LABORATORIO 4: PÉNDULOS ACOPLADOS

OBJETIVOS

- ❖ Identificar y determinar las frecuencias propias de oscilación para un sistema de dos grados de libertad.
- ❖ Determinar el valor de aceleración de la gravedad.

MATERIALES

- Equipo de péndulos acoplados: soportes y resorte de acople.
- CASSY LAB. con módulo de adquisición de datos
- Cables de conexión

NOTA:

- El resorte no debe quedar deformado al conectarlo entre las varillas que sostienen las masas y debe estar a nivel, tal como se observa en la figura 1.
- Las oscilaciones deben ser pequeñas: ligeros desplazamientos desde sus posiciones de equilibrio.

Figura 1: Montaje péndulos acoplados.

MARCO TEÓRICO

En esta práctica de laboratorio se estudia el comportamiento de un sistema oscilatorio formado por dos péndulos simples idénticos, fijos a un mismo soporte con un resorte de constante elástica k colocado entre estos, conocido con el nombre de péndulos acoplados, véase la figura 2.

Por: Carol Aguilar y Alejandra Mazabuel

La inclusión del resorte entre los péndulos hace que sus movimientos no sean independientes. El movimiento de uno de estos influye en el movimiento del otro y viceversa dando como resultado un movimiento que se conoce como oscilaciones acopladas. Dado que para describir el movimiento de cada uno de los péndulos son necesarias dos funciones de posición angular con respecto al tiempo: $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, se dice que el sistema posee dos grados de libertad.

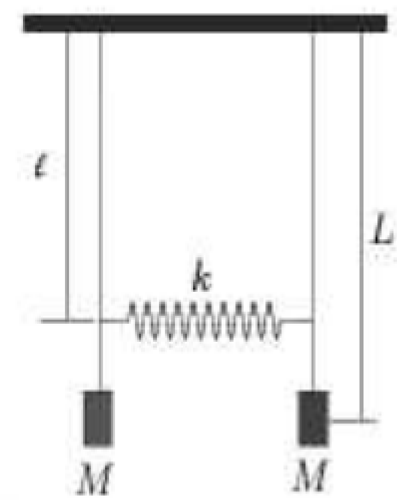

Figura 2: Péndulos acoplados en reposo.

La dinámica asociada al movimiento de cada uno de los péndulos puede resumirse de la siguiente manera: cuando la masa se separa de la posición de equilibrio una cierta cantidad angular, aparece sobre esta un torque restaurador τ que tiende a llevarla de nuevo a dicha posición, causándole una aceleración angular α, la cual se relaciona con dicho torque a través de la expresión:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{1}$$

Donde:

I: es el momento de inercia de la masa M respecto al eje de rotación.

De la definición de I y de α, la ecuación (1) se puede escribir como:

$$\vec{\tau} = ML^2\vec{\ddot{\theta}} \tag{2}$$

Utilizando esta ecuación y la definición de $\vec{\tau}$, se encuentra que para el péndulo cuyo desplazamiento es θ_1 se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$ML^2\ddot{\theta}_1 = -MgL\sin\theta_1 + kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{3}$$

Y para el otro, se tiene:

$$ML^2\ddot{\theta}_2 = -MgL\sin\theta_2 - kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{4}$$

Si los desplazamientos θ_1 y θ_2 son pequeños la aproximación $Sen\,\theta \cong \theta$ será válida con lo cual las expresiones (3) y (4) se reescriben como:

Por: Carol Aguilar y Alejandra Mazabuel

$$ML^2\ddot{\theta}_1 = -MgL\theta_1 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) \tag{5}$$

Y

$$ML^2\ddot{\theta}_2 = -MgL\theta_2 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) \tag{6}$$

Dado que las anteriores ecuaciones se encuentran acopladas, se sigue el siguiente procedimiento de desacople:

Al sumar las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$ML^2\ddot{\Theta}_1 = -MgL\Theta_1 \tag{7}$$

Y al restar las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$ML^2\ddot{\Theta}_2 = -(MgL + 2kl^2)\,\Theta_2 \tag{8}$$

Donde:

$\Theta_1 = \theta_1 + \theta_2$ y $\Theta_2 = \theta_1 - \theta_2$

Ordenando las ecuaciones (7) y (8) se tiene:

$$\ddot{\Theta}_1 + \frac{g}{L}\Theta_1 = 0$$

$$\ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2\Theta_1 = 0 \tag{7}$$

Y

$$\ddot{\Theta}_2 + \frac{(MgL + 2kl^2)}{ML^2}\,\Theta_2 = 0$$

$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_2^2\,\Theta_2 = 0 \tag{8}$$

Así, se obtienen las ecuaciones desacopladas cuyas frecuencias son:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L} \tag{9}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2kl^2}{ML^2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{L} + 2\epsilon^2\frac{k}{M} \tag{10}$$

Correspondientes a los dos modos propios de oscilación, en fase ω_1 y en contrafase ω_2, que presentan los péndulos acoplados. En este caso $\epsilon^2 = \frac{l^2}{L^2}$

PROCEDIMIENTO

1. Considere el valor de $k = 2{,}9754N/m$ para la constante elástica del resorte a utilizar.
2. Monte el arreglo ilustrado en la Figura 2.2. El resorte debe ubicarse lo más horizontal posible y en la posición más baja de las varillas.

Por: Carol Aguilar y Alejandra Mazabuel

3. Determine la relación $\epsilon = \frac{l}{L}$, tal que l es la distancia entre el punto de suspensión y el punto de ubicación del resorte.
4. Encienda el computador y abra la aplicación CASSY LAB. Configure el sistema según las indicaciones del o la docente.
5. Para una misma posición haga oscilar los péndulos en fase como se muestra en la Figura (3) del lado izquierdo. Inicie la toma de datos e inmediatamente observará la aparición de una gráfica en la pantalla principal. Copiar los datos en un archivo de Excel. Con las gráficas resultantes mida el periodo de oscilación
6. Mida el período de la oscilación escogiendo dos máximos del gráfico. Repita este procedimiento al menos tres veces con puntos diferentes y obtenga un valor promedio para el periodo.
7. Para la misma posición haga oscilar los péndulos en contrafase como se muestra en la Figura (2.5) del lado derecho. Inicie la toma de datos y determine el período
8. Repita los pasos 5 y 6 para otras 7 posiciones de acople entre el resorte y los péndulos.

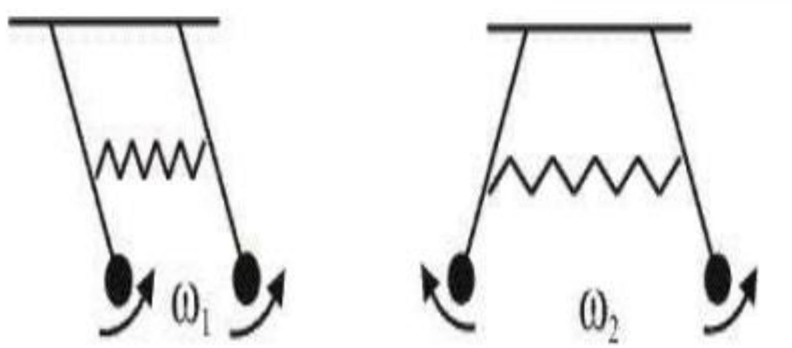

Figura 3: Péndulos acoplados oscilando en fase (Izquierda) y en contrafase (Derecha).

ANÁLISIS

1. Con los datos experimentales hallados en los numerales 5, 6 y 7 obtenga ω_1 y ω_2 con sus respectivas incertidumbres.
2. Con los valores obtenidos, construya una gráfica de ω_2^2 vs ϵ^2
3. Determine la ecuación experimental a partir de su gráfico y por comparación con la ecuación (10) determine los valores de g y k con sus respectivas incertidumbres.
4. Compare el valor de g obtenido con el valor aceptado teóricamente. Encuentre su porcentaje de error. Si se conoce el valor teórico para la constante k, halle también su porcentaje de error.

REFERENCIAS

Alonso, M. y Finn, E. (1976). *Física.* Volumen I: Mecánica. México, Fondo Educativo Interamericano, S.A. Editores, S.A.

https://media2.utp.edu.co/programas/6/experimento2if.pdf