

# **NỘI SUY TRUNG TÂM**

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 9/2019

# Ý TƯỞNG

- Phép nội suy có sai số nhỏ nhất khi  $x$  ở khoảng trung tâm của đoạn nội suy
- Đa thức nội suy Newton có thể kết nạp mốc nội suy theo thứ tự bất kỳ
- Trích xuất mốc nội suy gần nhất với giá trị cần tính, kết nạp dần mốc nội suy về cả hai phía

# Công thức Gauss I

- Mốc cách đều  $x_k = x_0 + kh, k \in \mathbb{Z}$
- Số mốc lẻ, xuất phát từ mốc chính giữa
- Kết nạp bên phải trước, xen kẽ P,T,P,T,....

$$\begin{aligned} P(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \\ & + a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_2) \cdots \end{aligned}$$

# Công thức Gauss I

- Xây dựng công thức

$$P(x_0) = a_0 = y_0$$

$$P(x_1) = y_1 = y_0 + a_1 h \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$P(x_{-1}) = y_{-1} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(-h) + a_2(-h)(2h) \Rightarrow a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2h^2}$$

# Công thức Gauss I

[illegible]

# Công thức Gauss I

- Xây dựng công thức

$$y_0 \rightarrow \Delta y_0 \rightarrow \Delta^2 y_{-1} \rightarrow \Delta^3 y_{-1} \rightarrow \Delta^4 y_{-2} \rightarrow \Delta^5 y_{-2} \rightarrow \cdots \rightarrow \Delta^{2i} y_{-i} \rightarrow \Delta^{2i+1} y_{-i} \rightarrow \cdots$$

$$a_{2i} = \frac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)! h^{2i}}$$

$$a_{2i+1} = \frac{\Delta^{2i+1} y_{-i}}{(2i+1)! h^{2i+1}}$$

$$\begin{aligned} P(x) = P(x_0 + th) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t(t-1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} (t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} (t+1)t(t-1)(t-2) + \cdots \end{aligned}$$

# Công thức Gauss I

- Ý tưởng thuật toán

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 \times & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & t \\
a_2 \times & & & & t & (t-1) \\
a_3 \times & & & t & (t-1) & (t+1) \\
a_4 \times & & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) \\
a_5 \times & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) & (t+2) \\
\vdots & & & & & 
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
a_0 \times & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & 1 & 0 \\
a_2 \times & & & & 1 & -1 & 0 \\
a_3 \times & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\
a_4 \times & & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\
a_5 \times & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\
\vdots & & & & & 
\end{array}$$

# Công thức Gauss II

- Mốc cách đều  $x_k = x_0 + kh, k \in \mathbb{Z}$
- Số mốc lẻ, xuất phát từ mốc chính giữa
- Kết nạp bên trái trước, xen kẽ T, P, T, P,....

$$\begin{aligned} P(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_{-1}) \\ & + a_2(x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_1) \\ & + a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_{-2}) \cdots \end{aligned}$$



# Công thức Gauss II

- Xây dựng công thức

$$P(x_0) = a_0 = y_0$$

$$P(x_{-1}) = y_{-1} = y_0 + a_1(-h) \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta y_{-1}}{h}$$

$$P(x_1) = y_1 = y_0 + \frac{\Delta y_{-1}}{h}(h) + a_2(h)(2h) \Rightarrow a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2h^2}$$

# Công thức Gauss II

[illegible]

# Công thức Gauss II

- Xây dựng công thức

$$y_0 \rightarrow \Delta y_{-1} \rightarrow \Delta^2 y_{-1} \rightarrow \Delta^3 y_{-2} \rightarrow \Delta^4 y_{-2} \rightarrow \Delta^5 y_{-3} \rightarrow \cdots \rightarrow \Delta^{2i-1} y_{-i} \rightarrow \Delta^{2i} y_{-i} \rightarrow \cdots$$

$$a_{2i-1} = \frac{\Delta^{2i-1} y_{-i}}{(2i-1)! h^{2i-1}}$$

$$a_{2i} = \frac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)! h^{2i}}$$

$$\begin{aligned} P(x) = P(x_0 + th) = & y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} (t+1)t + \\ & + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!} (t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} (t+2)(t+1)t(t-1) + \cdots \end{aligned}$$

