Cycle d'ingénieur INE1

Filière : Smart-ICT

Cours

# Traitement du signal


***Mohamed ET-TOLBA***

*Enseignant chercheur*

*Département Systèmes de Communication, INPT*

*ettolba@inpt.ac.ma* | *www.mettolba.net*

# Traitement du signal

## Quelques aspects

Traitement du signal

- Conversion des signaux issus des capteurs pour un traitement numérique
- Filtrage des signaux pour les séparer de ceux qui sont indésirables (bruit, interférence)
- Compression des signaux pour une exploitation efficace des ressources (mémoire, bande passante, énergie),
- Analyse des signaux issus des capteurs pour détecter les événements et les anomalies,

# Traitement du signal

## Objectif du cours

- A l'issue de ce cours, l'élève ingénieur sera capable de :
  - Assimiler la notion du signal et celle du bruit
  - Faire la différence entre la théorie et le traitement du signal
  - Représenter, caractériser, et classer un signal
  - Etablir et analyser la représentation spectrale d'un signal déterministe à temps continu
  - Numériser un signal déterministe continu
  - Etablir et analyser la représentation spectrale d'un signal déterministe à temps discret
  - Implémenter des techniques de traitement du signal avec le logiciel MATLAB

# Contenu du cours

- **Introduction**
- **<u>Chapitre 1</u> : Classification des signaux**
- **<u>Chapitre 2</u> : Signaux déterministes à temps continu**
- **<u>Chapitre 3</u> : Systèmes linéaires à temps continu**
- **<u>Chapitre 4</u> : Echantillonnage**
- **<u>Chapitre 5</u> : Signaux déterministes à temps discret**

# Traitement du signal

## Déroulement et prérequis

- **Activités et charge horaire :**
  - **Cours & TD (16 heures)**
  - **Travaux pratiques (4 heures)**
- **Prérequis :**
  - **Mathématiques pour l'ingénieur**
- **Evaluation :**
  - **Examen écrit**

# Traitement du signal

## Les interdits en classe

**Pour le bon déroulement de ce cours, il est strictement interdit de :**

- **Utiliser un téléphone portable**
- **Utiliser un ordinateur portable**
- **Procéder à tout acte qui sort du contexte du cours**


# Introduction

- ✓ Notion du signal et celle du bruit
- ✓ Définition de la théorie du signal
- ✓ Définition du traitement du signal
- ✓ Systèmes de traitement du signal
- ✓ Opérations du traitement du signal
- ✓ Quelques applications du traitement du signal

# Introduction

## Définitions – Le signal

- Un signal représente l'information issue de la mesure d'un phénomène physique. Il renseigne sur l'évolution d'une grandeur physique mesurable (courant, tension, température, pression, humidité, …, etc.

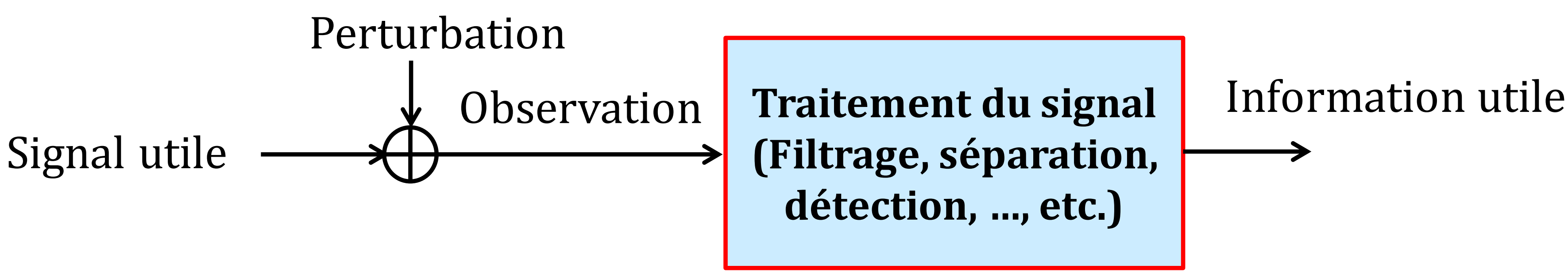
- Des signaux de plusieurs formes nous entourent. Certains sont **naturels** et d'autres sont **artificiels**

- On distingue aussi,
  - Des signaux nécessaires (la parole)
  - Des signaux plaisants (la musique)
  - Des signaux non désirables (bruit et interférences)

# Introduction

## Définitions – Le bruit

- Un bruit est définit comme toute perturbation (un signal non désirable) qui gène l'interprétation et l'analyse du signal d'intérêt.




- Sources de perturbations
  - Bruit thermique, appelée aussi bruit de résistance ou bruit de Johnson. Il est causé par l'agitation thermique aux niveau des résistances électriques
  - Interférences – Se sont des signaux indésirables de même type que le signal utile

# Introduction

## Définitions – Théorie du signal et Théorie de l'information

- La théorie du signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permettent de caractériser et décrire les signaux.

⚠ *A ne pas confondre avec la théorie de l'information*

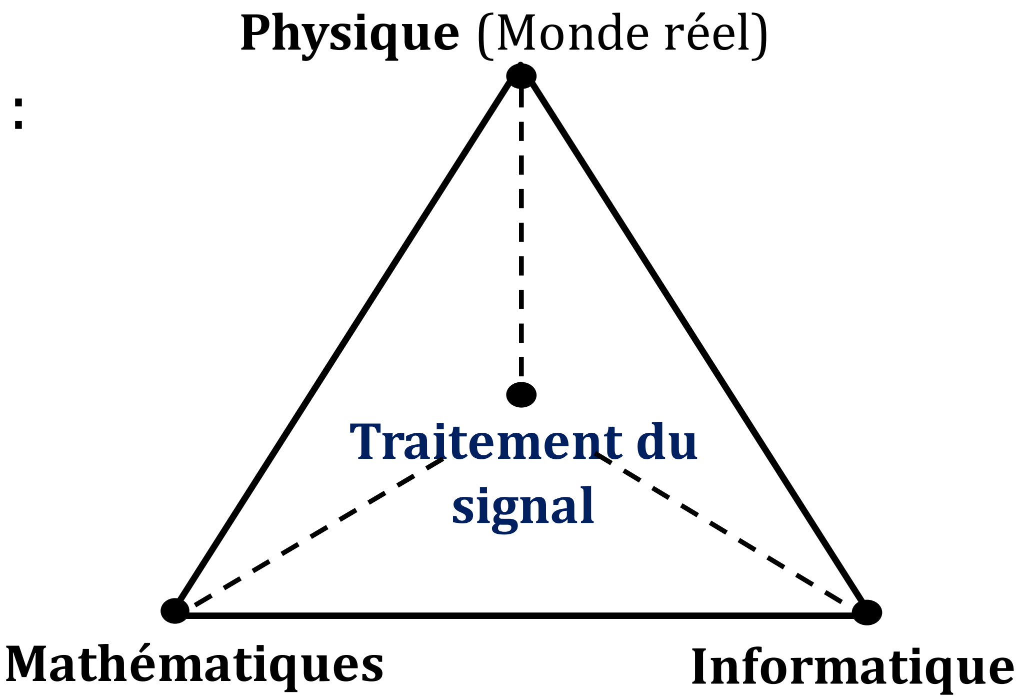
- La théorie de l'information est l'ensemble des outils mathématiques décrivant la transmission d'une information d'une source vers une destination.

# Introduction

## Définitions – Traitement du signal

- Le traitement du signal est l'ensemble de techniques qui permettent d'analyser et d'interpréter le signal afin d'en extraire le maximum d'information.

- Domaines d'interaction :

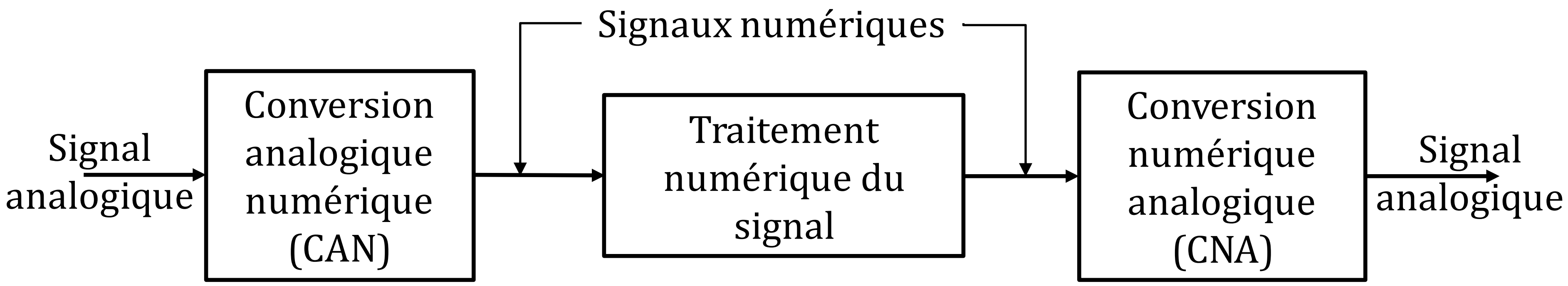


# Introduction

## Systèmes du traitement du signal

- Traitement analogique du signal


- Traitement numérique des signaux analogiques



# Introduction

## Opérations du traitement du signal

**Deux catégories**

**Elaboration**

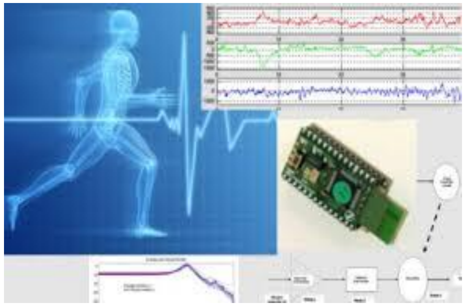
- ✓ Synthèse (de parole, de musique)
- ✓ Modulation
- ✓ Codage

**Interprétation**

- ✓ Filtrage
- ✓ Détection et identification
- ✓ Analyse (temporelle ou fréquentielle)
- ✓ Mesure

## Quelques applications

- **Télécommunications**
  - Téléphonie
  - Radars
  - Communication par satellite



- **Santé**
  - Localisation et caractérisation d'épilepsie
  - Echographie
  - Détection des troubles du rythme cardiaque

- **Finance**
  - Prédictions boursières
  - Dé-bruitage de données
  - Optimisation des portefeuilles financiers

***Chapitre 1***

# Classification des signaux

# Classification des signaux

- ✓ Classification morphologique
- ✓ Classification phénoménologique
- ✓ Classification selon le support temporel
- ✓ Signaux périodiques
- ✓ Classifications selon l’occupation spectrale
- ✓ Classification énergétique
- ✓ Exemples de signaux usuels

# Classification des signaux

## Classification morphologique

- La classification morphologique des signaux fait intervenir les deux paramètres **temps** et **amplitude**
  - ***Signal analogique***:

    signal continu en temps et en amplitude
  - **Signal échantillonné**:

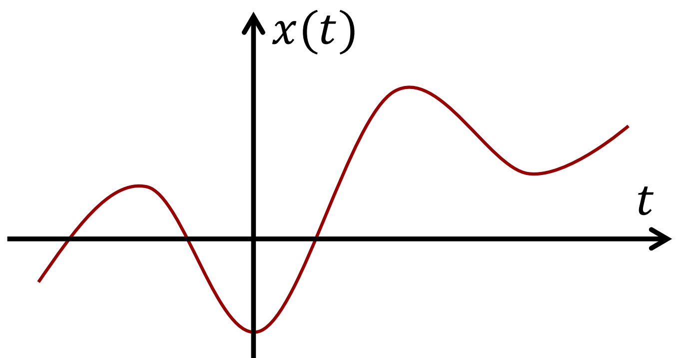
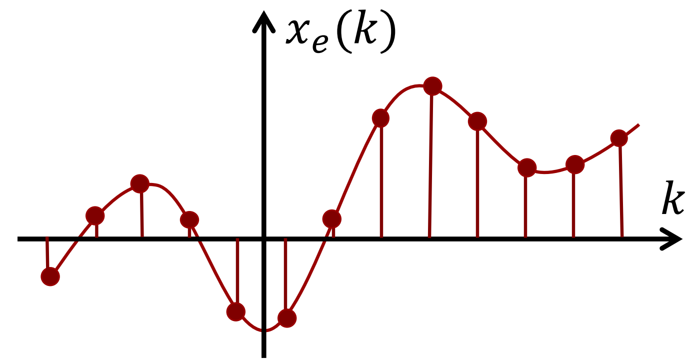
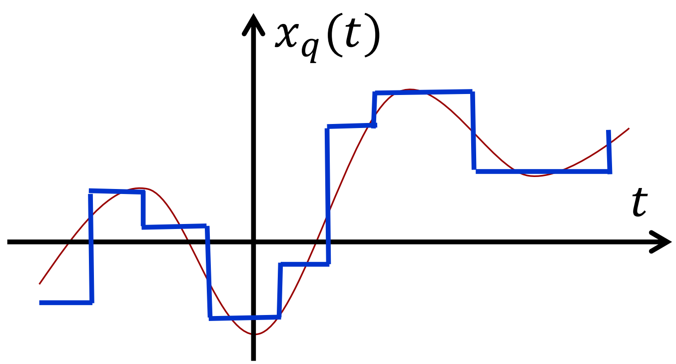
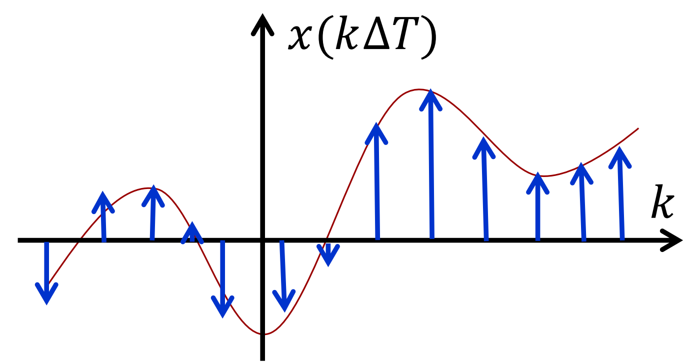
    signal discret en temps et continu en amplitude
  - **Signal quantifié**:

    signal à temps continu et amplitude discrète
  - **Signal numérique**:

    signal à temps discret et amplitude discrète

# Classification des signaux

## Classification morphologique

| | Temps continu | Temps discret |
|---|---|---|
| Amplitude continue |   Signal analogique |   Signal échantillonné |
| Amplitude discrète |   Signal quantifié |   Signal numérique |

# Classification des signaux

## Classification phénoménologique

- Selon l'évolution temporelle, on distingue deux catégories de signaux: signaux déterministes et signaux aléatoires
  - **Signaux déterministes** :
    - Leur évolution temporelle est parfaitement décrite par un modèle mathématique bien défini
    - Correspondent aux phénomènes pour lesquels les résultats futures sont prévisibles
  - **Signaux aléatoires** :
    - Leur évolution temporelles est imprévisible

      $\Downarrow$

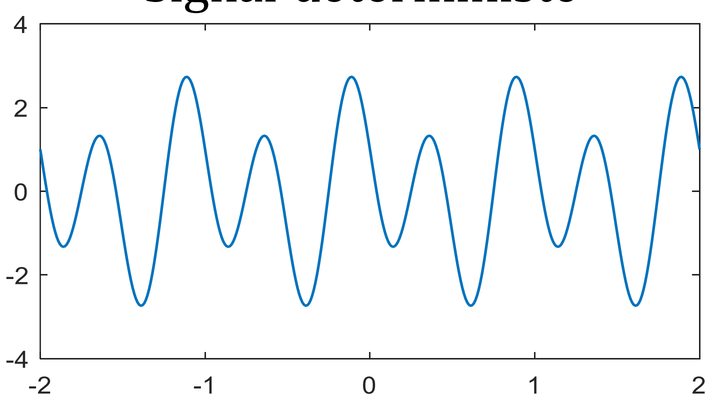
    - Signaux porteurs de nouvelles

# Classification des signaux

## Déterministes – Aléatoires : Modèles, exemples

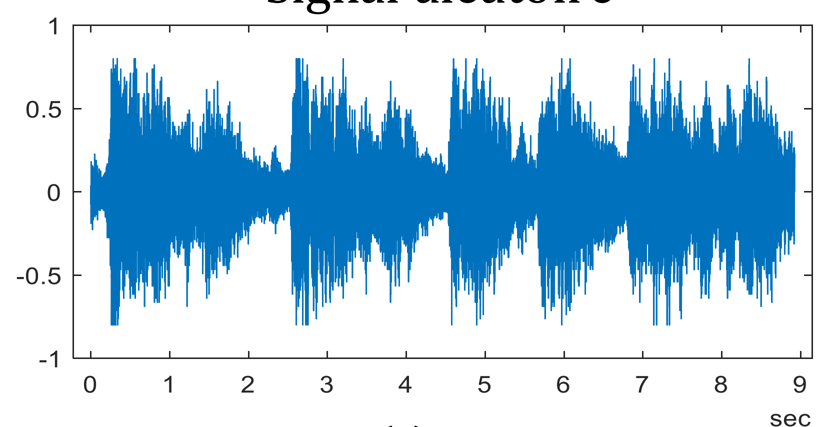
- Un signal déterministe est modélisé par une fonction mathématique ou une distribution
- Un signal aléatoire est modélisé par un processus aléatoire (famille de variables aléatoires)
- **Exemples**:

Signal déterministe




$x(t) = cos(2\pi t) - 2sin(4\pi t)$

Signal aléatoire




$x(t)$=……

# Classification des signaux

## Classification selon le support – Fini ou infini

- Le support d'un signal est l'intervalle temporel en dehors duquel le signal est toujours nul.

