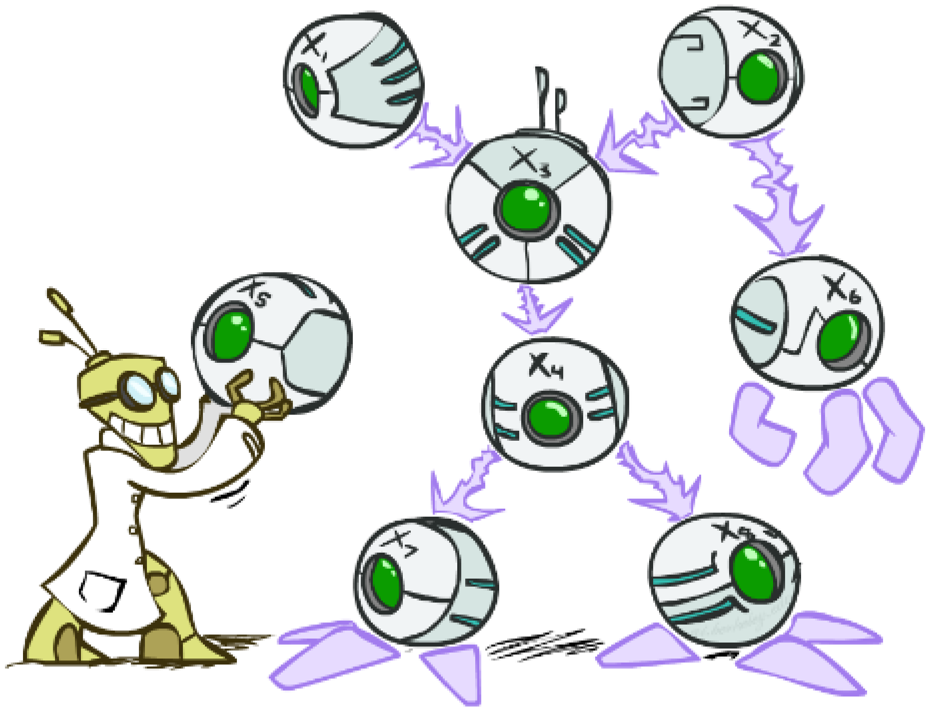
不确定性知识的表示与推理

第十三章 概率推理



materials are available at http://ai.berkeley.edu

提纲

- **第十三章 概率推理**
  - 独立性与条件独立性
  - 不确定问题的知识表示-贝叶斯网络
  - 贝叶斯网络的语义
  - 精确推理：枚举推理、 变量消元

回顾

- 概率推理: 根据已观察到的证据，计算查询命题的后验概率 。
- 使用完全联合概率分布作为“知识库”，从中可以导出所有问题的答案。

- 一个简单的例子: 诊断牙病患者的牙痛
- 问题域：由三个布尔变量*Toothache*，*Cavity*和*Catch*组成

	toothache		$\neg$*toothache*	
	catch	$\neg$*catch*	*catch*	$\neg$*catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$*cavity*	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 对于任意命题ϕ, 其概率是使得该命题成立的可能世界的概率之和： $P(\phi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \phi} P(\omega)$

归一化推理

- 例如：$\mathbf{P}(Cavity \mid toothache)$

  $= \alpha\ \mathbf{P}(Cavity, toothache)$

  $= \alpha\ [\mathbf{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathbf{P}(Cavity, toothache, \neg catch)]$

  $= \alpha\ [\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle]$

  $= \alpha\ \langle 0.12, 0.08\rangle$

  $= \langle 0.6, 0.4\rangle$

<u>查询变量</u>*Cavity*;

<u>证据变量</u>*Toothache*， 取值为*true*;

<u>隐藏变量</u>*Catch*

归一化方法：

$\mathbf{P}(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{e}) = \alpha\ \mathbf{P}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}) = \alpha\ \Sigma_y\ \mathbf{P}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y})$

问题： 规模扩展性不好

对于一个由n个布尔变量所描述的问题域，最坏情况下的时间复杂性$O(2^n)$，空间复杂性 $O(2^n)$

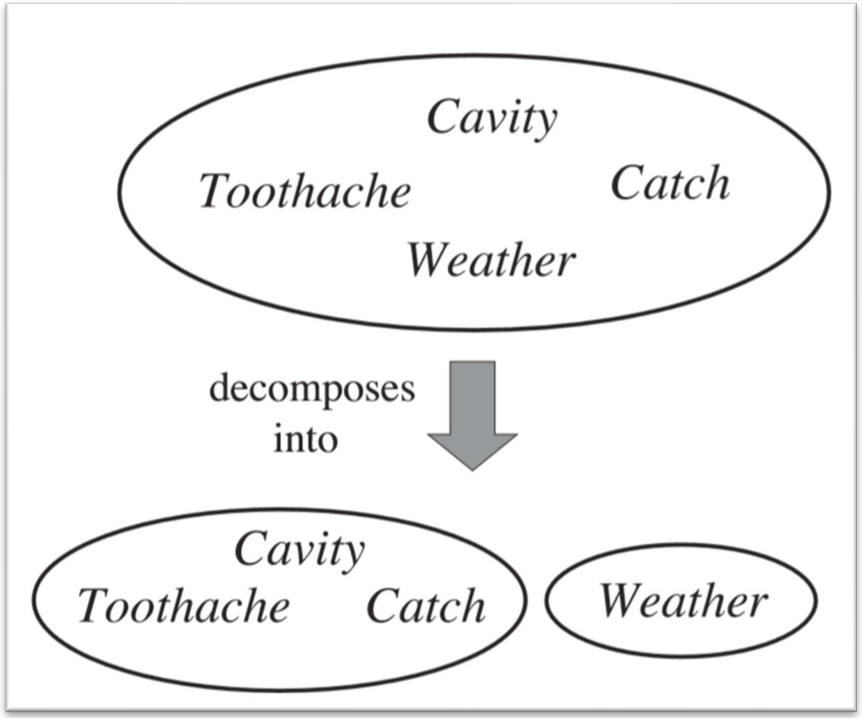
独立性

- 写出通用的联合分布:

  P(*Toothache, Catch, Cavity, Weather*)

  = **P**(*Toothache, Catch, Cavity*) **P**(*Weather*)

- *Weather*与其它三个变量之间相互独立



- 完全 联合分布表中的32 (8 x 4) 个条目可以降低为12(8+4)个

条件独立性

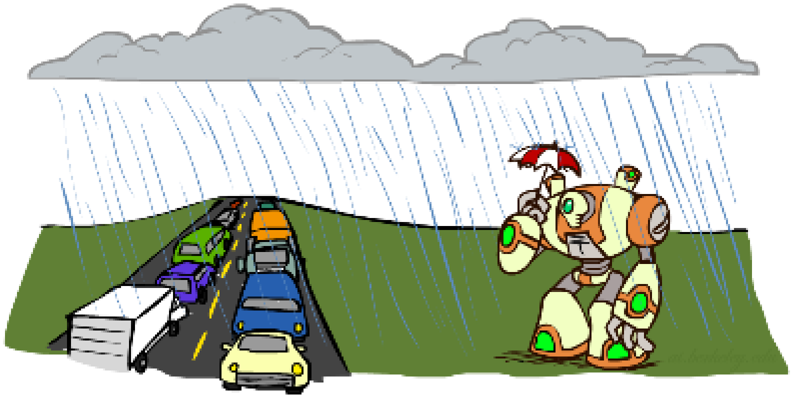
- 链式法则: $P(X_1, X_2, \ldots X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\ldots$

- 计算完全联合概率分布

P(*Rain, Traffic, Umbrella*)

= **P**(*Rain*) **P**(*Traffic* | *Rain*) **P**(*Umbrella*| *Rain, Traffic*)　　(链式法则)

= **P**(*Rain*) **P**(*Traffic* | *Rain*) **P**(*Umbrella*| *Rain*)　　(条件独立的假设)

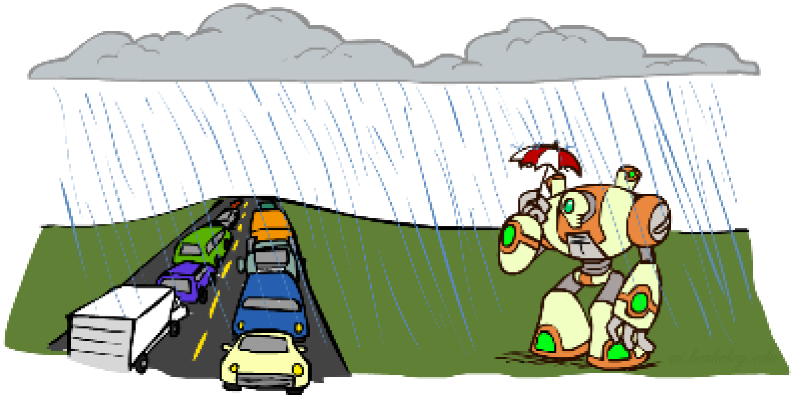


条件独立性

- 完全概率分布能够回答关于问题域的任何问题，但是:
  - 随着变量数目增多会增大到不可操作的程度
  - 为每个可能世界逐个指定概率是不符合实际的

	$toothache$		$\neg toothache$	
	$catch$	$\neg catch$	$catch$	$\neg catch$
$cavity$	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg cavity$	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.



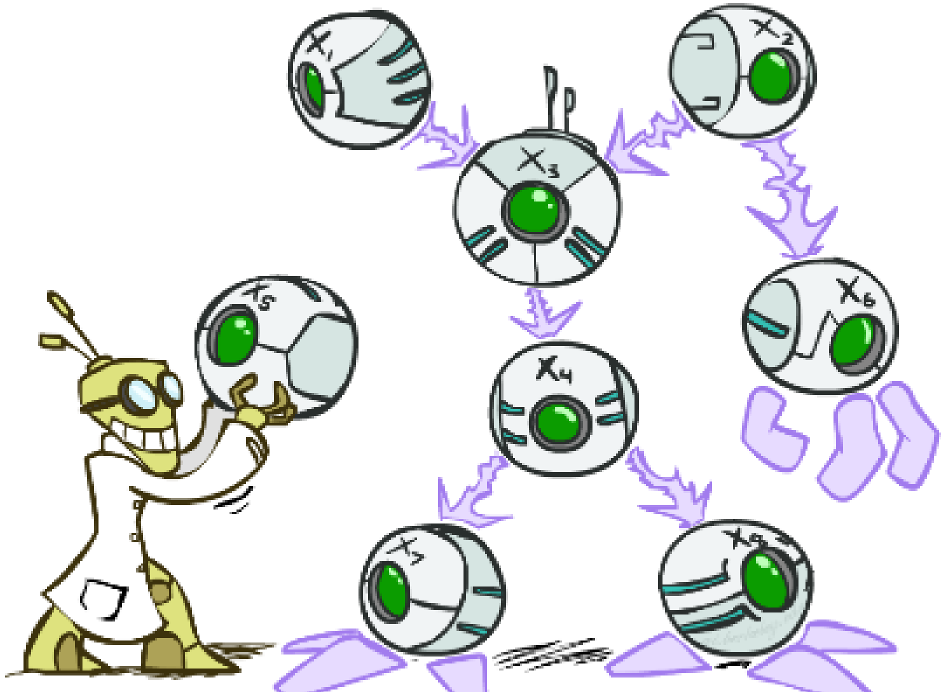
- 条件独立假设表示的方法：贝叶斯网络

提纲

- **第十三章 概率推理**
  - 独立性与条件独立性
  - 不确定问题的知识表示-贝叶斯网络
  - 贝叶斯网络的语义
  - 精确推理：枚举推理、 变量消元

