn đến sai số lớn.
- Nhược điểm của phương pháp Newton đó là khó đánh giá điều kiện hội tụ và sai số. Sai số của phương pháp thứ hai bao gồm sai số tính toán, sai số của phép nội suy, sai số của phép lặp.

Chương 3

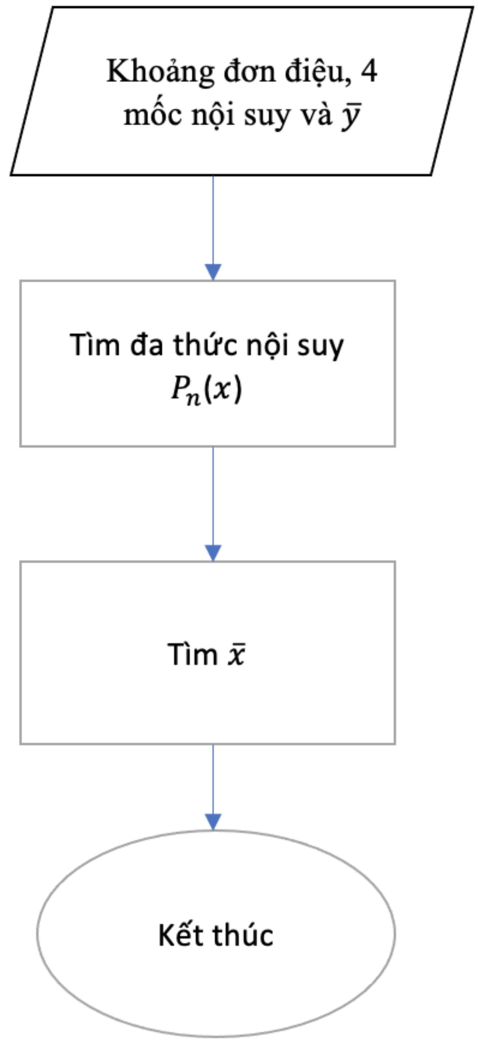
Thuật toán

Ý tưởng thuật toán:

1. Sắp xếp dữ liệu bộ dữ liệu theo x tăng dần
2. Kiểm tra điều kiện nội suy: Nếu không thỏa mãn điều kiện nội suy thì kết thúc. Còn không thì làm bước 3
3. Chia thành các khoảng đơn điệu
4. Tìm khoảng đơn điệu chứa $\bar{y}$ và đưa ra phương pháp sử dụng trong đoạn đó. Từ đó tìm được các đoạn sử dụng phương pháp
5. Tìm số mốc sau đó tìm nghiệm $\bar{x}$ với các đoạn sử dụng phương pháp Lanrange.
6. Tìm số mốc sau đó tìm nghiệm $\bar{x}$ với các đoạn sử dụng phương pháp Newton.
7. In ra kết quả và kết thúc.