Selon le fait que cet intervalle est fini ou infini, on distingue :

- **Signaux à support fini**
  - Exemple : $x(t) = \begin{cases} (1+j)e^{j\pi t/2} & 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

- **Signaux à support infini**
  - Exemple : $x(t) = \sqrt{2}cos(20\pi t + \pi/4) \qquad -\infty < t < +\infty$

# Classification des signaux

## Signaux paires – Signaux impaires

- Un signal $x(t)$ est **paire** s'il coïncide avec sa version retournée $x(-t)$. Ce signal est symétrique par rapport à l'origine des temps (axe des ordonnées)
- Un signal $x(t)$ est **impaire** s'il coïncide avec $-x(-t)$, l'opposé de sa version retournée.
- Décomposition paire-impair : tout signal $x(t)$ peut s'écrire,

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

  - Composante paire $x_p(t)$ :

$$x_p(t) = 0.5(x(t) + x(-t))$$

  - Composante impaire $x_i(t)$ :

$$x_i(t) = 0.5(x(t) - x(-t))$$

# Classification des signaux

## Signaux périodiques

- Un signal $x(t)$ est dit **périodique** s'il se reproduit identiquement aux multiples d'un intervalle temporel, appelé période, et noté $T_0$.
  - Le signal $x(t)$ est défini pour tout $t$, $-\infty < t < +\infty$
  - Pour tout entier $k$, la période $T_0$ (un nombre réel positif) vérifie,

$$x(t + kT_0) = x(t)$$

  - La période de $x(t)$ est la plus petite valeur de $T_0 > 0$ qui rend la périodicité possible
  - Malgré que tout multiple $NT_0$, $\mathrm{N} > 1$, de $T_0$ est aussi une période, il ne faut pas le considérer comme la période de $x(t)$.

# Classification des signaux

## Classification énergétique – Energie et puissance

- Soit $x(t)$ un signal complexe ou réel, défini sur un support temporel $T$.
  - L'énergie de $x(t)$ :

$$E_x = \int_{(T)} |x(t)|^2 \, dt$$

  - La puissance moyenne de $x(t)$ :

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 \, dt$$

  - Si $x(t)$ est périodique de période $T_0$, sa puissance moyenne s'exprime :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

# Classification des signaux

## Classification énergétique – Catégories

- Deux catégories de signaux :
  - **Signaux à énergie finie** :

    $E_x < +\infty$. Pour ces signaux, la puissance est nulle :

    $$P_x = 0 \text{ W}.$$

    - Classe de signaux à support temporel **fini**

  - **Signaux à puissance moyenne finie non nulle** :

    $0 < P_x < +\infty$. Se sont des signaux à énergie infinie.

    - Signaux périodiques
    - Signaux aléatoires

## Classification énergétique – Exercice

### Exercice 1 : Classification des signaux

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux définis par :

$x(t) = Acos(2\pi f_0 t), t \in \mathbb{R}$ où $A$ est une constante.

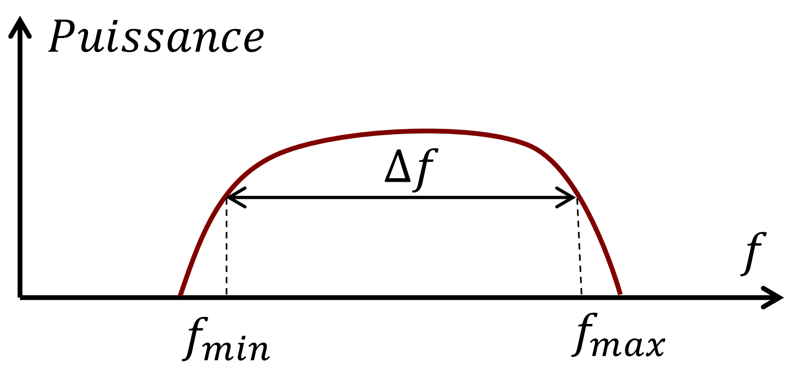
$$y(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \in [0, +\infty[\ , \alpha > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont déterministes ou aléatoires? Justifier votre réponse?
2) Déterminer la classification énergétique des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$?

# Classification des signaux

## Classification spectrale

- La classification spectrale d'un signal est déterminée selon la distribution de sa puissance ou de son énergie dans le domaine fréquentiel.
  - La partie, du domaine fréquentiel, occupée par le spectre du signal s'appelle largeur de bande spectrale du signal. Elle est notée $\Delta f$.




✓ Largeur de bande :

$$\Delta f = f_{max} - f_{min}$$

✓ Fréquence moyenne :

$$f_{moy} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

# Classification des signaux

## Classification spectrale – Catégories

- Signaux à bande étroite : $\frac{\Delta f}{f moy}$ est faible
- Signaux à bande large : $\frac{\Delta f}{f moy}$ est grand
- Pour les signaux à bandes étroites :

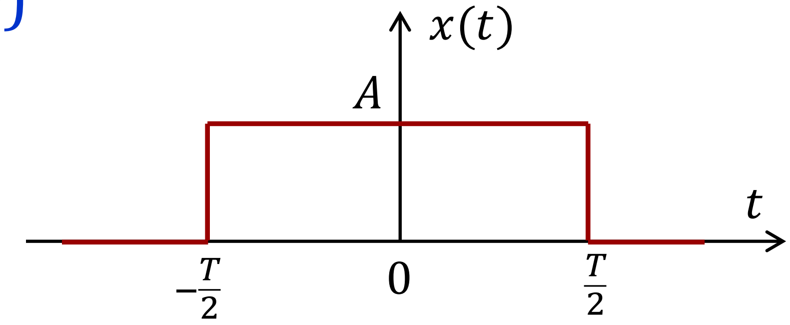
| **Plage de $f_{moy}$** | **Catégorie** |
|---|---|
| $f_{moy} < 250\ KHz$ | Signaux basses fréquences |
| $250\ KHz < f_{moy} < 30\ MHz$ | Signaux hautes fréquences |
| $30\ MHz < f_{moy} < 300\ MHz$ | Signaux très hautes fréquences |
| $300\ MHz < f_{moy} < 3\ GHz$ | Signaux ultra hautes fréquences |
| $f_{moy} > 3\ GHz$ | Signaux super hautes fréquences |

# Classification des signaux

## Signaux usuels – Signal porte et signal triangulaire

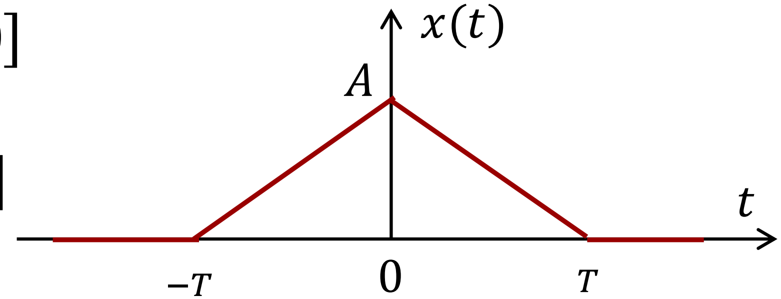
- Le signal rectangulaire (ou porte)

$$x(t) = A.rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & si \quad t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$




- Le signal triangulaire

$$x(t) = A.\Lambda_{2T} = \begin{cases} A + \frac{A.t}{T} & si \quad t \in [-T, 0] \\ A - \frac{A.t}{T} & si \quad t \in [0, T] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

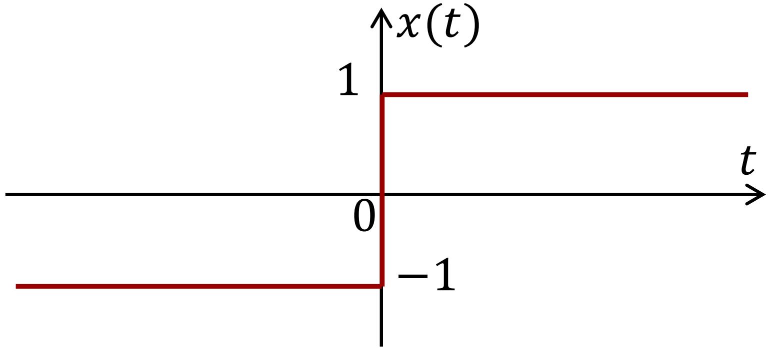


# Signaux usuels

## Signal signe et signal échelon unité

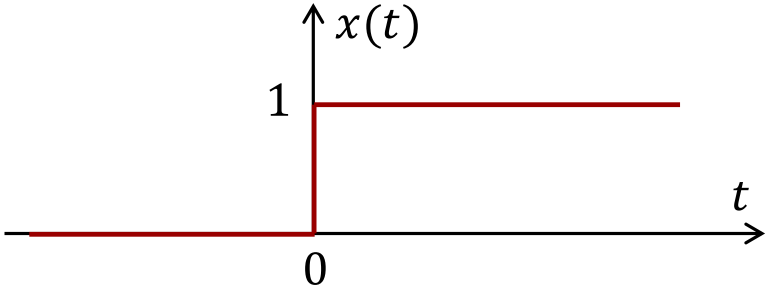
- Le signal signe

$$x(t) = sgn(t) = \begin{cases} -1 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$




- Le signal échelon unité (signal d'Heaviside)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$

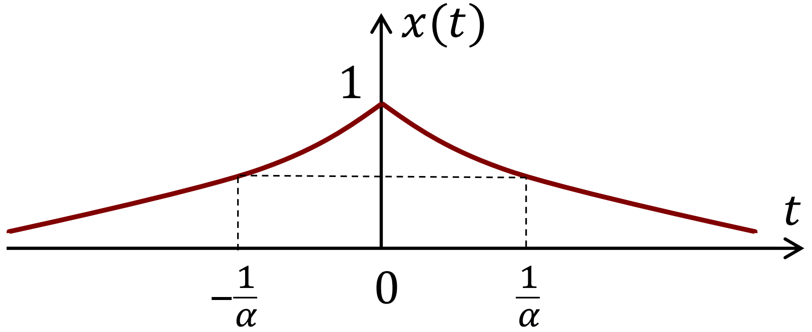


# Signaux usuels

## Exponentiel symétrique et exponentiel antisymétrique

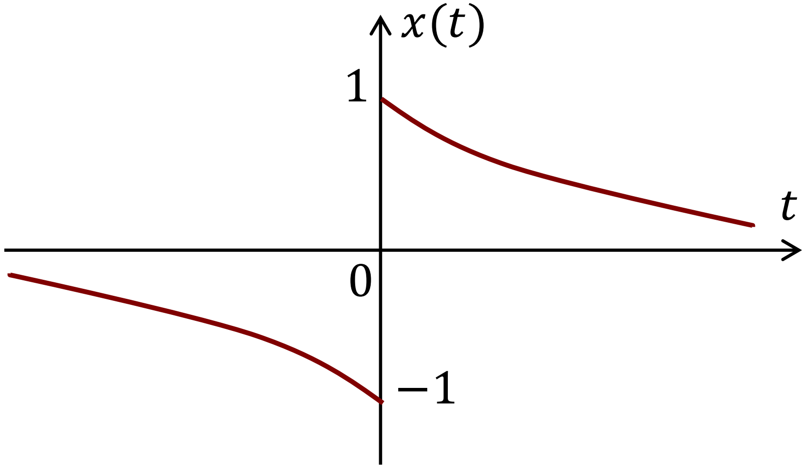
- Signal exponentiel symétrique

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} \ , \alpha > 0 \quad et \quad t \in \mathbb{R}$$




- Signal exponentiel antisymétrique

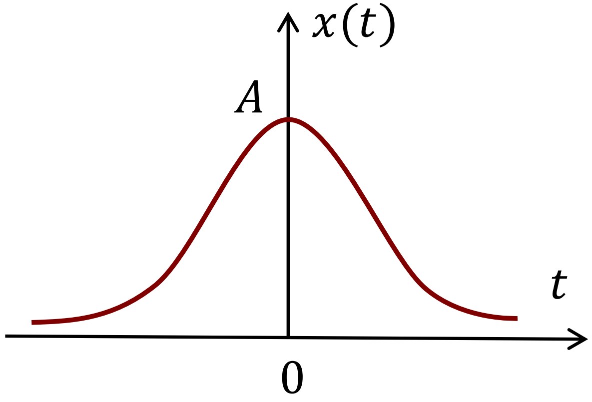
$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases}$$



# Signaux usuels
## Signal gaussien et signal rampe

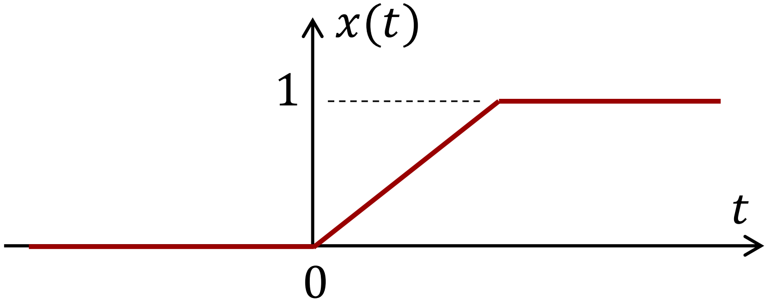
- Signal gaussien

$$x(t) = Ae^{-\alpha t^2}, \qquad \alpha > 0, t \in \mathbb{R}$$




- Signal rampe

$$x(t) = \begin{cases} 0, & si \quad t < 0 \\ \dfrac{t}{t_0}, & si \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 1, & si \quad t > t_0 \end{cases}$$

