

Méthodes numériques pour la tomographie par impédance électrique dans le cadre de l'electrocardiographie

Soutenance de thèse de Niami Nasr

Directrice : Lisl Weynans

Co-encadrant : Jérémi Dardé

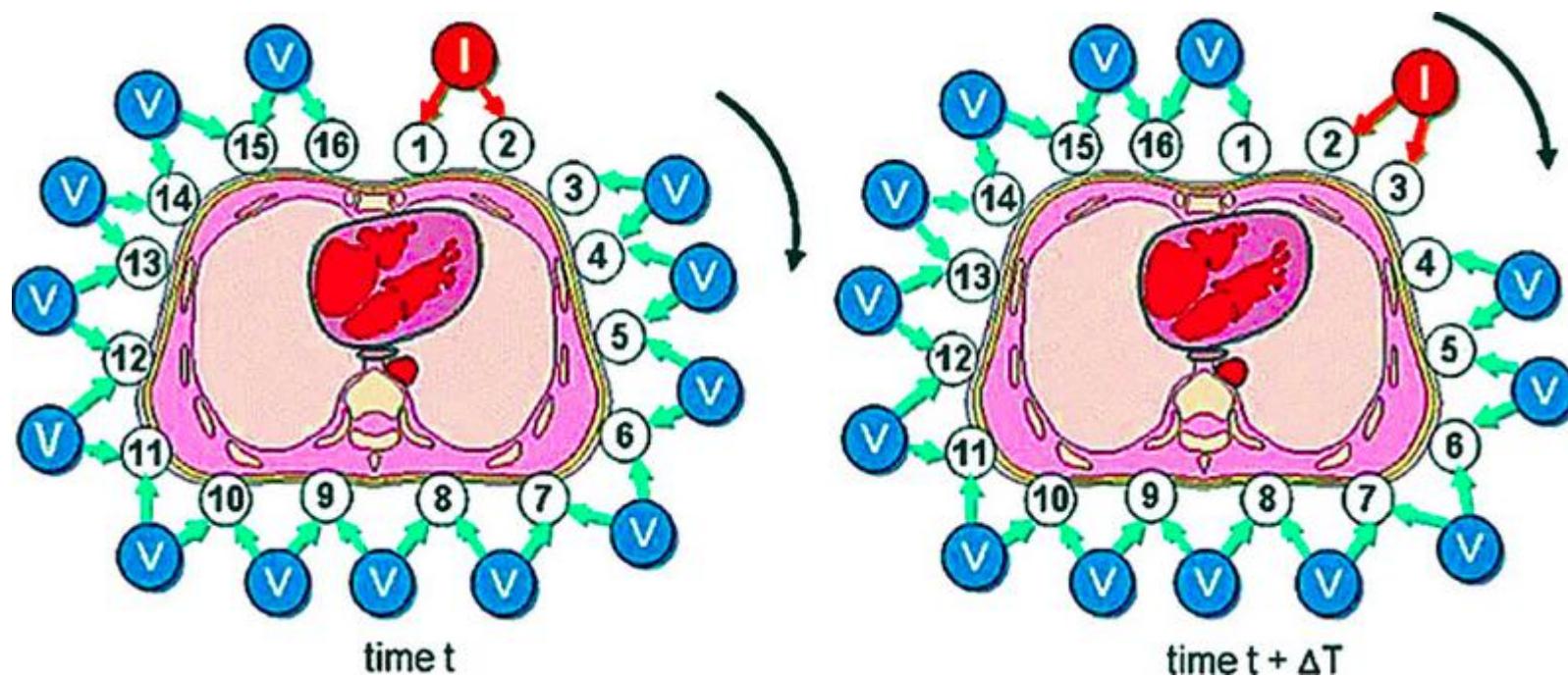
14 décembre 2023

Plan

- L'EIT : un problème inverse mal posé
- Modélisation du problème direct
- Une méthode de frontière immergée pour l'EIT
- Application : résolution de problèmes inverses
- Vers des applications plus réalistes
- Développement et calcul scientifique pour l'EIT
- Conclusion et perspectives

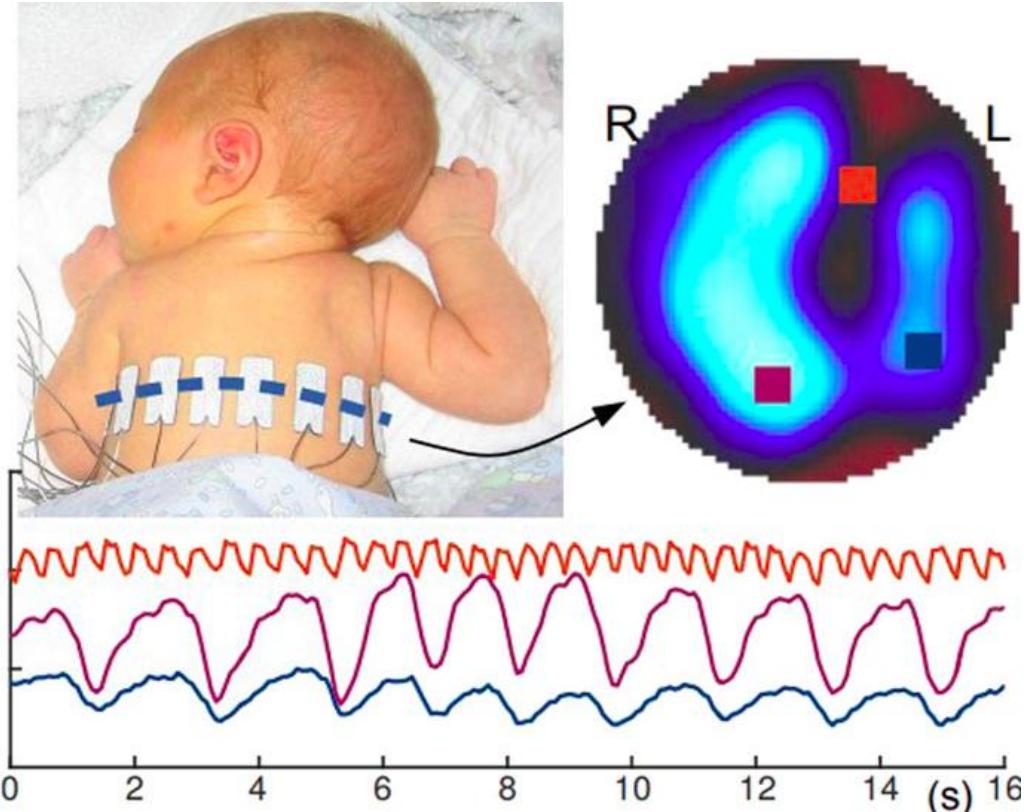
Tomographie par impédance électrique

La tomographie par impédance électrique (EIT) est une technique d'imagerie non invasive visant à reconstruire la distribution de conductivité électrique à l'intérieur d'un domaine en appliquant des courants électriques au bord du domaine à des électrodes et en mesurant les tensions résultantes.



Description de l'étape de mesure pour l'EIT (the adjacent driving mode Leonhardt and Lachmann, 2012)

Tomographie par impédance électrique : applications



Un nourrisson de 10 jours avec des électrodes EIT
(Heinrich et al. 2006) pour un diagnostic et un traitement
précoce des maladies pulmonaires au stade initial du
développement.



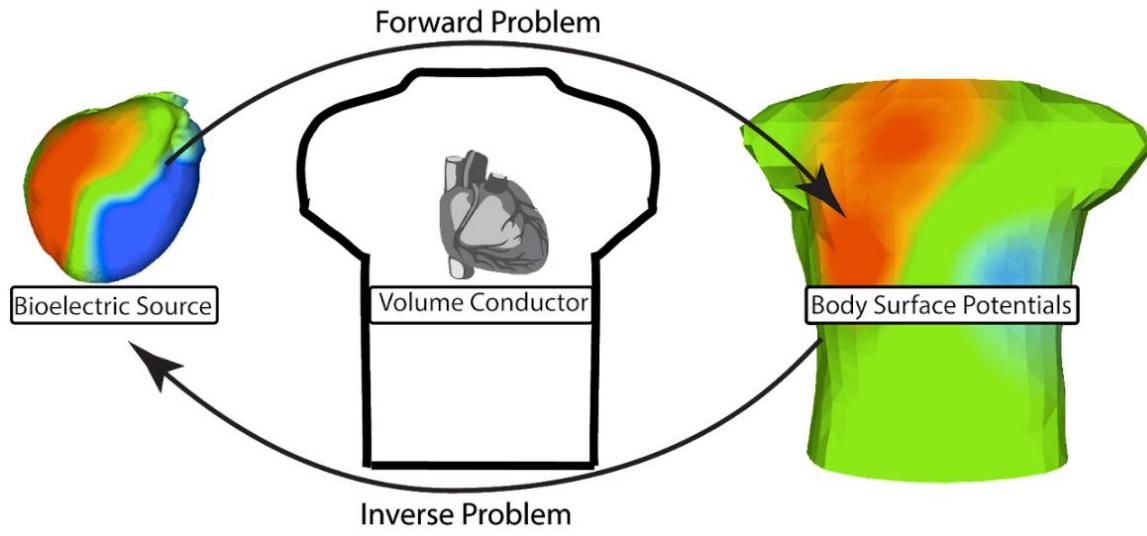
Surveillance en temps réel des patients atteints de maladies
pulmonaires.

L'EIT dans un contexte électrocardiographique

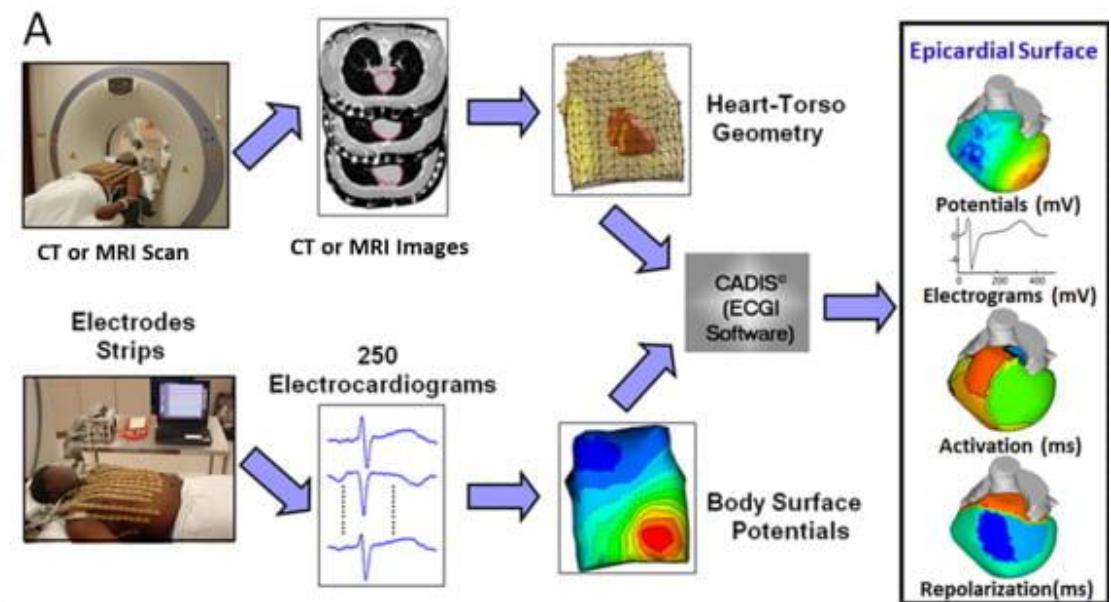
- Dans le cadre de l'institut des Maladies du Rythme Cardiaque (IHU Liryc)
- Objectif: détecter les troubles du fonctionnement électrique du cœur, responsables de la majorité des morts soudaines par arrêt cardiaque.
- Technique non-invasive pour reconstruire le champ électrique à la surface du cœur à partir de mesures sur le torse : **ECGi = imagerie électrocardiographique**

L'EIT dans un contexte électrocardiographique

- Dans le cadre de l'institut des Maladies du Rythme Cardiaque (IHU Liryc)
- Objectif: détecter les troubles du fonctionnement électrique du cœur, responsables de la majorité des morts soudaines par arrêt cardiaque.
- Technique non-invasive pour reconstruire le champ électrique à la surface du cœur à partir de mesures sur le torse : **ECGi = imagerie électrocardiographique**



The ECGI Procedure

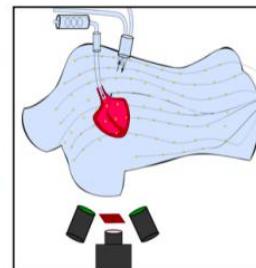
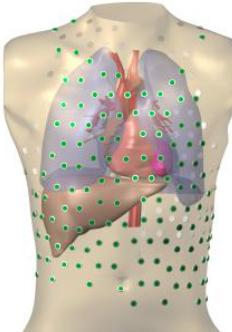


L'EIT dans un contexte électrocardiographique

- Dans le cadre de l'institut des Maladies du Rythme Cardiaque (IHU Liryc)
- Objectif : détecter les troubles du fonctionnement électrique du cœur, responsables de la majorité des morts soudaines par arrêt cardiaque.
- Technique non-invasive pour reconstruire le champ électrique à la surface du cœur à partir de mesures sur le torse : **ECGi = imagerie électrocardiographique**

Performances actuelles de l'ECGi : (LR Bear et al. 2015)

- **Etudes expérimentales in-silico** : reconstructions satisfaisantes
- **Etudes expérimentales ex-vivo** : dans le dispositif de torso tank développé au Liryc : reconstructions satisfaisantes si pas d'erreur sur position des électrodes
- **Etudes expérimentales in-vivo** : reconstructions satisfaisantes pour des motifs d'activation électrique réguliers mais pas pour des cas plus complexes

