XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG ĐA THỨC NỘI SUY

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 9/2020

ĐA THỨC NỘI SUY

- Cho bộ điểm

$$\left\{x_i, y_i = f\left(x_i\right)\right\}_{i=\overline{0,n}}, x_i \neq x_j \ \forall i \neq j, x_i \in [a,b]$$

- Đa thức bậc không quá n, $P_n\left(x\right)$ đi qua bộ điểm trên được gọi là đa thức nội suy với các mốc nội suy $\left\{x_i\right\}_{i=\overline{0,n}}$
- Khi đó

$$f\left(x\right) \approx P_n\left(x\right)$$

ĐA THỨC NỘI SUY

- Định lý:

  Với bộ điểm $\left\{x_i, y_i\right\}_{i=\overline{0,n}}$, $x_i \neq x_j \; \forall i \neq j,$ cho trước, đa thức nội suy tồn tại và duy nhất

ĐA THỨC NỘI SUY

$$P_n\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$P_n\left(x_i\right) = y_i \ \forall i = \overline{0,n} \ \Leftrightarrow \begin{cases} a_o + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots a_n x_0^n = y_0 \\ a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_o + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

ĐA THỨC NỘI SUY

- Định thức
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}\left(x_i - x_j\right) \neq 0.$$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất hay đa thức nội suy tồn tại và duy nhất

SAI SỐ CỦA ĐA THỨC NỘI SUY

- Đặt

$$F(t) = R_n(t) - kw_{n+1}(t)$$

- Chọn k sao cho

$$F(x) := f(x) - P_n(x) - kw_{n+1}(x) = 0$$

- F(t) có ít nhất n+2 nghiệm phân biệt nên F'(x) có ít nhất n+1 nghiệm phân biệt, …..

SAI SỐ CỦA ĐA THỨC NỘI SUY

$$\exists \xi \in [a,b], F^{(n+1)}(\xi) = 0$$

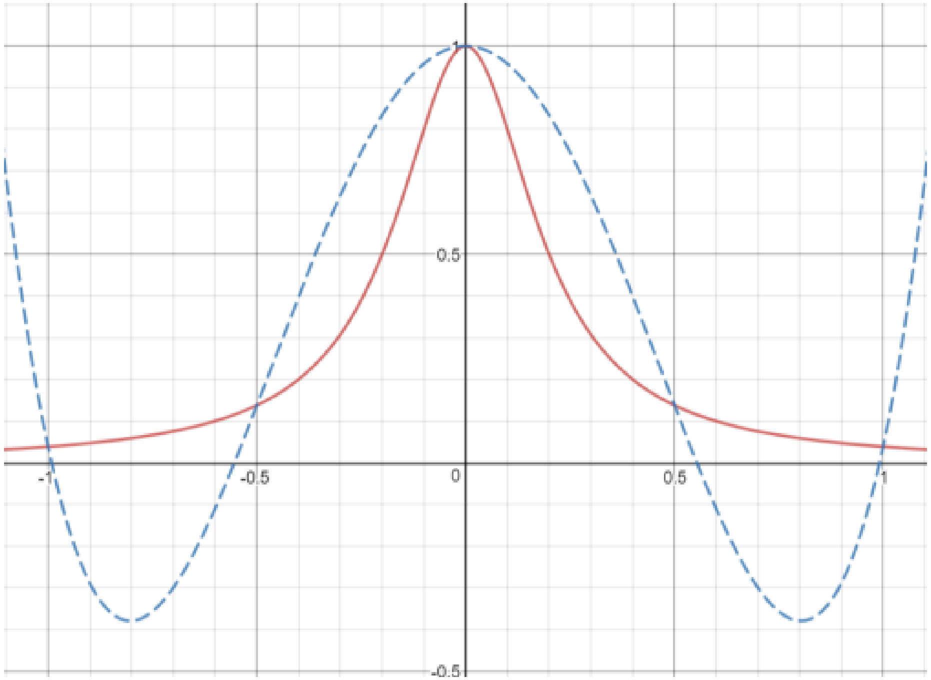
$$\Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \mathrm{w}_{(n+1)}(x)$$