3.1 Phương pháp Larange

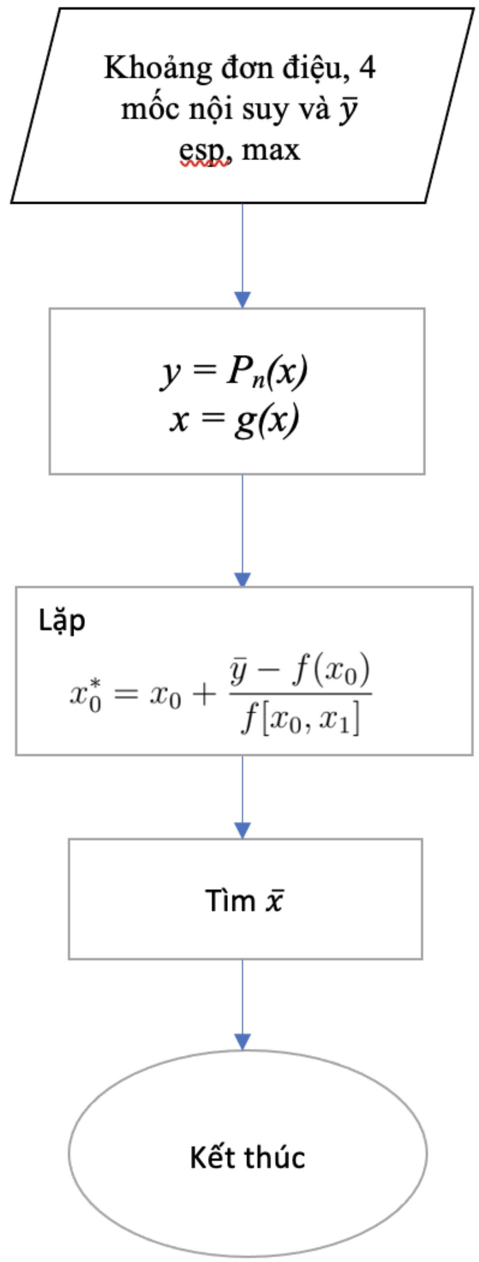
- Tìm đa thức nội suy $x = f(y)$ với số mốc là 4.
- Tìm nghiệm $\bar{x} = f(\bar{y})$



3.2 Phương pháp Newton

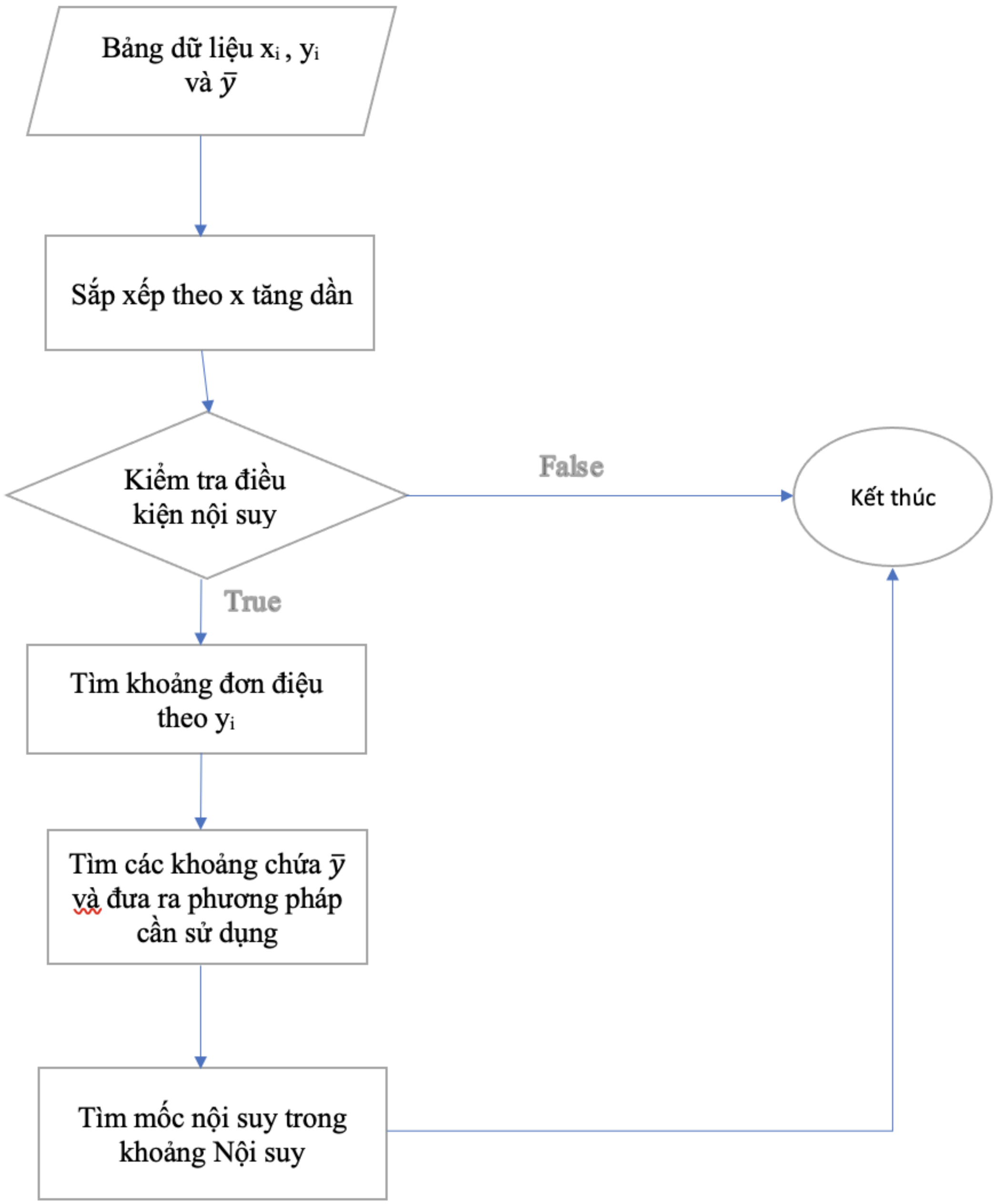
Ta cho thêm 2 biến esp $= 10^{-9}$, max $= 1000$:

- Esp để kiểm tra độ lệch của 2 nghiệm trong quá trình lặp đủ nhỏ hơn esp hay chưa? Nếu thỏa mãn thì dừng lặp để đưa ra nghiệm.
- Trong trường hợp không có nghiệm thì ta dùng max để khống chế số phép lặp tối đa để tránh trường hợp lặp vô hạn.

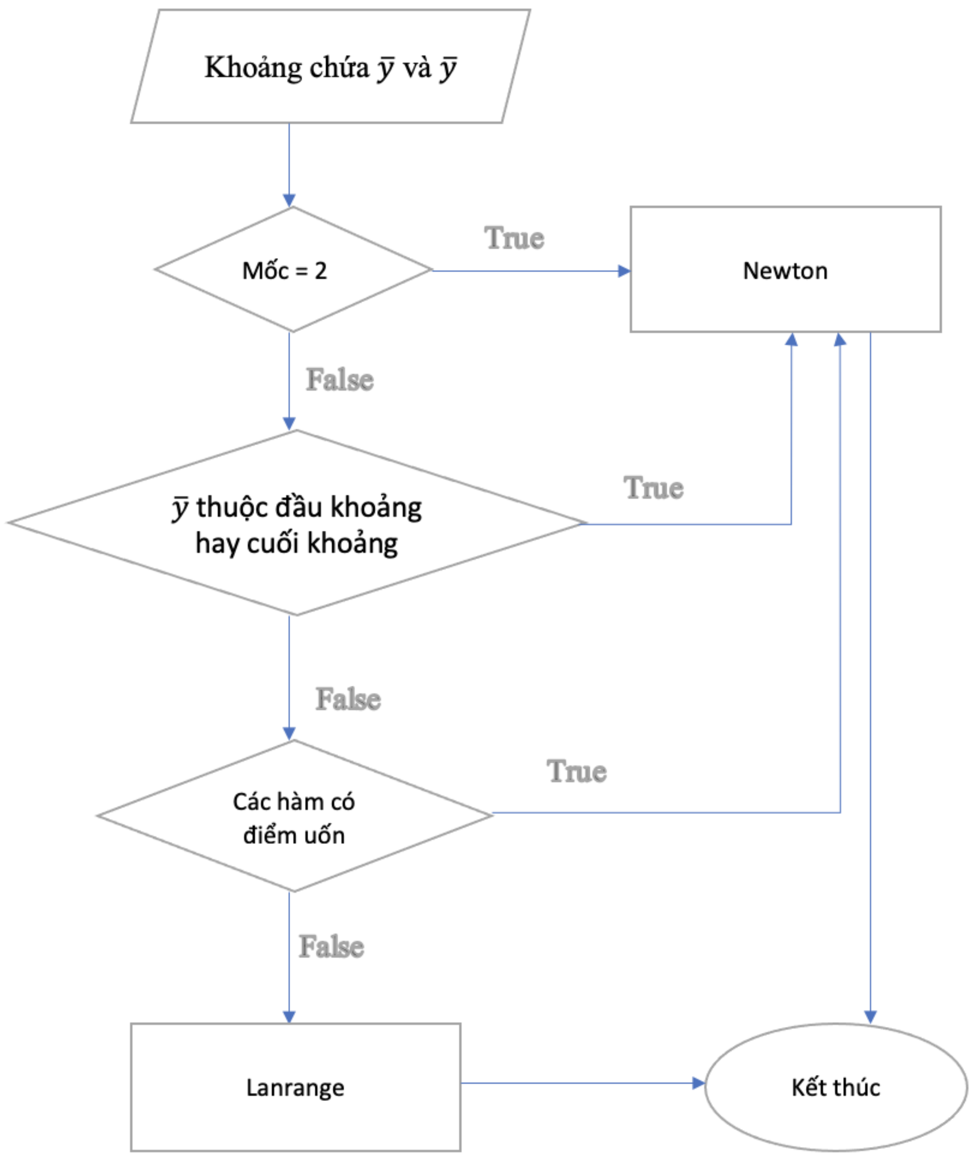


Khoảng đơn điệu, 4 mốc nội suy và $\bar{y}$ esp, max
$y = P_n(x)$
$x = g(x)$
Lặp
$x_0^* = x_0 + \frac{\bar{y} - f(x_0)}{f[x_0, x_1]}$
Tìm $\bar{x}$
Kết thúc

3.3 Phân tích số liệu



* Thuật toán để đưa ra cách lựa chọn phương pháp sử dụng (Lanrange, Newton)