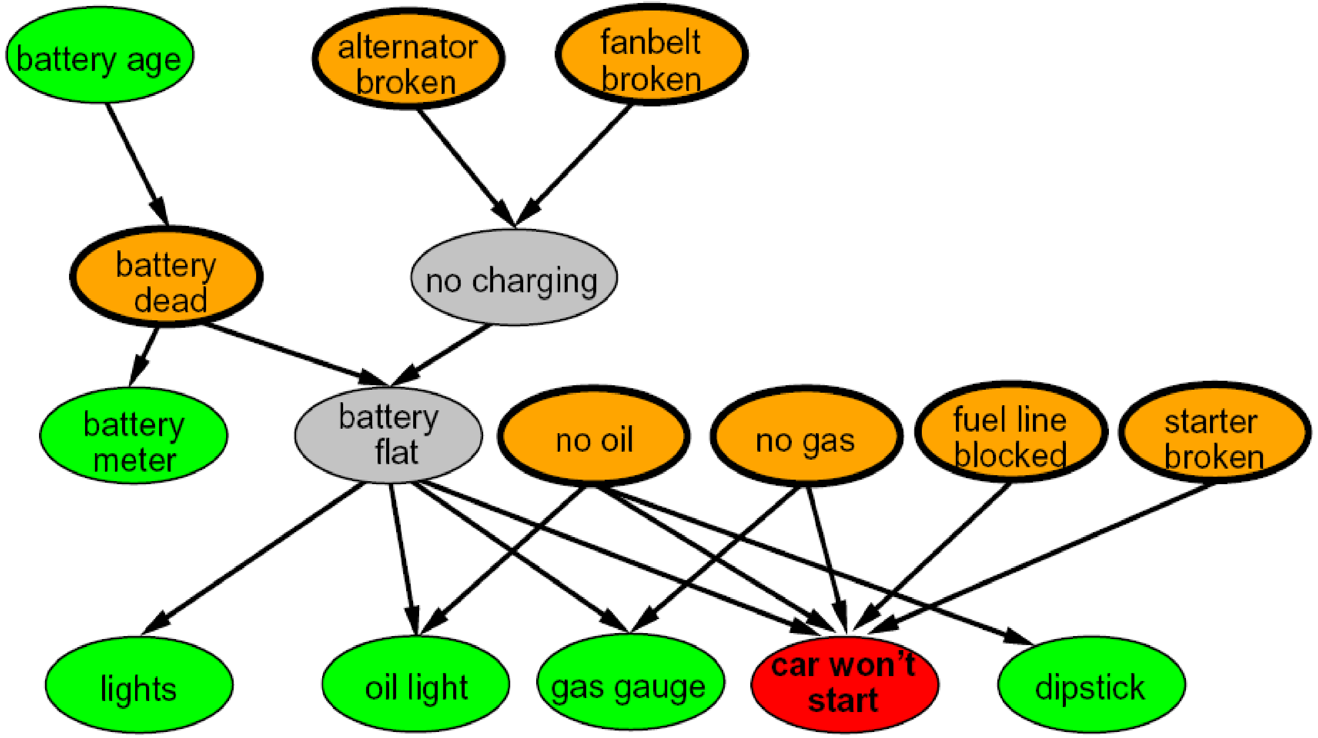
贝叶斯网络

- 贝叶斯网络: 是由Pearl由1988年提出的理论模型，是目前不确定知识表达和推理领域最有效的理论模型之一。
- 一种使用简单局部分布（条件概率）， 描述复杂联合分布的技术
  - 一个有向无环图，也称之为概率图模型
  - 用于表示变量之间的依赖关系
  - 本质上，表示任何完全联合概率分布



贝叶斯网络示例: Car Diagnosis

- 贝叶斯网络:
  - 某个领域的概率模型

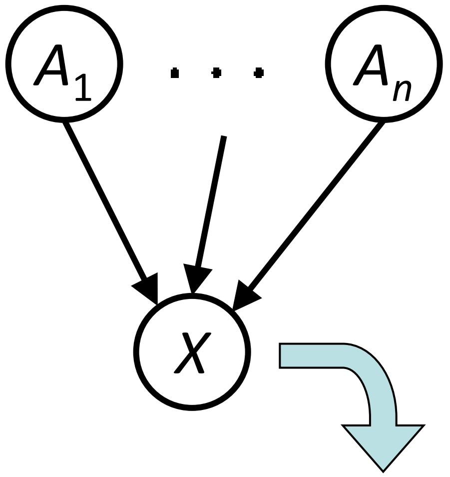


- Questions :
  - 推理：如何计算P（X | e）？
  - 表示法：可以编码什么样的分布?
  - 建模：什么BN最适合给定的领域?

贝叶斯网络模型

- 语法：
  - 结点对应随机变量X_i, $A_1,\ldots, A_n$ 可以是已知的或者是待观测的
  - 有向边表示连接的变量间的"直接影响"
  - 条件概率分布，量化父结点对该结点X_i的影响

$$\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$$



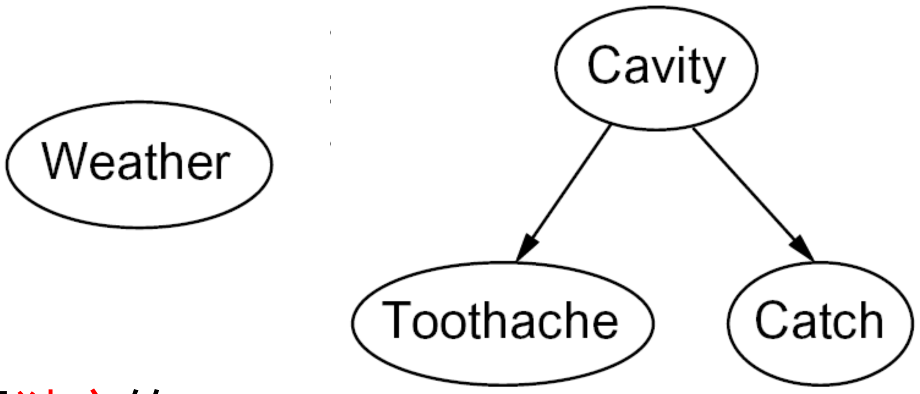
$$P(X \mid A_1 \ldots A_n)$$

- 条件概率表(conditional probability table, CPT), 为每个变量指定其相对于父结点的条件概率

贝叶斯网络= 拓扑结构(图) + 条件概率表

贝叶斯网络模型

- 贝叶斯网络的拓扑结构
  - 用一种精确简洁的方式描述了在问题域中成立的独立和条件独立关系

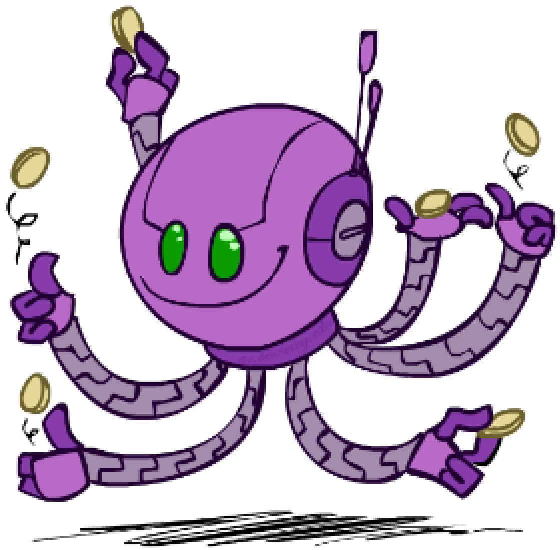


  - *Weather* 与其他变量是独立的
  - 给定 *Cavity* 条件下，*Toothache* 和 *Catch* 是条件独立的

示例1: 抛硬币

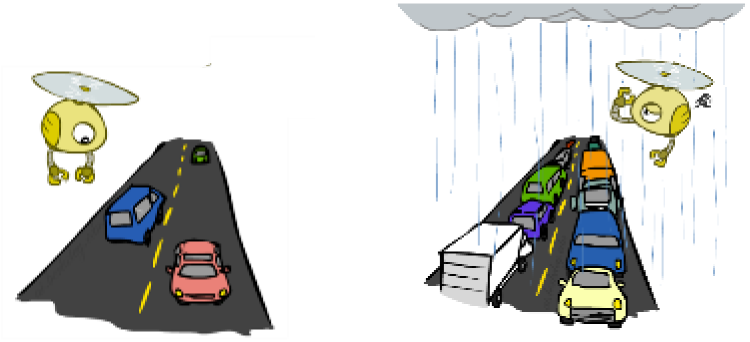
- N 次独立抛硬币

$X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n$



- 变量之间没有关系: 绝对独立性

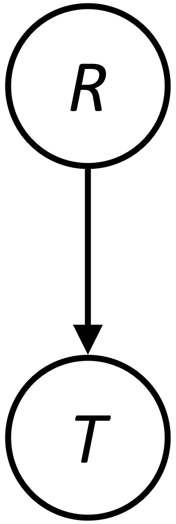
示例2：Traffic



- Variables:
  - R: It rains
  - T: There is traffic

- Model 1: independence

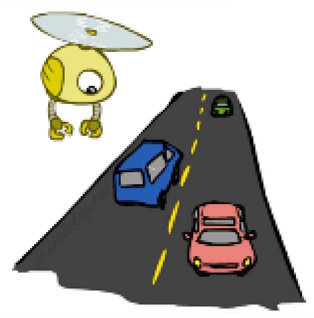
- Model 2: rain causes traffic （因果方向）



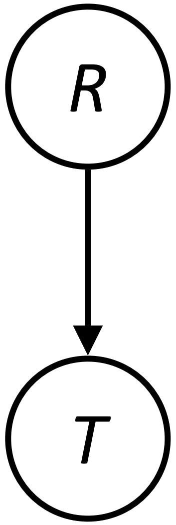
- Agent using model 2 better

示例2: Traffic

- 贝叶斯网络的拓扑结构+ CPT



Model 2: rain causes traffic（因果方向）



$P(R)$

+r	1/4
-r	3/4

$P(T|R)$

+r	+t	3/4
	-t	1/4
-r	+t	1/2
	-t	1/2

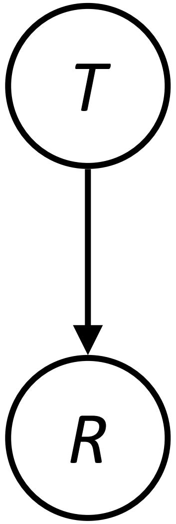
$P(T,R)$

+r	+t	
+r	-t	
-r	+t	
-r	-t	

示例2: Reverse Traffic

- 逆因果方向?