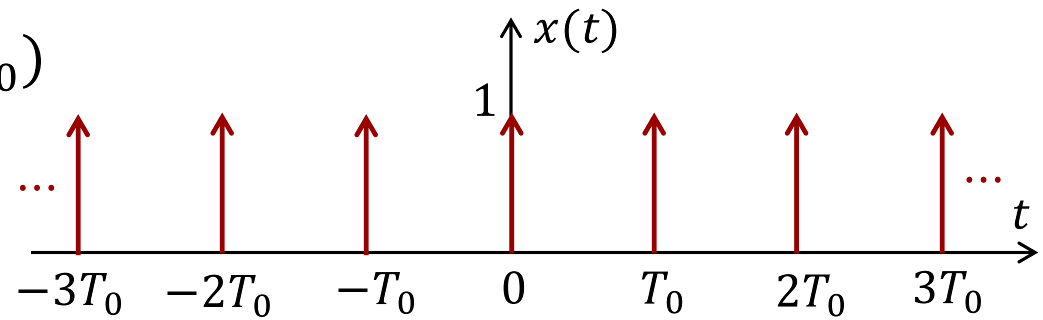


# Signaux usuels

## Peigne de Dirac et train d'impulsions rectangulaires

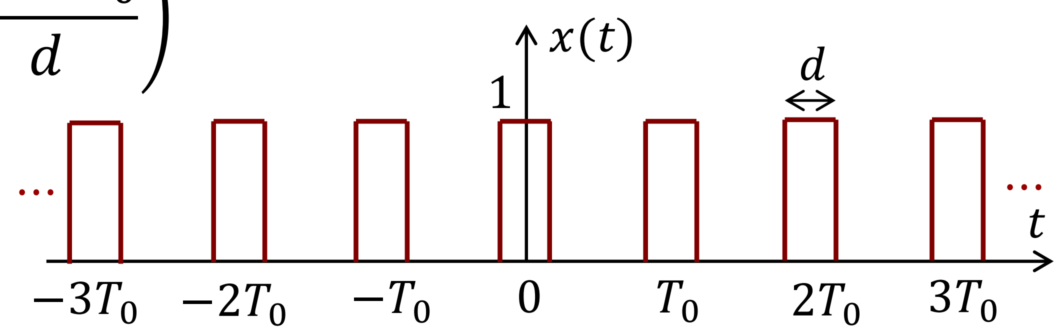
- Peigne de Dirac

$$x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



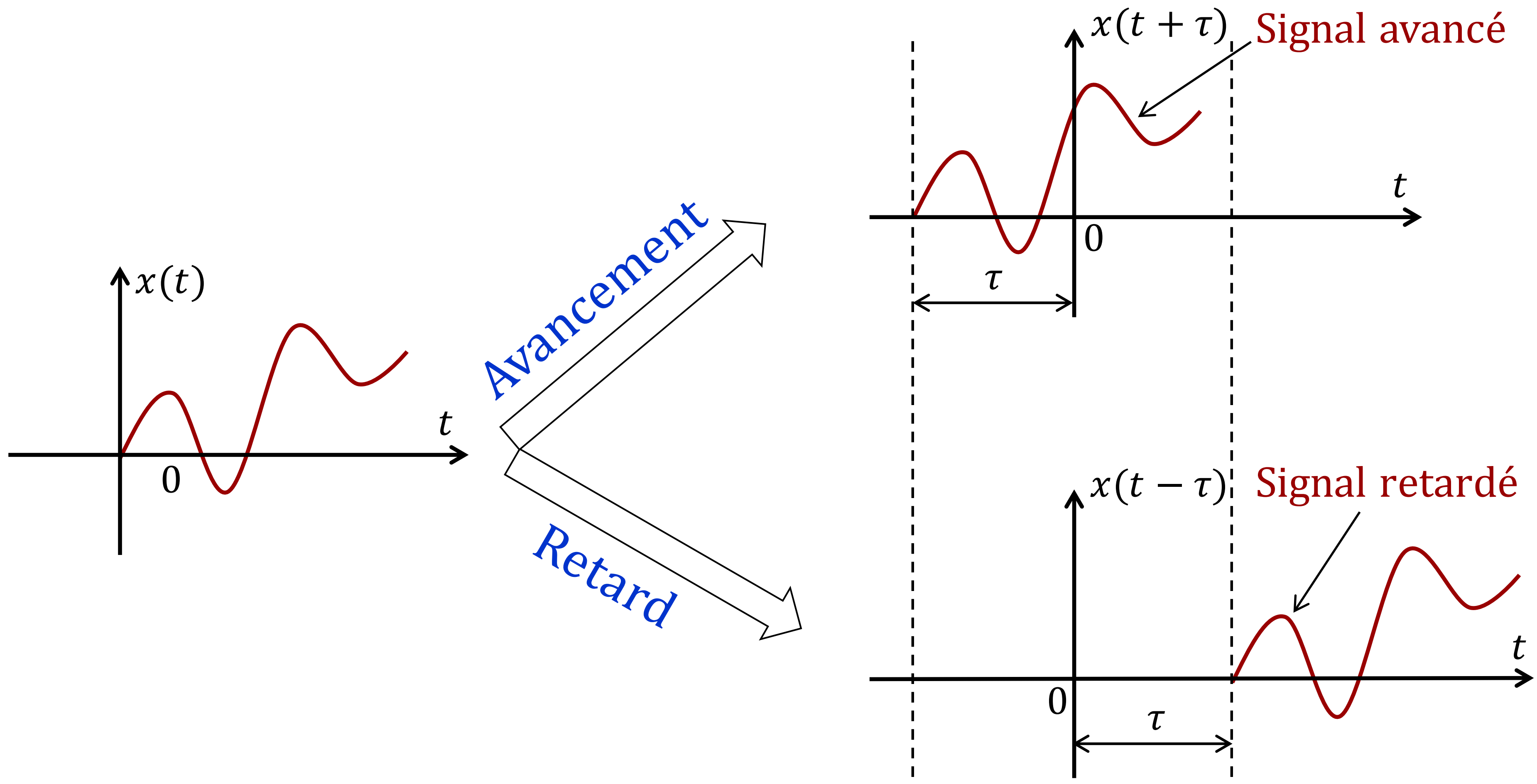

- Train d'impulsions rectangulaires

$$x(t) = \Pi_{T_0}\left(\frac{t}{d}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - kT_0}{d}\right)$$



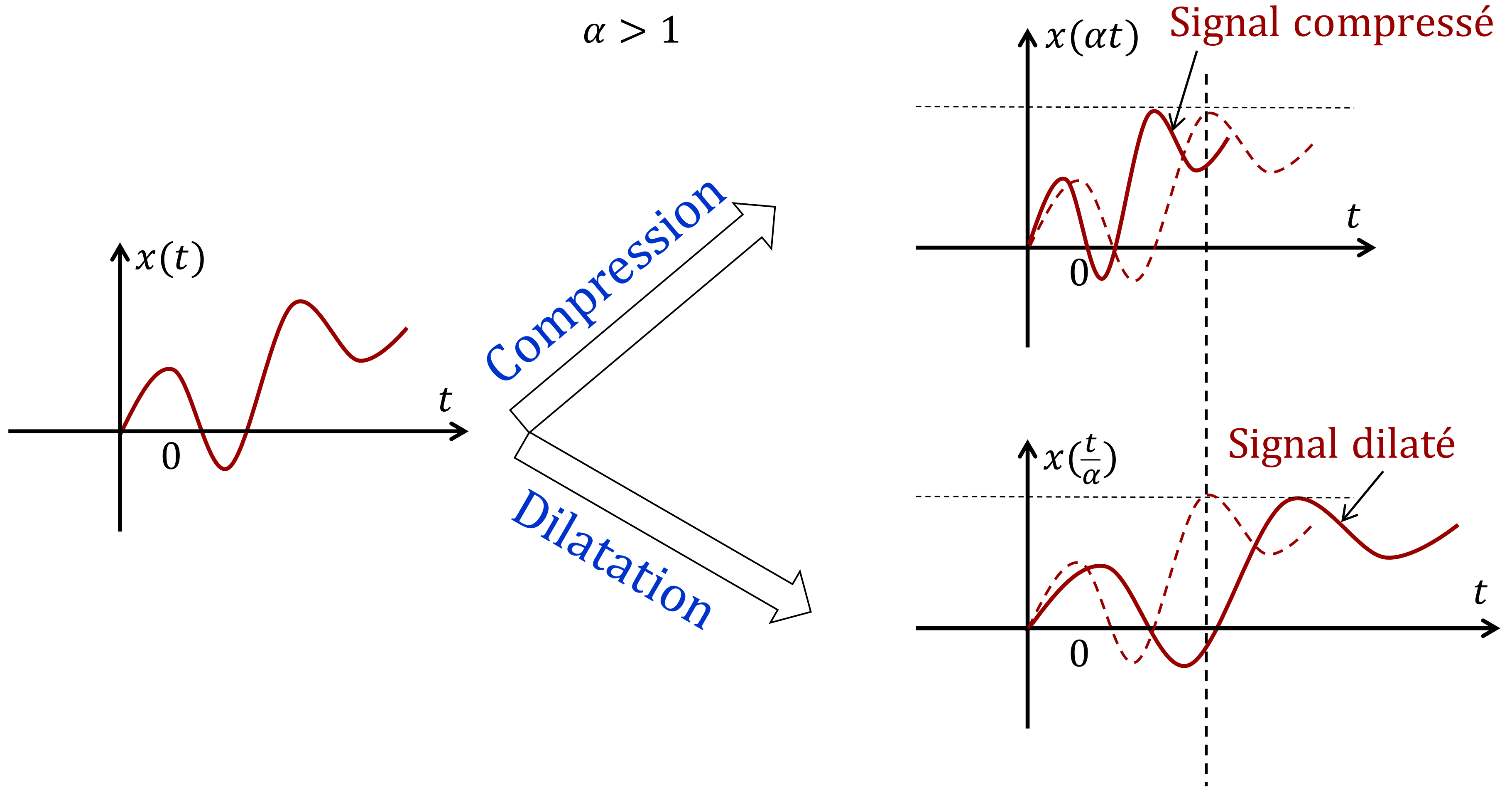
# Opérations sur les signaux

## Décalage



# Opérations sur les signaux

## Compression et dilatation



***Chapitre 2*** **:**

# Signaux déterministes à temps continu

# Signaux déterministes à temps continu

- ✓ Représentation fréquentielle et son utilité
- ✓ Développement en séries de Fourier
- ✓ Transformée de Fourier des signaux non périodiques
- ✓ Transformée de Fourier des signaux périodiques
- ✓ Fonctions de corrélation
- ✓ Spectre d'énergie et corrélation
- ✓ Spectre de puissance et corrélation

# Représentation fréquentielle

## Introduction

- **C'est quoi?**

  C'est le passage du domaine temporel vers le domaine des fréquences.

  Le contenu fréquentiel d'un signal constitue son spectre.

- **Pourquoi?**
  - Les exponentiels complexes sont des fonctions propres des systèmes linéaires
  - Plusieurs opérations sont rendues faciles à implémenter : convolution, corrélation, …etc.
  - Possibilité de faire l'analyse spectrale du signal
  - Calcul de la puissance du signal à une fréquence donnée

# Représentation fréquentielle

## Introduction

- **Comment?**
  - **Développement en séries de Fourier** $\Rightarrow$ <u>Spectre discontinu</u>
    - C'est une combinaison linéaire d'exponentiels complexes
    - Ne concerne que **les signaux périodiques**
  - **Transformée de Fourier** $\Rightarrow$ <u>Spectre continu</u>
    - C'est une fonction de la variable fréquence $f$
    - Concerne **les signaux périodiques** et **non périodiques**

# Représentation fréquentielle

## Développement en série de Fourier

- Soit $x(t)$ un signal périodique de période $T_0$. Son développement en séries de Fourier est une combinaison linéaire d'exponentiels complexes , et s'écrit,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{+j2\pi\frac{k}{T_0}t}$$

  - Les $X_k$ sont les coefficients de Fourier de $x(t)$. Ils s'expriment

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \, e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t} dt$$

  - Généralement, chacun des $X_k$ est un nombre complexe d'amplitude $|X_k|$ et de phase $\varphi_k$:

$$X_k = |X_k| e^{j\varphi_k}$$

# Représentation fréquentielle

## Développement en série de Fourier vu autrement

- Le développement en séries de Fourier de $x(t)$ peut s'écrire sous une forme trigonométrique :

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k cos\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right) + b_k sin\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right)\right)$$

  - Les $a_k$ et $b_k$ $(k = 0, \dots, +\infty)$ sont des coefficients réels :

$$a_k = X_k + X_{-k} = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\, cos\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right) dt$$

$$b_k = j(X_k - X_{-k}) = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) sin\left(2\pi\frac{k}{T_0}t\right) dt$$

# Développement en séries de Fourier

## Spectre discret

- Le spectre d'un signal périodique est l'ensemble de ses coefficients de Fourier présentés en fonction de la fréquence.
  - Les coefficients de Fourier sont déterminés à des fréquences discrètes

    $\Rightarrow$ **Les signaux périodiques ont un spectre de raies (discret)**

  - La représentation exponentielle mène à un spectre de raies bilatéral
  - La représentation sinusoïdale mène à un spectre de raies mono-latéral

# Développement en séries de Fourier

## Propriétés

- **Linéarité** : soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux périodiques de même période $T_0$. Leurs coefficients de Fourier complexes sont $X_k$ et $Y_k$ $(k = -\infty, \dots, +\infty)$ respectivement. Les coefficients de Fourier du signal $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes, s'écrivent, $Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$
- **Décalage temporel**: Pour un signal périodique $x(t)$, de période $T_0$, les coefficients de Fourier du signal $y(t) = x(t - \tau)$ sont donnés par, $Y_k = X_k e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}\tau}$
- **Echelle temporel**: Si $x(t)$ est périodique de période $T_0$, les coefficients de Fourier du signal $y(t) = x(\lambda t)$ sont : $Y_k = X_k$. Les $Y_k$ existent à des fréquences multiples de $f_1 = \frac{\lambda}{T_0}$.

# Développement en séries de Fourier

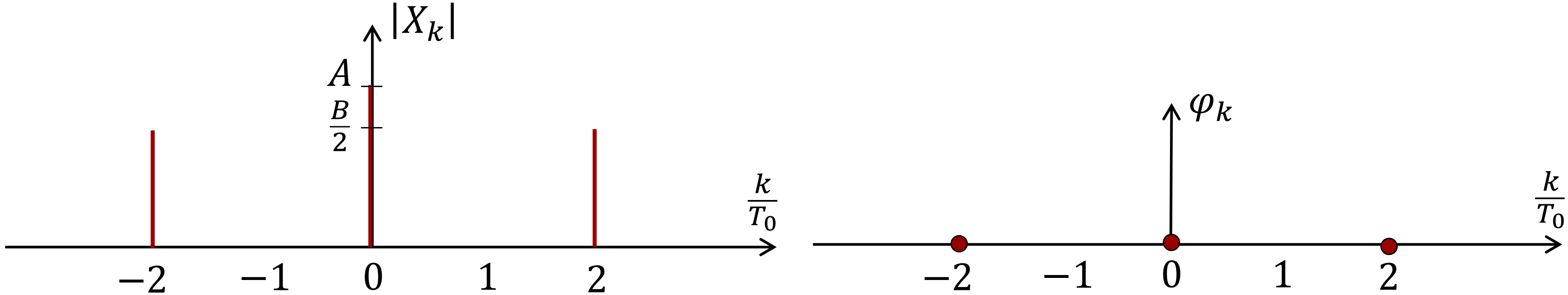
## Exemples

- Exemple 2.1: Le signal $x(t) = A + B.cos(4\pi t)$, $t \in \mathbb{R}$, $A$ et $B$ sont deux constantes réelles.
  $x(t)$ est périodique de période $T_0 = 0.5\ s$.