Khoảng chứa $\bar{y}$ và $\bar{y}$
Mốc = 2
True
Newton
False
$\bar{y}$ thuộc đầu khoảng hay cuối khoảng
True
False
Các hàm có điểm uốn
True
False
Lanrange
Kết thúc

Chương 4

Ví dụ, Đánh giá

4.1 Ví dụ

Ví dụ 1:
Hàm $y = \frac{1}{x} + \frac{\sin(x)}{2}$. Xét giá trị giá trị y tương ứng với x như sau:

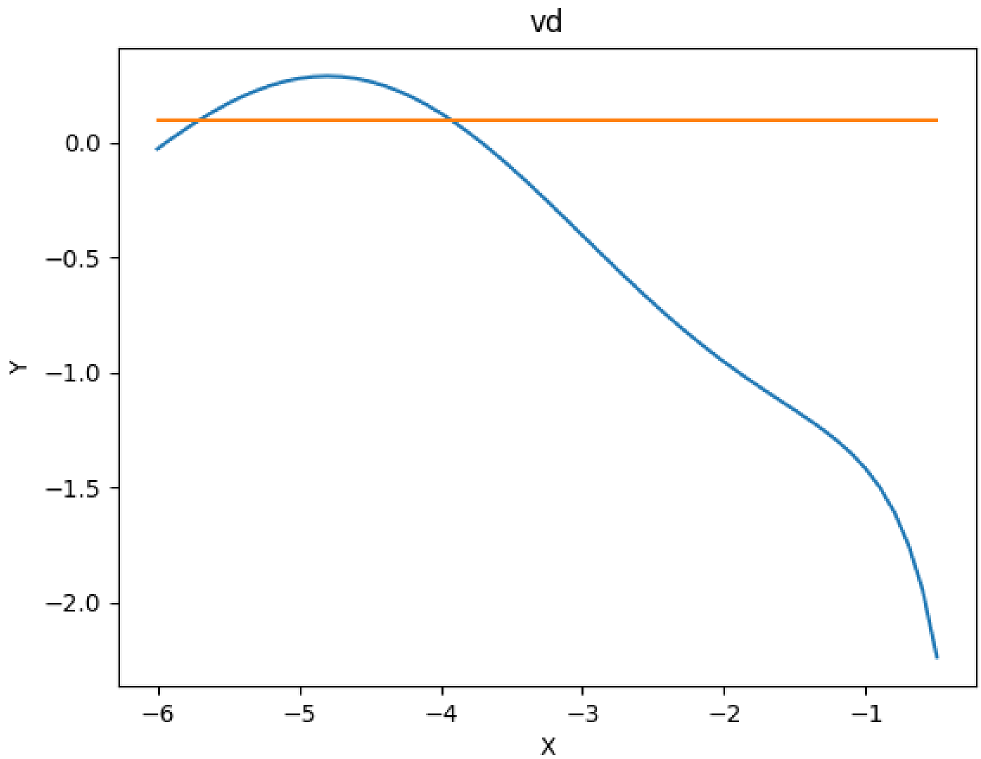
x	-6	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5
y	-0.026	0.171	0.279	0.267	0.128	-0.110
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5
y	-0.404	-0.699	-0.955	-1.165	-1.421	-2.240