Model 3:



$P(T)$

+t	9/16
-t	7/16

$P(R|T)$

+t	+r	1/3
	-r	2/3

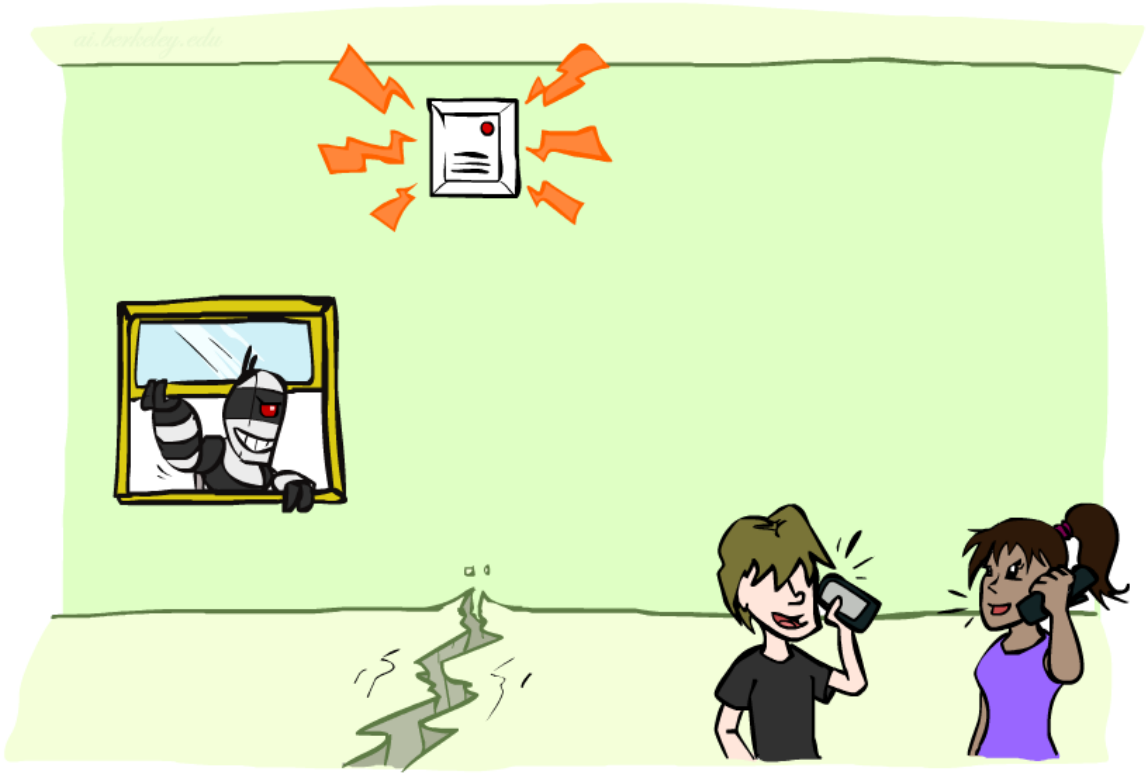
-t	+r	1/7
	-r	6/7

$P(T,R)$

+r	+t	3/16
+r	-t	1/16
-r	+t	6/16
-r	-t	6/16

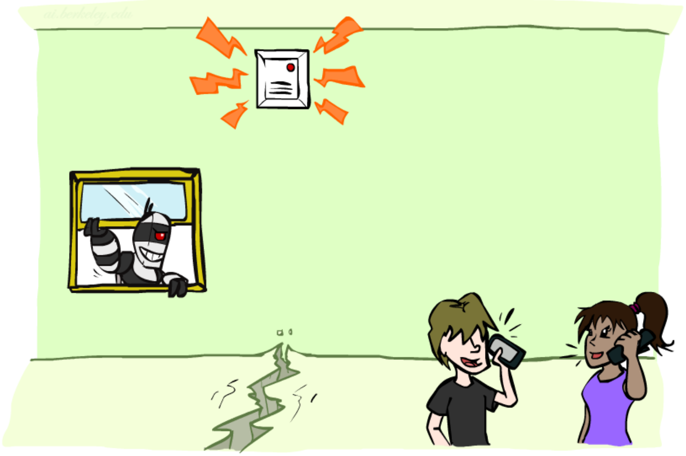
示例3: Alarm Network

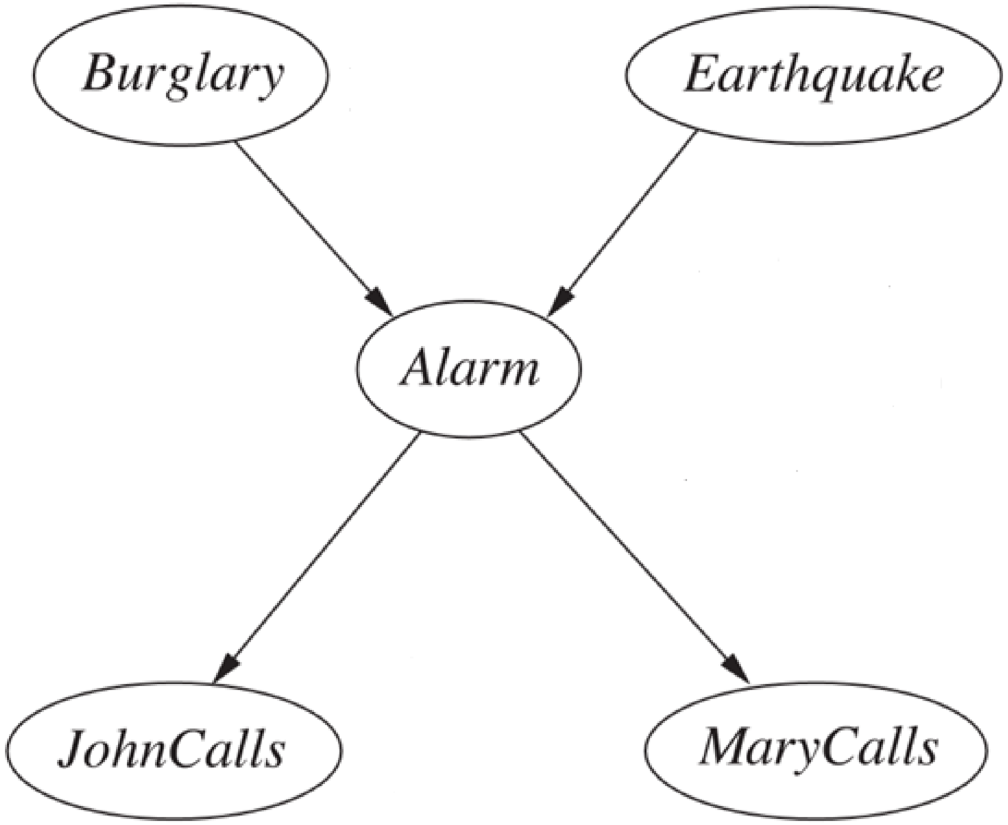
- Alarm Network
  - 我在上班，邻居约翰打电话说我的报警器响了，但邻居玛丽不打电话。有时，它会受到轻微地震的影响。有窃贼吗?
  - 布尔变量: *Burglary, Earthquake, Alarm, JohnCalls, MaryCalls*



示例3: Alarm Network

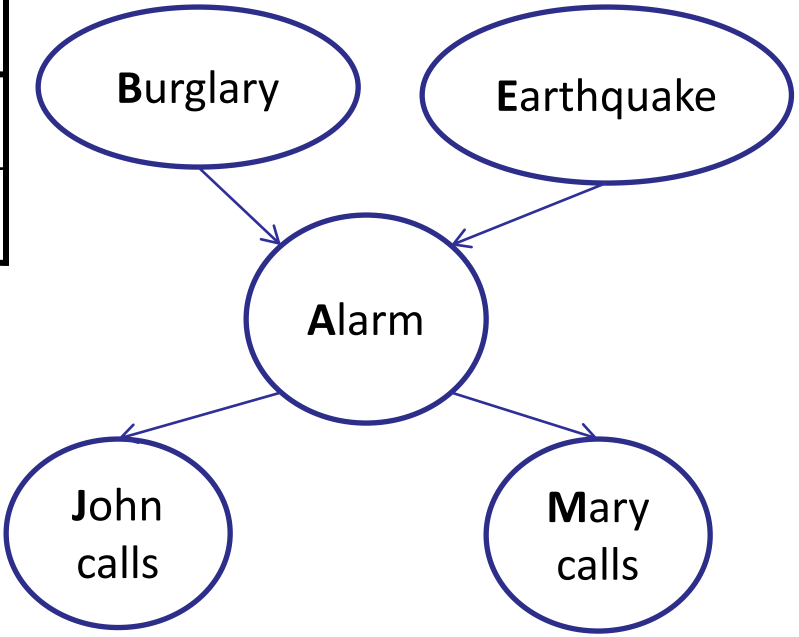
- 布尔变量: *Burglary, Earthquake, Alarm, JohnCalls, MaryCalls*
- 网络拓扑反应了因果关系
  - 窃贼闯入，报警器会响 *Burglary -> Alarm*
  - 地震偶尔报警器也会有反应 *Earthquake -> Alarm*
  - 听到警报声，John会打来电话 *Alarm -> JohnCalls*
  - 听到警报声，Mary会打来电话 *Alarm -> MaryCalls*



