Bài 1: GIỚI THIỆU VÉC TƠ
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Như chúng ta đã biết môn học Đại Số Tuyến Tính có lịch sử phát triển từ việc giải quyết các hệ phương trình tuyến tính, với nhiều phương trình, nhiều ẩn. Và phát triển lên là đi nghiên cứu ma trận, định thức, không gian véc tơ…thông qua đó ứng dụng vào việc giải quyết các bài toán thực tế.

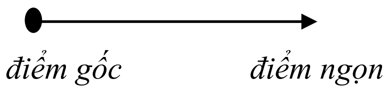
Ngày nay, ĐSTT ngày càng được ứng dụng nhiều hơn trong thực tiễn, trong các lĩnh vực kinh tế, khoa học, công nghệ, và đặc biệt là trong ngành Công nghệ thông tin. Vì vậy việc học tốt môn học này là rất cần thiết đối với sinh viên chúng ta.

1. GIỚI THIỆU VÉC TƠ

1.1. Véc tơ hình học

1.1.1. Định nghĩa

Véc tơ hình học là một đoạn thẳng được định hướng



Kí hiệu véc tơ: $x, y, z, ...$ Độ dài các véc tơ : $\|x\|, \|y\|., \|z\|, ...$

1.1.2. Các phép toán véc tơ

Cho 2 véc tơ *v, w*

- *Cộng hai véc tơ* *v, w* là một véc tơ, kí hiệu *v + w*, được xác định theo quy tắc hình bình hành.
- *Trừ hai véc tơ* *v, w* là một véc tơ kí hiệu *v – w*, chính là *v + (- w).*
- *Nhân một véc tơ v với một vô hướng c* (số thực) được một véc tơ có độ dài $|c|.\|v\|$, cùng hướng với *v* nếu *c* > 0, ngược hướng với *v* nếu *c* < 0.

-*Tổ hợp tuyến tính* của các véc tơ $v_1, v_2, ...v_n$ là véc tơ có dạng $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$, với $c_1, c_2, ...c_n$ là các số thực .

Nhận xét:

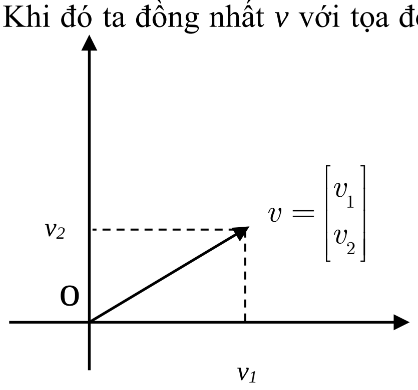
- Khi véc tơ $v \neq 0$, tập hợp tất cả các tổ hợp *cv* lấp đầy một đường thẳng
- Khi các véc tơ v_1, v_2 không cùng phương thì tất cả các tổ hợp $c_1v_1 + c_2v_2$ lấp đầy một mặt phẳng
- Khi các véc tơ v_1, v_2, v_3 không đồng phẳng thì tất cả các tổ hợp $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ lấp đầy kgian.

1.2. Biểu diễn véc tơ hình học theo tọa độ

Việc tính các phép toán véc tơ, tìm tổ hợp tuyến tính nhiều véc tơ theo định nghĩa trên là khá phức tạp, nhưng nếu ta biểu thị các véc tơ dưới dạng tọa độ thì bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

- Xét trong không gian $\mathbb{R}^2$,các véc tơ đơn vị là $\vec{i}, \vec{j}$, mỗi một véc tơ hình học *v* luôn tồn tại duy nhất hai số v_1, v_2 sao cho $v = v_1.\vec{i} + v_2\vec{j}$. Ta gọi cặp v_1, v_2 là tọa độ của *v*. Khi đó ta đồng nhất *v* với tọa độ của chúng, và viết dưới dạng sau đây (dạng cột) :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



Khi đó các phép toán tương ứng sẽ như sau :

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},\quad c\in\mathbb{R}$$

+) *Phép cộng* $v+w=\begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{bmatrix}$

+) *Phép nhân vô hướng* $cv=\begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{bmatrix}$

+) *Tích vô hướng* $v.w=v_1w_1+v_2w_2$

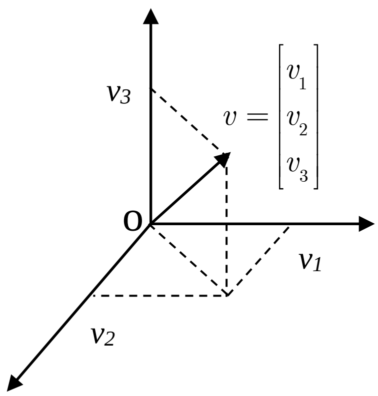
+) *Độ dài véc tơ* $\|v\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$

+) *Véc tơ đơn vị* : là véc tơ có độ dài bằng 1.