Ta cần tìm tất cả các $\bar{x}$ với $\bar{y} = 0.1$.
Chạy chương trình kết quả cho được:

```
nhap gia tri y0: 0.1
Mang: [ 2 11] => Su dung phuong phap: Newton
x cach deu
Mang: [0 2] => Su dung phuong phap: Newton Tien
x cach deu
Newton:  [[ 2 11]
 [ 0  2]]
Lagrange:  []

Noi suy Newton doan [ 2 11]
Cac moc noi suy:
 [[-4.5   -4.    -3.5   -3.   ]
 [ 0.267  0.128 -0.11  -0.404]]
Dung Newton trung tam:
Lan lap thu 1 co nghiem la -3.949627082666977
Lan lap thu 2 co nghiem la -3.9485516792420383
Lan lap thu 3 co nghiem la -3.948691115029151
Lan lap thu 4 co nghiem la -3.9486730784145236
Lan lap thu 5 co nghiem la -3.948675412240674
Lan lap thu 6 co nghiem la -3.948675110269968
Lan lap thu 7 co nghiem la -3.9486751493417613
Lan lap thu 8 co nghiem la -3.948675144286291
Ket qua:         -3.948675144286291


Noi suy Newton doan [0 2]
Cac moc noi suy:
 [[-6.    -5.5   -5.    -4.5  ]
 [-0.027  0.171  0.279  0.267]]
Dung Newton tien:
Lan lap thu 1 co nghiem la -5.701484101586576
Lan lap thu 2 co nghiem la -5.702370335939616
Lan lap thu 3 co nghiem la -5.702397637242199
Lan lap thu 4 co nghiem la -5.702398468475734
Lan lap thu 5 co nghiem la -5.702398493774826
Lan lap thu 6 co nghiem la -5.70239849454481
Ket qua:         -5.70239849454481

Ket qua x0:  [-3.948675144286291, -5.70239849454481]
```

Sau khi chạy chương trình ta tìm đc giá trị $\bar{x} = -3.949$ và $\bar{x} = -5.702$.

Vẽ lại đồ thị của hàm $y = \frac{1}{x} + \frac{\sin(x)}{2}$ và $y = 0.1$. với $x \in [-6; 0.5]$:



Nhận xét:

- Ta thấy trong $x \in [-6; 0.5]$ có hai nghiệm: nghiệm thứ nhất $\bar{x_1} \in [-6; -5]$, nghiệm thứ hai $\bar{x_2} \in [-5; -0,5]$
- Với $\bar{x_1} \in [-6; -5]$ chỉ có 3 mốc nội suy nên ta sử dụng Newton tiến, kết quả: $\bar{x_1} = -3.949$. Còn với đoạn $\bar{x_2} \in [-5; -0,5]$ đồ thị có điểm uốn và $\bar{y} = 0.1$ nằm giữa khoảng vì vậy ta sử dụng newton trung tâm, kết quả: $\bar{x_2} = 5.702$
- Kiểm tra lại kết quả: Kết quả thu được sai số với kết quả thực tế là 10^{-4}.