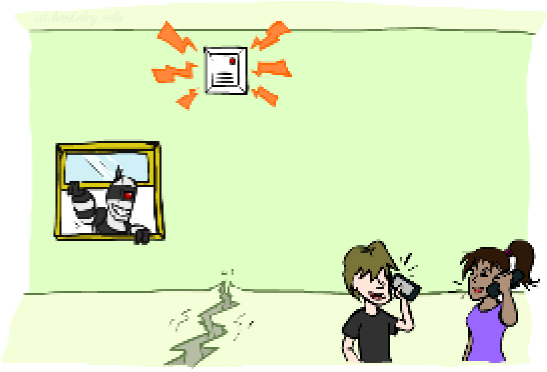


示例3: Alarm Network

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998

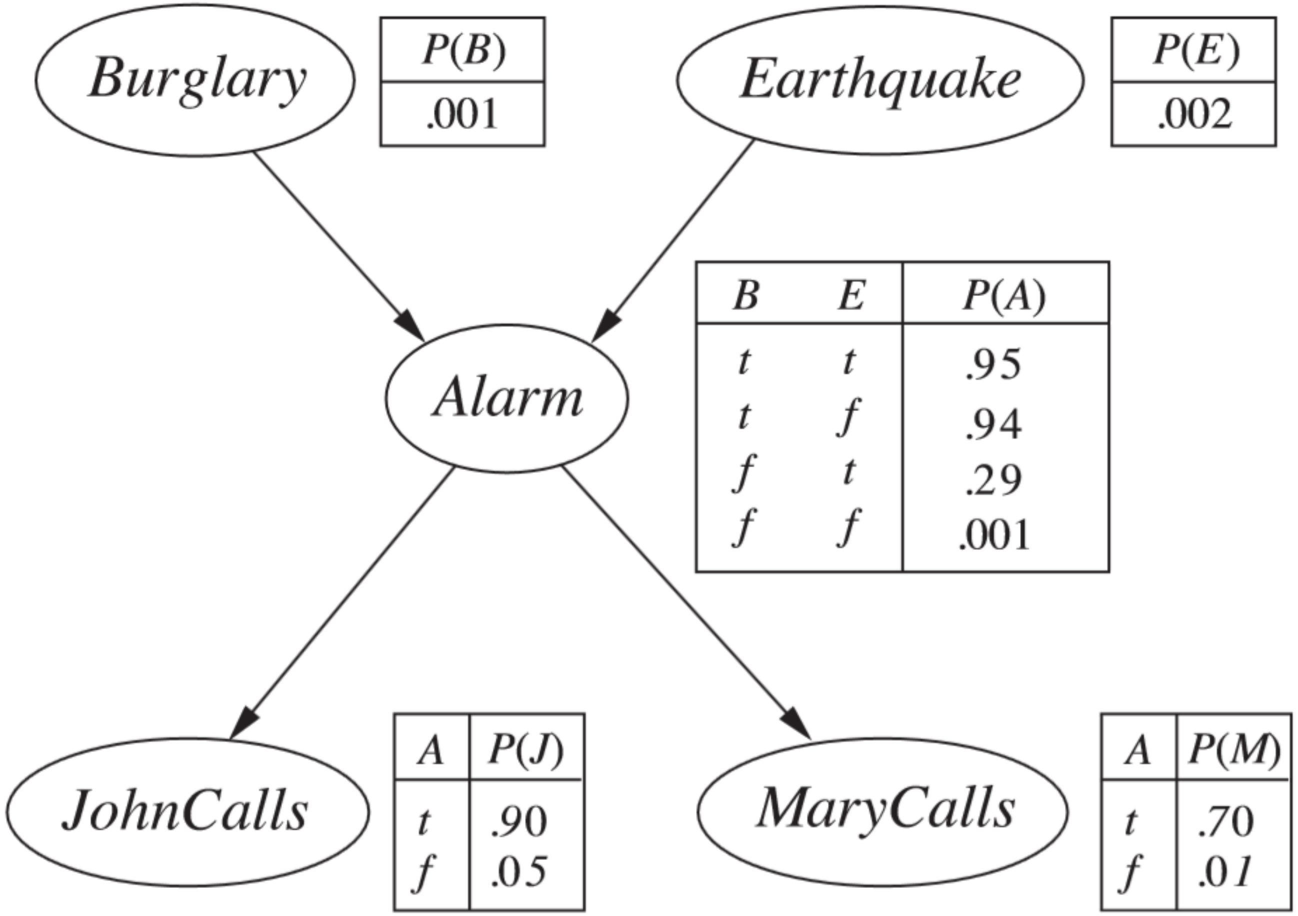


B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

示例3: Alarm Network



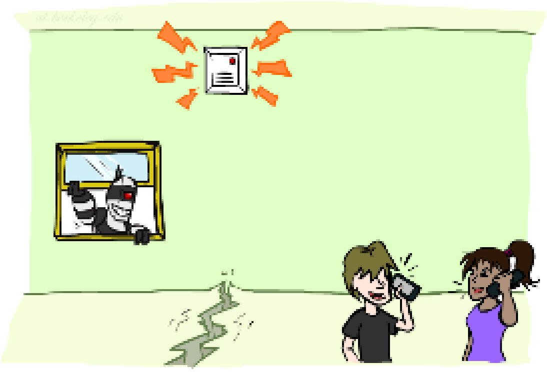
P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	P(A)
t	t	.95
t	f	.94
f	t	.29
f	f	.001

A	P(J)
t	.90
f	.05

A	P(M)
t	.70
f	.01

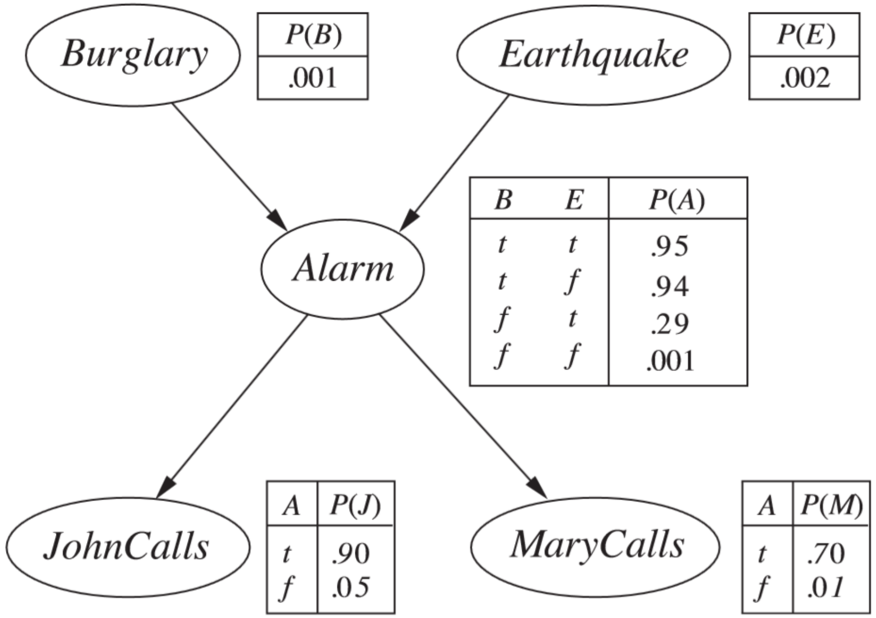


提纲

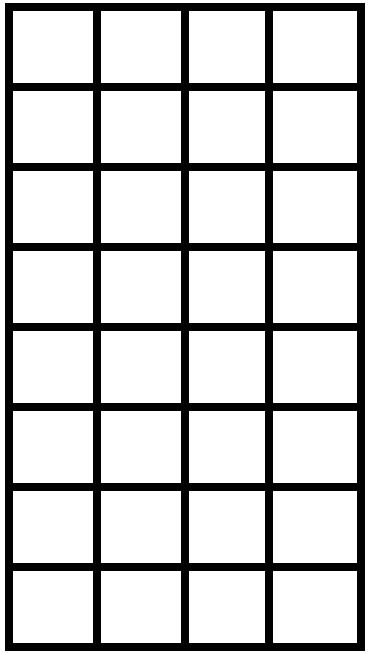
- **第十三章 概率推理**
  - 独立性与条件独立性
  - 不确定问题的知识表示-贝叶斯网络
  - 贝叶斯网络的语义
  - 精确推理：枚举推理、 变量消元

贝叶斯网络的语义

- 贝叶斯网络是完全联合概率分布的一种表示



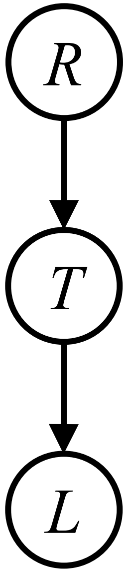
贝叶斯网络



完全联合概率分布

示例：Multiple Joins

$P(R,T,L)=P(R,T)\ P(L|R,T)$



$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

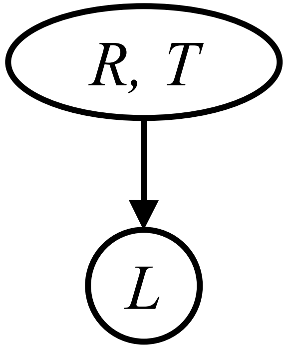
Join R

$P(R,T)$

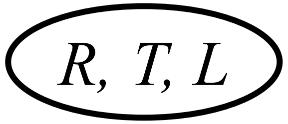
+r	+t	0.08
+r	-t	0.02
-r	+t	0.09
-r	-t	0.81

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9



Join T



$P(R,T,L)$

+r	+t	+l	0.024
+r	+t	-l	0.056
+r	-t	+l	0.002
+r	-t	-l	0.018
-r	+t	+l	0.027
-r	+t	-l	0.063
-r	-t	+l	0.081
-r	-t	-l	0.729

贝叶斯网络的语义

- 贝叶斯网络是完全联合概率分布的一种表示
  - 完全联合概率分布由局部条件概率分布的乘积进行定义（链式法则+条件独立性)

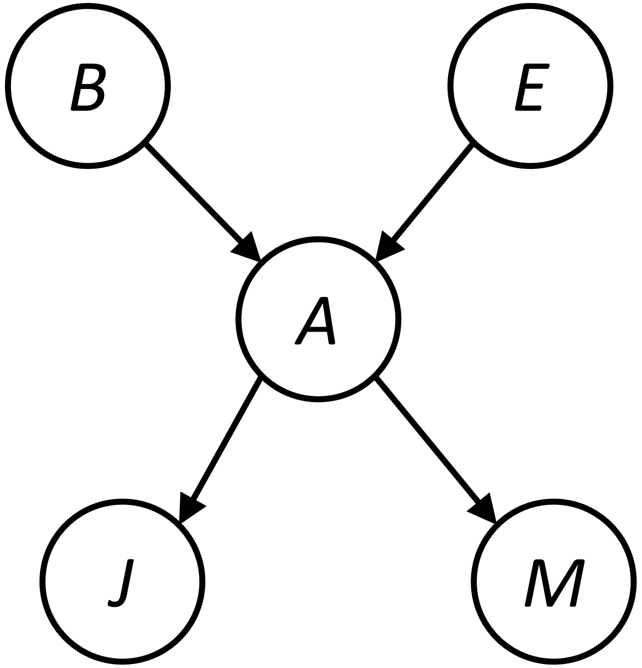
$$\boxed{P(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i\,|\,parents(X_i))}$$

X_i是x_i对应的随机变量

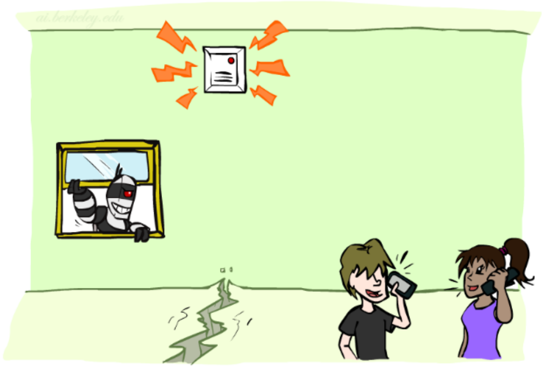
链式法则:
$$\begin{aligned}P(X_1,X_2,\ldots X_n)&=P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1,X_2)\ldots\\&=\prod_{i=1}^{n}P(X_i|X_1,\ldots,X_{i-1})\end{aligned}$$

Example: Alarm Network

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

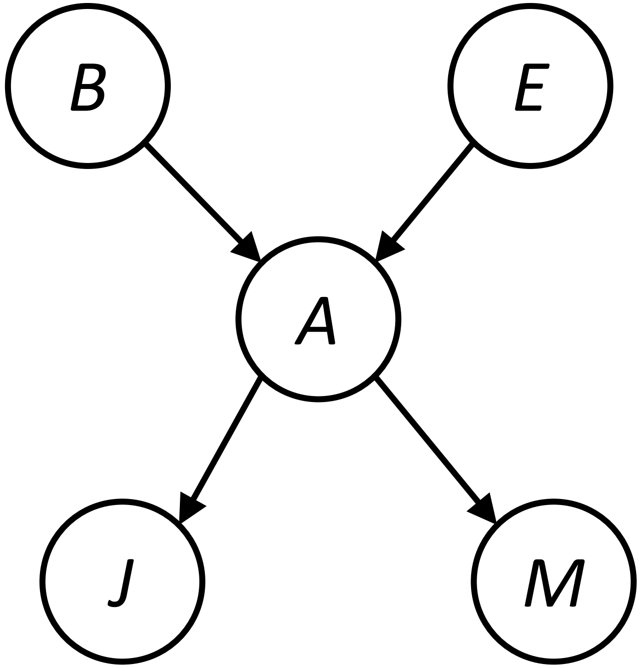
A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

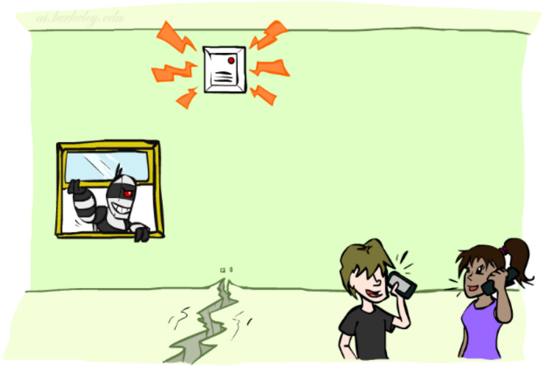
$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$