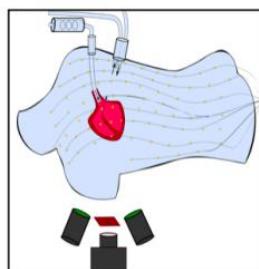
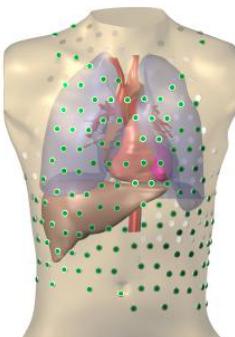


Etudes in-silico, ex-vivo dans le torso tank, et cliniques in-vivo

L'EIT dans un contexte électrocardiographique

Sources d'erreurs pour l'ECGI :

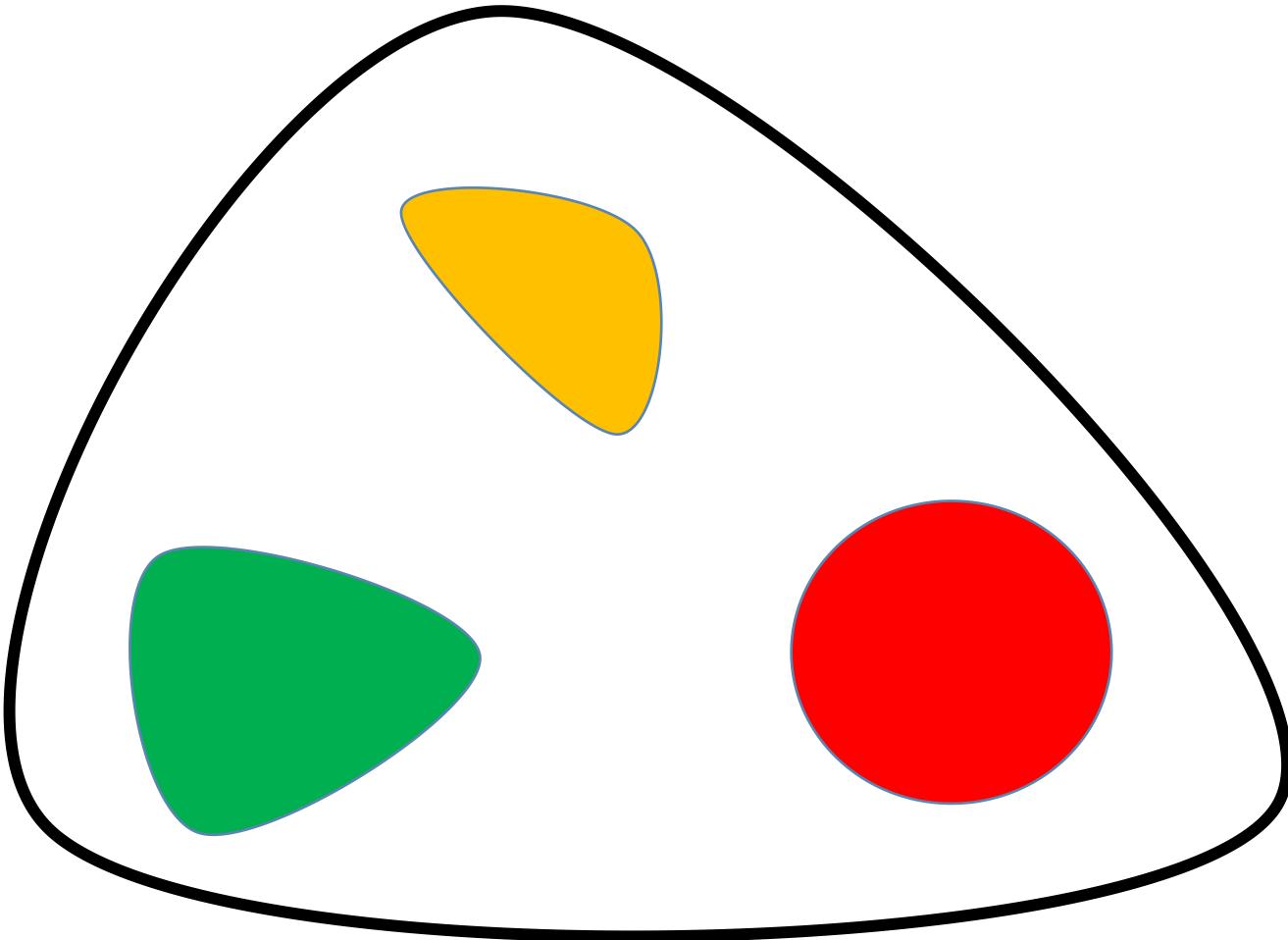
- Bruit expérimental
- Résolution du problème inverse
- Modélisation du problème direct, prise en compte des conductivités des organes et de leur mouvement



Etudes in-silico, ex-vivo dans le torso tank, et cliniques in-vivo

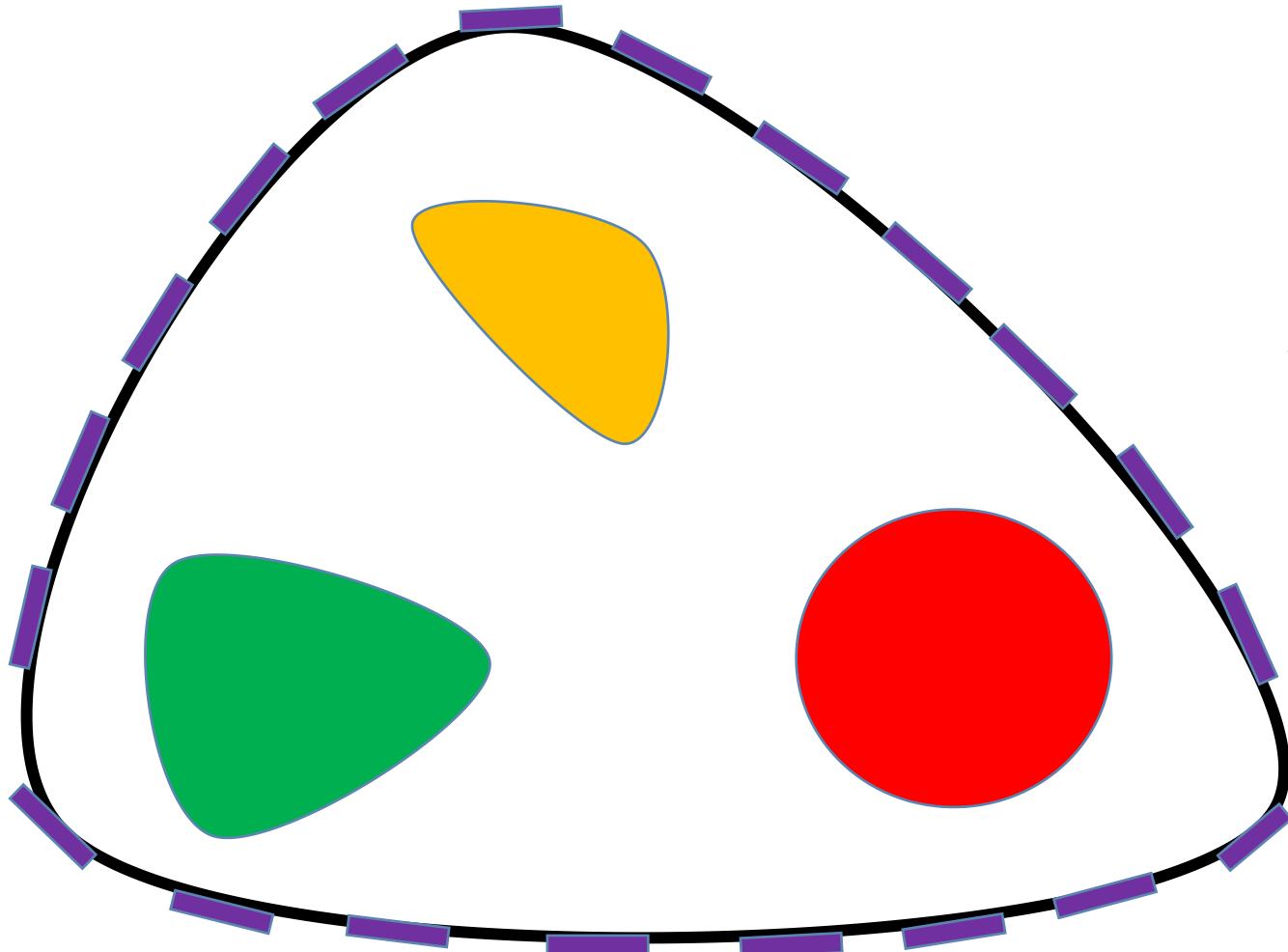
Tomographie par impédance électrique : dans le cadre de cette thèse

Généralement on a ce type
de problème en 2D:

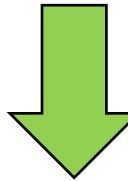


Tomographie par impédance électrique : dans le cadre de cette thèse

Généralement on a ce type
de problème en 2D:



Problème classique :
trouver les conductivités des
inclusions.

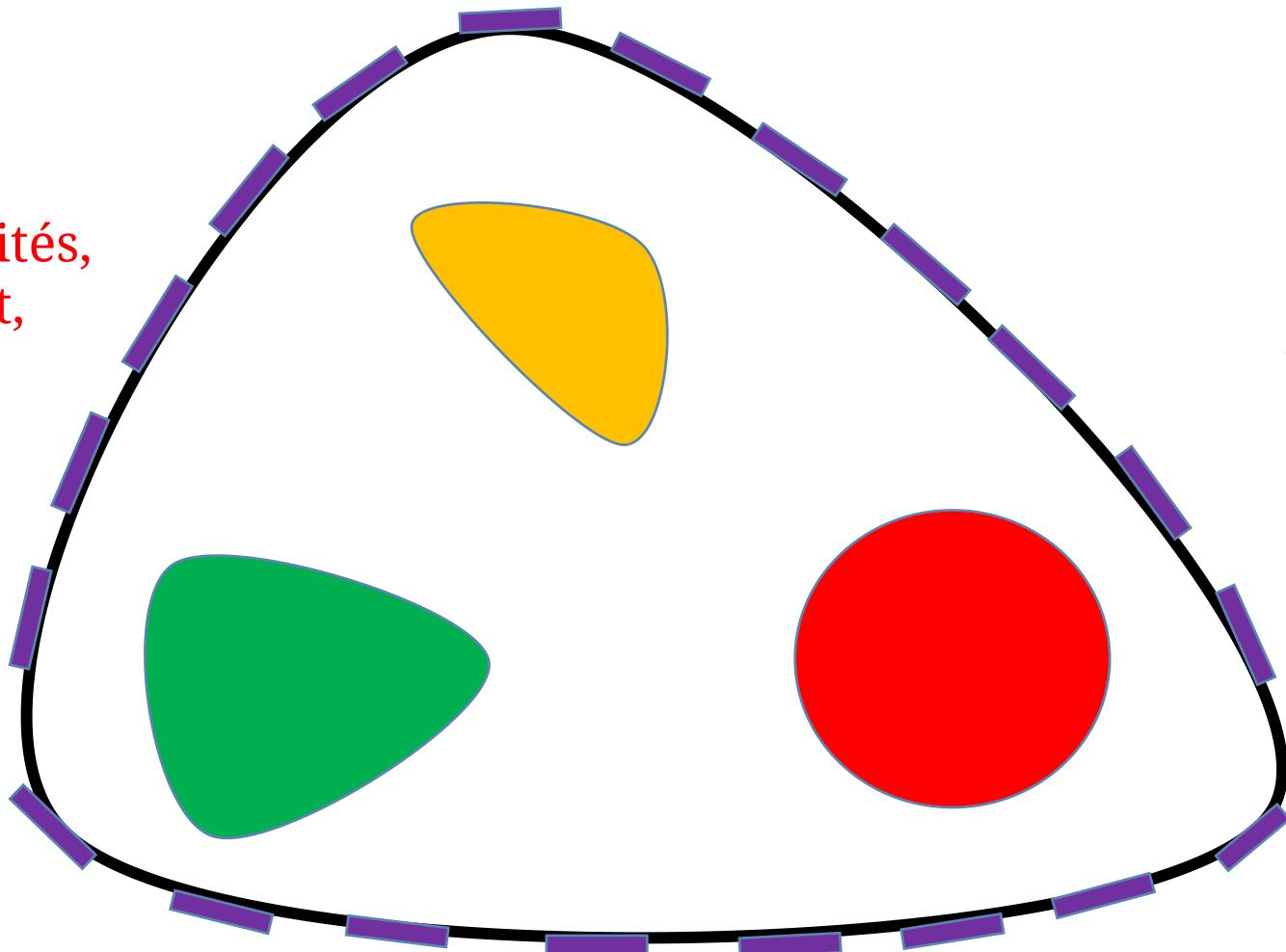


Problème
inverse de
Calderón.

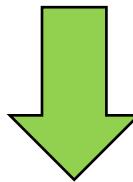
Tomographie par impédance électrique : dans le cadre de cette thèse

Généralement on a ce type
de problème en 2D:

Inconnues : conductivités,
impédances de contact,
géométrie du bord...



Problème classique :
trouver les conductivités des
inclusions.



Problème
inverse de
Calderón.

Modélisation du problème direct

Modélisation du problème direct : Le modèle continuum

Trouver u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

Potentiel

Conductivité

avec f une fonction dans $L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie :

$$\int_{\partial\Omega} f \, ds(x) = 0.$$

- Le modèle le plus simple.
- La condition au bord modélise la circulation libre du courant à travers tout le bord du domaine.
- Le plus simple à traiter mathématiquement.