- Les coefficients de Fourier:

$$X_0 = A,\ X_{-1} = X_1 = \frac{B}{2},\ \text{et}\ X_k = 0 \quad \forall\, k \notin \{-1, 0, 1\}$$

- Spectre de raies:



- Exemple 2.2 : Train d'impulsions rectangulaires décalés de $\frac{d}{2}$

$$x(t) = A\Pi_{T_0}\left(t - \frac{d}{2}\right),\ t \in \mathbb{R},$$

$x(t)$ est un signal périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$.

- Les coefficients de Fourier:

$$X_k = \frac{Ad}{T_0} sinc(\pi k f_0 d) e^{-j\pi k f_0 d}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

# Développement en séries de Fourier

## Formule de Parseval

**Formule de Parseval pour les séries de Fourier:**

Pour un signal périodique $x(t)$ de période $T_0$, la puissance moyenne $P_x$ vérifie :

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Ou

$$P_x = {X_0}^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2$$

- ✓ La formule de Parseval traduit la conservation de puissance en passant du domaine temporel au domaine fréquentiel.

## Formule de Parseval - Exemple

- Exemple 2.3 : Vérifions la formule de Parseval pour le signal de l'exemple 2.1:
  - Puissance moyenne dans le domaine temporel:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left(A + B.cos(4\pi t)\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad P_x = A^2 + \frac{B^2}{2}$$

  - Puissance moyenne dans le domaine fréquentiel:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A^2 + \frac{B^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_x = A^2 + \frac{B^2}{2}$$

La formule de Parseval est vérifiée pour $x(t)$

# Transformée de Fourier

## Signaux non périodiques

- La transformé de Fourier est une extension du développement en séries de Fourier au cas de période infinie.
- Considérons un signal $x(t)$ non périodique à énergie finie.
  - La transformée de Fourier $X(f)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

  - $x(t)$ par transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df$$

# Transformée de Fourier

## Spectre continu

- L'existence de la transformée de Fourier est assurée par le fait que le signal est d'énergie finie demonstration
- La transformée de Fourier $\Rightarrow$ Spectre continue (fonction de la variable $f$).
- Le spectre $X(f)$ est généralement complexe :

$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

  - Partie réelle :

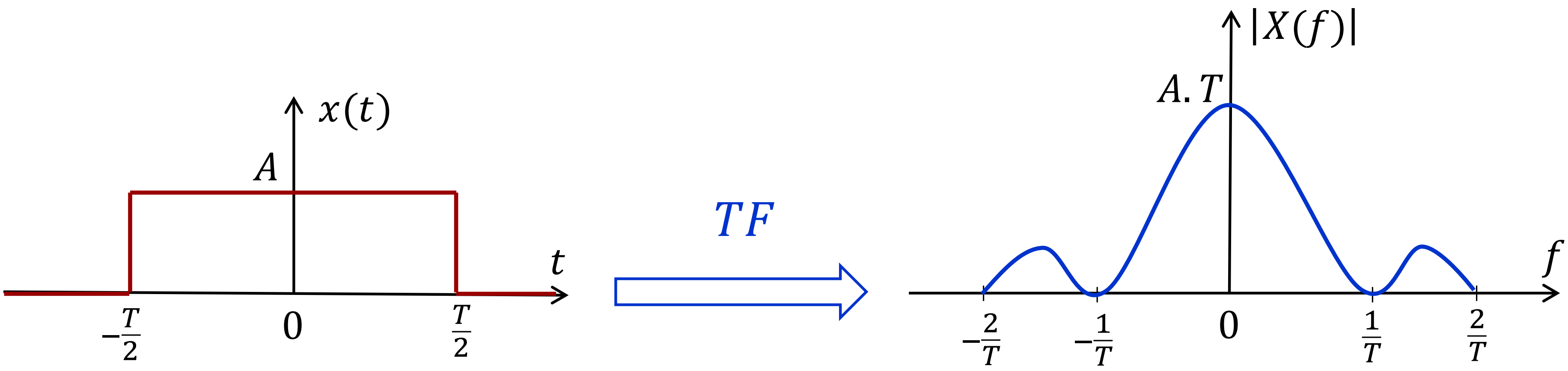
$$Re(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)cos(2\pi f t)\,dt$$

  - Partie Imaginaire :

$$Im(X(f)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sin(2\pi f t)\,dt$$

- Exemple 2.4: TF du signal porte $x(t) = A.rect_T\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\, dt = A.T.sinc(\pi fT)$$



# Transformée de Fourier

## Propriétés de parité

| **Le signal $x(t)$** | **Transformée de Fourier $X(f)$** |
|---|---|
| Réel pair | Réelle paire |
| Réel impair | Imaginaire impaire |
| réel | Complexe $\begin{cases} \text{partie rélle paire} \\ \text{partie imaginaire impaire} \end{cases}$ |
| Imaginaire pair | Imaginaire paire |
| Imaginaire impair | Réelle impaire |
| Imaginaire | Complexe $\begin{cases} \text{partie rélle impaire} \\ \text{partie imaginaire paire} \end{cases}$ |

# Transformée de Fourier

## Propriétés: Linéarité, transposition, conjugaison, décalage temporel

- Considérons les signaux $x(t)$, $x_1(t)$, et $x_2(t)$ dont les transformées de Fourier sont notées $X(f), X_1(f)$, et $X_2(f)$ respectivement.

  - **Linéarité:** $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha . x_1(t) + \beta . x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

  - **Transposition:**

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

  - **Conjugaison:**

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

  - **Décalage temporel:**

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) . e^{-j2\pi f t_0}$$

## Propriétés : Décalage fréquentiel, changement d'échelle, dualité

- **Décalage fréquentiel** :

$$x(t).e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

- **Changement d'échelle** : pour $a \neq 0$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- $a > 1$: Compression temporelle $\rightarrow$ Dilation fréquentielle
- $a < 1$: Dilatation temporelle $\rightarrow$ Compression fréquentielle

- **Dualité** :

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$ ??????

# Transformée de Fourier

## Propriétés : Dérivation, intégration, convolution, multiplication

- **Dérivation** :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \leftrightarrow \quad (j2\pi f)^n X(f)$$

- **Intégration** :

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda \quad \leftrightarrow \quad (j2\pi f)^{-1} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

- **Convolution** :

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \leftrightarrow \quad X_1(f).X_2(f)$$

- **Multiplication** :

$$x_1(t).x_2(t) \quad \leftrightarrow \quad X_1(f) * X_2(f)$$

# Transformée de Fourier

## Transformées de quelques signaux usuels

| Signal temporel | Transformée de Fourier |
|---|---|
| $1$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $\delta(t-t_0)$ | $e^{-j2\pi f t_0}$ |
| $\delta(t+t_0)$ | $e^{+j2\pi f t_0}$ |
| $e^{-j2\pi f_c t}$ | $\delta(f+f_c)$ |
| $e^{+j2\pi f_c t}$ | $\delta(f-f_c)$ |
| $e^{j(2\pi f_c t+\emptyset)}$ | $e^{j\emptyset}\delta(f-f_c)$ |

# Transformée de Fourier

## Transformées des signaux $cos(2\pi f_0 t)$ et $sin(2\pi f_0 t)$

- Pour le signal $x(t) = cos(2\pi f_0 t)$

  Nous avons, $cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$. Donc,

$$\boxed{X(f) = TF\left(cos(2\pi f_0 t)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)}$$

- Pour le signal $x(t) = sin(2\pi f_0 t)$

  Nous avons, $sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right)$. Donc,

$$\boxed{X(f) = TF\left(sin(2\pi f_0 t)\right) = \frac{1}{2j}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)}$$

# Transformée de Fourier

## Formule de Parseval

**Formule de Parseval pour la transformée de Fourier:**

Pour un signal $x(t)$ d'énergie finie, l'energie $E_x$ vérifie :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

$\Downarrow$

La formule de Parseval traduit la conservation de l'énergie en passant du domaine temporel au domaine fréquentiel.

## Formule de Parseval - Exemple

- Exemple 2.5: le signal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$
  - L'énergie dans le domaine temporel:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$

  - L'énergie dans le domaine fréquentiel:

On a: $X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha} \cdot \left[ arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

La formule de Parseval est vérifiée pour $x(t)$

## Fonctions de corrélation

- Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergies finies.
  - La fonction d'inter-corrélation

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau)\, dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

  - La fonction d'autocorrélation $(x(t) = y(t))$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t-\tau)\, dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

- **Utilité**:
  - Ressemblance de deux signaux
  - Détection des cibles dans les systèmes radar
  - Détection des signaux périodiques dans un bruit

# Spectre d'énergie et corrélation

## Fonctions de corrélation - Propriétés

- Symétrie de l'inter-corrélation:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^{*}(-\tau)$$

- Symétrie hermitienne de l'autocorrélation:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}^{*}(\tau)$$

- Maximum à l'origine ($\tau = 0$):

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) = E_x$$

  - ✓ La fonction d'autocorrélation est maximale à l'origine.
  - ✓ Le maximum correspond à l'énergie du signal.

## Spectre d'énergie

**Définition 2.1: Densité spectrale d'énergie**

La densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ d'un signal $x(t)$, à énergie finie, est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(f) = TF(R_{xx}(\tau)) = |X(f)|^2$$

**Définition 2.2: Densité inter-spectrale d'énergie**

La densité inter-spectrale d'énergie $S_{xy}(f)$ de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, d'énergies finies, est la transformée de Fourier de leur fonction d'inter-corrélation $R_{xy}(\tau)$:

$$S_{xy}(f) = TF\left(R_{xy}(\tau)\right) = X(f)Y^*(f)$$

# Transformée de Fourier des signaux périodiques

## Définition

- Spectre d'un signal périodique par la transformée de Fourier
- Soit $x(t)$ un signal périodique de période $T_0$. Si $x_0(t)$ est la tronquée de $x(t)$ sur $[0, T]$, alors,

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - kT_0)$$

- Transformée de Fourier:

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0(kf_0)\, \delta(f - kf_0)$$

  - Les quantités $\frac{1}{T_0} X_0(kf_0)$ sont les coefficients de Fourier de $x(t)$
  - $X(f)$ est un **spectre de raies**

# Spectre de puissance et corrélation

## Fonctions de corrélation – Inter-corrélation

- **Fonction d'inter-corrélation**: Pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ de puissance finie,

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t-\tau)\, dt$$

- Si $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de même période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ :

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k . {Y_k}^* . e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

  - $R_{xy}(\tau)$ est <u>périodique</u> de période $T_0$

**Exercice**: Traiter le cas où $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période $T_1$ et $T_2$ respectivement?

## Fonctions de corrélation – Autocorrélation

- **Fonction d'autocorrélation**:

  Pour un signal $x(t)$ de puissance moyenne finie:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x^*(t-\tau)\,dt$$

- Si le signal $x(t)$ est périodique de période $T_0$,

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 .\, e^{j2\pi\frac{k}{T_0}\tau}$$

- **La puissance moyenne**:

$$P_x = R_{xx}(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

## Densité spectrale de puissance

**Définition 2.3: Densité spectrale de puissance**

La densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ d'un signal $x(t)$, de puissance finie, est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$. Si $x(t)$ est périodique de période $T_0$,

$$S_{xx}(f) = TF(R_{xx}(\tau)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \, \delta(f - kf_0)$$

- Relation avec la puissance moyenne:

$$P_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \, df$$

*Chapitre 3*

# Transmission des signaux déterministes continus à travers un système linéaire

# Système de transmission

## Définition

**Définition 3.1: Système de transmission**

- Un système de transmission transforme un signal $x(t)$, à son entrée, en un signal $y(t)$
- Le signal de sortie $y(t)$ dépend du signal d'entrée et du modèle du système de transmission


- $y(t) = \mathcal{H}[x(t)]$
- $\mathcal{H}[.]$ est l'opérateur qui génère $y(t)$ à partir de $x(t)$

- La majorité des systèmes de transmission et de filtrage sont modélisés par des systèmes linéaires temporellement invariants (ou stationnaires)

# Systèmes linéaires temporellement invariants

## Définition

Soit un système qui transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal $y(t) = \mathcal{H}[x(t)]$.

- Le système est linéaire si, pour deux signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] &= \alpha\mathcal{H}[x_1(t)] + \beta\mathcal{H}[x_2(t)] \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\end{aligned}$$

  où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes.

- Le système est temporellement invariant si,

$$\mathcal{H}[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$$

Un système vérifiant les deux propriétés précédentes est dit un système <u>linéaire temporellement invariant (LTI)</u>

**Définition 3.2: Réponse impulsionnelle d'un système LTI**

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système LTI est définie comme étant la réponse du système à une impulsion $\delta(t)$:

$$h(t) = \mathcal{H}[\delta(t)]$$

- Si $h(t)$ est nulle pour $t < 0$, on dit que le système est <u>causal</u>
- La réponse à une combinaison d'impulsions:

$$y(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \mathcal{H}\left[\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \delta(t - \tau_n)\right] = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n h(t - \tau_n)$$

# Systèmes LTI

## Réponse à une entrée quelconque

**Réponse d'un système LTI à une entrée quelconque**

La réponse $y(t)$ d'un système LTI, de réponse impulsionnelle $h(t)$, à une entrée quelconque $x(t)$ est le produit de convolution de $x(t)$ et $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\,x(t-\lambda)d\lambda$$

- Si le système est causal, $h(t-\lambda) = 0$ pour $t < \lambda$
- Si le signal d'entrée est causal, $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda < 0$

## Fonction de transfert ou réponse fréquentielle

**Définition 3.3: Réponse fréquentielle d'un système LTI**

Soit un système LTI, de réponse impulsionnelle $h(t)$, qui transforme un signal $x(t)$, à son entrée, en un signal $y(t)$. La réponse fréquentielle $H(f)$ du système s'écrit:

$$H(f) = TF(h(t)) = \frac{Y(t)}{X(f)}$$

- Réponse impulsionnelle:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{j2\pi f t} df$$

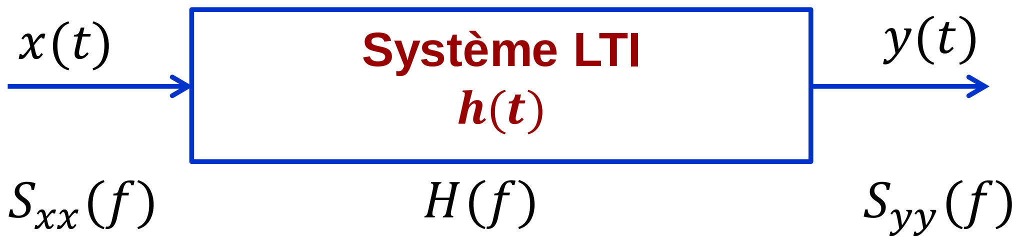
- Signal de sorite:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) H(f)\, e^{j2\pi f t} df$$

# Systèmes LTI

## Relation entrée-sortie des densités spectrales

- Considérons un système LTI de réponse impulsionnelle $h(t)$. Soit $y(t)$ la réponse du système à un signal d'entrée $x(t)$. Les densités spectrales de $x(t)$ et $y(t)$ sont $S_{xx}(f)$ et $S_{yy}(f)$.




$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 . S_{xx}(f)$$

Cette formule est valable pour les densités spectrales d'énergie et de puissance.