Example: Alarm Network

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

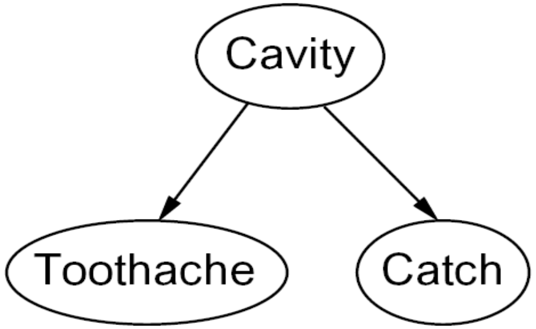
$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$

$$P(+b)P(-e)P(+a| + b, -e)P(-j| + a)P(+m| + a) =$$

$$0.001 \times 0.998 \times 0.94 \times 0.1 \times 0.7$$

练习题

考虑下图中的贝叶斯网络，计算$P(cavity, \neg toothache, catch)$



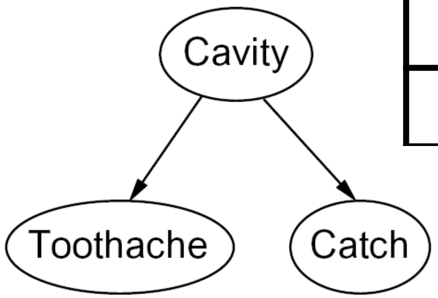
Cavity	P(Cavity)
cavity	0.2

Cavity	P(toothache|Cavity)
cavity	0.6
¬*cavity*	0.1

Cavity	P(catch|Cavity)
cavity	0.2
¬*cavity*	0.1

练习题

考虑下图中的贝叶斯网络，计算$P(cavity, \neg toothache, catch)$



Cavity	P(Cavity)
cavity	0.2

Cavity	P(toothache|Cavity)
cavity	0.6
$\neg$*cavity*	0.1

Cavity	P(catch|Cavity)
cavity	0.2
$\neg$*cavity*	0.1

$P(cavity, \neg toothache, catch)$
$=P(cavity)\, P(\neg toothache \mid cavity)\, P(catch \mid cavity)$
$=0.2 \times 0.4 \times 0.2$
$=0.016$

构造贝叶斯网络的方法

- 1. 结点：选择一组**排好序**的随机变量$X_1,\ldots,X_n$
- 2. 边：i从1 到 n，执行：

  2.1 从$X_1,\ldots,X_{i-1}$中选择X_i的父结点最小的集合，使得

$$\mathbf{P}(X_i|Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$$

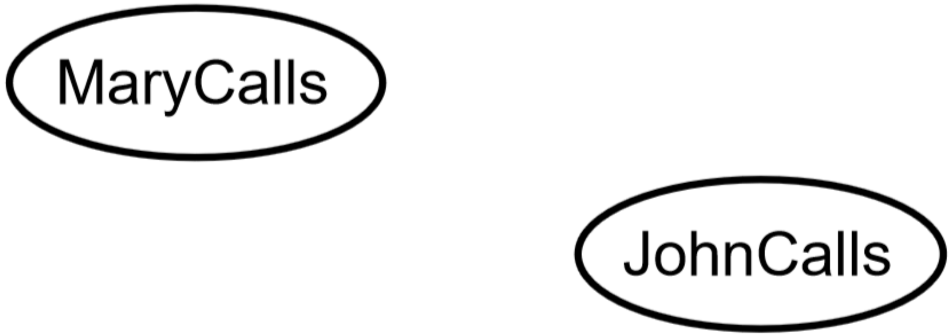
  2.2 在每一个父结点与X_i之间插入一条边

  2.3 条件概率表（CPTs）：写出条件概率表$\mathbf{P}(X_i|Parents(X_i))$

构造贝叶斯网络的方法

示例： Alarm Network

假设选定随机变量的次序：M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$?

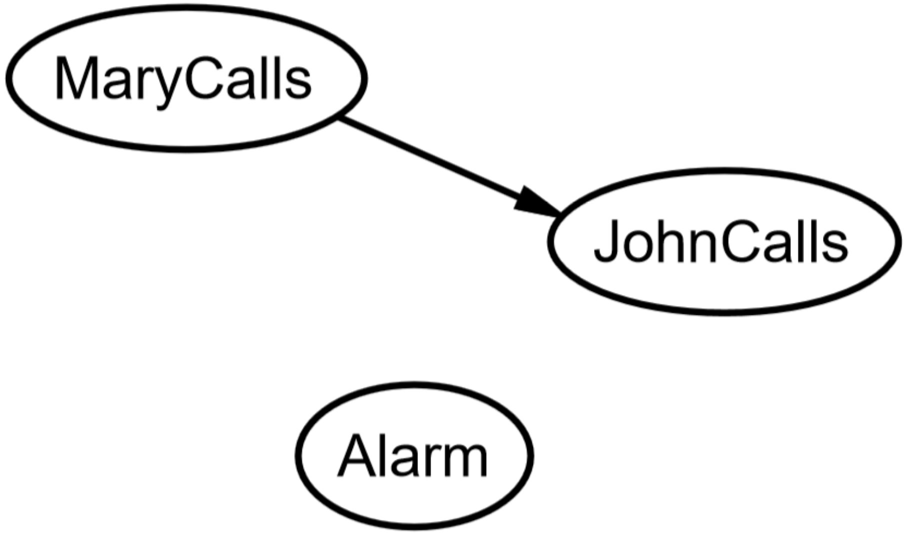
构造贝叶斯网络的方法

示例： Alarm Network

假设选定随机变量的次序：M, J, A, B, E

$P(J|M) = P(J)$? No

$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$?



构造贝叶斯网络的方法

示例： Alarm Network

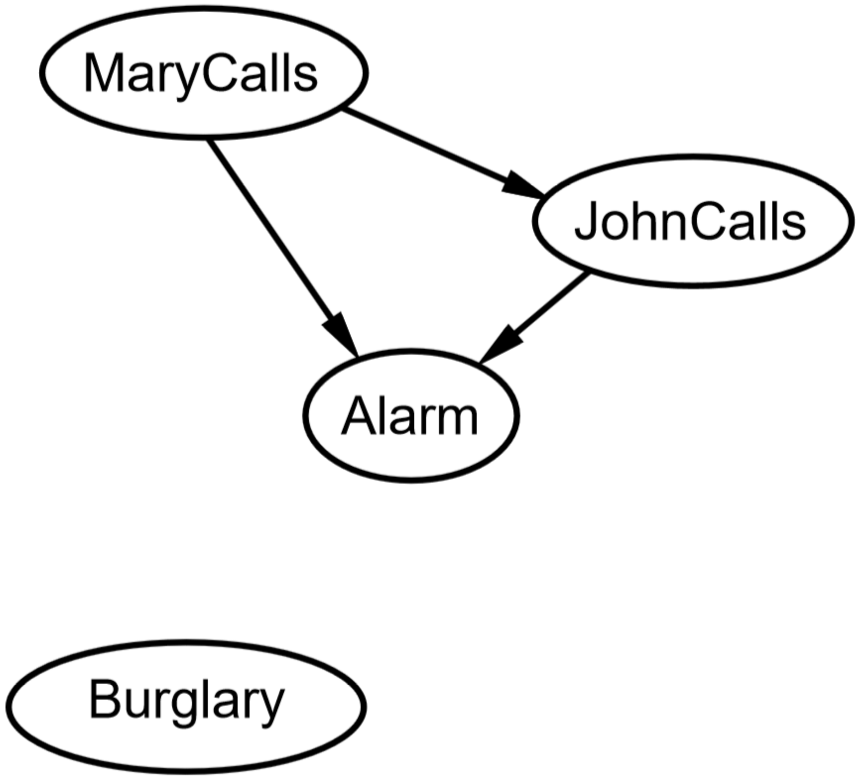
假设选定随机变量的次序：M, J, A, B, E

$P(J|M) = P(J)$? No

$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? No

$P(B|A,J,M) = P(B|A)$?

$P(B|A,J,M) = P(B)$?



构造贝叶斯网络的方法

示例： Alarm Network

假设选定随机变量的次序：M, J, A, B, E

$P(J|M) = P(J)?$ No

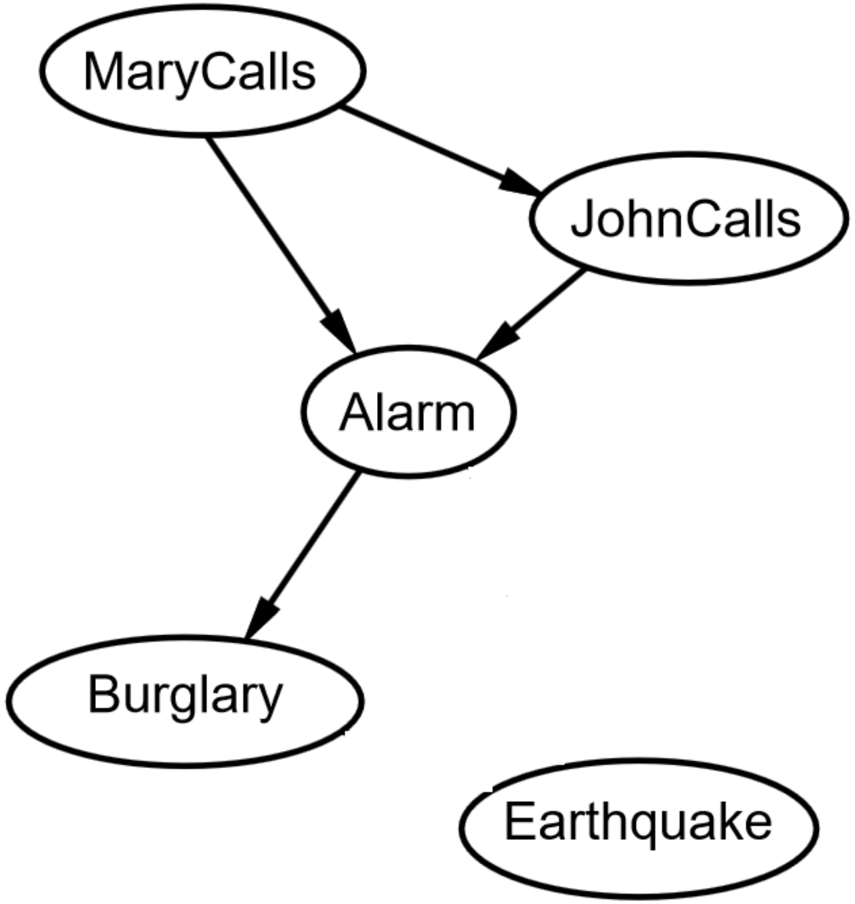
$P(A|J,M) = P(A|J)?$ $P(A|J,M) = P(A)?$ No