Pour une fonction de densité $f \in L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie la condition $\int_{\partial\Omega} f \, ds = 0$, le modèle continuum admet une unique solution u dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

Modélisation du problème direct : Le modèle "Shunt"

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}_{\diamond}^M$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) & = & 0 \text{ dans } \Omega \\ u & = & U_m \text{ sur } E_m, \\ \sigma \partial_{\nu} u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{E}, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_{\nu} u \, ds & = & I_m. \end{array} \right.$$

Avec E_m l'électrode m -ième, $I \in \mathbb{R}_{\diamond}^M$ le schéma de courant, avec

$$\mathbb{R}_{\diamond}^M = \left\{ I \in \mathbb{R}^M, \sum_{k=1}^M I_k = 0 \right\},$$

Étant donné un courant d'entrée $I \in \mathbb{R}_{\diamond}^M$, le modèle shunt admet une unique solution dans

$$\mathbb{V} = \{(w, W) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}_{\diamond}^m : w|_{E_m} = W_m, \text{ pour } m = 1, 2, \dots, M\}.$$

- Le modèle "Shunt" prend en compte la présence des électrodes.
- Le modèle "Shunt" suppose que les électrodes métalliques sont des conducteurs parfaits.

Modélisation du problème direct : Le CEM

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}_{\diamond}^M$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) & = & 0 \text{ dans } \Omega \\ u + z_m \sigma \partial_\nu u & = & U_m \text{ sur } E_m, \\ \sigma \partial_\nu u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{E}, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds & = & I_m. \end{array} \right.$$

Avec E_m l'électrode m -ième, z_m l'impédance de contact associée, $I \in \mathbb{R}_{\diamond}^M$ le schéma de courant.

$$\mathbb{R}_{\diamond}^M = \left\{ I \in \mathbb{R}^M, \sum_{k=1}^M I_k = 0 \right\}.$$

- Modélisation de l'injection des courants à travers des électrodes.
- Chaque électrode possède une impédance de contact.
- Le modèle le plus réaliste.

Étant donné un courant d'entrée $I \in \mathbb{R}_{\diamond}^M$, le CEM admet une unique solution dans $\mathcal{H}^1 = (H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$.

Modélisation du problème direct : Le CEM généralisé

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}_\diamond^M$ tels que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases}$$

- Ce modèle diffère légèrement du modèle standard : termes source non nuls à l'intérieur et au bord du domaine.
- Modèle utile pour les études numériques

Supposons que f , I et g vérifient :

$$\sum_{m=1}^M I_m + \int_{\Omega} f \, dx + \int_{E_c} g \, ds(x) = 0,$$

alors, le CEM généralisé admet une solution unique $(u, U) \in \mathcal{H}^1 = (H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$.

Modélisation du problème direct : Le CEM généralisé

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}_+^M$ tels que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Avec E_m l'électrode m -ième, $\xi_m \in \mathcal{Z}_m$, où

$$\mathcal{Z}_m = \{\xi \in L^\infty(E_m), \xi \geq 0, \xi \not\equiv 0\},$$

est l'admittance de contact, et $I \in \mathbb{R}_+^M$ le schéma de courant avec

$$\mathbb{R}_+^M = \left\{ I \in \mathbb{R}^M, \sum_{k=1}^M I_k = 0 \right\}.$$

- Ce modèle diffère légèrement du modèle standard : termes source non nuls à l'intérieur et au bord du domaine.
- Modèle utile pour les études numériques

Supposons que f , I et g vérifient :

$$\sum_{m=1}^M I_m + \int_{\Omega} f \, dx + \int_{E_c} g \, ds(x) = 0,$$

alors, le CEM généralisé admet une solution unique $(u, U) \in \mathcal{H}^1 = (H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$.

Une formulation alternative pour fixer la constante

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \ m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{array} \right.$$

(J.Dardé, N.Nasr, L.Weynans
2023)

Une formulation alternative pour fixer la constante

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m (u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \ m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{array} \right.$$

(J.Dardé, N.Nasr, L.Weynans
2023)

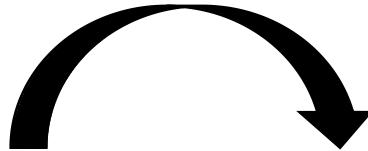
$$\int_{E_1} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon U_1 = I_1, \quad \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, \quad \forall m \in \{2, \dots, M\}.$$

Le problème admet une solution unique $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$.

Caractère bien posé du CEM généralisé

On fixe la constante : on travaille dans $\mathbb{H} = \{(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M; U_1 = 0\}$ avec la condition de compatibilité : $\sum_{m=1}^M I_m + \int_{\Omega} f dx + \int_{E_c} g ds(x) = 0$.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases}$$



$$B((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \xi_m(u - U_m)(v - V_m) ds(x),$$

et

$$L((v, V)) = \int_{\Omega} f v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} g(v - V_m) ds(x) + \int_{E_c} g v ds(x) + I \cdot V.$$

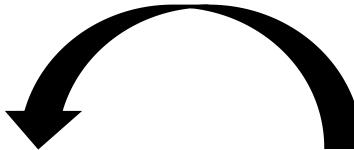
Pour l'existence et l'unicité :

- Continuité et linéarité de L .
- Continuité, bilinéarité et **coercivité** de B : on trouve une inégalité de type Poincaré-Wirtinger pour la coercivité.

Par Lax-Milgram,
on a existence et
unicité

Caractère bien posé du CEM généralisé

On fixe la constante : on travaille dans $\mathbb{H} = \{(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M; U_1 = 0\}$ avec la condition de compatibilité : $\sum_{m=1}^M I_m + \int_{\Omega} f dx + \int_{E_c} g ds(x) = 0$.



$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \quad \text{pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases}$$

$$B((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} \xi_m(u - U_m)(v - V_m) ds(x),$$

et

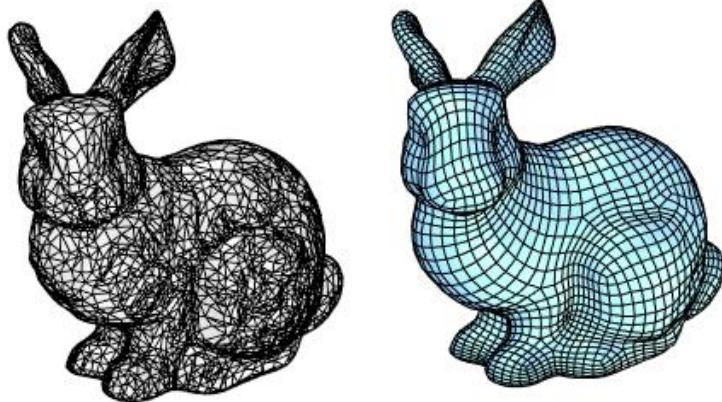
$$L((v, V)) = \int_{\Omega} f v dx + \sum_{m=1}^M \int_{E_m} g(v - V_m) ds(x) + \int_{E_c} g v ds(x) + I \cdot V.$$

- Raisonnement classique pour montrer que l'écriture variationnelle est équivalente à l'écriture forte : Le CEM généralisé est bien posé.

Une méthode de frontière immergée pour l'EIT

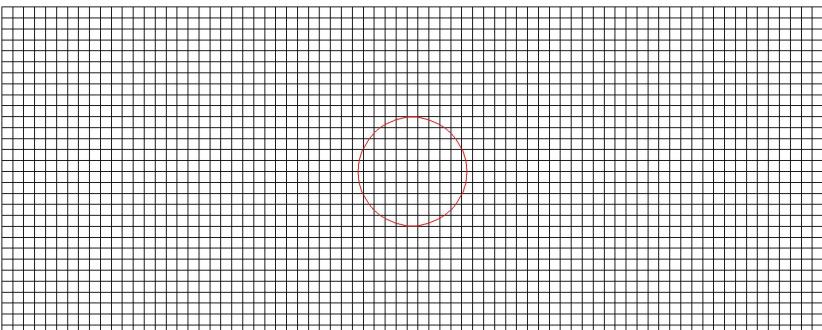
Une méthode numérique pour résoudre le problème direct

Méthode à maillages adaptés :



- Étapes coûteuses : notamment dans le cas des géométries mobiles.
- Facile à discréteriser.
- S'adapte à la précision locale.

Méthode de frontière immergée :



- Facile à créer et à manipuler.
- Compatible avec le calcul parallèle.
- Facile à discréteriser,
- **Les schémas habituels ne sont plus appropriés.**

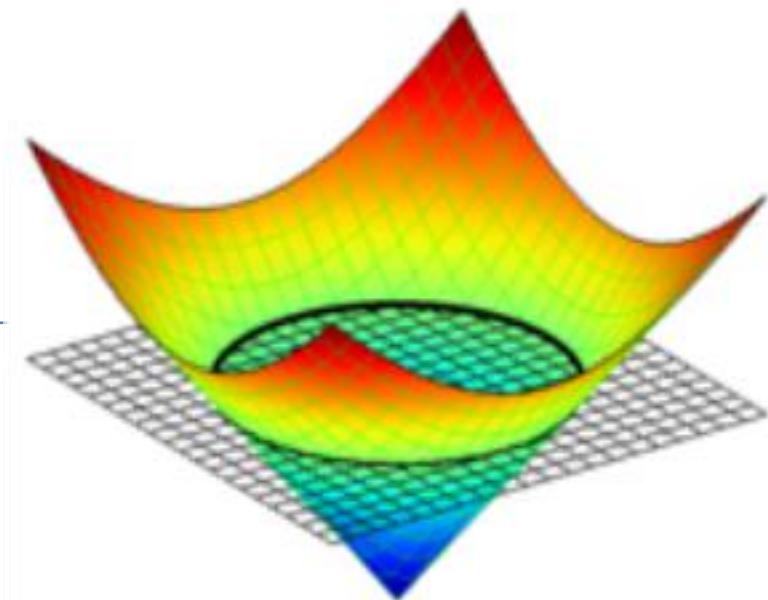
M. Cisternino, L. Weynans 2012

Représentation implicite du bord : Level - set

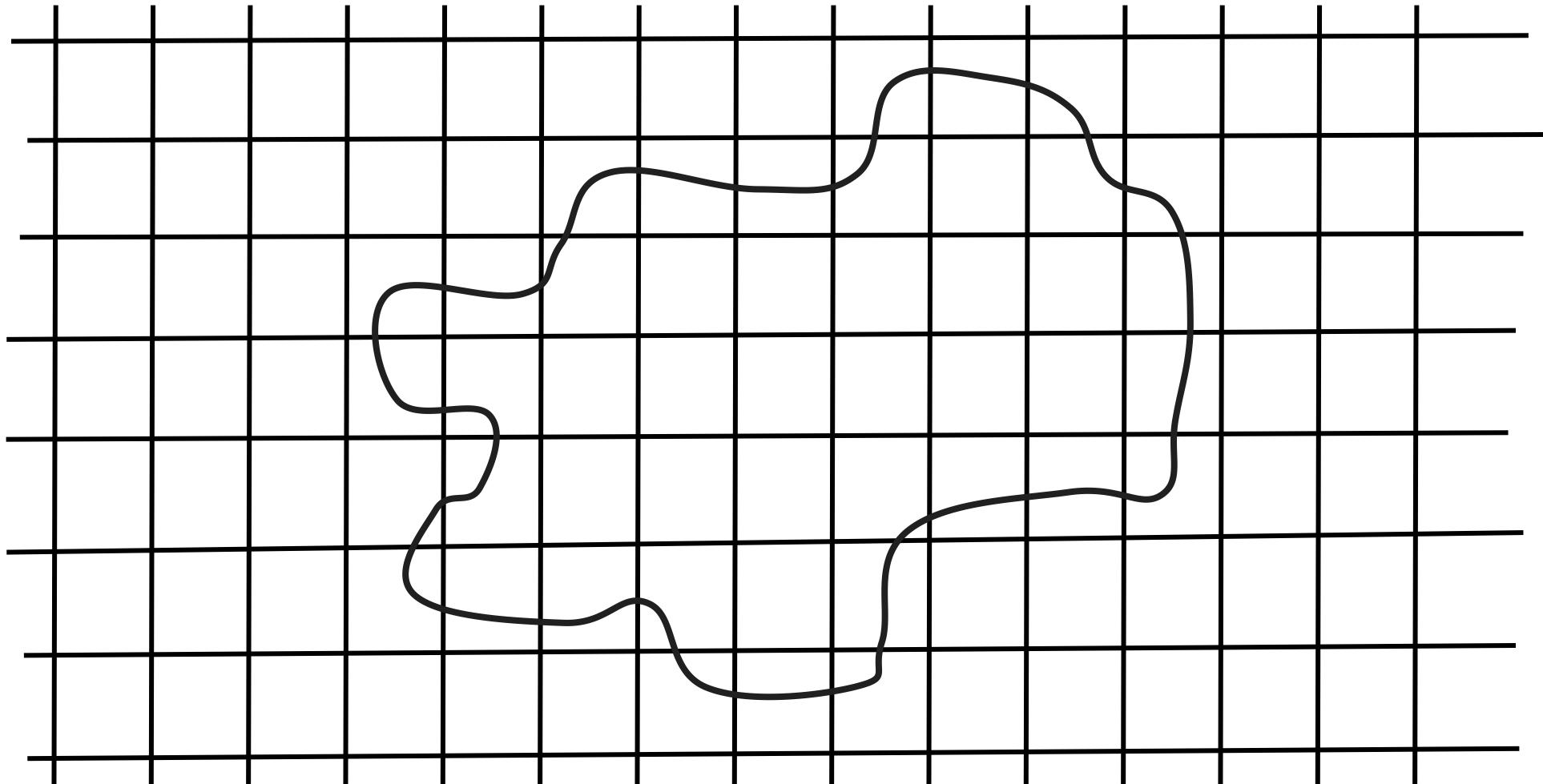
$$\begin{cases} \varphi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \varphi(x) > 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Le vecteur normal unitaire $\nu(x)$ à $\partial\Omega$, pointant vers l'extérieur de Ω , peut s'exprimer en termes de φ comme suit:

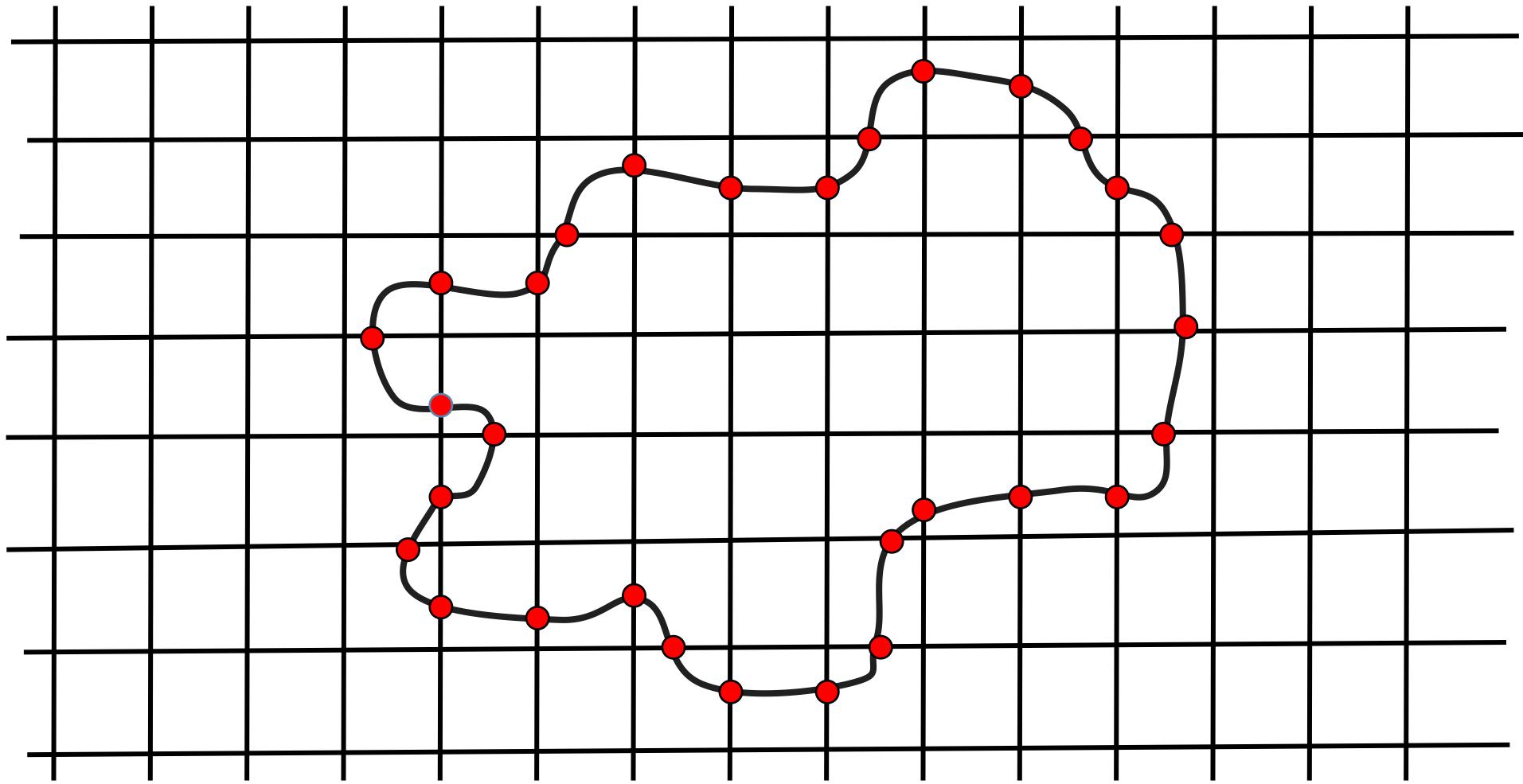
$$\forall x \in \Gamma, \quad \nu(x) = \frac{\nabla \varphi(x)}{|\nabla \varphi(x)|}.$$



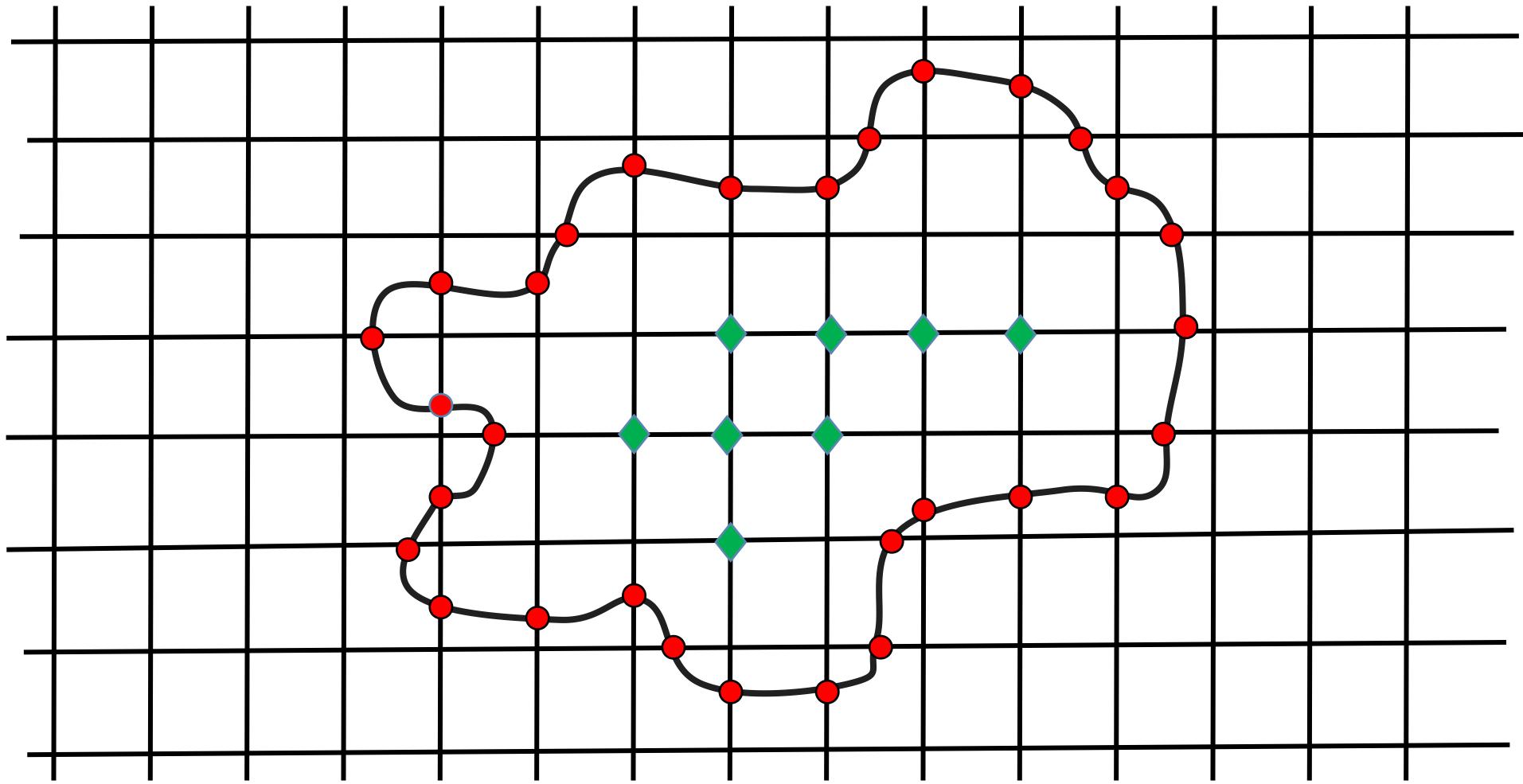
Une méthode numérique à frontière immergée pour l'EIT



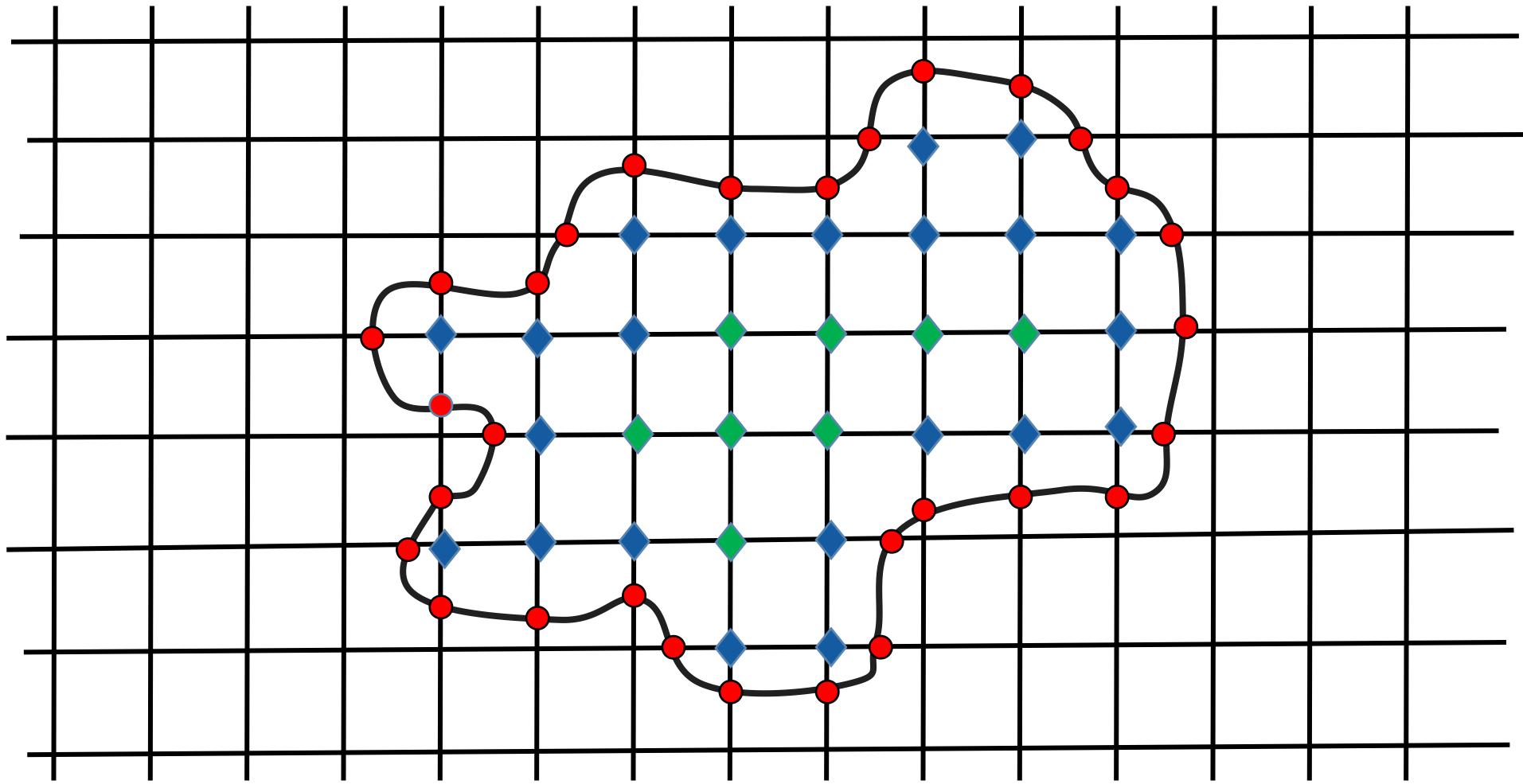
Une méthode numérique à frontière immergée pour l'EIT



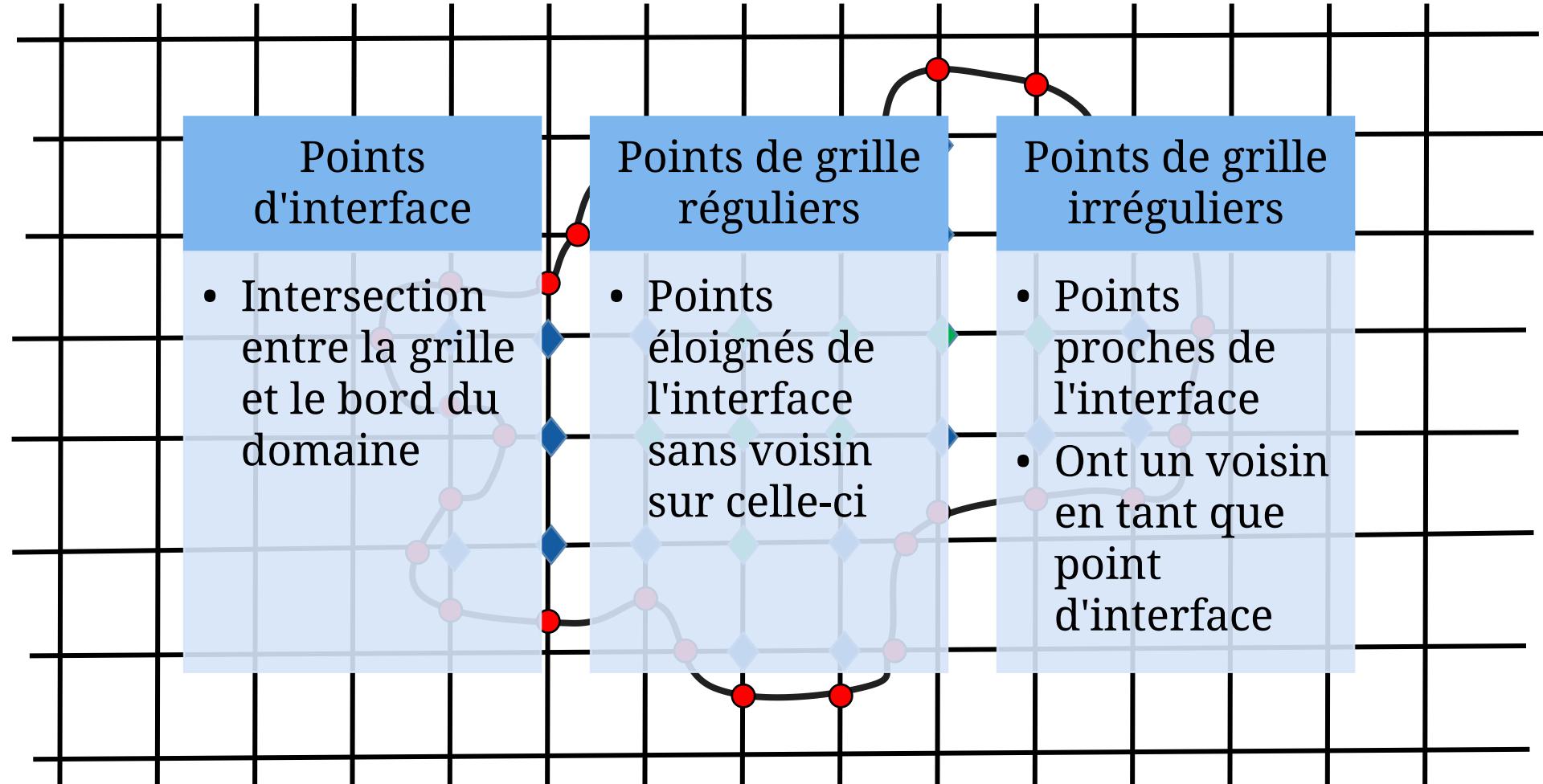
Une méthode numérique à frontière immergée pour l'EIT