- Si $x(t)$ est d'énergie finie, $y(t)$ est d'énergie finie
- Si $x(t)$ est de puissance finie, $y(t)$ est de puissance finie

# Systèmes LTI

## Réponse à des signaux périodiques

- Pour un signal d'entrée $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, la réponse $y(t)$ du système est :

$$y(t) = H(f_0)Ae^{j2\pi f_0 t}$$

- D'une manière générale, si

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \text{ ,}$$

Alors,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, H(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t}$$

Le système LTI a transformé <u>l'amplitude et la phase</u> du signal $x(t)$

# Transmission des signaux dans un système LTI

## Transmission sans distorsion

- Une transmission à travers un système LTI est dite sans distorsion si le système introduit la même atténuation et décalage temporelle pour toutes les fréquences du signal d'entrée $x(t)$.
- Un système LTI sans distorsion reproduit la même forme du signal d'entrée à sa sortie
  - Le signal de sortie:

$$y(t) = H_0 x(t-\tau) \text{ où } H_0 \text{ et } \tau \text{ sont des constantes}$$

  - La réponse fréquentielle:

$$H(f) = H_0 e^{-j2\pi f\tau}$$

La réponse fréquentielle d'un système LTI sans distorsion a une <u>amplitude constante</u> et une <u>phase linéaire avec la fréquence</u>.

# Filtres

## Définition

**Définition 3.4: Un filtre**

Un filtre est un système linéaire qui permet de limiter le spectre d'un signal à une certaine bande de fréquences.

- La réponse fréquentielle d'un filtre est caractérisée par la présence de deux bandes : la bande passante et la bande de rejection
- Trois types de filtres:
  - Filtre passe-bas
  - Filtre passe-haut
  - Filtre passe-bande

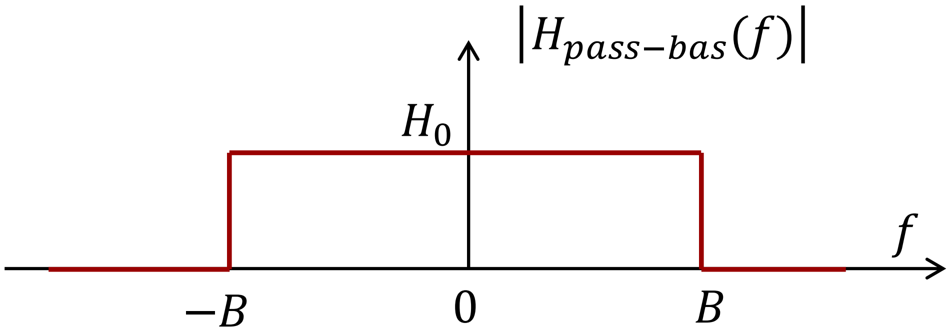
# Filtres

## Filtre idéal – Filtre passe-bas

- La réponse fréquentielle d'un filtre idéal est constante sur la bande passante, et nulle pour les autres fréquences

- **Filtre idéal passe-bas**:

$$H_{pass-bas}(f) = H_0 rect_{2B}\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-j2\pi f t_0}$$

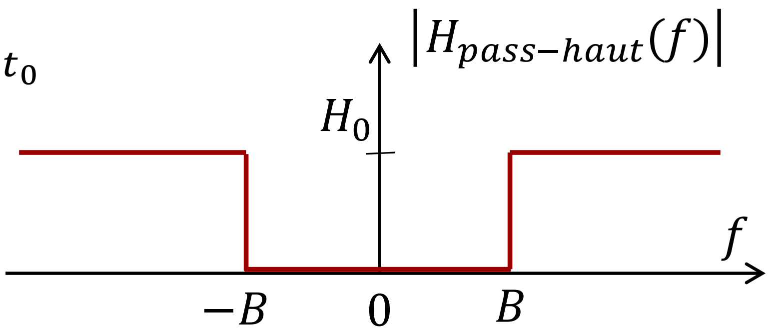


# Filtres

## Filtre idéal passe-haut, filtre idéal passe-bande

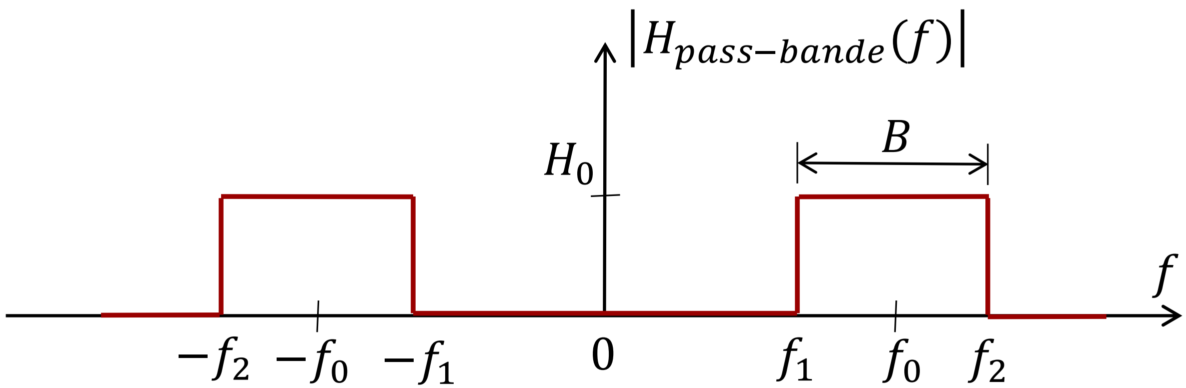
- **Filtre idéal passe-haut:**

$$H_{passe-haut}(f) = H_0\left[1 - rect_{2B}\left(\frac{f}{2B}\right)\right]e^{-j2\pi f t_0}$$




- **Filtre idéal passe-bande:**

$$H_{passe-bande}(f) = H_0\left[rect_B\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + rect_B\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]e^{-j2\pi f t_0}$$



# Filtres

## Filtre idéal - Bande passante

- Pour un filtre idéal passe-bas, la bande passante $B$ est égale à la fréquence de coupure $f_c$ : $B = f_c$
- La bande passante d'un filtre idéal passe-haut n'est pas définie
- Dans le cas d'un filtre idéal passe-bande, la bande passante s'exprime:

$$B = f_2 - f_1$$

- La fréquence centrale d'un filtre passe bande: $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$
  - $B \ll f_0 \Rightarrow$ Filtre passe-bande à bande étroite
  - $B \gg f_0 \Rightarrow$ Filtre passe-bande à bande large (ou large bande)

## Filtre non idéal

| **Problème** |
|---|
| **Un filtre idéal n'est pas causal. Il est donc irréalisable.** |

| **Solution** |
|---|
| **Approximation par un filtre non idéal (ou réalisable)** |

- Exemples de filtres réalisables:
  - Filtre de Butterworth
  - Filtre de Chebyshev
  - Filtre de Bessel
  - ...etc.

## Filtre non idéal – Bande passante

- La bande passante d'un filtre passe-bas réalisable (non idéal) est la fréquence pour laquelle l'amplitude du spectre $H(f)$ vérifie:

$$|H(f)| = \frac{H(0)}{\sqrt{2}}$$

- Pour un filtre passe-bande réalisable, la bande passante est la différence des fréquences $\Delta f$ pour laquelle l'amplitude du spectre $H(f)$ vérifie:

$$|H(\Delta f)| = \frac{H(f_0)}{\sqrt{2}}$$

***Chapitre 4***

# Echantillonnage

# Echantillonnage

## Définition

L'échantillonnage consiste à prélever des échantillons, d'un signal analogique, à des intervalles de temps réguliers.

- Le signal qui résulte de l'échantillonnage s'appelle **le signal échantillonné**
- La période séparant deux échantillons consécutifs s'appelle **la période d'échantillonnage** notée $T_e$
- **La fréquence d'échantillonnage** est définie par : $F_e = \frac{1}{T_e}$


Signal analogique    Signal échantillonné

# Echantillonnage

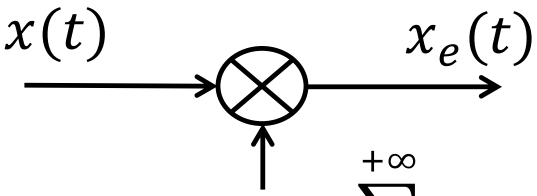
## Utilité, problématique

- **Utilité:**
  - Réduction du volume de données
  - Adéquation aux traitements numériques
  - Transmission numérique des signaux analogiques

- **Problématique:**
  - Quelle est la condition sur le signal analogique $x(t)$ et la fréquence d'échantillonnage pour préserver l'information?
  - Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de ses échantillons?

## Echantillonnage idéal - Principe

- L’échantillonnage idéal consiste à multiplier le signal analogique $x(t)$ par le signal peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$




$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

- **Le signal échantillonné**

$$x_e(t) = x(t).\delta_{T_e}(t)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\,\delta(t - kT_e)$$

## Echantillonnage idéal - Principe

- Il est évident que plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, plus le signal échantillonné $x_e(t)$ devient proche du signal analogique $x(t)$
- Pour une meilleur efficacité d'échantillonnage, il est judicieux d'utiliser une fréquence d'échantillonnage la plus faible possible

$\Downarrow$

**<u>Question</u>**: Quelle est la **fréquence d'échantillonnage minimale** qui permet d'échantillonner $x(t)$ **sans perte d'information**?

# Echantillonnage idéal

## Spectre du signal échantillonné

- Transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$:

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = TF\left(x(t).\delta_{T_e}(t)\right)$$

En appliquant la propriété de multiplication de la TF, on aura,

$$X_e(f) = X(f) * TF\left(\delta_{T_e}(t)\right)$$

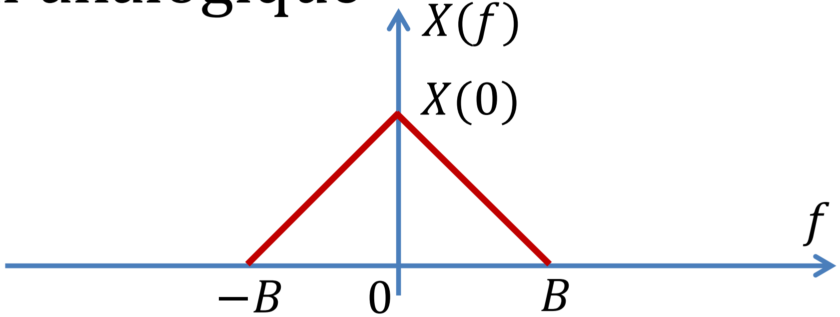
$$= X(f) * \left[\frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f - kF_e)\right] = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f - kF_e)$$

Le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonnée est le spectre $X(f)$ du signal analogique pondéré par $\frac{1}{T_e}$ et périodiquement répété aux multiples de $F_e$.

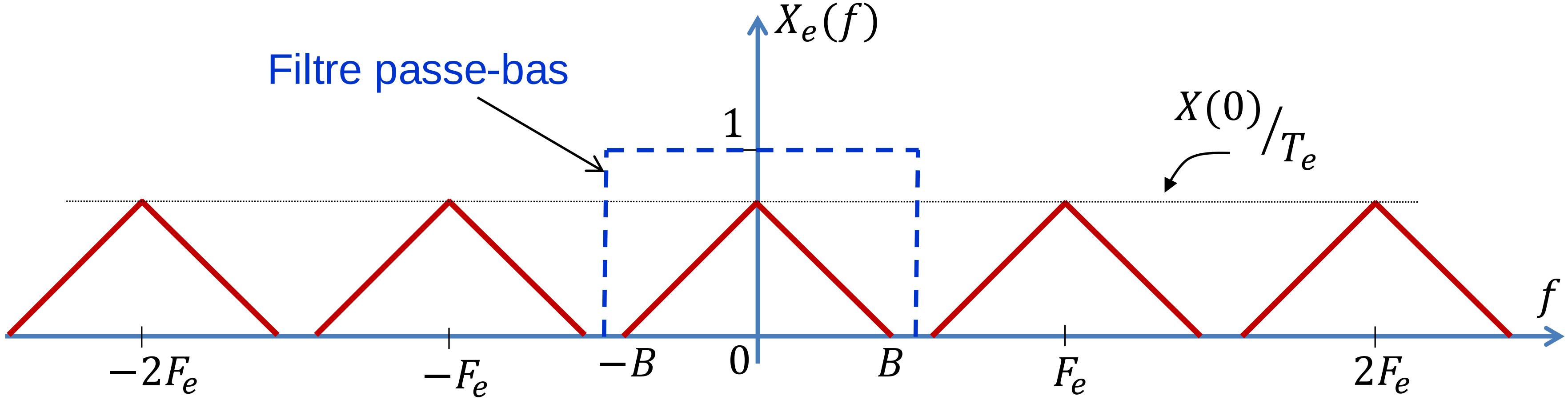
# Echantillonnage idéal

## Spectre du signal échantillonné - Représentation

- Spectre du signal analogique




- Spectre du signal échantillonné



# Echantillonnage idéal

## Spectre du signal échantillonné - Analyse

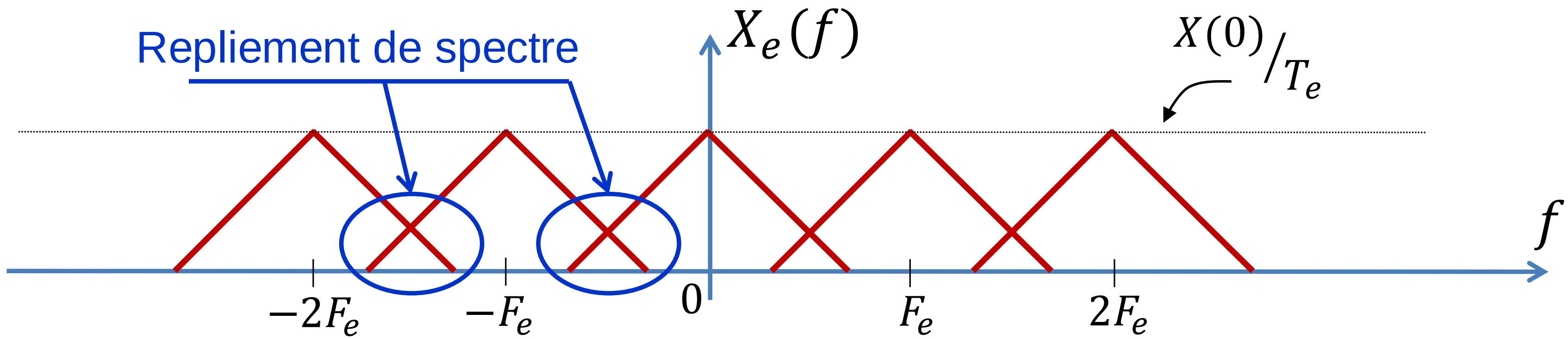
- Pour les fréquences autour de la fréquence zéro, le spectre du signal échantillonnée est le même que celui du signal analogique.
- Le signal $x(t)$ peut être retrouvé à partir de $x_e(t)$ par un filtre idéal passe-bas de bande passante $B$
  - Condition: $F_e$ doit être suffisamment élevée pour éviter le chevauchements des copies de $X(f)$
- D'après le spectre $X_e(f)$, il est facile de voir que $F_e$ doit vérifier $F_e \geq 2B$ pour éviter le chevauchement de spectre.

> **La fréquence d'échantillonnage minimale** est $2B$

# Echantillonnage idéal

## Spectre du signal échantillonné - Analyse

- Lorsque $F_e < 2B$, les copies de $X(f)$ se chevauchent. On parle de repliement (ou recouvrement) de spectre (aliasing en anglais)




Si la fréquence d'échantillonnage $F_e < 2B$, il est impossible de retrouver le signal $x(t)$ à partir de ses échantillons

# Echantillonnage idéal

## Théorème de l'échantillonnage

**Théorème 4.1: Théorème de l'échantillonnage**

Un signal $x(t)$ dont le spectre $X(f)$ est nulle pour $|f| > f_{max}$ est complétement décrit par les échantillons prises à des instants uniformément séparés par $T_e \leq \frac{1}{2.f_{max}}$.