$P(B|A,J,M) = P(B|A)?$ Yes

$P(B|A,J,M) = P(B)?$ No

$P(E|B,A,J,M) = P(E|A)?$

$P(E|B,A,J,M) = P(E|A,B)?$



构造贝叶斯网络的方法

示例： Alarm Network

假设选定随机变量的次序：M, J, A, B, E

$P(J|M) = P(J)$? No

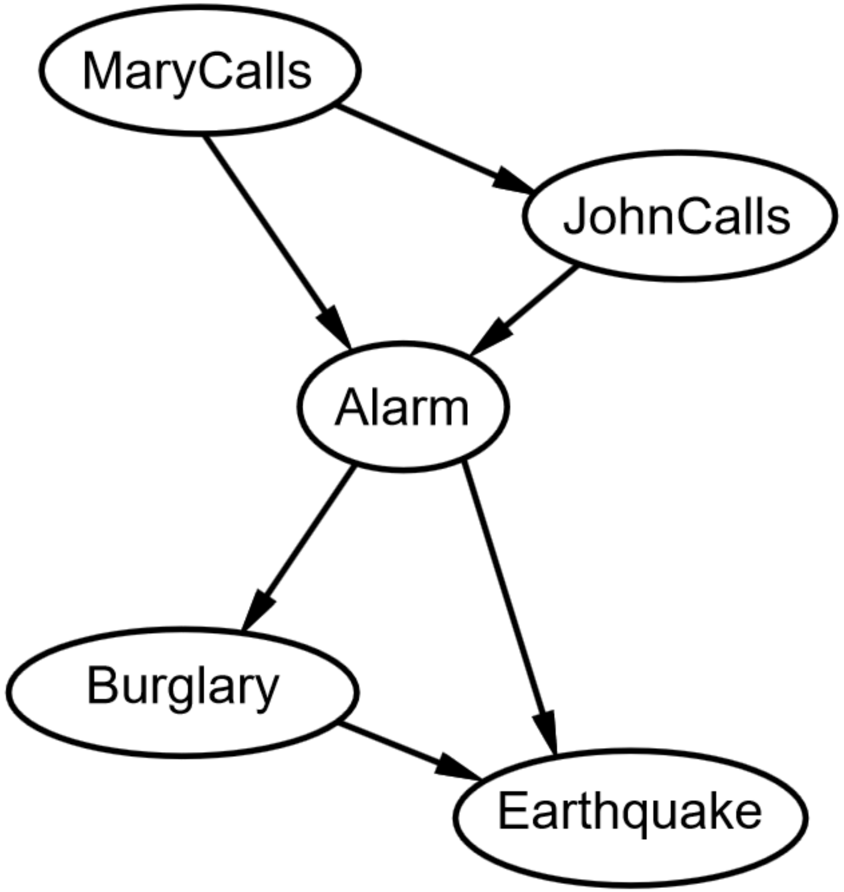
$P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? No

$P(B|A,J,M) = P(B|A)$? Yes

$P(B|A,J,M) = P(B)$? No

$P(E|B,A,J,M) = P(E|A)$? No

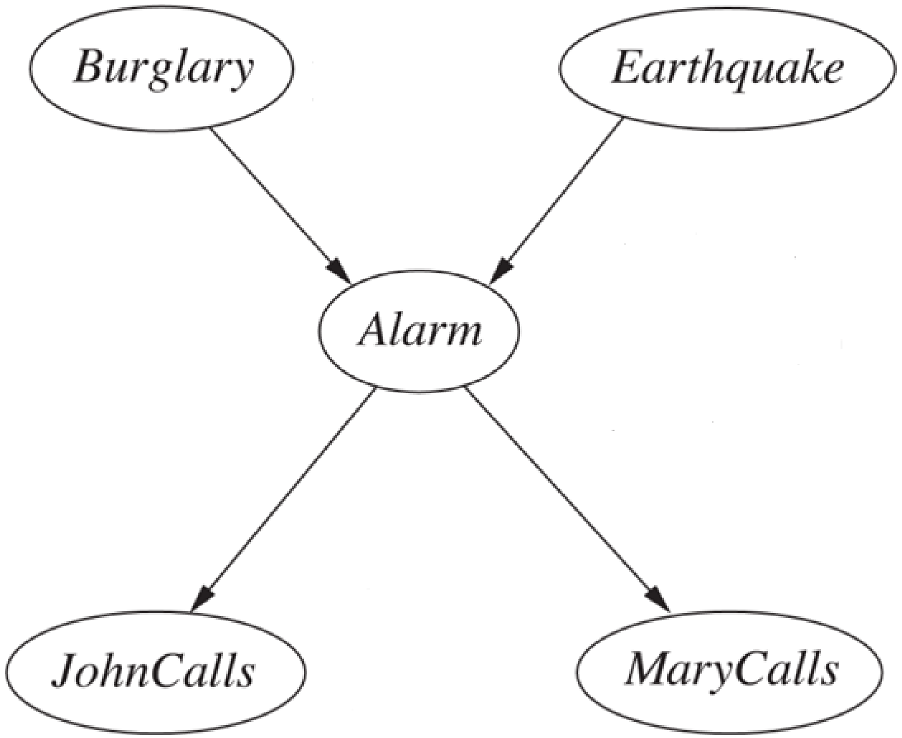
$P(E|B,A,J,M) = P(E|A,B)$? Yes



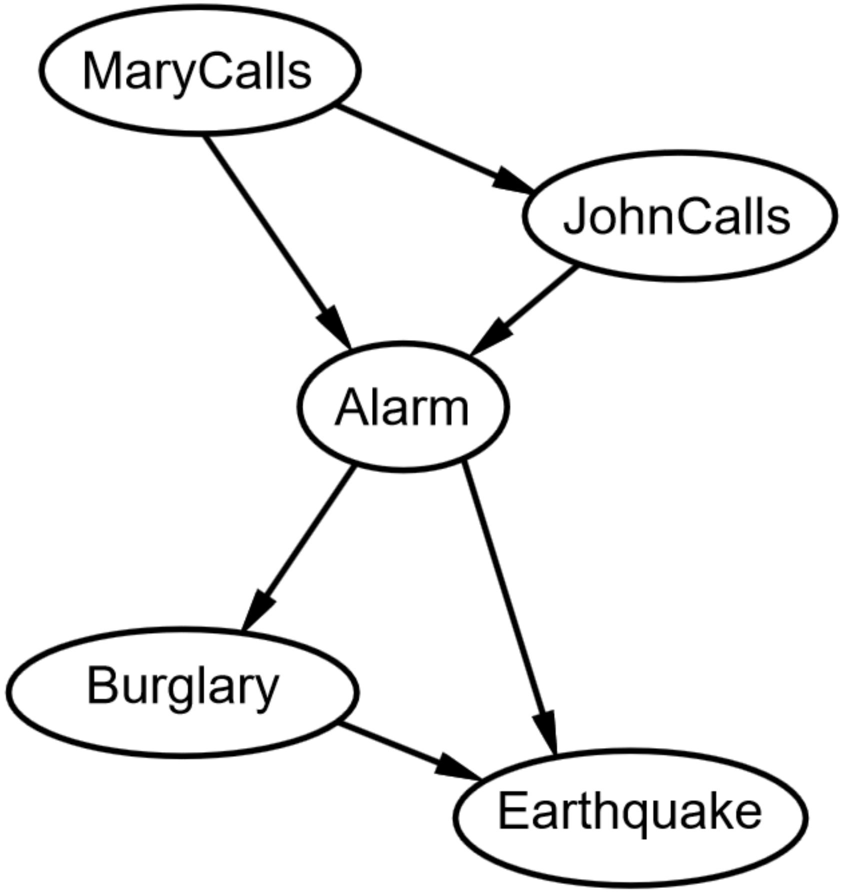
构造贝叶斯网络的方法

示例： Alarm Network

假设选定随机变量的次序：M, J, A, B, E

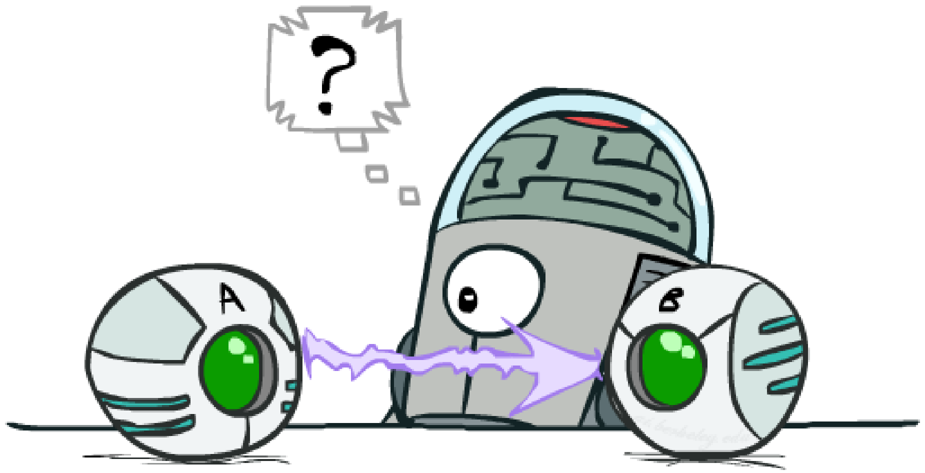


B, E, A, J, M



Causality?

- 当贝叶斯网反映出真正的因果模式时：
  - 通常更简单（节点的父节点更少）
  - 通常更容易思考
  - 通常更容易从专家那里构造出BNs
- 边的箭头反映相关性，而不是因果关系
  - 拓扑可以编码因果结构
  - 拓扑结构真实反映的是随机变量之间的条件独立性



$$P(x_i|x_1, \ldots x_{i-1}) = P(x_i|parents(X_i))$$

联合分布 VS. Bayes Net

- N个布尔变量的联合分布有多大？

  2^N

- 如果节点最多有k个父节点，那么N节点网络有多大?

  $O(N * 2^k)$

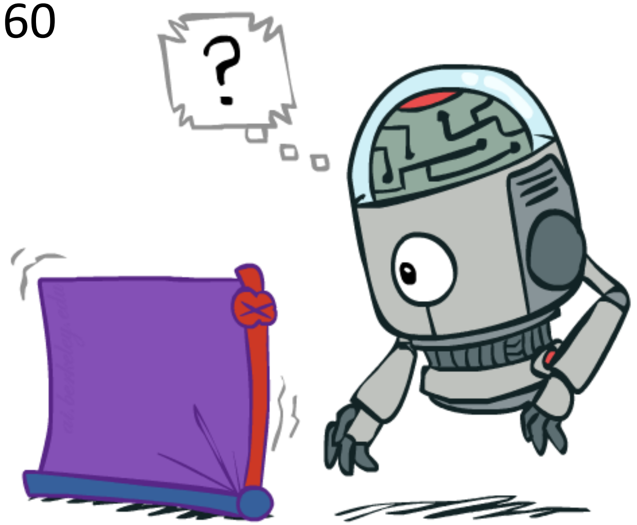
设N=30，k=5，10亿 / 960

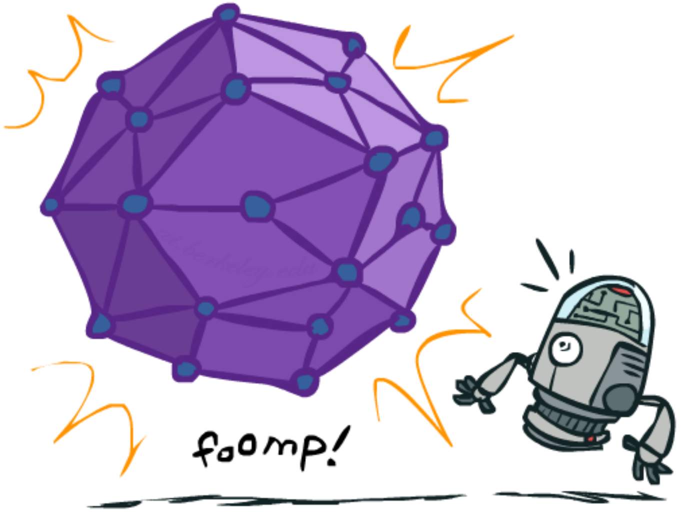
- 两者相同计算的能力

  $$P(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

- BNs：节省大量空间！

- 本地CPT容易构造





提纲

- **第十三章 概率推理**
  - 独立性与条件独立性
  - 不确定问题的知识表示-贝叶斯网络
  - 贝叶斯网络的语义
  - 精确推理：枚举推理、 变量消元