Une méthode numérique à frontière immergée pour l'EIT



Une méthode numérique à frontière immergée pour l'EIT

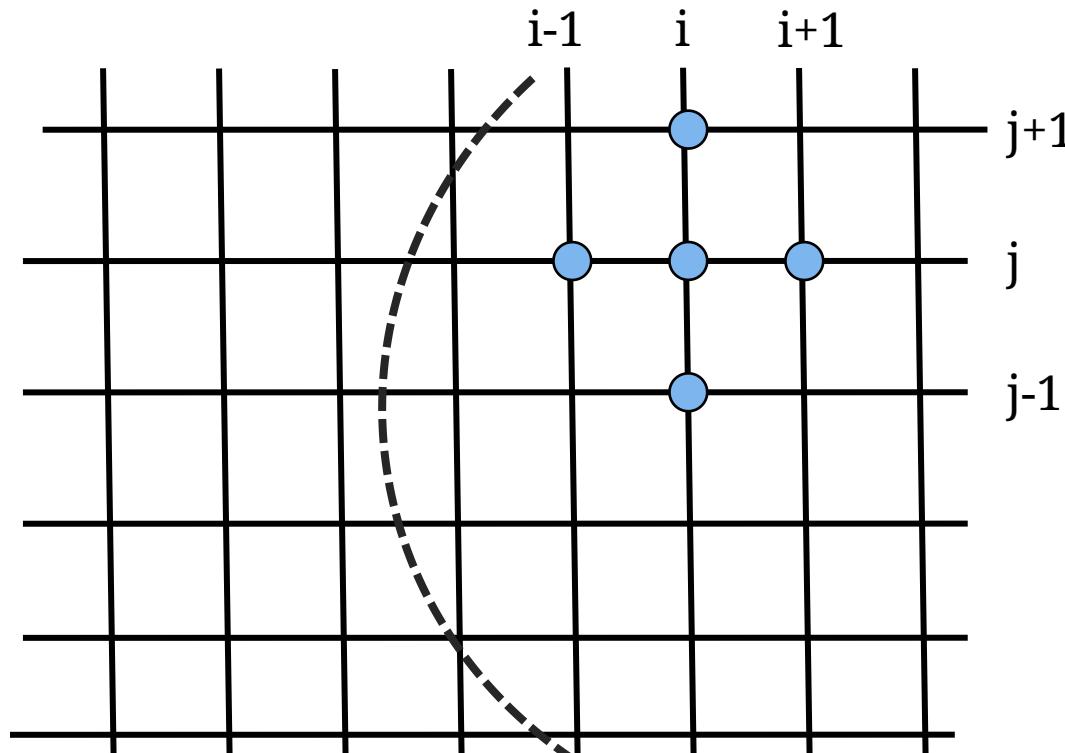


Discretisation de l'opérateur elliptique :

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

Pour les points réguliers :
un schéma de différences
finies usuel.

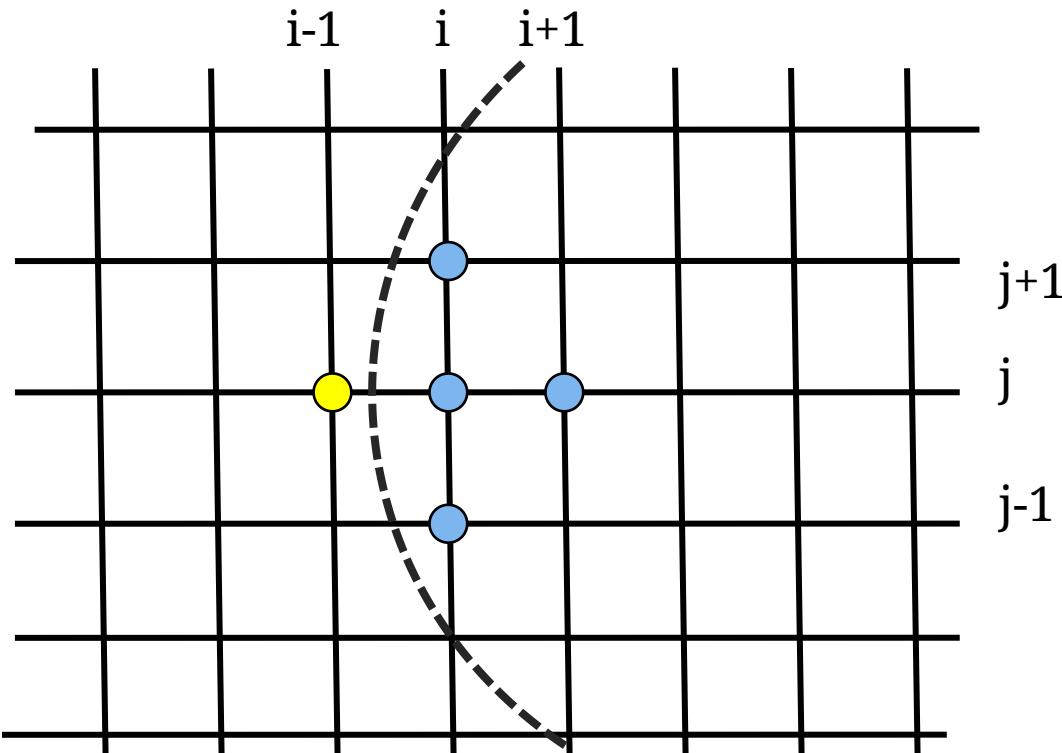
$$\begin{aligned} -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\ &\quad - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}. \end{aligned}$$



Discretisation de l'opérateur elliptique :

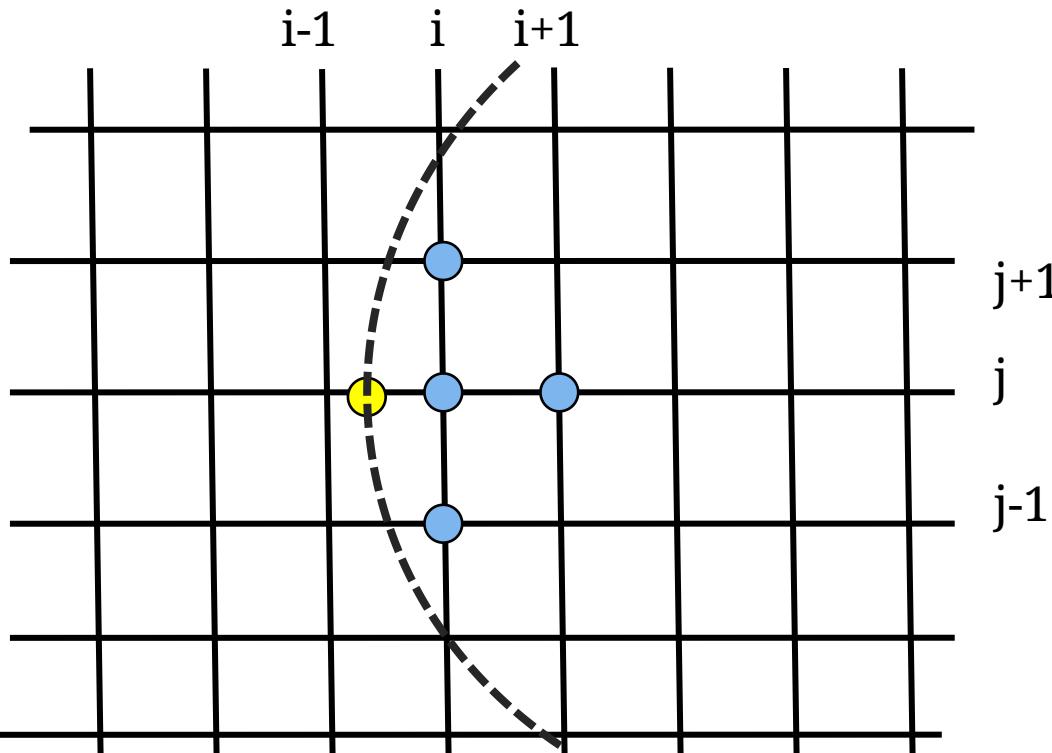
$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$\begin{aligned} -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\ &\quad - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}. \end{aligned}$$



Discretisation de l'opérateur elliptique :

$$\begin{aligned} -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\ &\quad - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}. \end{aligned}$$



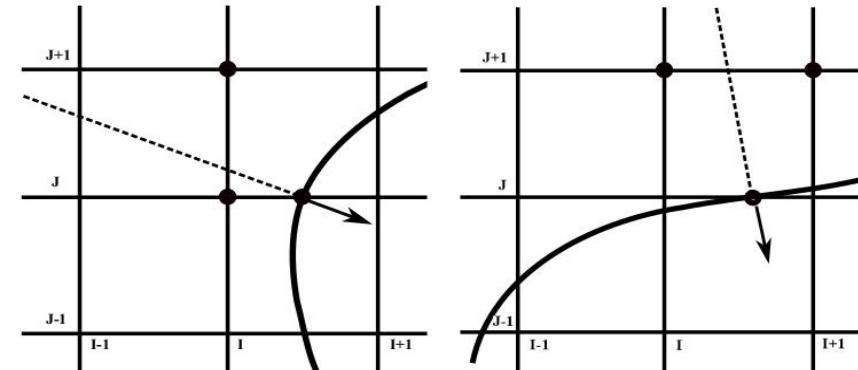
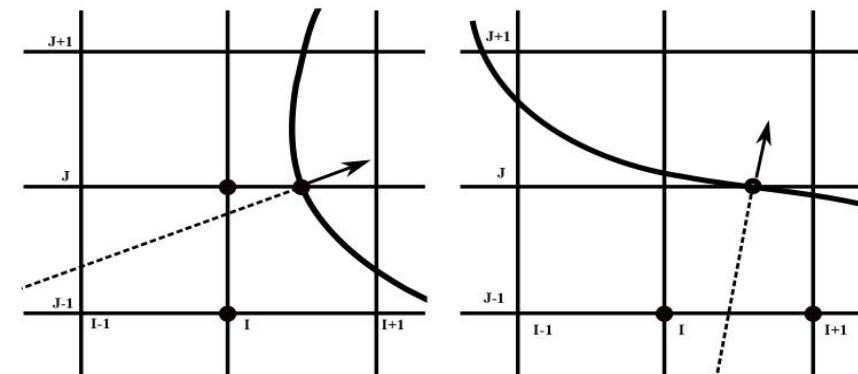
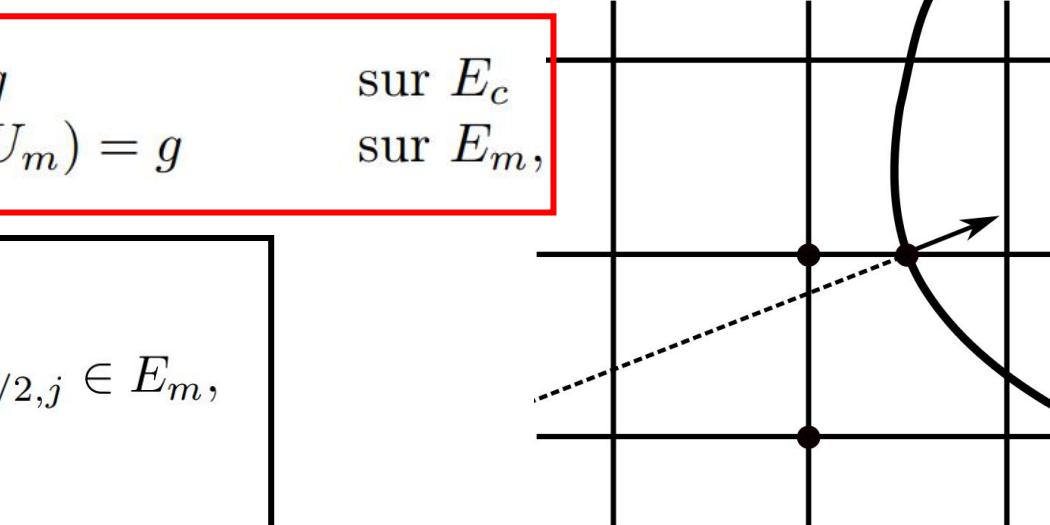
Discrétisation des conditions de flux :

$$\begin{aligned} \sigma \partial_\nu u &= g && \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m(u - U_m) &= g && \text{sur } E_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h + \xi_m(I_{i+1/2,j}) \left(u_{i+1/2,j}^h - U_m \right) &= g_{i+1/2,j} \text{ si } I_{i+1/2,j} \in E_m, \\ \sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h &= g_{i+1/2,j} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

L'expression de $(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h$ dépend de la géométrie du bord :

- l'intersection entre la normale à la frontière et la grille se situe généralement sur un segment : **stencil de trois points**.



$$(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h = (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3) \nu_x + (u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + u_3 \beta_3) \nu_y.$$

Si on note par **K** le triangle du stencil avec :

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ les sommets
- u_1, u_2, u_3 les valeurs associées

Les fonctions de base aux sommets pour l'interpolation linéaire s'écrivent comme suit :