Ví dụ

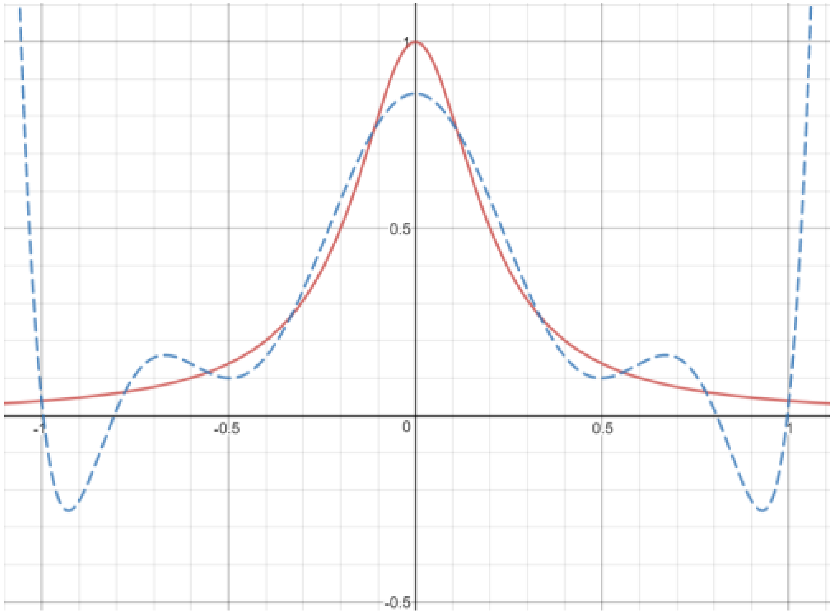
- Xấp xỉ hàm $f(x) = \dfrac{1}{25x^2 + 1}$

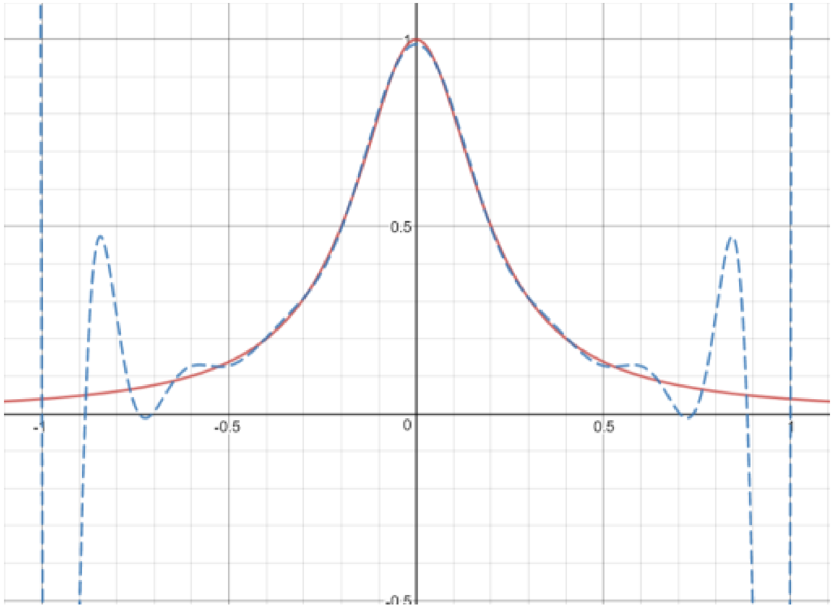
- Với 5 mốc nội suy



Ví dụ

- Với 10 và 17 mốc nội suy





Tối ưu hóa mốc nội suy

- Bài toán: Chọn mốc nội suy sao cho sai số xấp xỉ hàm đạt được nhỏ nhất

$$\left\| f - P_n \right\| = \sup_{[a,b]} \left| R_n(x) \right|$$

$$\left| R(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| w_{n+1}(x) \right|$$

$$\left\| f - P_n \right\| \to \min \Leftrightarrow \left\| w_{n+1}(x) \right\| \to \min$$

Tối ưu mốc nội suy

- Xét khoảng nội suy [-1,1]
- Xét họ các hàm đa thức Chebysev:

$$T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_0(x) = 1,\ \ T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ \ T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$$

Tối ưu mốc nội suy

- Định lý: trong các đa thức bậc n có hệ số cả bằng 1, đa thức $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ là đa thức có độ lệch so với 0 nhỏ nhất, tức là

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\max_{[-1,1]}\left|p(x)\right| \geq \max_{[-1,1]}\frac{\left|T_n(x)\right|}{2^{n-1}}$$

Tối ưu mốc nội suy

- Chọn mốc nội suy là n+1 các nghiệm của $T_n(x)$

$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n},\ i = \overline{0,n}.$$

- Trường hợp khoảng nội suy $[a,b]$ đặt ẩn:

$$t = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$$