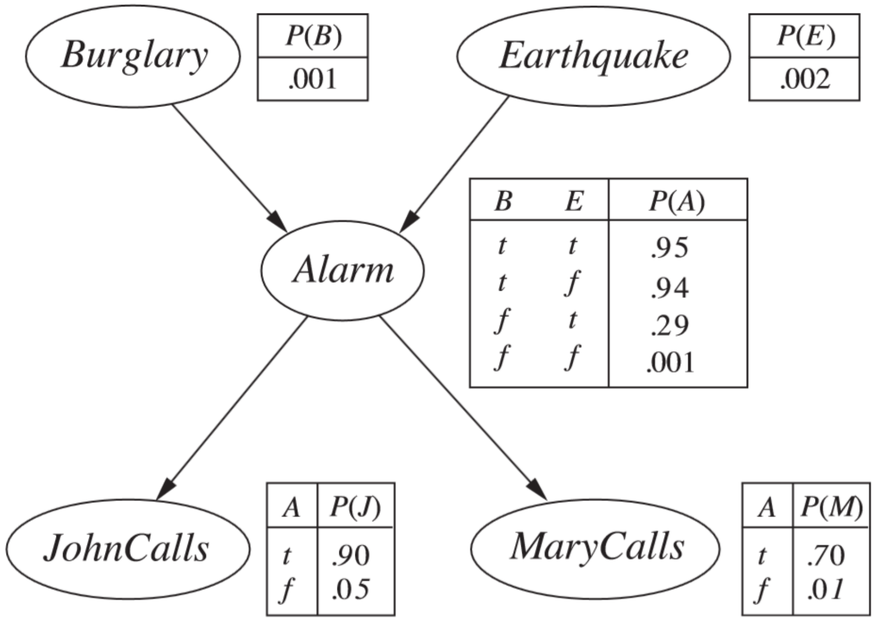
贝叶斯推理

- Inference:
  - 从联合概率分布计算一些有用的量

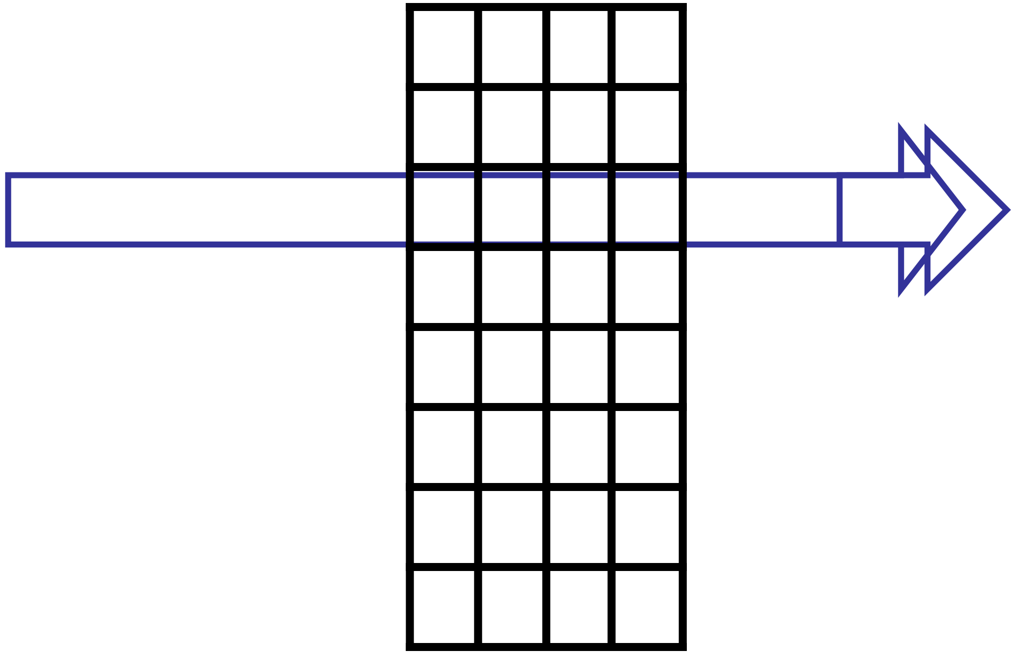
- Examples:
  - 后验概率

$$P(Q|E_1 = e_1, \ldots E_k = e_k)$$

贝叶斯网络



联合分布



查询

$$P(a \mid e)$$

贝叶斯推理

- 基本任务:
  - 证据变量: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
  - 查询变量: Q
  - 隐藏变量: $H_1 \dots H_r$

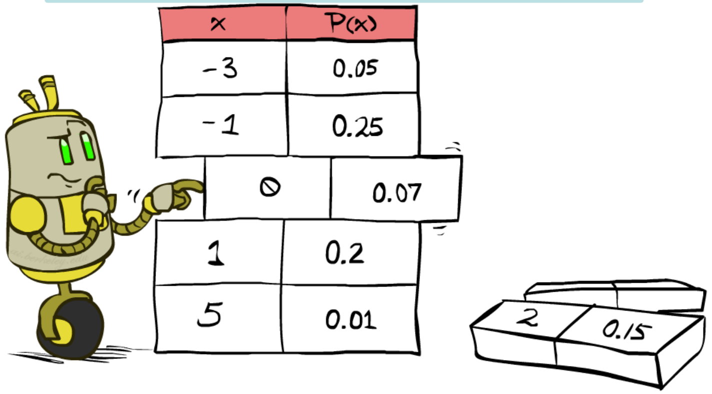
$\left.\begin{matrix} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{matrix}\right\}\ X_1, X_2, \dots X_n$

All variables

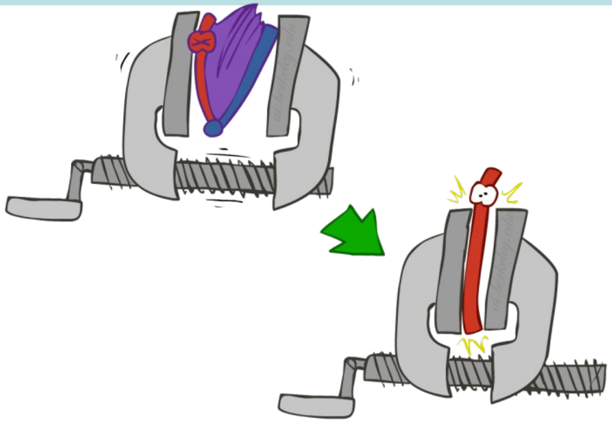
- 典型的查询是询问后验概率:

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

- Step 1:选择与证据一致的条目



- Step 2: 对H求和，得到查询与证据的联合概率



$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} \underbrace{P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)}_{X_1, X_2, \dots X_n}$$

- Step 3: 归一化

$$\times \frac{1}{Z}$$

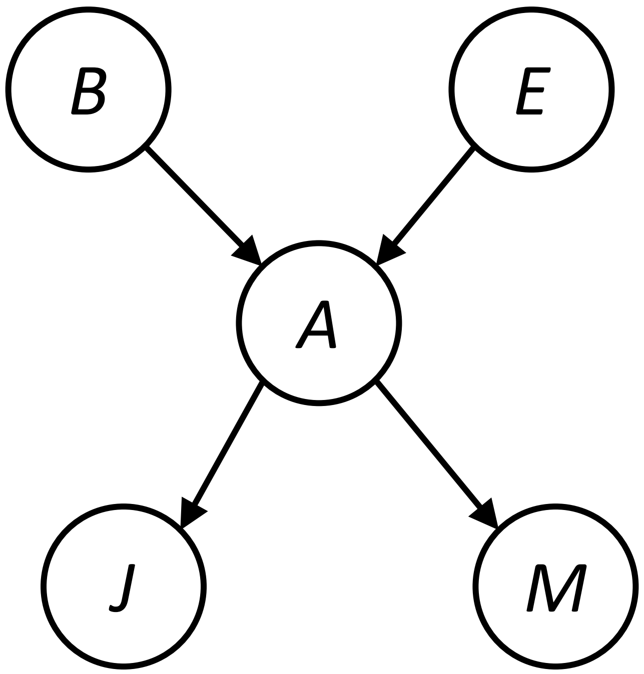
$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \cdots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

贝叶斯推理

示例： Alarm Network

- 已知John和Mary都打来了电话，问出现盗贼的概率分布?
- 分析:
  - 证据变量: *JohnCalls* =true， *MaryCalls* =true
  - 查询变量: Burglary
  - 隐藏变量: *Earthquake*, *Alarm*
- 问题：$P(Burglary|JohnCalls=\text{true}, MaryCalls=\text{true}) = ?$
- 简写为：$P(B|j,m)$?



通过枚举进行推理

- 直接求和联合概率分布中的变量，而不进行实际概率的显式计算

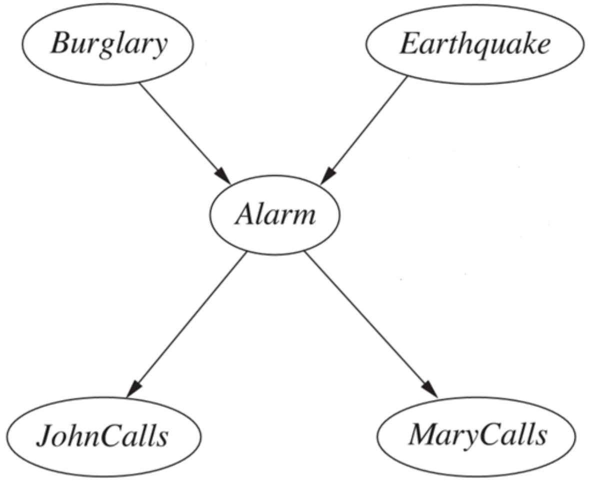
根据归一化方法

可能世界的概率之和
(隐藏变量求和消元)

$$\mathbf{P}(B|j,m)$$
$$=\alpha\, \mathbf{P}(B,j,m)$$
$$=\alpha \sum_{e}\sum_{a} \mathbf{P}(B,e,a,j,m)$$

通过枚举进行推理

- 直接求和联合概率分布中的变量，而不进行实际概率的显式计算



$$\mathbf{P}(B|j,m)$$

根据归一化方法

$$=\alpha\,\mathbf{P}(B,j,m)$$

可能世界的概率之和

$$=\alpha\sum_{e}\sum_{a}\mathbf{P}(B,e,a,j,m)$$

根据贝叶斯网络的语义

$$=\alpha\sum_{e}\sum_{a}\mathbf{P}(B)\,P(e)\mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a)$$

简化计算

$$=\alpha\mathbf{P}(B)\sum_{e}P(e)\sum_{a}\mathbf{P}(a|B,e)\,P(j|a)\,P(m|a)$$

通过枚举进行推理

示例： Alarm Network

$$\mathbf{P}(B|j,m)$$

$$= \alpha\ \mathbf{P}(B)\sum_{e} P(e) \sum_{a} P(j|a)\ \ P(m|a)\ \mathbf{P}(a|B,e)$$

$$= \alpha\, \mathbf{P}(B)\ \{P(+e)\{P(+j|+a)P(+m|+a)\mathbf{P}(+a|B,+e) + P(+j|-a)P(+m|-a)\mathbf{P}(-a|B,+e)\}$$

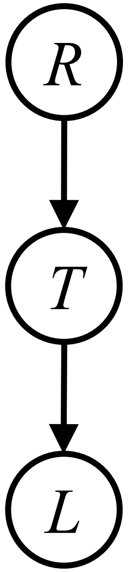
$$+ P(-e)\{P(+j|+a)P(+m|+a)\mathbf{P}(+a|B,-e) + P(+j|-a)P(+m|-a)\mathbf{P}(-a|B,-e)\}\}$$

$$= \alpha < 0.0006{,}0.0015 > \approx <0.284{,}0.716>$$

故，在两个邻居都打来电话的条件下，出现盗贼的概率分布约<0.284,0.716>

Example: Traffic Domain

- Random Variables
  - R: Raining
  - T: Traffic
  - L: Late for class!