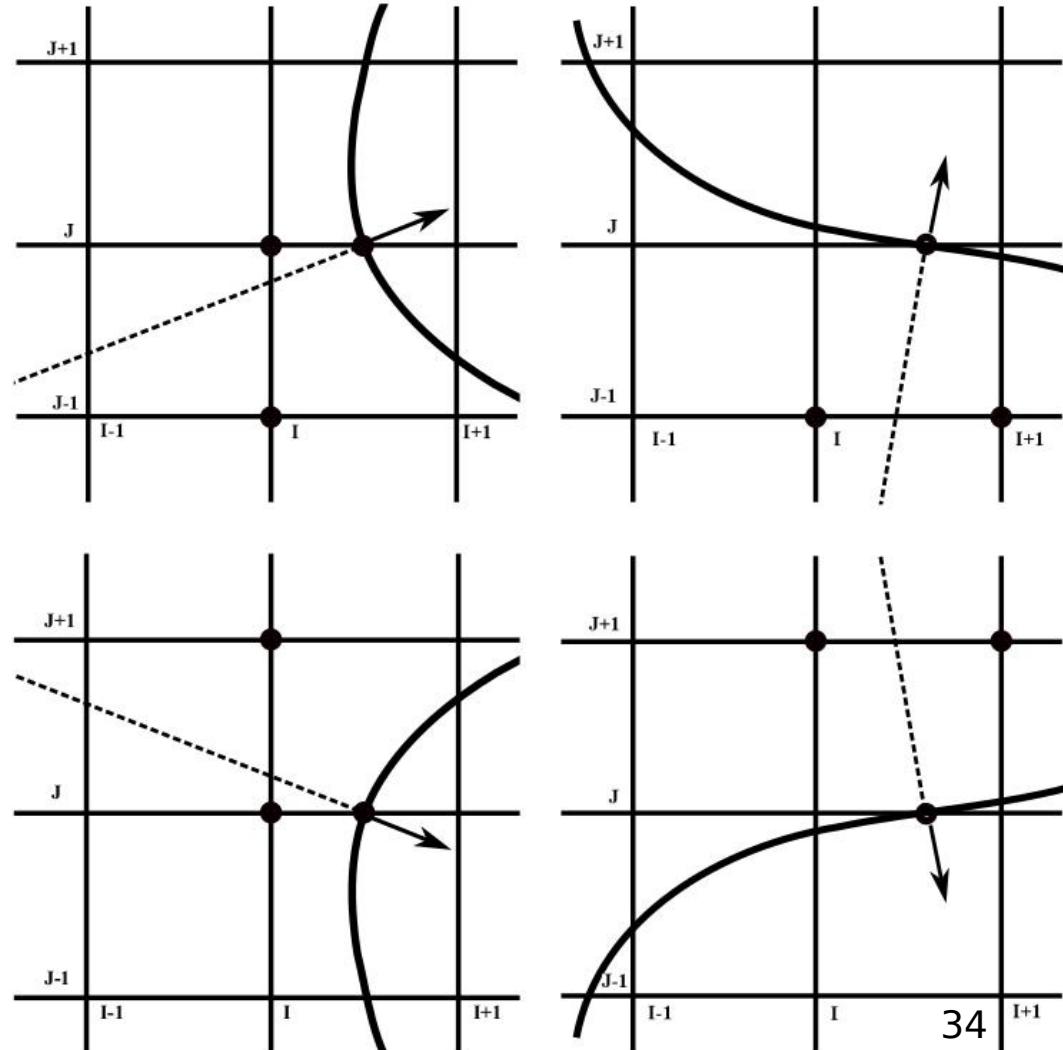
$$\lambda_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

avec

$$\alpha_j = \frac{y_k - y_i}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$$\beta_j = \frac{x_i - x_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$$\gamma_j = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)}.$$

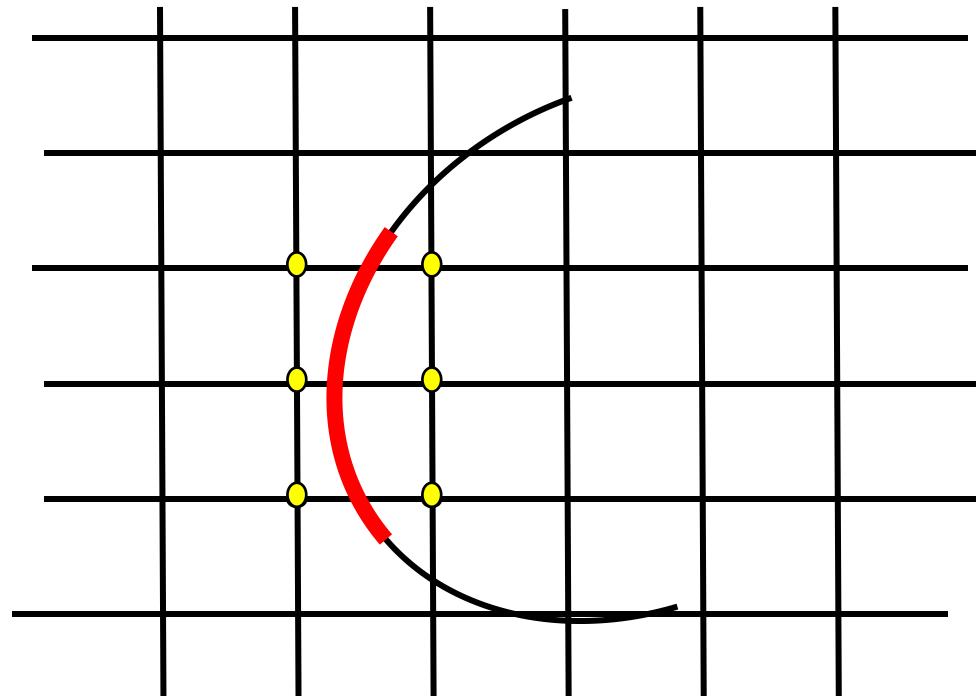


Discrétisation des conditions intégrales sur les électrodes

$$\int_{E_m} (\xi_m(U_m - u)) \, ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \int_{E_m} g, \quad m = 1, \dots, M.$$

Nous discrétisons sur chaque électrode avec une formule de quadrature du premier ordre basée sur une fonction de Dirac discrète (Peter Smereka 2005)

$$\sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P (\xi_m(P)(U_m - u_P)) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P g(P), \quad m = 1, \dots, M.$$



Avec les poids suivants : (formule à l'ordre un)

$$\tilde{\delta}_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j} D_x^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_x^+ \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i+1,j} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j} D_x^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_x^- \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i-1,j} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j+1} D_y^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_y^+ \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i,j+1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j-1} D_y^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_y^- \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\epsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i+1,j-1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

A_h matrice du système linéaire discrétisant le problème elliptique,
 u_h solution, f_h terme source

$$A_h u_h = f_h$$

Erreur d'approximation (consistance) :

$$\tau_h(P) = \begin{cases} O(h^2) & \text{pour l'opérateur elliptique sur les points réguliers,} \\ O(1) & \text{pour l'opérateur elliptique sur les points irréguliers,} \\ O(h) & \text{pour les conditions de flux sur les points d'interface,} \\ O(h) & \text{pour les intégrales sur les électrodes,} \end{cases}$$

L'erreur sur la solution numérique $e_h = u_h - U_{exacte}$ vérifie :

$$A_h e_h = \tau_h$$

$\Omega_h \setminus \Omega_h^* =$ Points réguliers, $\Omega_h^* =$ Points irréguliers, $\delta\Omega_h =$ Points d'interface,
 $E_h =$ Électrodes

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

L'erreur sur la solution numérique vérifie : $e_h = A_h^{-1} \tau_h$

Estimation naïve : $\|e_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|\tau_h\|_\infty$ pas assez précise car $\|\tau_h\|_\infty = O(1)$

Besoin d'estimations par bloc de A_h^{-1} :

$$e_h = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum a_{i,j}^{-1} = O(1) & \sum a_{i,j}^{-1} = O(h) & \sum a_{i,j}^{-1} = O(1) \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{A_h^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \tau \\ O(h^2) \\ \vdots \\ O(h^2) \\ O(1) \\ \vdots \\ O(1) \\ O(h) \\ \vdots \\ O(h) \end{pmatrix}}_{\tau} = O(h)$$

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

Etape 1 : Monotonie de la matrice de discréétisation

La matrice de discréétisatior A_h du système linéaire est monotone, c'est-à-dire A_h que est inversible et que toutes les valeurs de A_h^{-1} sont positifs.

Etape 2 : Etablir les estimations sur les fonctions de Green

Nous pouvons écrire la solution du problème discréétisé comme une somme des termes source multipliés par les valeurs des fonctions de Green discrètes

$$u_h(P) = \sum_{Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) (A_h u_h)(Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Notre objectif est d'obtenir des majorants pour les fonctions de Green discrètes associées à la matrice résultant de la discréétisation afin de pouvoir évaluer la convergence du schéma numérique:

$$|\bar{u}(P) - u_h(P)| \leq O(h).$$

Pour h suffisamment petit, les bornes supérieures suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq O(1),$$

$$\sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(:, Q) \leq O(1),$$

$$\sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq O(h).$$

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

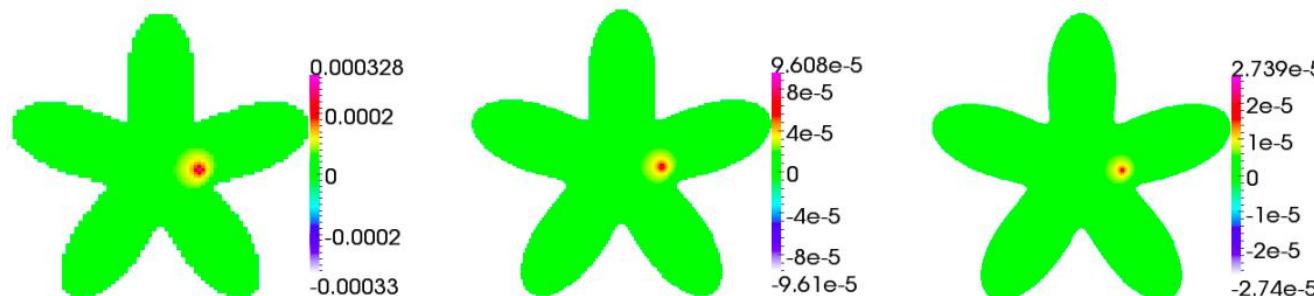
Pour chaque point Q de la discrétisation, on définit la fonction de Green discrète $G_h(P, Q)$ par :

$$A_h G_h(P, Q) = \begin{cases} 0, & P \neq Q \\ 1, & P = Q \end{cases}$$

Chaque $G_h(:, Q)$ est une colonne de A_h^{-1}

$$u_h(P) = \sum_{Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) (A_h u_h)(Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Si A_h est monotone tous les coefficients de $G_h(:, Q)$ sont positifs



Exemples de fonction de Green discrète, 100^2 , 200^2 et 400^2 points.

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

Montrer que la matrice est monotone :

$$\forall y, \left((A_h y)_i \geq 0 \ \forall i \Rightarrow y_i \geq 0 \ \forall i \right)$$

Utiliser le principe du maximum discret et des fonctions ad hoc pour obtenir les estimations sur les sommes des coefficients de A_h^{-1}

$$\sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq O(1),$$

$$\sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(:, Q) \leq O(1),$$

$$\sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq O(h).$$



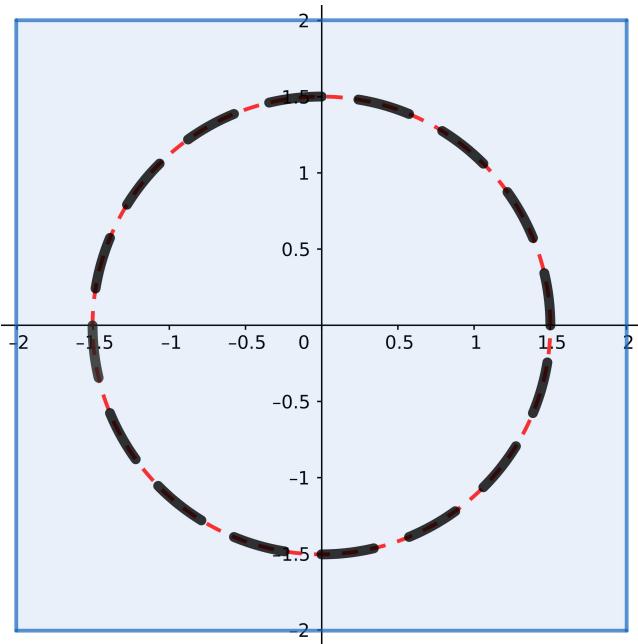
Soient S et \tilde{S} deux sous-ensembles de points, W une fonction discrète, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} (A_h W)(P) \geq 0, & \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h \setminus \tilde{S}, \\ (A_h W)(P) \geq \alpha^{-i}, & \forall P \in S, \\ (A_h W)(P) \geq -(\beta^{-j}), & \forall P \in \tilde{S}. \end{cases}$$

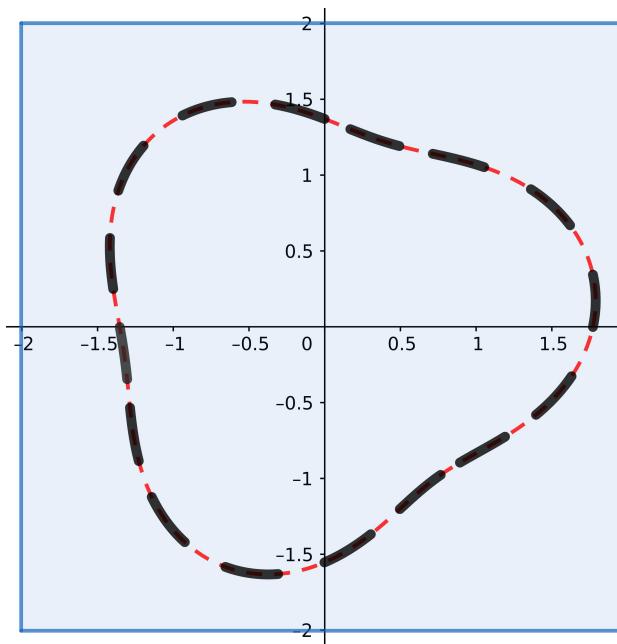
Alors

$$\sum_{Q \in S} G_h(P, Q) \leq \alpha^i W(P) + \alpha^i \beta^{-j} \sum_{Q \in \tilde{S}} G_h(P, Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