# Công thức Gauss I

- Ý tưởng thuật toán

$a_0 \times$				1		$a_0 \times$						1
$a_1 \times$				$t$		$a_1 \times$					1	0
$a_2 \times$				$t$	$(t+1)$	$a_2 \times$				1	1	0
$a_3 \times$			$t$	$(t+1)$	$(t-1)$	$a_3 \times$			1	0	-1	0
$a_4 \times$		$t$	$(t+1)$	$(t-1)$	$(t+2)$	$a_4 \times$		1	2	-1	-2	0
$a_5 \times$	$t$	$(t+1)$	$(t-1)$	$(t+2)$	$(t-2)$	$a_5 \times$	1	0	-5	0	4	0
$\vdots$						$\vdots$						

# Gauss I và Gauss II

•

$$\begin{array}{l}
 a_0 \times \\
 a_1 \times \\
 a_2 \times \\
 a_3 \times \\
 a_4 \times \\
 a_5 \times \\
 \dots
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & t \\
 & & & t & (t-1) \\
 & & t & (t-1) & (t+1) \\
 & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) \\
 t & (t-1) & (t+1) & (t-2) & (t+2) \\
 & & & & 
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & t \\
 & & & t & (t+1) \\
 & & t & (t+1) & (t-1) \\
 & t & (t+1) & (t-1) & (t+2) \\
 t & (t+1) & (t-1) & (t+2) & (t-2) \\
 & & & & 
 \end{array}
 \right.$$

# Gauss I và Gauss II

•

$$\begin{array}{l}
 a_0 \times \\
 a_1 \times \\
 a_2 \times \\
 a_3 \times \\
 a_4 \times \\
 a_5 \times \\
 \dots
 \end{array}
 \begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & 1 & -1 & 0 \\
 & & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\
 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 \\
 & & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\
 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0
 \end{array} \right.$$

# Công thức Sterling

- Ý tưởng: thác triển đồng thời về cả hai phía.

$$\text{Sterlin} = \frac{\text{Gauss I} + \text{Gauss II}}{2}$$

$$y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} (t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} (t+1)t(t-1)(t-2) + \dots$$

$$y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} (t+1)t + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!} (t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} (t+2)(t+1)t(t-1) + \dots$$

# Công thức Sterling

- Cộng từng cặp số hạng:

$$y_0 \quad \Delta y_0 t \quad \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t(t-1) \quad \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} t(t^2-1) \quad \dots$$

$$y_0 \quad \Delta y_{-1} t \quad \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t(t+1) \quad \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!} t(t^2-1) \quad \dots$$

$$y_0 \quad \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} t \quad \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t^2 \quad \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2 \times 3!} t(t^2-1) \quad \dots$$



# Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$x_{-n} \quad \dots \quad x_{-1} \quad x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n \quad x_{n+1}$$

$$\text{GaussI} : x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_{-1} \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_{-n} \rightarrow x_{n+1}$$

$$\text{GaussII} : x_1 \rightarrow x_0 \rightarrow x_2 \rightarrow x_{-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{-n+1} \rightarrow x_{n+1} \rightarrow x_{-n}$$

$$\text{Bessel} = \frac{\text{GaussI} + \text{GaussII}}{2}$$

# Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$P_{GI}(x_0 + th)$$

$$\begin{aligned} &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} (t+1)t(t-1) + \dots \\ &\quad + \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n}}{(2n+1)!} t(t^2-1)\dots(t^2-n^2) \end{aligned}$$

# Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$P_{GH}(x_0 + th)$$

$$\begin{aligned} &= y_1 + (t-1)\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(t-1)t + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}t(t-1)(t-2) + \cdots \\ &+ \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n}}{(2n+1)!}t(t^2-1)\cdots(t^2-(n-1)^2)(t-n) \end{aligned}$$

# Công thức Bessel

- ĐK: mốc cách đều, số mốc chẵn

$$P_{GH}(x_0 + th)$$

$$= y_1 + (t-1)\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(t-1)t + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}t(t-1)(t-2) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n}}{(2n+1)!} t(t^2-1) \dots (t^2 - (n-2)^2)(t-n+1)(t-n)$$

$$P(x_0 + th) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{\Delta y_0}{2} \left( t - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2 \times 2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{2 \times 3!} t(t-1) \left( t - \frac{1}{2} \right)$$

# Các vấn đề cần giải quyết

- Mốc cách đều
  - Bảng sai phân
  - Thêm mốc nội suy
  - Đa thức nội suy
  - Trích xuất dữ liệu phù hợp yêu cầu