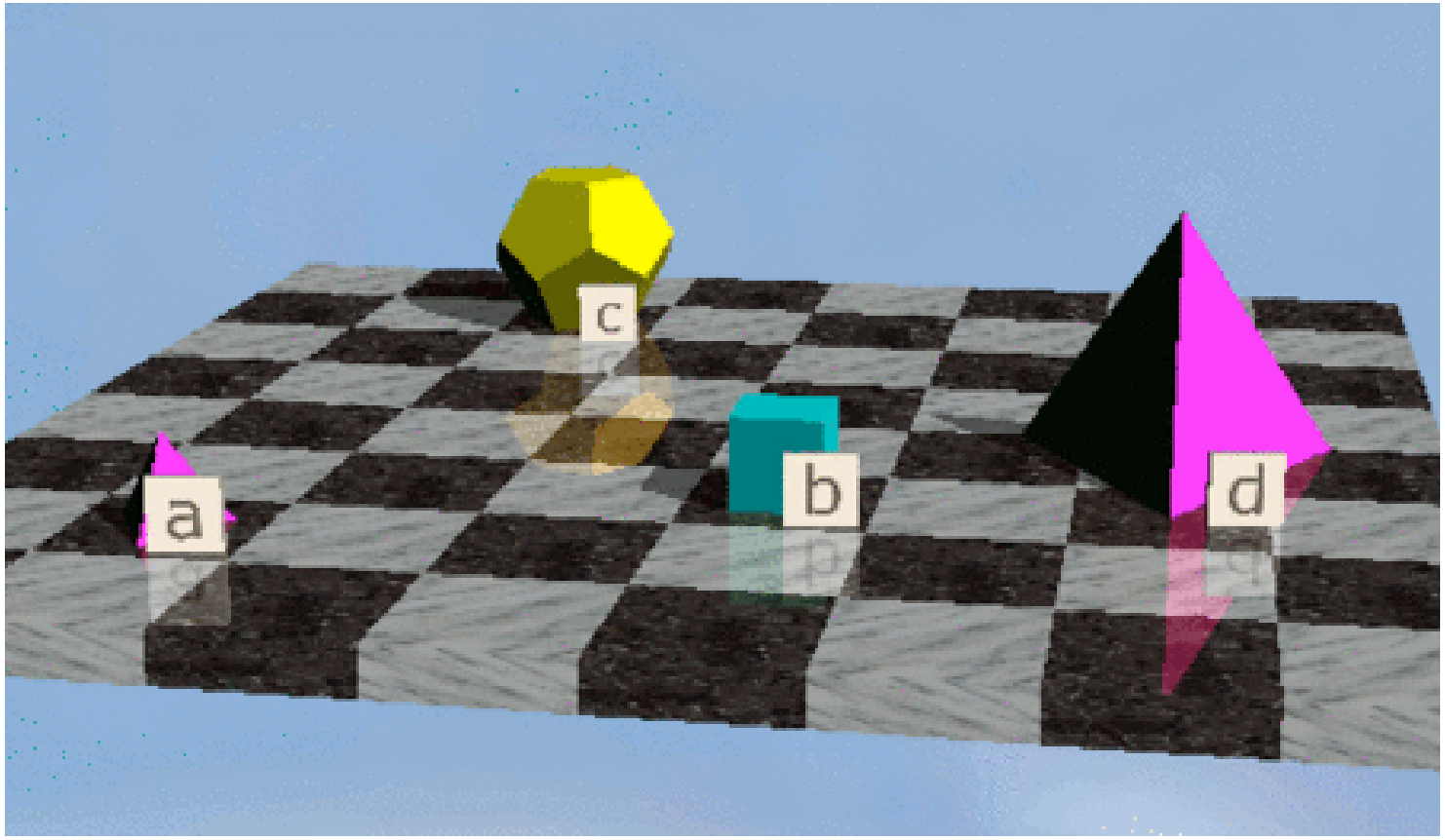
Artificial Intelligence

第8/9章 一阶逻辑推理



表示能力

- 命题逻辑不考虑命题之间的内在联系和数量关系，缺乏简洁描述具有多个对象的环境的表达能力。
- 一阶（谓词）逻辑可通过个体词、谓词和量词、以及它们之间的逻辑关系，反映内在联系。
  - 例如，Rules of Wumpus World:
    - $\forall s\ Breezy(s) \Rightarrow [\exists r\ Adjacent(r,s) \wedge Pit(r)]$
  - Rules of chess:
    - 100,000 pages in propositional logic
    - 1 page in first-order logic