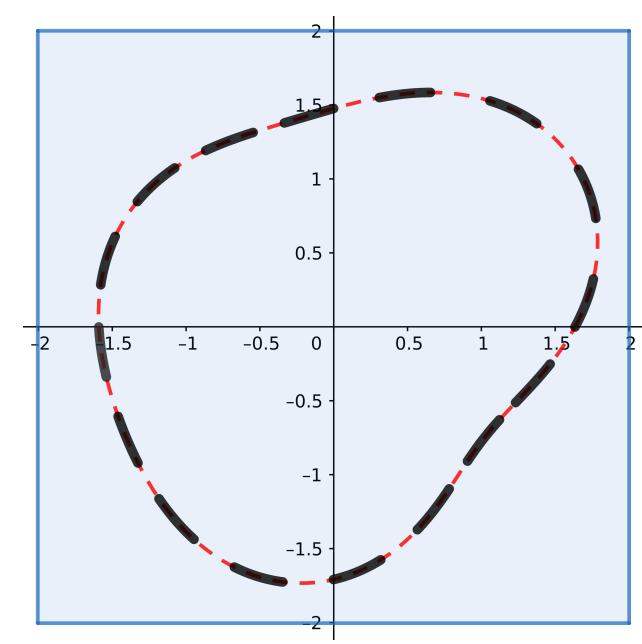
Résolution numérique du problème direct : choix géométrique



Géométrie 1

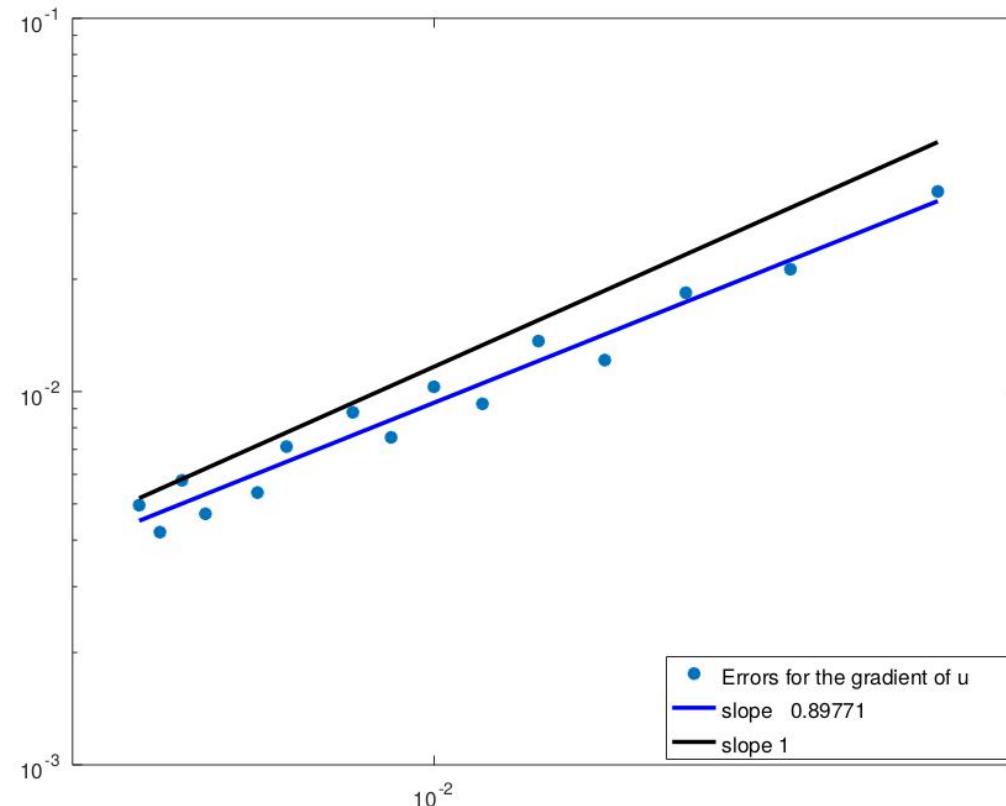
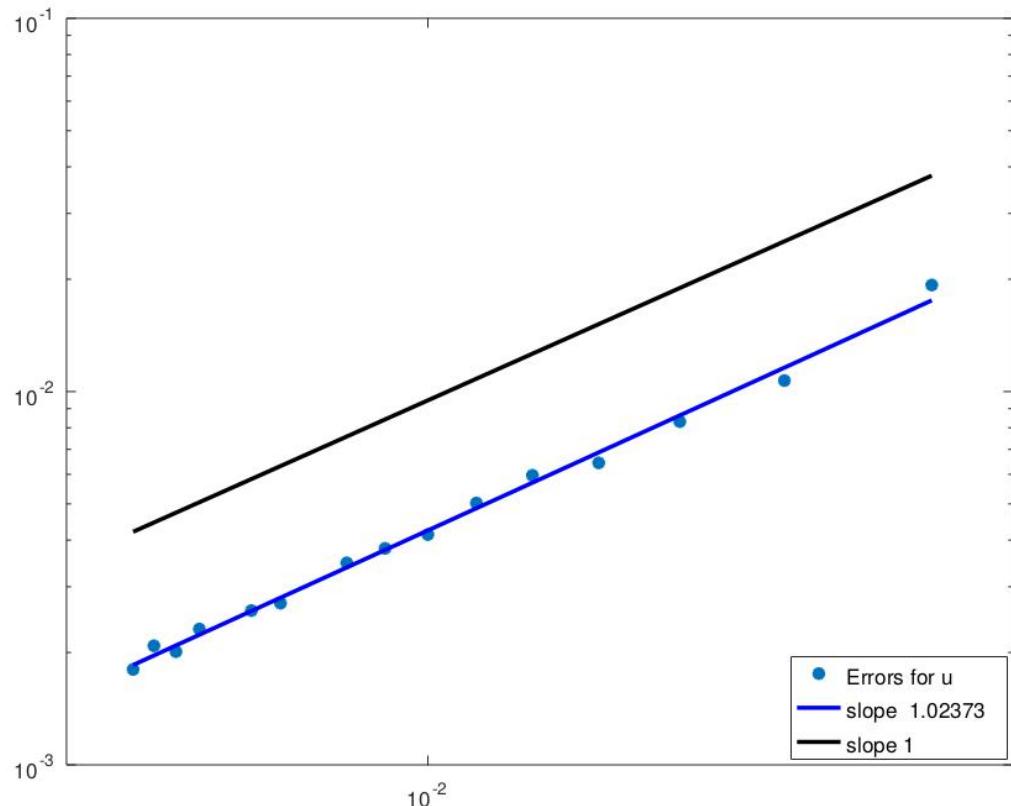


Géométrie 2



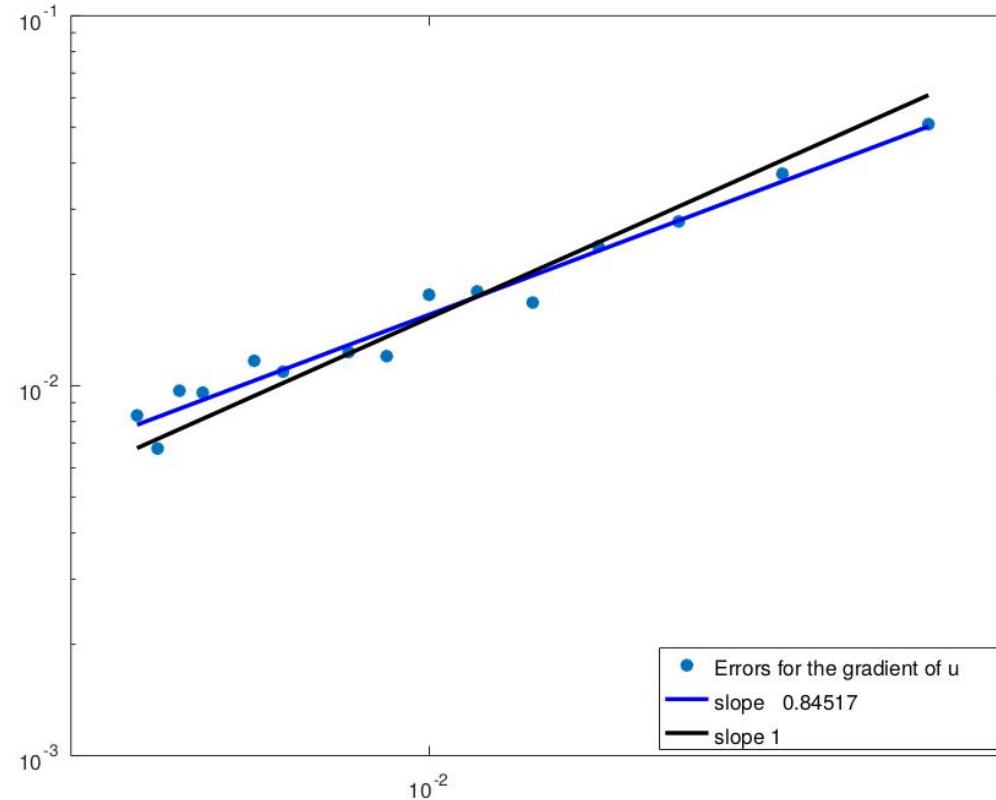
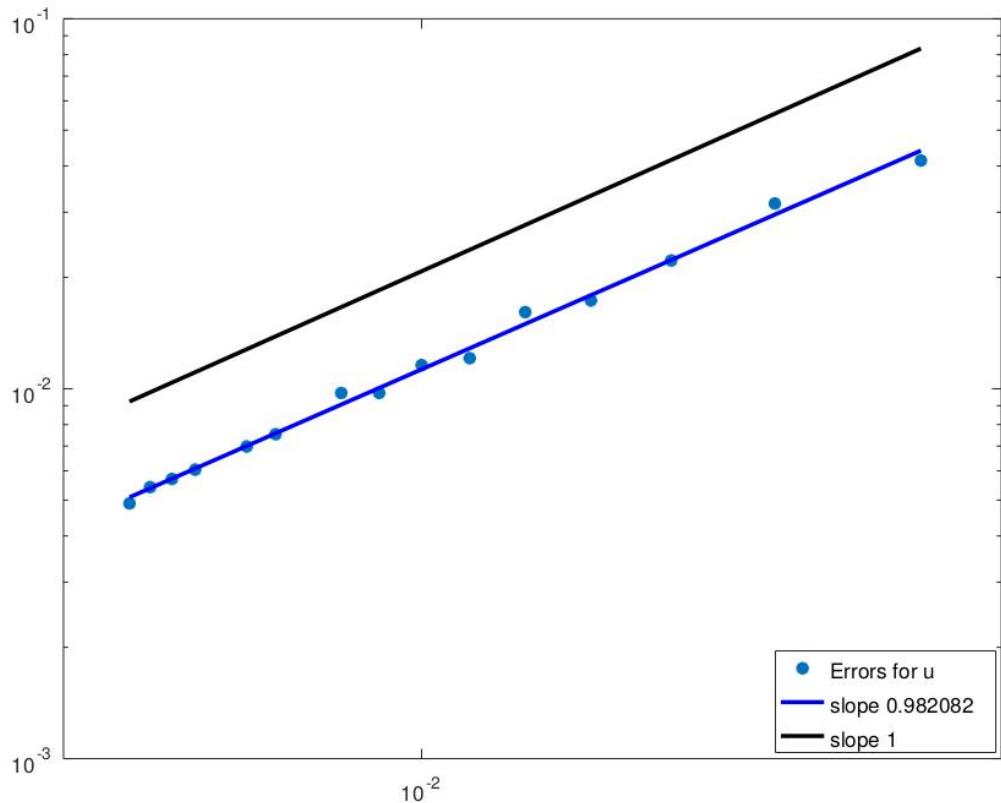
Géométrie 3

Convergence numérique : Géométrie 1.



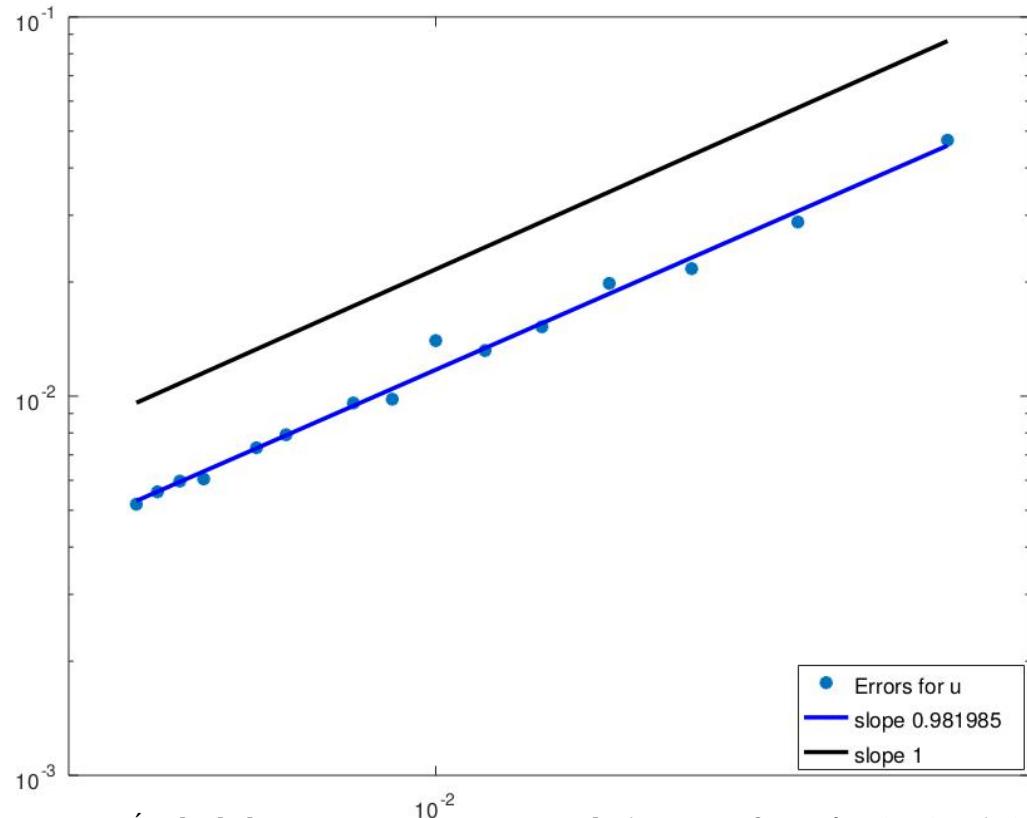
Étude de la convergence avec une solution manufacturée $u(x, y) = \sin(xy)$ et $U = 0$. On calcule une norme infinie sur les points de grille dans la géométrie 1. On dispose de 16 électrodes sur le bord.