$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

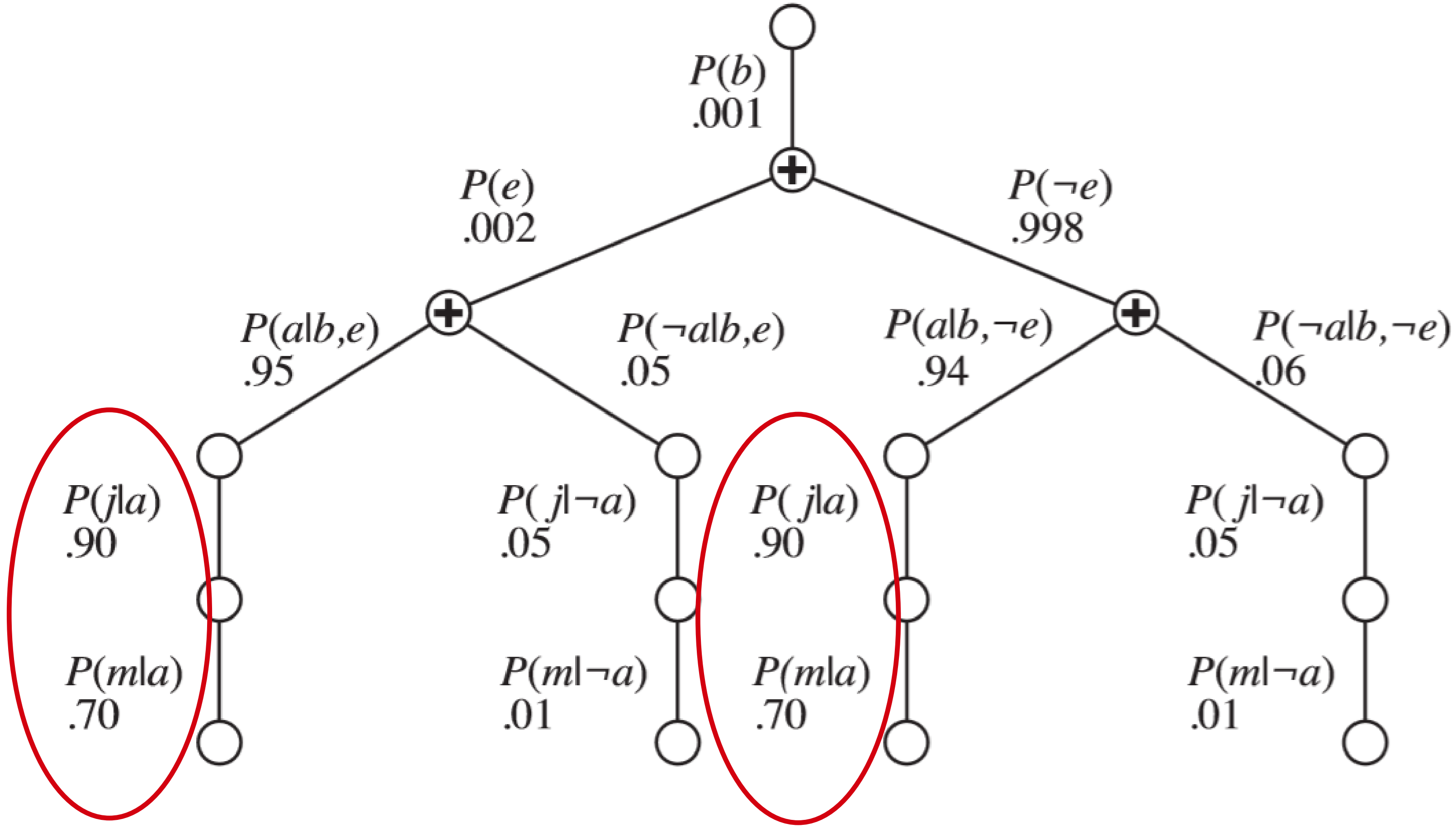
$$P(L) = ?$$

$$= \sum_{r,t} P(r, t, L)$$

$$= \sum_{r,t} P(r)P(t|r)P(L|t)$$

通过枚举进行推理

$$P(b|j,m) = \alpha P(b)\sum_{e} P(e)\sum_{a} P(j|a)\,P(m|a)\,P(a|b,e)$$



问题：枚举过程存在重复计算

提纲

- **第十三章 概率推理**
  - 独立性与条件独立性
  - 不确定问题的知识表示-贝叶斯网络
  - 贝叶斯网络的语义
  - 精确推理：枚举推理、 变量消元

变量消元算法

- **工作方式:**
  - 按照从右到左的次序计算表达式
  - 保存中间结果，避免重复计算

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(B|j,m) \\
&= \alpha \underbrace{\mathbf{P}(B)}_{B} \sum_e \underbrace{P(e)}_{E} \sum_a \underbrace{\mathbf{P}(a|B,e)}_{A} \underbrace{P(j|a)}_{J} \underbrace{P(m|a)}_{M} \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a \mathbf{P}(a|B,e) P(j|a) \underline{f_M(a)} \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a \mathbf{P}(a|B,e) \underline{f_J(a)} f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a \underline{f_A(a,b,e)} f_J(a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \underline{f_{\bar{A}JM}(b,e)} \ (\text{sum out } A) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \underline{f_{\bar{E}\bar{A}JM}(b)} \ (\text{sum out } E) \\
&= \alpha \underline{f_B(b)} \times f_{\bar{E}\bar{A}JM}(b)
\end{aligned}
$$

因子(factor):表达式中的每个部分

变量消元算法

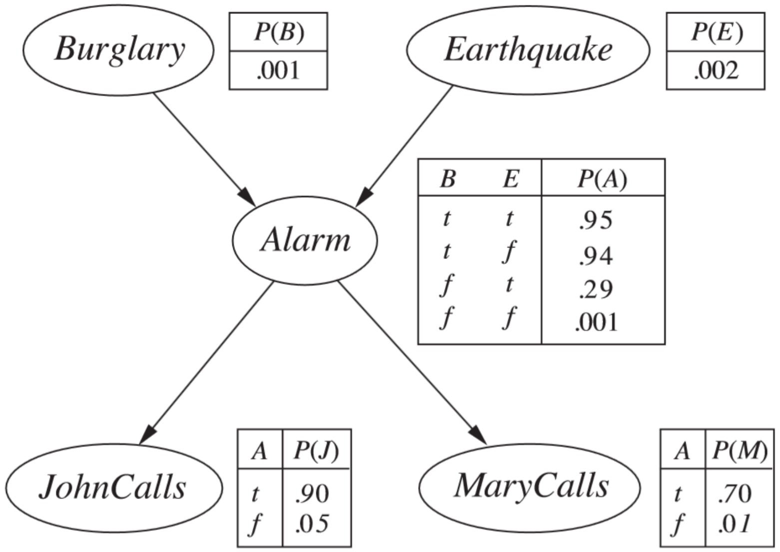
- **工作方式：**
  - 按照从右到左的次序计算表达式
  - 保存中间结果，避免重复计算

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(B|j,m) \\
&= \alpha \underbrace{\mathbf{P}(B)}_{B} \textstyle\sum_e \underbrace{P(e)}_{E} \textstyle\sum_a \underbrace{\mathbf{P}(a|B,e)}_{A} \underbrace{P(j|a)}_{J} \underbrace{P(m|a)}_{M} \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) \textstyle\sum_a \mathbf{P}(a|B,e) P(j|a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) \textstyle\sum_a \mathbf{P}(a|B,e) f_J(a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) \textstyle\sum_a f_A(a,b,e) f_J(a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) f_{\bar{A}JM}(b,e) \ \text{(sum out } A\text{)} \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) f_{\bar{E}\bar{A}JM}(b) \ \text{(sum out } E\text{)} \\
&= \alpha f_B(b) \times f_{\bar{E}\bar{A}JM}(b)
\end{aligned}
$$

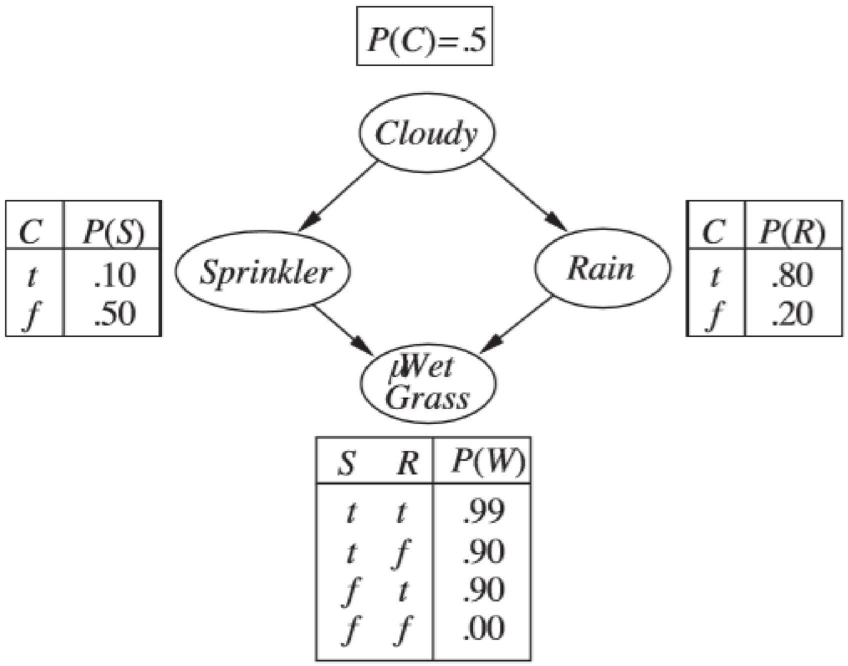
- 两个基本的计算操作
  - 两个因子逐点相乘
  - 变量求和消元

精确推理的复杂性

- 精确推理的复杂性高度依赖于网络的结构
  - 单连通网络



多连通网络



精确推理的复杂性

- 精确推理的复杂性高度依赖于网络的结构
  - 单连通网络
    - 网络中任意两个结点之间顶多只有一条(无向)路径
    - 精确推理的时间和空间复杂度与网络规模呈线性关系
  - 多连通网络
    - 变量消元算法在最坏情况下具有指数量级的时间和空间复杂度。
    - 贝叶斯网络推理严格难于NP完全问题

第13周 课后作业

14.14 考虑图 14.23 中的贝叶斯网络。

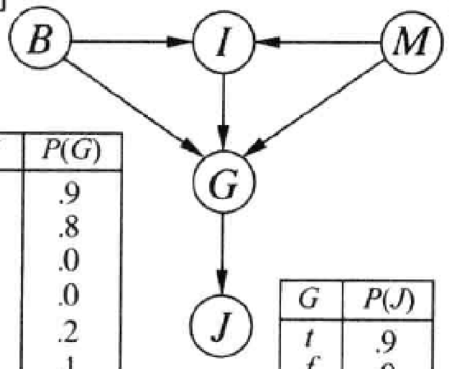
b. 计算 $P(b, i, \neg m, g, j)$的值。

c. 计算某个人如果触犯了法律、被起诉、而且面临一个有政治动机的检举人，他会进监狱的概率。

$P(B)$
.9

B	M	$P(I)$
t	t	.9
t	f	.5
f	t	.5
f	f	.1

$P(M)$
.1



B	I	M	$P(G)$
t	t	t	.9
t	t	f	.8
t	f	t	.0
t	f	f	.0
f	t	t	.2
f	t	f	.1
f	f	t	.0
f	f	f	.0

G	$P(J)$
t	.9
f	.0

图 14.23 一个具有布尔变量 *B=BrokeElectionLaw*, *I=Indicted*, *M=PoliticallyMotivatedProsecutor*, *G=FoundGuilty*, *J=Jailed* 的简单贝叶斯网络

谢谢！