R_4： $B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
R_5： $B_{2,1} \Rightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

提纲

一阶逻辑基本概念

一阶逻辑化为子句

基于归结原理的推理算法

归结原理的应用

一阶逻辑中的基本概念

FOL的语法

语句 $Sentence \rightarrow AtomicSentence$
$\mid (\ Sentence\ Connective\ Sentence\ )$
$\mid Quantifier\ Variable,\ldots\ Sentence$
$\mid \neg\ Sentence$

原子语句 $AtomicSentence \rightarrow Predicate(Term,\ldots) \mid Term = Term$

对象 $Term \rightarrow Function(Term,\ldots)$
$\mid Constant$
$\mid Variable$

FOL的语法: 基本元素

连接符 $Connective \rightarrow \Rightarrow \mid \wedge \mid \vee \mid \Leftrightarrow$

量词 $Quantifier \rightarrow \forall \mid \exists$

常量 $Constant \rightarrow A \mid X_1 \mid John \mid \ldots$

变量 $Variable \rightarrow a \mid x \mid s \mid \ldots$

谓词 $Predicate \rightarrow Before \mid HasColor \mid Raining \mid \ldots$

函数 $Function \rightarrow Mother \mid LeftLeg \mid \ldots$

谓词和函数的区别：

谓词：*HasFather*(x,y)

函数：*Father*(x)

知识的一阶逻辑表达方法

例 “每个人都有一个父亲”

- 定义谓词:
  - *Person*(x)：表示x是人
  - *HasFather*(x,y)：表示x有父亲y
- 谓词公式

$$(\forall x)(\exists y)(\mathit{Person}(x) \rightarrow \mathit{HasFather}(x,y))$$

知识的一阶逻辑表达方法

怪兽世界的知识库

$\forall x,y,a,b\ Adjacent([x,y],[a,b]) \Leftrightarrow Belong([a,b], \{[x+1,y], [x-1,y],[x,y+1],[x,y-1]\})$

在无底黑洞旁边的方块有风:

- Diagnostic 规则—由现象推测原因

$\forall s\ Breezy(s) \Rightarrow \exists r\ Adjacent(r,s) \wedge Pit(r)$

Causal 规则—由原因推测现象

$\forall r\ Pit(r) \Rightarrow [\forall s\ Adjacent(r,s) \Rightarrow Breezy(s)]$

提纲

一阶逻辑基本概念

一阶逻辑化为子句

基于归结原理的推理算法

归结原理的应用

一阶逻辑化为子句

- **子句**
  - 谓词逻辑中，把原子语句及原子语句的否定统称为文字
  - 任何文字的析取式称为子句
    - $P \vee Q$、 $\neg P(x, f(x), y) \vee Q(y) \vee R(f(x))$ 都是子句
  - 不包含任何文字的子句称为空子句
    - 空子句不能被任何解释满足，所以空子句是永假的，不可满足的
  - **一阶谓词逻辑中，任何一个一阶逻辑语句都可以化成一个子句集**

一阶逻辑化为子句

将一阶逻辑公式化为子句集的步骤：

(1)消蕴含和等价

(2)否定内移

(3)变量标准化

(4)消去存在量词∃

(5)将公式化为前束形

(6)化为合取范式

(7)略去全称量词

(8)消去合取符号∧

(9)子句变量标准化

如果存在量词不在任何一个全称量词的辖域内，则该存在量词不依赖于任何其它的变量，因此可用一个新的个体常量代替　如 $\exists x\ P(x)$ 化为 $P(A)$

如果存在量词是在全称量词的辖域内

如：$\forall y(\exists x\ P(x,y))$，x的取值依赖于y的取值

由Skolem斯克林函数f(y)表示依赖关系化为 $\forall y(P(f(y),y))$

一阶逻辑化为子句

【例】化成子句集

$$(\forall x)\{[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\Rightarrow(\exists y)[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge(\forall x)[P(x)\vee B(x)]$$

转换过程遵照上述9个步骤：

(1)消蕴含“⇒”

一阶逻辑化为子句

(1)消蕴含“⇒”：

$(\forall x)\{\neg[\neg P(x) \vee \neg Q(x)] \vee (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall x)[P(x) \vee B(x)]$

(2)否定内移：

$(\forall x)\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall x)[P(x) \vee B(x)]$