Véc tơ đơn vị cùng hướng với véc tơ $v\neq 0$ là: $\dfrac{v}{\|v\|}$

-Xét trong không gian $\mathbb{R}^3$, tương tự như vậy, ta gọi v_1, v_2, v_3 là tọa độ của *v*. Khi đó ta đồng nhất *v* với tọa độ của chúng và viết

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



-Các phép toán véc tơ trong $\mathbb{R}^3$ cũng tương tự trong $\mathbb{R}^2$.

- Mở rộng trong không gian $\mathbb{R}^n$, một véc tơ *v* sẽ có dạng

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, các phép toán véc tơ, tích vô hướng… tương tự trong không gian $\mathbb{R}^2$.

Chú ý : Viết $v=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tương đương với $v=(1, 2)$ nhưng không được viết là *v* = [1 2].

Ví dụ 1: Cho $u=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ v=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Tính

a) $u+3v$

b) uv

c) Véc tơ đơn vị của u.

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Phương trình tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính là những bài toán cổ nhất của Đại số. Tuy nhiên, người ta coi rằng để đưa một phương trình tuyến tính bất kỳ về dạng *ax = b* thì chỉ cần biết quy tắc chuyển số hạng từ vế này sang vế kia và rút gọn các số hạng đồng dạng là đủ, và muốn giải hệ nhiều phương trình thì chỉ cần khử dần đến khi còn một ẩn. Do đó một thời gian dài, lý thuyết về hệ phương trình không phát triển. Sau này, do nhu cầu về tính toán, chẳng hạn phải xác định phương trình của một đường cong đi qua những điểm cho trước,…nên lý thuyết hệ phương trình tuyến tính được phát triển và ngày càng hoàn thiện. Nó đã ảnh hưởng sâu rộng đến các lĩnh vực khác như phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng…

2.1 Định nghĩa : Một *phương trình tuyến tính n ẩn* là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số thực, $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn

Một *hệ phương trình tuyến tính* m phương trình, n ẩn là một hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

trong đó a_{ij}, b_j là những số thực, $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn.

Dạng hệ phương trình tuyến tính như định nghĩa trên gọi là *dạng hàng.*

2.2 Những dạng khác của hệ phương trình tuyến tính

+) *Dạng phương trình véc tơ (dạng cột)*

Kí hiệu

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, .., n, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trở thành

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$$

Và khi đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi *b* là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ v_j

+) *Dạng phương trình ma trận (dạng ma trận)*

Ta gọi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

là ma trận hệ số của hệ này.

Kí hiệu

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$h_i = \ a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \ , i = \overline{1,m},$$

Khi đó ta định nghĩa phép nhân *A* với *x* như sau

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1x \\ h_2x \\ \dots \\ h_mx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = b$$

Vậy hệ phương trình đưa về dạng $Ax = b$

Ví dụ 2:

a) Dạng hàng

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

b) Dạng cột $\quad x_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) Dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.3 Phép khử Gauss

2.3.1. Ma trận bậc thang

Định nghĩa

+) *Ma trận bậc thang* là ma trận hệ số mà thỏa mãn hai điều kiện :

- Nếu hàng thứ *k* không phải toàn 0 thì số các số 0 đứng đầu hàng *k*+1 phải lớn hơn số các số 0 đứng đầu hàng *k*.
- Nếu có hàng gồm toàn số 0 thì chúng nằm dưới cùng.

+) *Trụ* là số khác 0 đứng đầu tiên trong một hàng của ma trận bậc thang.

Ví dụ 3:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận bậc thang

2.3.2. Ma trận mở rộng

Định nghĩa: Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots.. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ta gọi bảng số

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{llll|l} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

là ma trận mở rộng của nó.

2.3.3 Phương pháp giải một số hệ tuyến tính đặc biệt

a) Hệ dạng tam giác :

Hệ dạng tam giác là hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

trong đó các hệ số $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$

(Chú ý: số phương trình bằng số ẩn)

Cách giải: Giải hệ bằng phương pháp thế ngược từ dưới lên: từ phương trình cuối cùng ta suy ra $x_n = b_n.a_{nn}^{-1}$, sau đó thay vào phương trình thứ *n – 1* ta tìm được x_{n-1}, cứ tiếp tục như vậy cho đến phương trình đầu tiên, ta sẽ tìm được nghiệm của hệ.