La fréquence d'échantillonnage minimale $F_N = 2.f_{max}$ s'appelle **la fréquence de Nyquist**.

- Le signal $x(t)$ peut être reconstruit à partir du signal échantillonné $x_e(t)$ en utilisant un filtre idéal passe-bas de bande passante $W$ tel que,

$$f_{max} \leq W \leq F_e - f_{max}$$

# Echantillonnage idéal

## Théorème de l'échantillonnage - Exemple

- Exemple 4.1: Considérons l'échantillonnage du signal analogique défini par:

$$x(t) = 5 + cos(500\pi t) - 3sin^2(700\pi t)$$

  - Les fréquences contenues dans le signal:

    $0\ Hz$, $250\ Hz$, et $700\ Hz$

  - La fréquence maximale : $f_{max} = 700\ Hz$

  - La fréquence de Nyquist: $F_N = 2.f_{max} = 1400\ Hz$

# Echantillonnage idéal

## Reconstruction du signal analogique

- **<u>Objectif</u>** : reconstruire le signal $x(t)$ à partir de ses échantillons $x(kT_e), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Transformée de Fourier du signal échantillonné

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\, e^{-j2\pi k f T_e}$$

- Pour $-B \leq f \leq B,\ \ X(f) = \frac{X_e(f)}{F_e}$, D'où

$$\mathrm{X}(f) = \frac{1}{F_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\, e^{-j2\pi k f T_e}$$

# Echantillonnage idéal

## Reconstruction du signal analogique

- Transformée de Fourier inverse de $X(f)$:

$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \frac{1}{F_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\int_{-B}^{B} e^{j2\pi f(t-kT_e)}\,df$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\frac{sin(2\pi B(t-kT_e))}{\pi F_e(t-kT_e)}$$

- Pour $F_e = 2B$

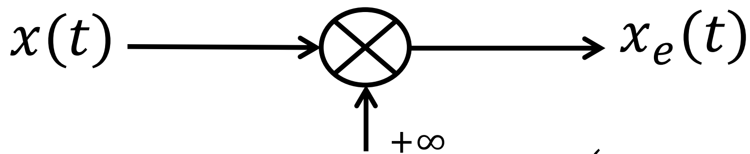
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2B}\right) sinc(\pi(2Bt-k))$$

C'est *la formule d'interpolation*

# Echantillonnage réel (ou naturel)

## Principe

- L'échantillonnage réel consiste à multiplier le signal analogique par le train d'impulsions rectangulaires $\Pi_{T_e}\left(\frac{t}{\tau}\right)$




$$\Pi_{T_e}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t-kT_e}{\tau}\right)$$

- Le signal $\Pi_{T_e}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ est périodique de période $T_e$,

$$\Pi_{T_e}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{j2\pi k F_e t}$$

où $D_k$ sont les coefficients de Fourier $\quad D_k = \frac{\tau}{T_e} sinc(\pi k F_e \tau)$

# Echantillonnage naturel

## Le signal échantillonné et son spectre

- Le signal échantillonné $x_e(t)$:

$$x_e(t) = x(t).\Pi_{T_e}\left(\frac{t}{\tau}\right) = x(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t-kT_e}{\tau}\right)$$

- Le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné:

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k TF\left(x(t).e^{j2\pi kF_e t}\right)$$

$$X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k X(f-kF_e)$$

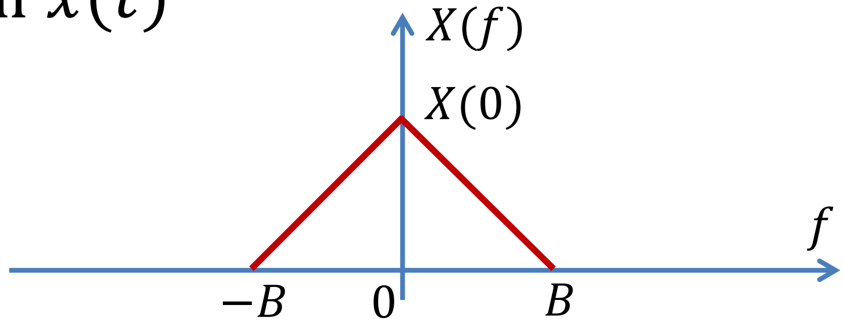
✓ $X_e(f)$ est une périodisation de $X(f)$ aux multiples de $F_e$

✓ La $k^{ème}$ copie de $X(f)$, dans $X_e(f)$, est pondéré par $D_k$

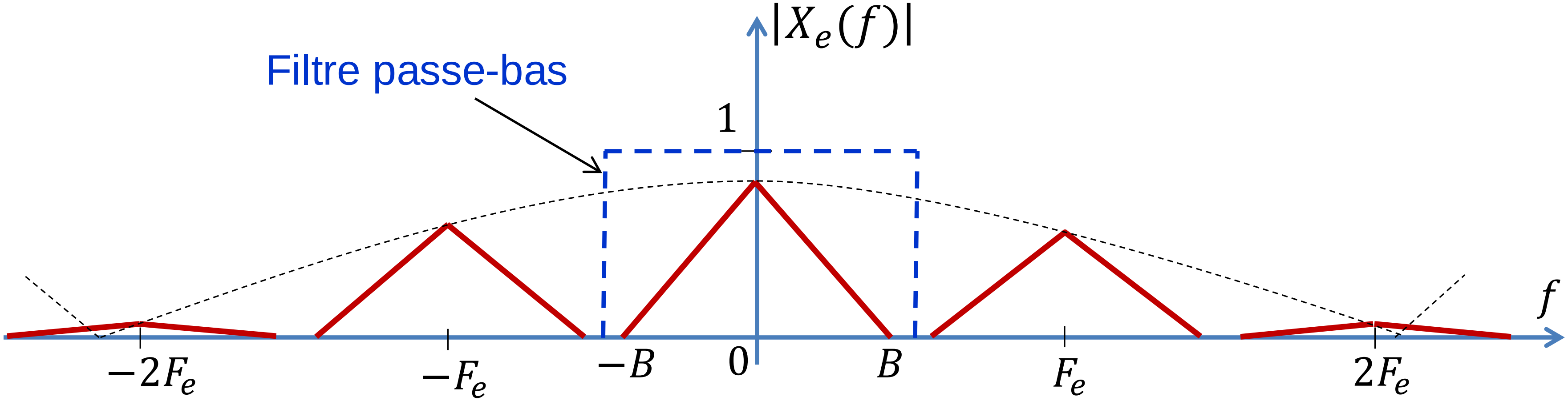
# Echantillonnage naturel

## Spectre du signal échantillonné - schématiquement

- Spectre du signal $x(t)$



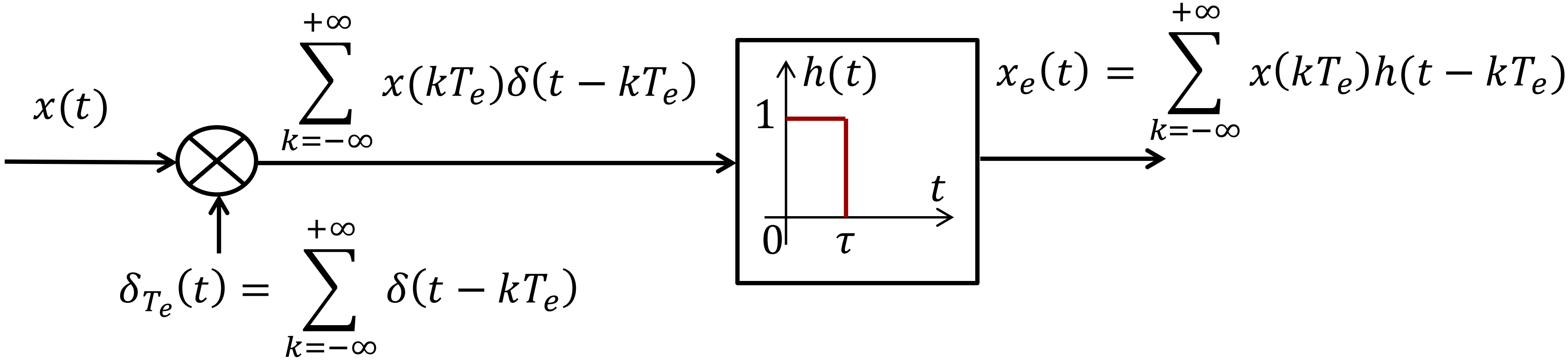

- Spectre du signal échantillonné



# Echantillonnage maintien

## Principe

- Deux opérations sont nécessaires :
  - Echantillonnage instantané du signal analogique $x(t)$ chaque $T_e$ secondes. La fréquence d'échantillonnage doit vérifier la condition de Nyquist
  - Maintien de la valeur de chaque échantillon pendant une durée $\tau$ secondes.



# Echantillonnage maintien

## Spectre du signal échantillonné

- Transformée de Fourier de $x_e(t)$:

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = TF\left[x(t).\delta_{T_e}(t)\right].TF[h(t)]$$

$$= \frac{1}{T_e} H(f). \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

où $H(f) = \tau.sinc(\pi f \tau)e^{-j\pi f \tau}$

- C'est le spectre du signal généré par un échantillonnage idéal mis en forme par $H(f)$
- Présence de distorsion d'amplitude à cause de la forme de $H(f)$

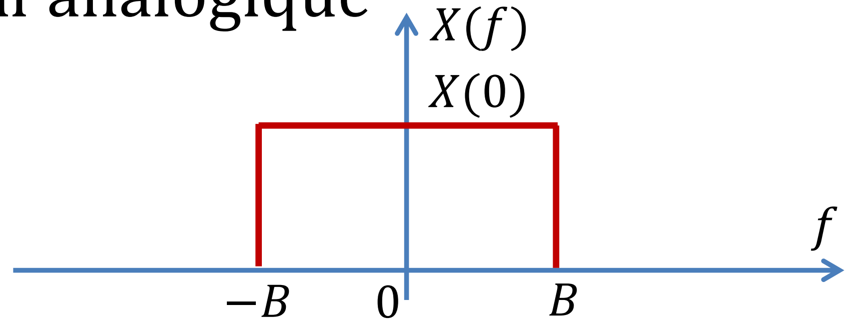
$\Downarrow$

Il est impossible de reconstruire le signal $x(t)$ avec un filtre passe-bas même si la condition de Nyquist est vérifiée.

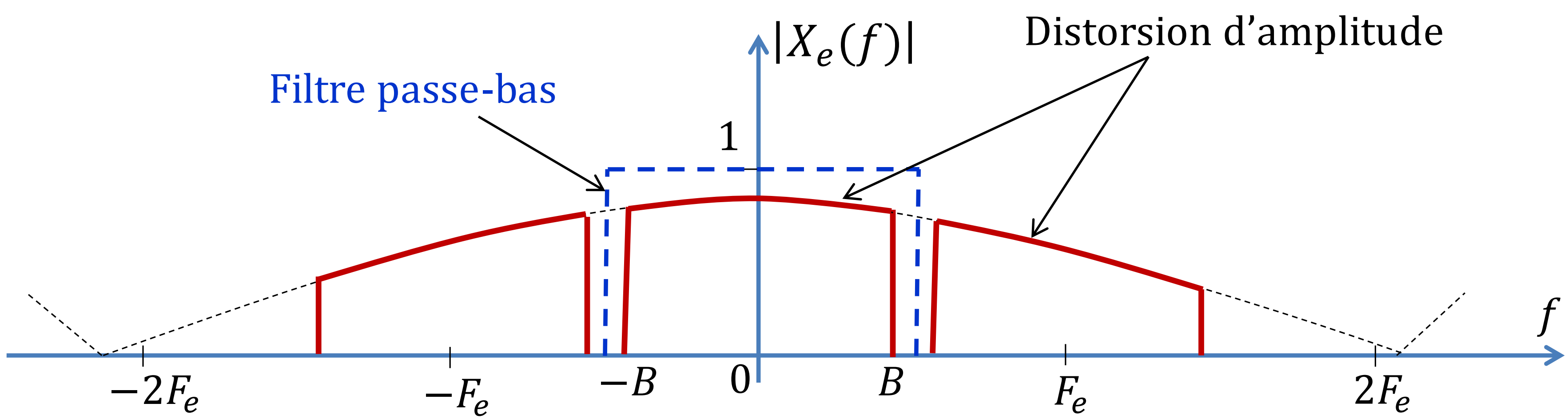
# Echantillonnage maintien

## Spectre du signal échantillonné - schématiquement

- Spectre du signal analogique



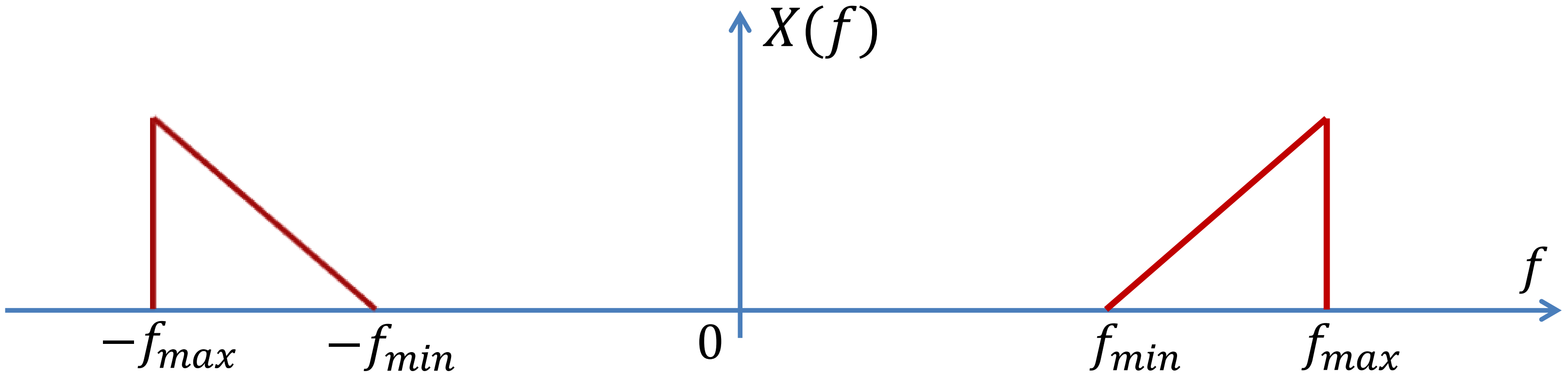

- Spectre du signal échantillonné



# Echantillonnage des signaux passe-bande

## Introduction

- Considérons un signal $x(t)$ passe-bande dont la transformée de Fourier $X(f)$ s'annule en dehors de la bande des fréquences $[-f_{max}, -f_{min}] \cup [f_{min}, f_{max}]$