(3)变量标准化：

$(\forall x)\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall w)[P(w) \vee B(w)]$

(4)消去存在量词∃：

$(\forall x)\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee [S(x,\mathbf{f(x)}) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall w)[P(w) \vee B(w)]$

一阶逻辑化为子句

(5)将公式化为前束形

$(\forall x)(\forall w)\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee[S(x,f(x))\wedge Q(x)]\}\wedge[P(w)\vee B(w)]$

(6)化为合取范式:

$(\forall x)(\forall w)\{[P(x)\vee S(x,\ f(x))]\wedge Q(x)\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$

(7)略去全称量词:

$[P(x)\vee S(x,\ f(x))]\wedge Q(x)\wedge[P(w)\vee B(w)]$

(8)消去合取符号∧:

子句集为: $P(x)\vee S(x,\ f(x))$; $Q(x)$; $P(w)\vee B(w)$

(9) 子句变量标准化:

最终的子句集为: $P(x)\vee S(x,\ f(x))$; $Q(y)$; $P(w)\vee B(w)$

提纲

一阶逻辑基本概念

一阶逻辑化为子句

基于归结原理的推理算法

归结原理的应用

归结原理

归结原理

归结原理又称为消解原理，它是定理证明基础

命题逻辑归结

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k \ , \qquad m_1 \vee \ldots \vee m_n}{l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots \vee m_n}$$

其中 l_i 和 m_j 是互补文字(一个是另一个的否定式)

归结原理

- **一阶逻辑归结**

  在一阶逻辑中，子句中含有变量，为将归结原理应用于含有变量的子句，应找出一个置换，作用于给定的两个子句，使它们包括互补的文字，然后才能进行归结

例1: 子句集S={P(x)∨Q(x)，¬P(A)∨R(y)}，两个子句不能直接归结，但若对子句集置换s={A/x}，则两个子句分别为P(A)∨Q(A)和¬P(A)∨R(y)，归结为：Q(A)∨R(y)

置换和合一

为了使用推理规则，如假言推理、假言三段论等，一个推理系统必须决定两个表达式是否相同或匹配：

两个表达式匹配当且仅当其语法是等价的

一个表达式的项可以是常量、变量或函数，合一就是寻找项对变量的置换而使表达式一致的过程，**合一是一阶推理算法的关键**

例：公式P(x,f(y),B)与P(x,f(B),B)，用常量B代替变量y，从而使两个公式一致。 称为：通过置换{B/y}就可使上述公式集合一

置换和合一

置换用有序对的集合$s=\{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$表示。

其中t_i/v_i表示用项t_i置换变量v_i，t_i可以是变量、常量或函数

例：表达式P(x, f(y), A)通过不同的置换

- 变量/变量：置换为 $s_1=\{z/x, w/y\}$　　P(z, f(w), A)
- 常量/变量：置换为 $s_2=\{B/y\}$　　P(x, f(B), A)
- 函数/变量：置换为 $s_3=\{g(z)/x\}$　　P(g(z), f(y), A)

置换和合一

```
function UNIFY(x, y, θ) returns a substitution to make x and y identical
  inputs: x, a variable, constant, list, or compound expression
          y, a variable, constant, list, or compound expression
          θ, the substitution built up so far (optional, defaults to empty)

  if θ = failure then return failure
  else if x = y then return θ
  else if VARIABLE?(x) then return UNIFY-VAR(x, y, θ)
  else if VARIABLE?(y) then return UNIFY-VAR(y, x, θ)
  else if COMPOUND?(x) and COMPOUND?(y) then
      return UNIFY(x.ARGS, y.ARGS, UNIFY(x.OP, y.OP, θ))
  else if LIST?(x) and LIST?(y) then
      return UNIFY(x.REST, y.REST, UNIFY(x.FIRST, y.FIRST, θ))
  else return failure

function UNIFY-VAR(var, x, θ) returns a substitution

  if {var/val} ∈ θ then return UNIFY(val, x, θ)
  else if {x/val} ∈ θ then return UNIFY(var, val, θ)
  else if OCCUR-CHECK?(var, x) then return failure
  else return add {var/x} to θ
```

变量

复合语句

列表

图 9.1　合一算法

该算法以元素为单位对输入的结构进行比较。置换 θ 作为 UNIFY 的参数是在运算的过程中逐渐建立起来，用于确保此后的比较与先前建立的约束一致。在复合表达式如 $F(A, B)$中，函数 OP 提取函词 F，函数 ARGS 提取参数表(A, B)