Ví dụ 2: Hàm $y = \frac{1}{x}$. Xét giá trị $y \in [0.333; 1]$, giá trị y tương ứng với x như sau:

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y	1	0.833	0.714	0.625	0.556	0.5	0.455	0.417	0.385	0.357	0.333

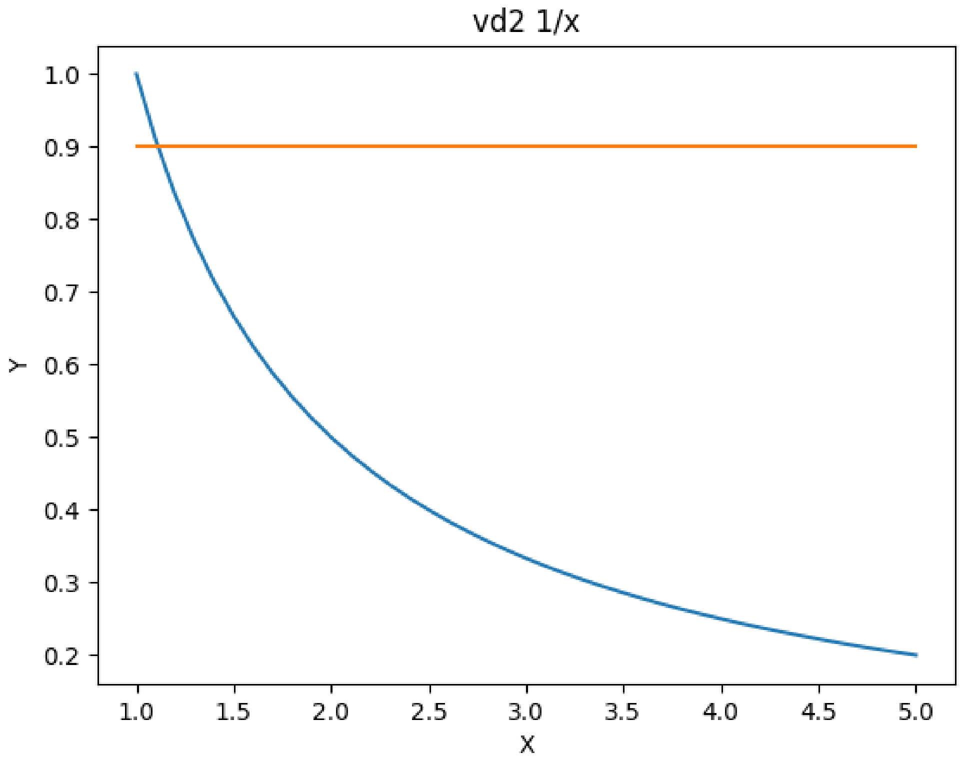
Ta cần tìm tất cả các $\bar{x}$ với $\bar{y} = 0.9$.

Chạy chương trình kết quả cho được:

```
nhap gia tri y0: 0.9
Mang: [ 0 10] => Su dung phuong phap: Newton
x cach deu
Newton:  [[ 0 10]]
Lagrange:  []

Noi suy Newton doan [ 0 10]
Cac moc noi suy:
 [[1.         1.2        1.4        1.6       ]
 [1.         0.83333333 0.71428571 0.625     ]]
Dung Newton tien:
Lan lap thu 1 co nghiem la 1.1119428571428571
Lan lap thu 2 co nghiem la 1.1116913953703458
Lan lap thu 3 co nghiem la 1.1116852787725935
Lan lap thu 4 co nghiem la 1.1116851313029803
Lan lap thu 5 co nghiem la 1.1116851277482946
Ket qua:         1.1116851277482946

Ket qua x0:  [1.1116851277482946]
```