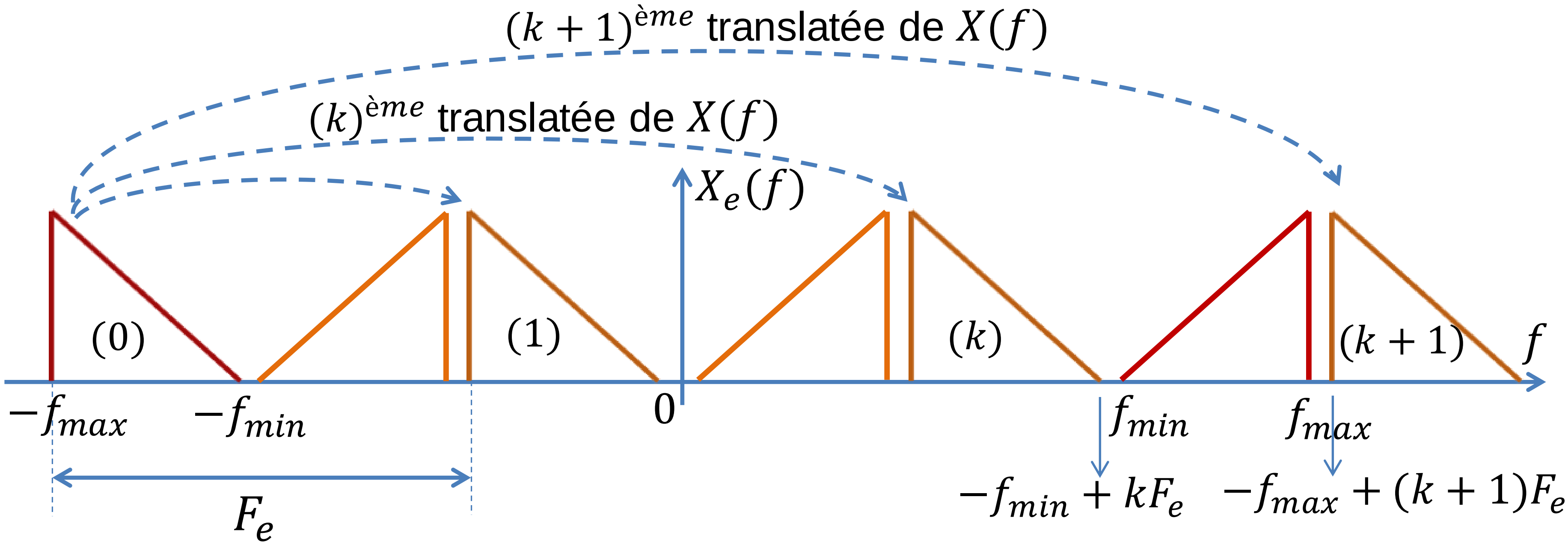



- ✓ L'application du théorème de l'échantillonnage $\Rightarrow$ $F_N = 2.f_{max}$
- ✓ Il est possible d'échantillonner à des fréquences $F_e < F_N$

# Echantillonnage des signaux passe-bande

## Spectre du signal échantillonnée

- Périodisation de $X(f)$




- ✓ Pour les signaux **passe-bande à bande large**, $F_e \geq 2.f_{max}$
- ✓ Les signaux **passe-bande à bande étroite**, peuvent être échantillonnés à des fréquences d'échantillonnage plus faibles que $F_N = 2.f_{max}$

# Echantillonnage des signaux passe-bande

## Signaux à bande étroite

- Condition de non recouvrement :

$$\frac{2f_{max}}{k+1} \leq F_e \leq \frac{2f_{min}}{k}, \qquad \text{avec } k \leq \frac{f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$$

- La fréquence la plus faible pour un échantillonnage de $x(t)$ sans perte d'information:

$$F_{e,min} = \frac{2f_{max}}{k_0+1}, \qquad \text{où } \; k_0 = \left\lfloor \frac{f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \right\rfloor$$

$\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière

# Echantillonnage des signaux passe-bande

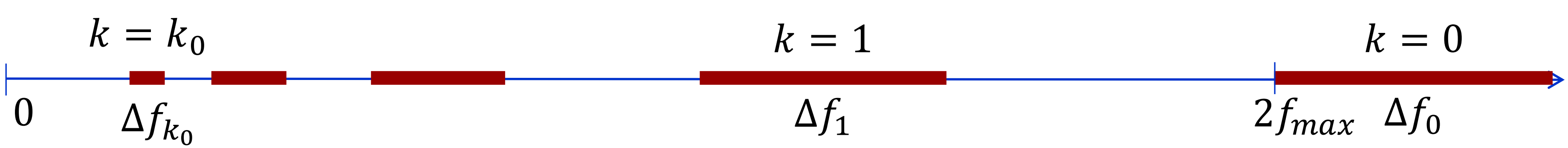
## Signaux à bande étroite – Plages de fréquences

- La fréquence d'échantillonnage fait partie dans l'une des plages de fréquences définies par :

$$F_e \in \left[\frac{2f_{max}}{k+1}, \frac{2f_{min}}{k}\right] \quad \text{pour} \quad k \in \{0, 1, \dots, k_0\}$$

- La $k^{ème}$ plage de fréquences a une largeur définie par:

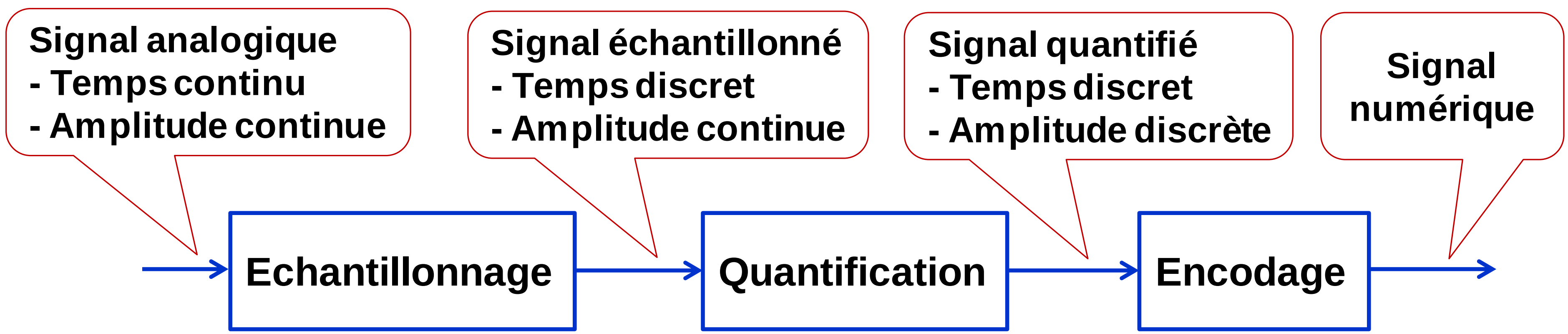
$$\Delta f_k = 2\frac{f_{min} - k(f_{max} - f_{min})}{k(k+1)}$$



# Quantification du signal échantillonné

## Introduction

- Convertisseur analogique-numérique




✓ La quantification d'un signal échantillonné consiste à l'approcher par un signal discret dont les échantillons prennent valeurs dans un ensemble fini (de taille plus petite)

✓ Dans ce cours nous nous limitons à la quantification uniforme

# Quantification du signal échantillonné

## Quantification uniforme

**Définition 4.1: Quantification uniforme**

Dans une quantification uniforme, la dynamique du signal analogique $x(t)$ est découpée en $L$ intervalles de même longueur $q$ définie par:

$$q = \frac{2A}{L}$$

où $A$ est l'amplitude maximale du signal $x(t)$. La longueur $q$ des intervalles est appelée le pas de quantification.

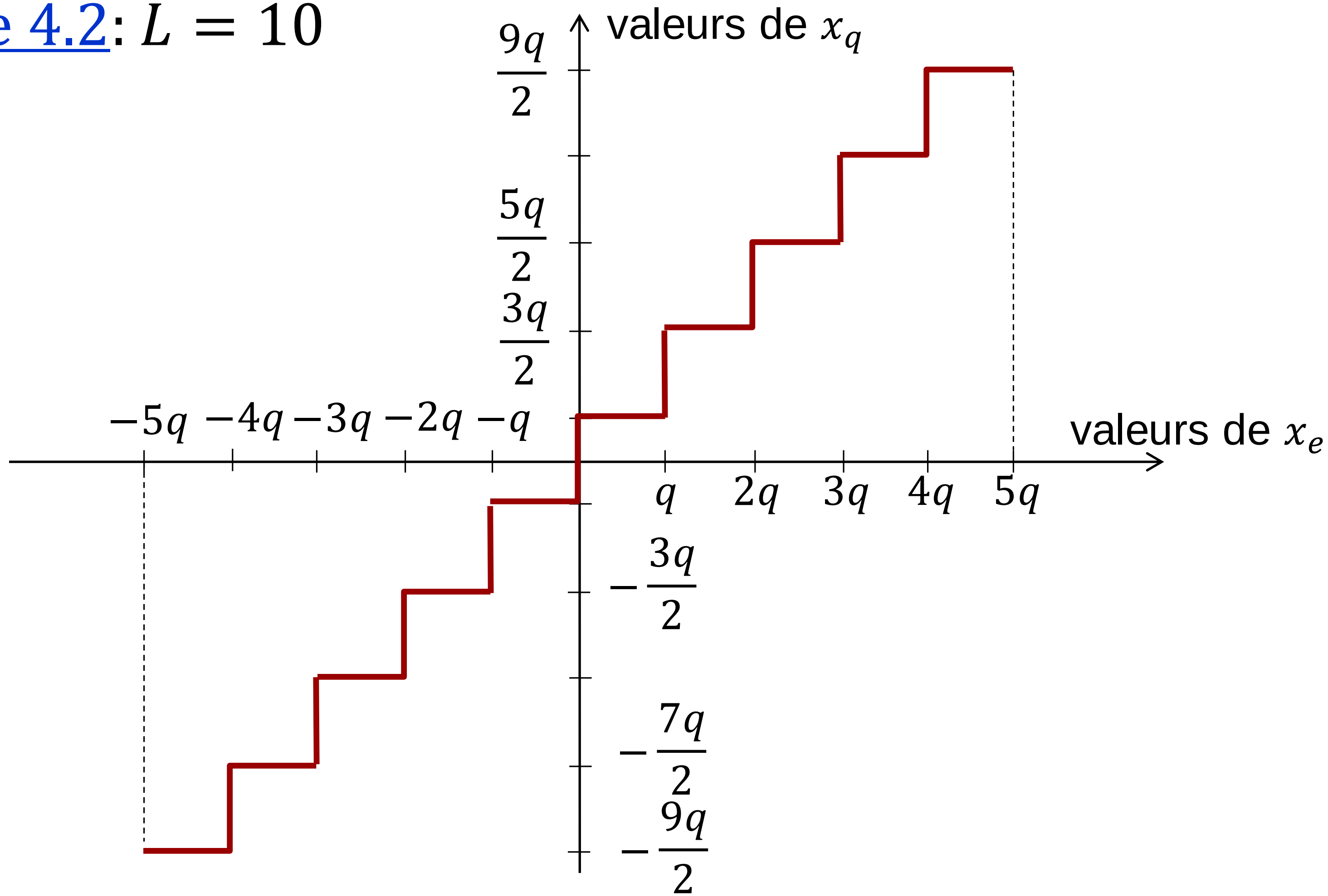
- La valeur quantifiée d'un échantillon $x(kT_e)$ pris dans l'intervalle $[nq, (n+1)q]$:

$$x_q(kT_e) = \frac{(2n+1)}{2} q$$

# Quantification uniforme du signal échantillonné

## Fonction de transfert entrée-sortie

- Exemple 4.2: $L = 10$



***Chapitre 5* :**

# Signaux déterministes à temps discret

## Introduction

- Un signal à temps discret prend valeurs à des instants distincts. Ces valeurs dépendent d'un entier $k \in \mathbb{Z}$
  - Le signal à temps discret est noté $x(k)$

- L'amplitude du signal peut être discrète (quantifiée) ou continue (non quantifiée)

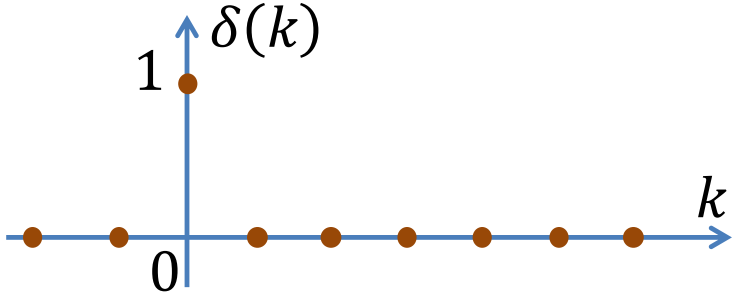
- Les signaux à temps discret peuvent se présenter sous deux formes:
  - Signaux échantillonnés
  - Signaux numériques

# Signaux déterministes à temps discret

## Exemples: Signal impulsion unité, signal échelon unité

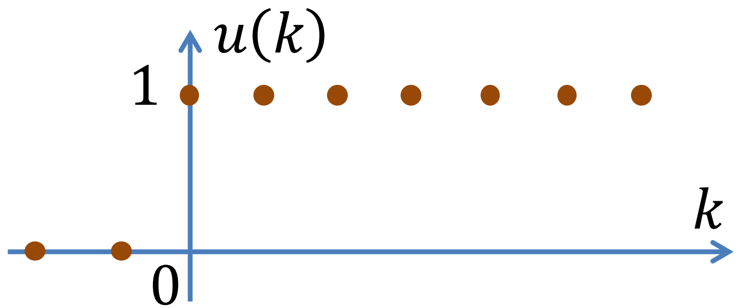
- Le signal impulsion unité

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 0 \\ 0 & \text{pour} \quad k \neq 0 \end{cases}$$




- Le signal échelon unité

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad k < 0 \end{cases}$$

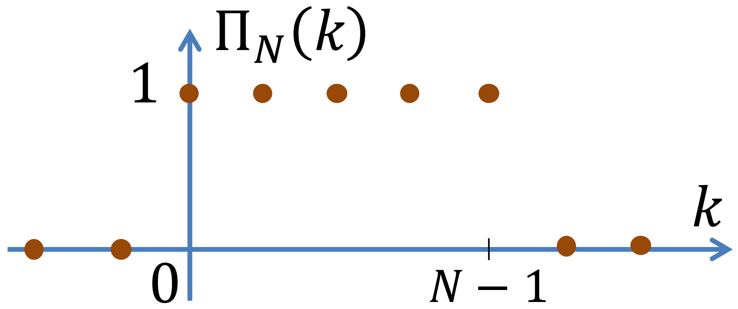


# Signaux déterministes à temps discret

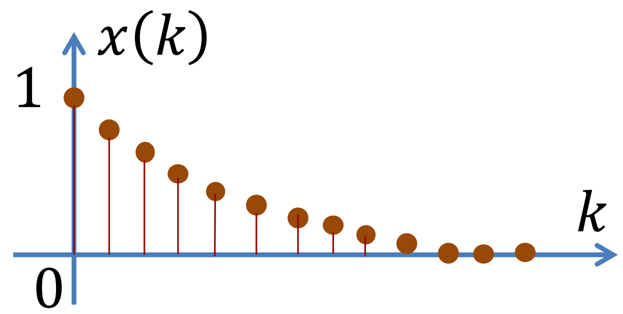
## Exemples: Signal Porte, le signal $\alpha^k u(k)$

- Le signal porte de longueur $N$

$$\Pi_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$




- Le signal $x(k) = \alpha^k u(k), \qquad 0 < \alpha < 1$



## Notions d'énergie et de puissance

Considérons un signal déterministe à temps discret $x(k)$

- L'énergie du signal:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

- La puissance moyenne du signal:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x(k)|^2$$

- ✓ Si $E_x < \infty$, le signal $x(k)$ est d'énergie finie
- ✓ Si $P_x < \infty$, le signal $x(k)$ est de puissance finie

# Signaux déterministes à temps discret
## Représentations

- Un signal à temps discret ou continu peut avoir plusieurs autres représentations
  - Une meilleure description du signal
  - Une facilité de traitement

- Une pluralité de transformées:
  - Transformée de Laplace à temps discret
  - Transformée en $z$ (TZ)
  - Transformée de Fourier à temps discret (TFtd)
  - Transformée de Fourier discrète (TFD)

## Transformée en $z$ - Définition

**Définition 5.1: Transformée en $z$**

La transformée en $z$, notée $X(z)$, d'un signal à temps discret $x(k)$ est la fonction, de variable complexe, définie par:

$$X(z) = TZ(x(k)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} \quad \text{Pour } R_1 \leq |z| \leq R_2$$

- Généralement, le domaine de convergence est une couronne

- Les points du domaine de convergence pour lesquels $X(z) = 0$ s'appellent les zéros de $X(z)$
- Les points en dehors du domaine de convergence pour lesquels $|X(z)| \to \infty$, s'appellent les pôles de $X(z)$

# Transformée en z

## Propriétés: Linéarité, symétrie, conjugaison, décalage

Soit $x(k)$, $x_1(k)$, et $x_2(k)$ des signaux dont les TZ sont $X(z)$, $X_1(z)$ et $X_2(z)$ respectivement.