合一算法UNIFY以两条语句x，y为输入，如果合一置换存在，则返回它们的合一置换 θ

x: P(u, f(v), A)

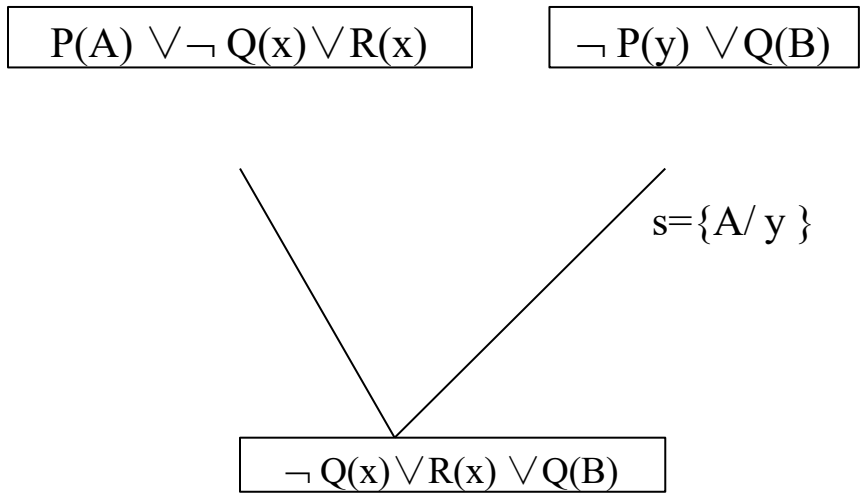
y: P(z, f(w), A)

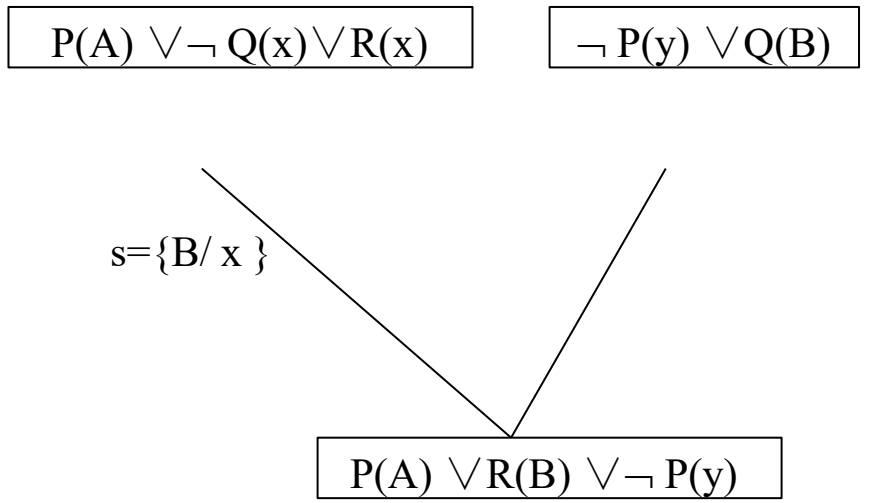
归结原理

例： 设有两个子句P(A)∨¬Q(x)∨R(x)和¬P(y)∨Q(B)， 则有两种归结方法：

① 取置换为s={A/y}，归结为¬Q(x)∨R(x)∨Q(B)

② 取置换为s={B/x}，归结为P(A)∨R(B)∨¬P(y)





- **注意：**在求归结式时，**不能同时消去两个互补文字对**，消去两个互补文字对所得的结果不是两个已有子句的逻辑推论。

归结算法

- 用反证法证明
- 为了证明 KB |= α，需要证明KB ∧ ¬ α 是不可满足的

命题逻辑归结

function PL-RESOLUTION(KB, α) **returns** *true* or *false*
  inputs: KB, the knowledge base, a sentence in propositional logic
    α, the query, a sentence in propositional logic

  $clauses \leftarrow$ the set of clauses in the CNF representation of $KB \wedge \neg\alpha$
  $new \leftarrow \{\}$
  loop do
    for each pair of clauses C_i, C_j **in** *clauses* **do**
      $resolvents \leftarrow$ PL-RESOLVE(C_i, C_j)
      if *resolvents* contains the empty clause **then return** *true*
      $new \leftarrow new \cup resolvents$
    if $new \subseteq clauses$ **then return** *false*
    $clauses \leftarrow clauses \cup new$