Sau khi chạy chương trình ta tìm đc giá trị $\bar{x} = 0.111$

Vẽ lại đồ thị của hàm $y = \frac{1}{x}$ và $y = 0.9$. với $x \in [1; 3]$:



Nhận xét: Ta thấy trong $x \in [1;2]$ có một nghiệm và đồ thị hàm số có điểm uốn, vì vậy ta có thể dùng phương pháp Newton và $\bar{y} = 0.9$ nằm ở đầu đoạn => Newtown tiến, kết quả: $\bar{x} = 0.111$. Kết quả thu được sai số với kết quả thực tế là 10^{-4}

Ví dụ 3: Cho bảng dữ liệu x, y như sau:

x	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
y	4.23	3.67	2.99	1.24	0.87	2.04	4.54

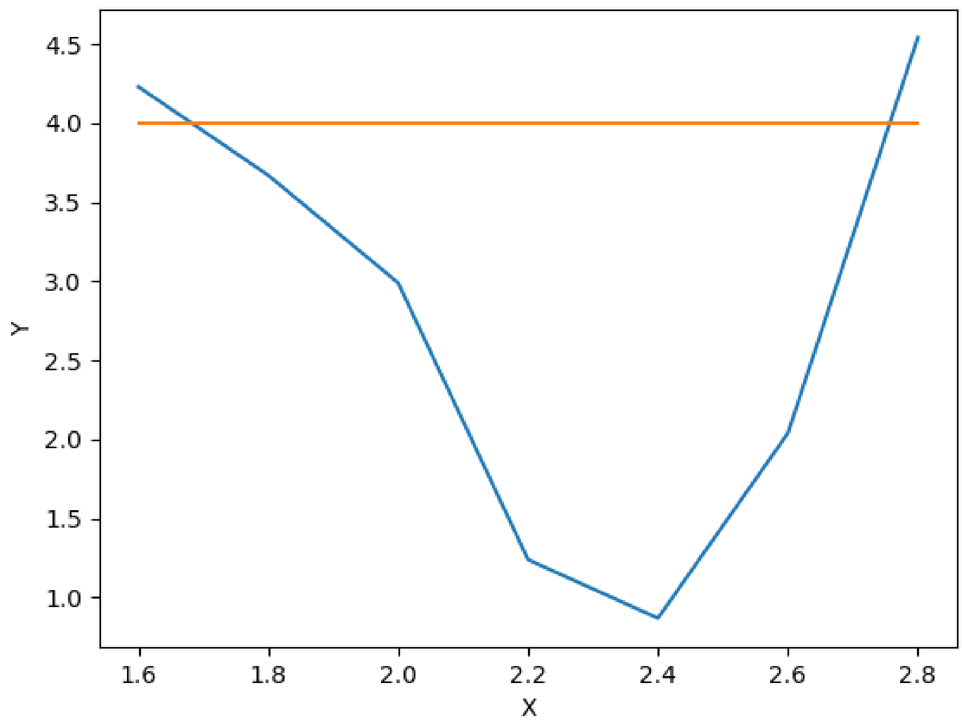
Ta cần tìm tất cả các $\bar{x}$ với $\bar{y} = 4$.