- Linéarité: Pour deux scalaires $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{C}$

$$\alpha x_1(k) + \beta x_2(k) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- Symétrie :

$$x(k) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X(z^{-1})$$

- Conjugaison :

$$x^*(k) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X^*(z^*) \qquad \text{et} \quad x^*(-k) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X^*\big((z^{-1})^*\big)$$

- Décalage temporel :

$$x(k - k_0) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad z^{-k_0} X(z)$$

# Transformée en z

## Propriétés: Déphasage, multiplication par $a^k$

- Déphasage: Soit le signal $y(k) = e^{j2\pi k f_0} x(k)$. Sa transformée en z est définie par:

$$Y(z) = X\left(e^{-j2\pi f_0} z\right)$$

  - C'est une rotation d'angle $-2\pi f_0$ dans le plan complexe
  - $Y(z)$ a le même domaine de convergence que $X(z)$

- Multiplication par $a^k$: Si $y(k) = a^k x(k)$ où le domaine de convergence de $X(z)$ est $R_1 \leq |z| \leq R_2$, $Y(z)$ est définie par:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^k = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

- Le domaine de convergence de $Y(z)$: $|a|R_1 \leq |z| \leq |a|R_2$

# Transformée en $z$ inverse

## Définition, Méthodes d'inversion

- La transformée en $z$ inverse permet de déterminer un signal à temps discret $x(k)$ à partir de sa transformée en $z$ $X(z)$ définie sur une couronne de convergence $D = \{z, \quad R_1 \leq |z| \leq R_2\}$
- Transformée en $z$ inverse :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C} X(z)\, z^{k-1} dz$$

où C est le contour de Cauchy appartenant au domaine de convergence.

- Trois méthodes d'inversion de $X(z)$ pour calculer $x(k)$:
  - La formule des résidus
  - Développement en séries
  - Développement en éléments simples

# Transformée en $z$ inverse

## Formule des résidus - Définition

**Définition 5.2: Résidu**

Le résidu d'une fonction $f(z)$ en un pôle $z = a$ d'ordre $m$ est défini par:

$$Res[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\}$$

Pour un pôle $z = a$ simple (d'ordre 1),

$$Res[f(z), a] = \lim_{z \to a} \{(z-a) f(z)\}$$

- La fonction $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D
  $\Rightarrow f(z)$ admet un développement en séries entières
- La fonction $f(z)$ possède un nombre fini de pôles

## Formule des résidus – Calcul du signal discret

On cherche à déterminer le signal $x(k)$ à partir de sa transformée en z $X(z)$ dont le domaine de convergence est $D = \{z, R_1 \leq |z| \leq R_2\}$.

Soit C un contour appartenant à D. Le signal $x(k)$ est calculé de deux manières:

- Avec les pôles $a_i$ de $X(z)z^{k-1}$ appartenant à C:

$$x(k) = \sum_i Res[X(z)z^{k-1}, a_i] \quad \forall a_i \in C$$

- Avec les pôles $a_j$ de $X(z)z^{k-1}$ n'appartenant pas à C:

$$x(k) = -\sum_j Res\left[X(z)z^{k-1}, a_j\right] \quad \forall a_j \notin C$$

# Transformée en $z$ inverse

## Formule des résidus – Exemple

- Exemple 5.1: Déterminons le signal dont la TZ est définie par,

$$X(z) = \frac{z}{z-\alpha}$$

  - Domaine de convergence : $D = \{z,\ |z| > \alpha\}$

L'application de la méthode des résidus aux pôles de la quantité $X(z).z^{k-1} = \frac{z^k}{z-\alpha}$ mène à,

$$x(k) = \begin{cases} \alpha^k & pour\ k \geq 0 \\ 0 & pour\ k < 0 \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$

# Transformée en $z$ inverse

## Transformée en z est une fraction rationnelle

- La transformée en z peut s'exprimer sous forme d'un quotient de deux polynômes en $z$ ou en $z^{-1}$
  - $X(z) = \dfrac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$ $\Rightarrow$ Le signal $x(k)$ est nul à gauche (causal)
  - $X(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$ $\Rightarrow$ Le signal $x(k)$ est nul à droite (anti-causal)

- Deux méthodes pour inverser $X(z)$
  - Développement en séries
  - Développement en éléments simples

# Transformée en $z$ inverse
## Développement en séries

- La transformée en z de $x(k)$ est une fraction rationnelle

$$X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Le signal $x(k)$ est déterminé en faisant la division polynômiale de $P(z^{-1})$ par $Q(z^{-1})$

- Les étapes d'inversion de $X(z)$ par développement en séries:
  - Faire la division polynômiale de $P(z^{-1})$ par $Q(z^{-1})$
  - Faire l'identification des coefficients du quotient de la division polynomiale avec $x(k)$

# Transformée en $z$ inverse

## Développement en séries

- Exemple 5.2: Déterminons le signal $x(k)$ dont la TZ est définie par

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Division polynômiale :

$$\begin{array}{l|l}
1 + 2z^{-1} & 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \\
\underline{-1 + 2z^{-1} - z^{-2}} & \overline{1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + \ldots + (3k+1)z^{-k}} \\
\quad 4z^{-1} - z^{-2} & \\
\quad \underline{-4z^{-1} + 8z^{-2} - 4z^{-3}} & \\
\qquad 7z^{-2} - 4z^{-3} & \\
\qquad \underline{-7z^{-2} + 14z^{-3} - 7z^{-4}} & \\
\qquad\quad 10z^{-3} - 7z^{-4} &
\end{array}$$

- Le signal $x(k)$ :

$$x(k) = (3k+1)u(k)$$

# Transformée en $z$ inverse

## Décomposition en éléments simples

- Lorsque $X(z)$ est une fraction rationnelle, le signal $x(k)$ peut être déterminé par le développement en éléments simples de $X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$

- Les étapes d'inversion de $X(z)$:
  - Décomposer $X(z)$ en éléments simples
  - Prendre la transformée en z inverse de chaque terme de la décomposition obtenue

> ✓ La décomposition en éléments simples fait intervenir le développement en séries entières

# Transformée en $z$ inverse

## Décomposition en éléments simples - Exemple

- Exemple 5.3: Déterminons le signal $x(k)$ dont la TZ est définie par

$$X(z) = \frac{1}{z(z+1)^2(z-1)} = \frac{z^{-4}}{(1+z^{-1})^2(1-z^{-1})} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Après le développement en éléments simples :

$$X(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2(1+z^{-1})^2} - \frac{7}{4(1+z^{-1})} + \frac{1}{4(1-z^{-1})}$$

- Le signal $x(k)$ :

$$x(k) = \delta(k) - \delta(k-1) + \left[\frac{1}{2}(-1)^k(k+1) - \frac{7}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}\right]u(k)$$

# Transformée en $z$

## Formule de Parseval

- Pour deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ de transformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ respectivement, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k) = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)Y^*\left((z^{-1})^*\right)\frac{dz}{z}$$

- Dans le cas où $x(k) = y(k)$, on obtient :

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)X^*\left((z^{-1})^*\right)\frac{dz}{z}$$

# Transformée en $z$

## Produit de convolution

- Considérons deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ de transformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ respectivement.
- Le produit de convolution:

$$x(k) * y(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(l)y(k-l)$$

- Effet de la transformée en z sur la convolution:

$$x(k) * y(k) \overset{TZ}{\rightarrow} X(z).Y(z)$$

> ✓ La transformée en z transforme un produit de convolution en un produit simple

# Transformée en $z$

## Fonction de corrélation

$x(k)$ et $y(k)$ deux signaux de TZ $X(z)$ et $Y(z)$

- Fonction d'inter-corrélation :

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k-n) = x(n) * y^*(-n)$$

- Fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x^*(k-n) = x(n) * x^*(-n)$$

- Transformée en z :

$$R_{xy}(n) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X(z).Y^*\left((z^{-1})^*\right) \;\text{ et }\; R_{xx}(n) \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X(z).X^*\left((z^{-1})^*\right)$$

# Transformée de Fourier à temps discret

## Définition

### Définition 5.3: Transformée de Fourier à temps discret

La transformée de Fourier, noté $X(f)$, d'un signal à temps discret $x(k)$ est définie par:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j2\pi kf}$$

$X(f)$ existe si le cercle unité fait partie du domaine de convergence de $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$.

- $X(f)$ est périodique de période 1

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi kf}\, df$$

# Transformée de Fourier à temps discret

## Exemple

- Exemple 5.4 : Transformée de Fourier du signal rectangulaire de longueur $N$.

$$x(k) = \Pi_N(k)$$

- Transformée de Fourier à temps discret (TFtd) :

$$X(f) = TFtd(x(k)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{+j2\pi kf}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{+j2\pi kf} = \frac{1 - e^{-j2\pi Nf}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

Finalement,

$$X(f) = \frac{sin(\pi Nf)}{sin(\pi f)} e^{-j2\pi\frac{(N-1)}{2}f}$$

# Transformée de Fourier à temps discret

## Propriétés

| **Propriété** | **Temps discret** | **Fréquence** |
|---|---|---|
| Linéarité | $\alpha x(k) + \beta y(k)$ | $\alpha X(f) + \beta Y(f)$ |
| Translation en temps | $x(k - k_0)$ | $X(f).e^{-j2\pi k_0 f}$ |
| Translation en fréquence | $x(k).e^{j2\pi k f_0}$ | $X(f - f_0)$ |
| Produit de Convolution | $x(k) * y(k)$ | $X(f).Y(f)$ |
| Produit simple | $x(k).y(k)$ | $X(f) * Y(f)$ |
| Conjugaison | $x^*(k)$ | $X^*(-f)$ |
| | Réel | $X(-f) = X^*(f)$ |
| | Réel, pair | Réelle paire |

# Transformée de Fourier à temps discret

## Formule de Parseval

- Le changement de variable $z = e^{j2\pi f}$ dans la formule de Parseval pour la transformée en z permet d'avoir,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)Y^*(f)df$$

- Pour $x(k) = y(k)$,

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

✓ La formule de Parseval traduit la conservation de l'énergie entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

# Transformée de Fourier discrète

## Introduction

- La transformée de Fourier des signaux à temps discret ou à temps continu n'est pas appropriée pour un traitement numérique :
  - Un ordinateur ne traite que des nombres
  - Un ordinateur a une contrainte de la taille mémoire
- La transformée de Fourier discrète(TFD) est la forme de la TF adaptée aux traitements numériques
  - Discrétiser la fréquence
  - Echantillonner le signal analogique et le tronquer dans le temps

✓ Un calcul rapide et efficace de la TFD grâce à l'algorithme de la transformée de Fourier rapide *FFT (Fast Fourier Transform)*

# Transformée de Fourier discrète

## Définition

**Définition 5.4: Transformée de Fourier discrète**

Soit $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ une séquence de $N$ valeurs d'échantillons prise d'un signal $x(t)$ avec la période d'échantillonnage $T_e$. La transformée de Fourier discrète associe à cette séquence de valeurs une autre séquence de $N$ valeurs $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_{N-1}$ espacées de $\frac{F_e}{N}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \quad pour \;\; k = 0, 1, \dots, N-1$$

- ✓ Les deux suites $x(n)$ et $X_k$ sont périodiques de même période

# Transformée de Fourier discrète

## Forme matricielle, TFD inverse

- Forme matricielle de la transformée de Fourier discrète

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & e^{-j2\pi nk/N} & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)/N} & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(n) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- Transformée de Fourier discrète inverse

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi n\frac{k}{N}} \quad pour \;\; n = 0,1,\ldots,N-1$$

# Transformée de Fourier discrète

## Propriétés

Soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux à temps discret dont les TFDs sont $X_k$ et $Y_k$.

- Linéarité :

$$\alpha x(n) + \beta y(n) \xrightarrow{TFD} \alpha X_k + \beta Y_k$$

- Symétrie et conjugaison :

$$x(-n) \xrightarrow{TFD} X_{-k} \qquad x^*(n) \xrightarrow{TFD} X_{-k}{}^* \qquad x^*(-n) \xrightarrow{TFD} X_k{}^*$$

- Décalage temporel :

$$x(n - n_0) \xrightarrow{TFD} X_k . e^{-j2\pi n_0 \frac{k}{N}}$$

- Décalage fréquentiel :

$$x_n . e^{+j2\pi n \frac{k_0}{N}} \xrightarrow{TFD} X_{k-k_0}$$

# Produit de convolution discrète

## Définition 5.5: Produit de convolution discrète

Considérons deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ de supports temporels $\{0,1,\dots,N_x-1\}$ et $\{0,1,\dots,N_y-1\}$ respectivement. Leur produit de convolution discret est le signal à temps discret $z(n)$, défini par:

$$z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{k=0}^{N_x-1}x(k)y(n-k)=\sum_{k=0}^{N_y-1}y(k)x(n-k)$$

Le support temporel de $z(n)$ est $\{0,1,\dots,N_x+N_y-2\}$

- ✓ Pour réduire le temps de calcul, il est judicieux de faire la sommation dans le support temporel le plus petit.

**Définition 5.7: Produit de convolution cyclique**

Considérons deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ de support temporel $\{0,1,\dots,N-1\}$. Leur produit de convolution cyclique est le signal à temps discret $z(n)$, ayant le même support temporel, défini par:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n-k)$$

Les indices sont pris modulo $N$

- Propriété de convolution de la TFD

$$x(n) \otimes y(n) \xrightarrow{TFD} X_k Y_k \quad \text{et} \quad x(n).y(n) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{N} X_k \otimes Y_k$$

### Définition 5.6: La fonction de corrélation discrète

Considérons deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ de supports temporels $\{0,1,\dots,N_x-1\}$ et $\{0,1,\dots,N_y-1\}$ respectivement. Leur fonction de corrélation discrète $R_{xy}(n)$ est définie par:

$$R_{xy}(n)=\sum_{k=0}^{N_x-1}x(k)y^*(k-n)\quad \text{pour}\quad n\in\{-(N_y-1),\dots,N_x-1\}$$

- Si $x(n)$ et $y(n)$ ont la même période $N$

$$R_{xy}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)y^*(k-n)\quad \text{pour}\quad n\in\{0,\dots,N-1\}$$

# Transformée de Fourier discrète

## Formule de Parseval

Soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux à temps discret ayant le support $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Leurs TFDs sont $X_k$ et $Y_k$

- Les deux signaux et leurs TFDs vérifient,

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k {Y_k}^*$$

- Pour $x(n) = y(n)$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

# Références


- MIT open courses, *«ocw.mit.edu»*
- R. E. Ziemer, W. H. Tranter, *«Principles of Communications : Systems, Modulation, and Noise»*, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2002
- Jean Pierre Delmas, *«Eléments de théorie du signal», Paris,* 1995
- Hwei Hsu, *« Signaux et communications»*, 2$^{e}$ édition, Dunod, Paris, 2004
- D. Ghorbanzadeh,P. Marry, N. Point, D. Vial, *«Mathématiques du signal»*, Paris, 2008