转化为CNF

置换合一

任意两个子句，运用归结规则

归结出空子句

没有新的语句

函数PL-RESOLVE返回对两个输入子句进行归结得到的所有结果子句的集合

提纲

一阶逻辑基本概念

一阶逻辑化为子句

基于归结原理的推理算法

归结原理的应用：定理证明；求问题答案

归结原理的应用

- 应用归结原理进行定理证明

设要被证明的定理可用谓词公式表示为如下的形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$$

(1) 否定结论B，并将$\neg B$与前提公式集组成谓词公式：

$$G = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$$

(2) 求谓词公式G的子句集S

(3) 应用归结原理，证明子句集S的不可满足性

归结原理的应用

例: 已知前提为 $F:(\forall x)\{(\exists y)[P(x,y)\wedge Q(y)]\rightarrow(\exists u)\ [R(u)\wedge S(x,u)]\}$

求证结论 $G:\neg(\exists x)R(x)\rightarrow(\forall x)(\forall y)[P(x,y)\rightarrow\neg Q(y)]$

- 证明：1）前提和结论化为子句集

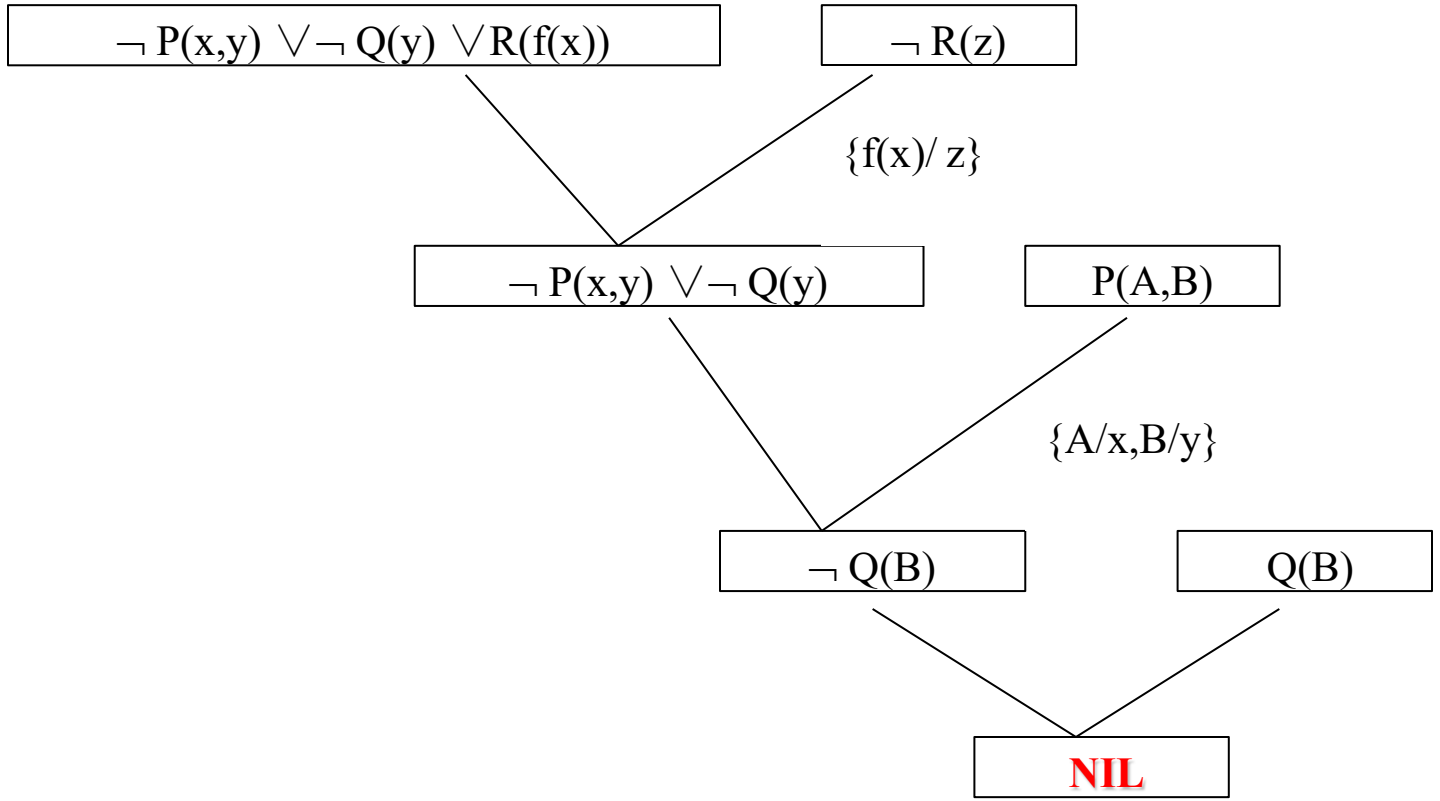
前提F所对应的子句集为：$\underline{\neg P(x,y)\vee\neg Q(y)\vee R(f(x))}$