Ví dụ 4:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad 3x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{có nghiệm } (-3, 4, 2)$$

b) Hệ dạng bậc thang: là hệ mà ma trận mở rộng là ma trận bậc thang. Ẩn có hệ số là trụ gọi là *biến trụ*, các ẩn còn lại gọi là *biến tự do.*

Cách giải :

+) Nếu hệ chứa phương trình dạng 0 = $b_i \neq 0$: hệ vô nghiệm.

+) Trường hợp còn lại : Bỏ đi các phương trình dạng 0 =0 (nếu có). Trong các phương trình còn lại, chuyển các hạng tử chứa biến tự do (nếu có) sang vế phải, gán cho giá trị bất kỳ. Ta giải hệ. tìm các biến trụ theo các biến tự do.

Ví dụ 5:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ \quad - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -1 \end{cases}$$

Ta thấy 3 trụ là 1, -1, 1 nên x_1, x_2, x_4 là biến trụ, x_3 là biến tự do. Chuyển vế ta có

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 2 - x_3 \\ \quad - x_2 - x_4 = 2 - 4x_3 \\ \qquad\quad x_4 = -1 \end{cases}$$

Gán cho x_3 giá trị bất kỳ ta suy ra hệ này có nghiệm $x_1 = 3x_3,\ x_2 = 4x_3 - 1,\ x_4 = -1$.

Vậy nghiệm của hệ là

$$(3x_3, 4x_3 - 1, x_3, -1)$$

Chú ý : Hệ dạng tam giác là trường hợp đặc biệt của hệ dạng bậc thang.

2.3.4 Giải hệ phương trình tuyến tính bất kỳ

Như ta thấy với hệ dang bậc thang thì cách giải hệ phương trình là rất đơn giản. Vậy một câu hỏi đặt ra là liệu một hệ phương trình bất kì có đưa về dạng bậc thang được không ?

Điều này đã được C.F.Gauss giải quyết. Ông đưa ra phương pháp khử Gauss, chuyển hệ bất kỳ về dạng bậc thang nhở sử dụng các phép biến đổi sơ cấp sau đây :

1) Đổi chỗ hai phương trình của hệ
2) Lấy một phương trình trừ đi bội của phương trình khác
3) Nhân một phương trình với một số khác 0

Chú ý : 1) Trong quá trình thực hiện phép khử, nếu xuất hiện phương trình 0 =0 thì có thể loại ra khỏi hệ. Nếu xuất hiện phương trinh 0 = b khác 0, thì kết luận ngay hệ vô nghiệm.

2) Quá trình giải hệ trên bằng phương pháp khử Gauss có thể được trình bày dưới dạng biến đổi ma trận mở rộng.

Ví dụ 6: Giải hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Ta xét ma trận mở rộng

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[h_4-2h_1\to h_4]{h_1+h_2\to h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2h_4+5h_2\to h_4]{h_3-h_2\to h_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[3h_4+2h_3\to h_4]{\frac{h_2}{2}\to h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=2 \\ x_2-x_3=2 \\ -3x_3+2x_4=0 \\ 4x_4=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=6 \\ x_3=4 \\ x_4=6 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là (0, 6, 4, 6).

Chú ý :

1. Hệ phương trình tuyến tính chỉ có một trong ba trường hợp : duy nhất nghiệm, vô số nghiệm, vô nghiệm.

2. Một số trường hợp thường gặp khi đưa hệ về dạng ma trận bậc thang

+) $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right], a_{ii}\neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất

+) $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right], a_{ii}\neq 0, b_3\neq 0$: Hệ vô nghiệm

+) $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], a_{ii}\neq 0$, $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 0 & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], a_{11}, a_{23}\neq 0$: Hệ vô số nghiệm

3. Khi đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang, có thể không cần giải hệ bằng cách thế ngược mà đem chia hàng chứa trụ cho trụ rồi biến đổi ma trận về dạng bậc thang, các trụ bằng 1, các phần tử khác bằng 0.

2.3.5. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa: *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* là hệ có dạng :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+.....+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+.....+a_{2n}x_n=0 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+.....+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Chú ý:

+) Hệ phương trình thuần nhất có dang $Ax = 0$, tức $b = 0$, vì thế khi sử dụng phương pháp khử Gauss ta không cần biến đổi trên ma trân mở rộng. mà chỉ cần biến đổi trên ma trận hệ số

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

Ta xét ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 - 3h_1 \to h_3]{h_2 + 2h_1 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 + 5h_2 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\frac{7x_3}{-2}, \frac{x_3}{-2}, x_3\right)$.

Chú ý: Hệ thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm $x = (0, 0, \ldots, 0)$ gọi là nghiệm tầm thường.