Chạy chương trình kết quả cho được:

```
nhap gia tri y0: 4
Mang: [4 6] => Su dung phuong phap: Newton Lui
x cach deu
Mang: [0 4] => Su dung phuong phap: Newton
x cach deu
Newton:  [[4 6]
 [0 4]]
Lagrange:  []

Noi suy Newton doan [4 6]
Cac moc noi suy:
 [[2.2  2.4  2.6  2.8 ]
 [1.24 0.87 2.04 4.54]]
Dung Newton lui:
Lan lap thu 1 co nghiem la 2.7649631936512
Lan lap thu 2 co nghiem la 2.763748819134027
Lan lap thu 3 co nghiem la 2.7639392613608824
Lan lap thu 4 co nghiem la 2.7639096213076977
Lan lap thu 5 co nghiem la 2.7639142399461707
Lan lap thu 6 co nghiem la 2.7639135203841962
Lan lap thu 7 co nghiem la 2.763913632491789
Lan lap thu 8 co nghiem la 2.76391361502553
Lan lap thu 9 co nghiem la 2.7639136177467587
Ket qua:         2.7639136177467587


Noi suy Newton doan [0 4]
Cac moc noi suy:
 [[1.6  1.8  2.   2.2 ]
 [4.23 3.67 2.99 1.24]]
Dung Newton tien:
Lan lap thu 1 co nghiem la 1.6655780326719336
Lan lap thu 2 co nghiem la 1.6660276439716208
Lan lap thu 3 co nghiem la 1.6659995400551988
Lan lap thu 4 co nghiem la 1.6660012694030104
Lan lap thu 5 co nghiem la 1.6660011628840745
Lan lap thu 6 co nghiem la 1.6660011694446948
Ket qua:         1.6660011694446948

Ket qua x0:  [2.7639136177467587, 1.6660011694446948]
```

Sau khi chạy chương trình ta tìm đc giá trị $\bar{x} = 1.76$ và $\bar{x} = 1.67$.

Biểu diễn lại dữ liệu cho bằng matplotlip:



Nhận xét: Với một bảng dữ liệu bất kì, tìm được các đoạn chứa $\bar{y}$ và từ đó sử dụng phương pháp để tìm $\bar{x}$ tương ứng. Với đoạn $\bar{y} \in [1,24; 4,54]$ thì ta sử dụng Newton lùi để tìm ra $\bar{x}$. Với đoạn $\bar{y} \in [1.24; 4.23]$ thì ta sử dụng Newton tiến để tìm ra $\bar{x}$. Kết quả thu được $\bar{x} = 1.76$ và $\bar{x} = 1.67$.

4.2 Đánh giá

- Với các hàm số mà có điểm uốn thì sử dụng phương pháp Newton sẽ tốt hơn phương pháp tím hàm ngược(Lanrange)
- Với mốc nội suy x_i cách đều phương pháp Newton sẽ tốt hơn phương pháp tìm hàm ngược (Lanrange). Nguyên nhân là do khi đó mốc y_i có thể biến đổi bất thường.
- Với mốc nội suy x_i không cách đều, hoặc các mốc y_i cách đều thì việc dùng phương pháp tìm hàm ngược (Lanrange)có thể sẽ tốt hơn phương pháp Newton.

- Nhược điểm của phương pháp Newton đó là khó đánh giá điều kiện hội tụ và sai số. Sai số của phương pháp thứ hai bao gồm sai số tính toán, sai số của phép nội suy, sai số của phép lặp.

Chương 5

Ứng dụng

- Ứng dụng thường thấy nhất của bài toán nội suy ngược đó là phục vụ cho việc giải phương trình. Cho phương trình $f(x) = 0$, ta dễ dàng lập được bảng với các khoảng phân li nghiệm sau đó dùng phương pháp nội suy ngược với $\bar{y} = 0$ để tìm ra nghiệm của phương trình.
- Ta chọn 4 mốc nội suy để được đa thức bậc 3 như đã nói trong phần phương pháp giúp ta đưa việc giải phương trình bậc cao về việc giải phương trình bậc 3 (đã có công thức giải). Ngoài ra ta có thể thực hiện công thức lặp t = g(t) để giải.

Tài liệu tham khảo

1. Lê Trọng Vinh, Giáo trình Giải tích số, Nhà xuất bản Khoa học và Kĩ Thuật, 2007.

2. Numerical analysis 9th Richard L. Burden and J. Douglas Faires, 2010.