$\neg P(x,y)\vee\neg Q(y)\vee S(x,\ f(x))$

结论G的**否定**对应子句集为：$\underline{\neg R(z)}$；$\underline{P(A,B)}$；$\underline{Q(B)}$

归结原理的应用

- 归结过程如下



归结原理的应用

- 利用归结原理求取问题答案

步骤：

1. 已知前提条件用谓词公式表示，并化成相应的子句集S_1。
2. 待求解问题也用谓词公式表示，然后将其否定，并与谓词ANSWER构成析取式。谓词ANSWER是一个专为求解问题而设置的谓词
3. 把2中的析取式化为子句集，并把该子句集与S_1合并构成子句集S
4. 对子句集S应用归结原理进行归结，在归结的过程中，通过合一，改变ANSWER中的变元。
5. 如果得到归结式ANSWER，则问题的答案即在ANSWER谓词中。

归结原理的应用

例: 任何兄弟都有同一个父亲

John和Peter是兄弟，且John的父亲是David，问:Peter的父亲是谁？

第一步：将已知条件用谓词公式表示出来，并化成子句集，那么要先定义谓词。

（1） 定义谓词：

设Father(x,y)表示x是y的父亲。Brother(x,y)表示x和y是兄弟。

归结原理的应用

（2）将已知事实用谓词公式表示出来。

F_1：任何兄弟都有同一个父亲。

$\forall x \forall y \forall z$ (Brother(x,y)∧Father(z,x)→Father(z,y))

F_2：John和Peter是兄弟。

Brother(John,Peter)

F_3： John的父亲是David。 Father(David, John)

（3）将它们化成子句集得：

S_1={¬ Brother(x,y)∨ ¬ Father(z,x)∨Father(z,y), Brother(John,Peter), Father(David,John)}

归结原理的应用

- **第二步**：把问题用谓词公式表示出来
  - 设Peter的父亲是u，则有：Father(u,Peter)
  - 将其否定与ANSWER作析取，得：

$$G: \neg Father(u,Peter) \vee ANSWER(u)$$

- **第三步**：将上述公式G化为子句集S_2，并将S_1和S_2合并到S。

(1) $\neg Brother(x,y) \vee \neg Father(z,x) \vee Father(z,y)$

(2) $Brother(John,Peter)$

(3) $Father(David,John)$

(4) $\neg Father(u,Peter) \vee ANSWER(u)$

归结原理的应用

(1)¬ Brother(x,y)∨ ¬ Father(z,x)∨Father(z,y)

(2) Brother(John,Peter)

(3) Father(David,John)

(4) ¬ Father(u,Peter)∨ANSWER(u)

第四步：应用归结原理进行归结

(5) ¬ Brother(John,y)∨Father(David,y)

（1）与（3）归结 σ={David/z,John/x}

(6) ¬ Brother(John,Peter)∨ANSWER(David)

（4）与（5）归结σ={David/u,Peter/y}

(7) ANSWER(David)　（2）与（6）归结

第五步：得到了归结式ANSWER(David)

答案即在其中，所以u=David。即Peter的父亲是David

思考题

破案问题：在一栋房子里发生了一件神秘的谋杀案，现在可以肯定以下几点事实：

(1)在这栋房子里仅住有A,B,C三人；

(2)是住在这栋房子里的人杀了A；

(3)谋杀者非常恨受害者；　　(4)A所恨的人，C一定不恨；

(5)除了B以外，A恨所有的人；　(6)B恨所有不比A富有的人；

(7)A所恨的人，B也恨；　　(8)没有一个人恨所有的人；

(9)杀人嫌疑犯一定不会比受害者富有。

为了推理需要，增加如下常识：(10)A不等于B。

问：谋杀者是谁？