Convergence numérique : Géométrie 2.

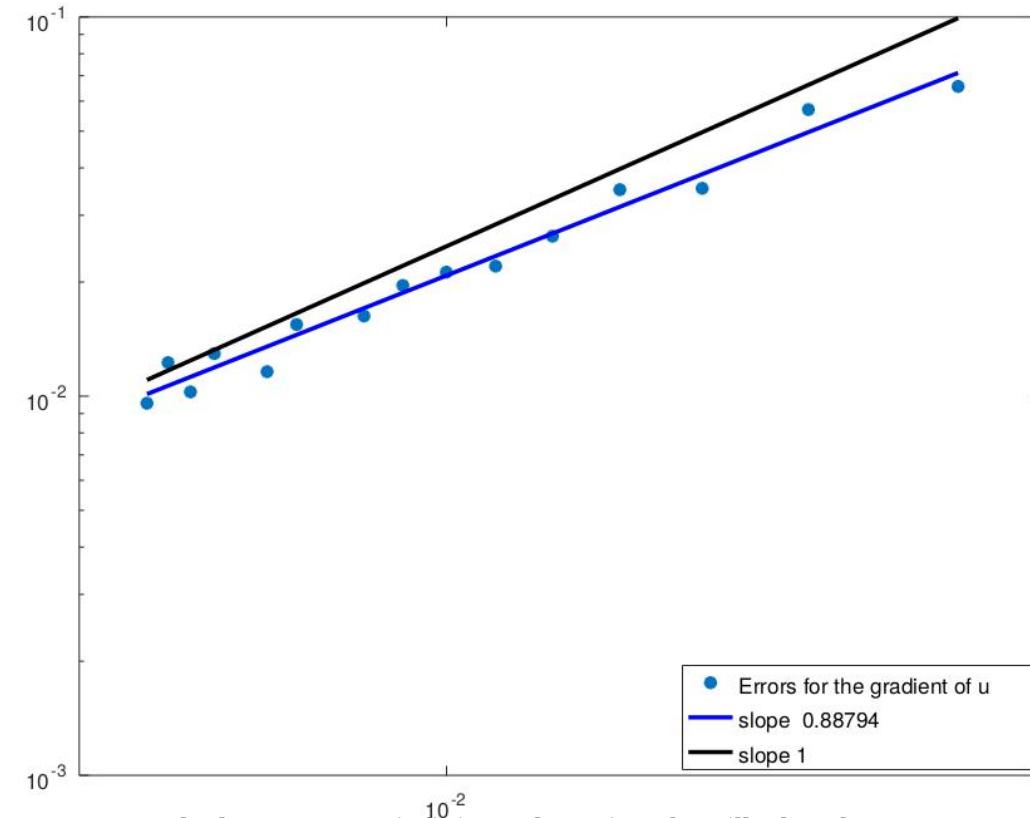


Étude de la convergence avec une solution manufacturée $u(x, y) = \sin(xy)$ et $U = 0$. On calcule une norme infinie sur les points de grille dans la géométrie 2. On dispose de 16 électrodes sur le bord.

Convergence numérique : Géométrie 3.



Étude de la convergence avec une solution manufacturée $u(x, y) = \sin(xy)$ et $U = 0$. On calcule une norme infinie sur les points de grille dans la géométrie 3. On dispose de 16 électrodes sur le bord.

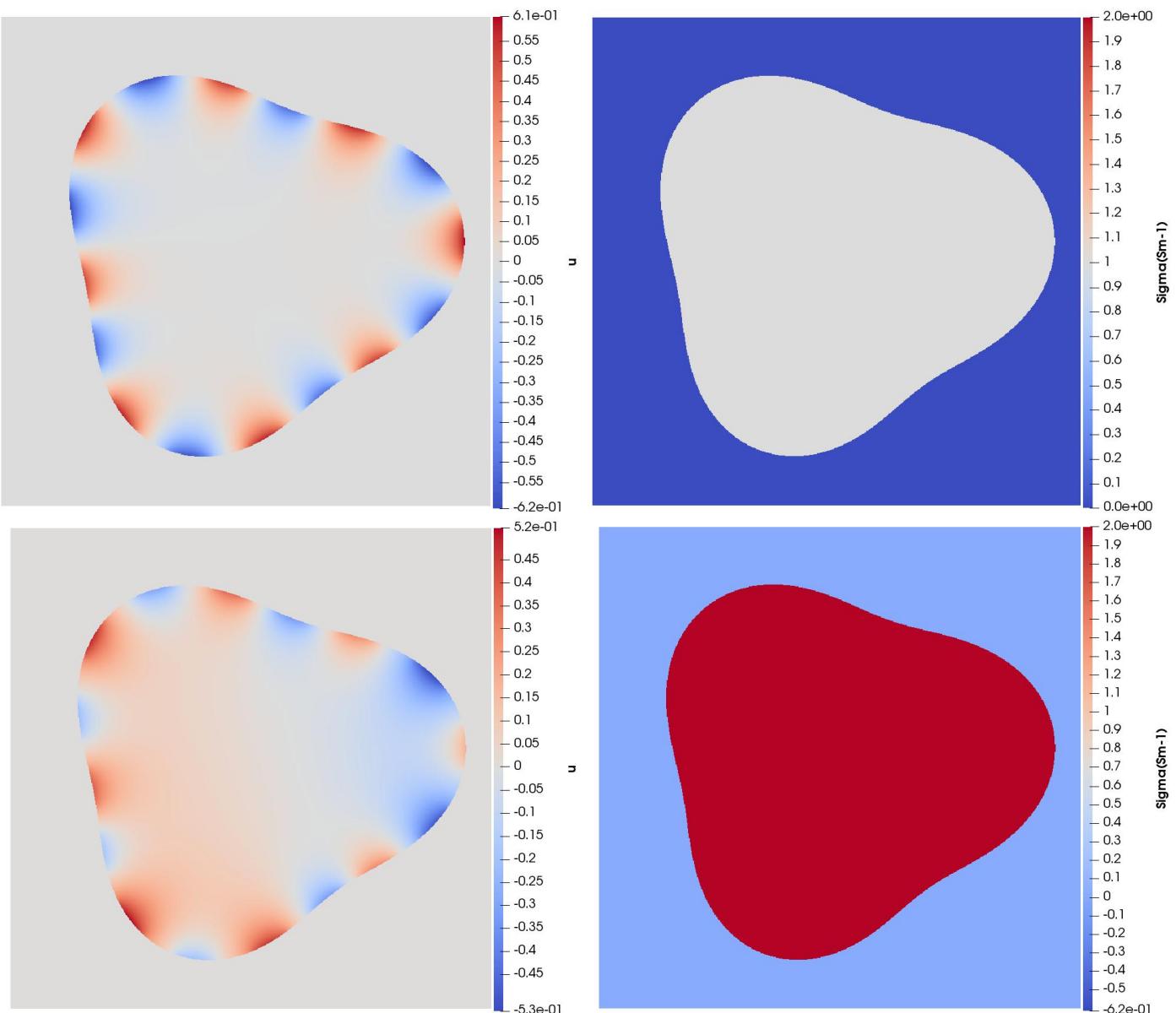


Résolution du problème direct

Résolution du problème dans la géométrie 2 avec un courant d'entrée.

À gauche : potentiel interne.

À droite : conductivité.

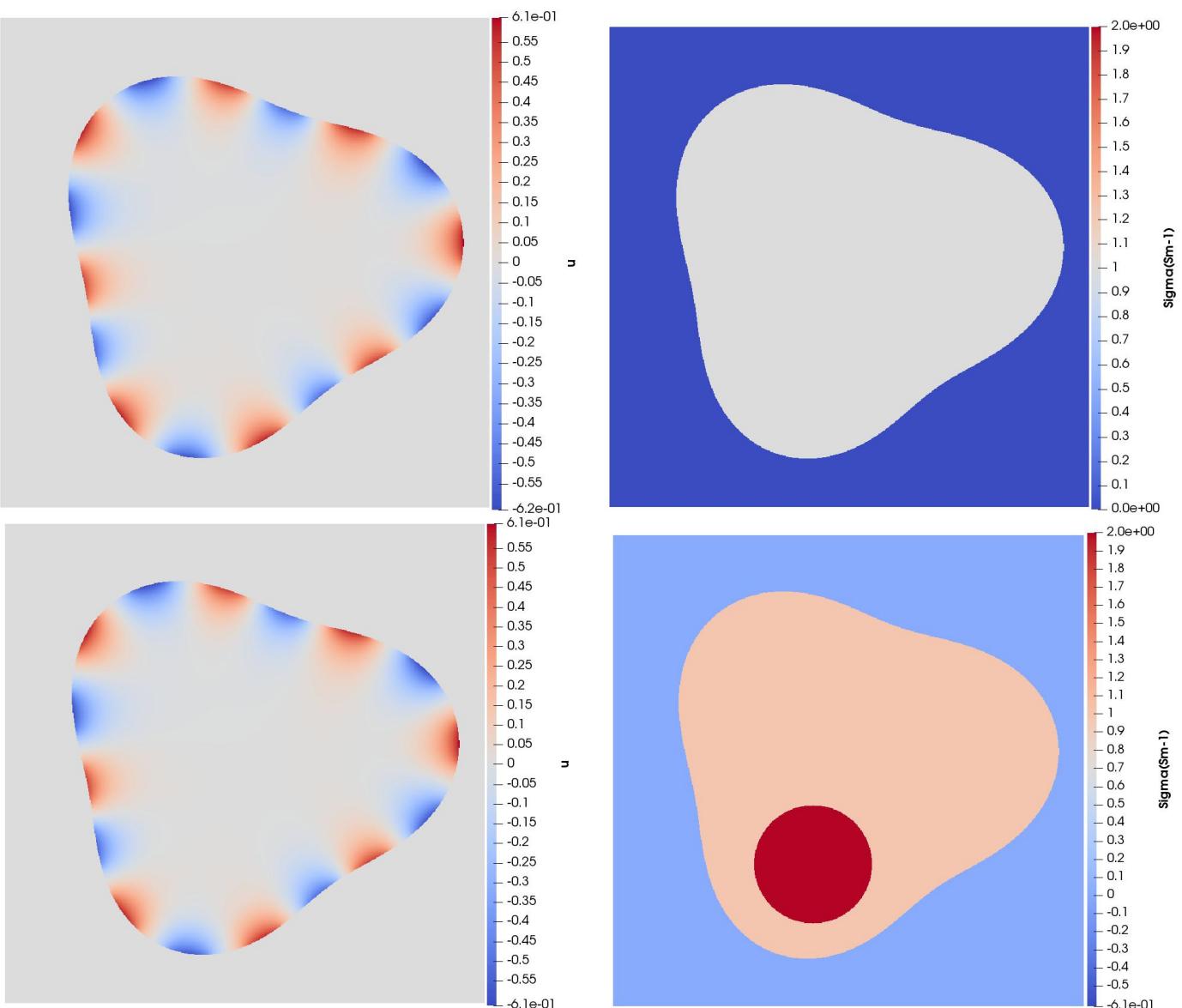


Résolution du problème direct

Résolution du problème dans la géométrie 2 avec un courant d'entrée.

À gauche : potentiel interne.

À droite : conductivité.



Application : résolution de problèmes inverses

Application 1 : problème inverse de conductivité

On cherche à minimiser la fonctionnelle :
$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ici $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ conductivité de référence connue.

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est Fréchet-différentiable

Plus précisément, pour tout $\delta\sigma$ dans $L^\infty \cap H^1(\Omega)$ tel que $\sigma + \delta\sigma \geq \tilde{c} > 0$ p.p. dans Ω , on a

$$M(\sigma + \delta\sigma) = M(\sigma) + (\delta u, \delta U) + o(\|\delta\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

où $\delta u \in H^1(\Omega)$ et $\delta U \in \mathbb{R}^M$, $\delta U_1 = 0$, sont les seules solutions du problème variationnel suivant :

Trouver $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ tels que pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$, on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_m \int_{E_m} \xi_m (u - U_m)(v - V_m) \, ds(x) \\ + \epsilon U_1 V_1 = - \int_{\Omega} \delta \sigma \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Application 1 : problème inverse de conductivité

On cherche à minimiser la fonctionnelle :
$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ici $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ conductivité de référence connue.

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est Fréchet-différentiable

Supposons que $\delta\sigma_n$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Il existe $T_n > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T_n)$,

$$F(\sigma_n + t\delta\sigma_n) \leq F(\sigma_n).$$

Application 1 : problème inverse de conductivité

On cherche à minimiser la fonctionnelle :
$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ici $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ conductivité de référence connue.

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est Fréchet-différentiable

Supposons que $\delta\sigma_n$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Il existe $T_n > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T_n)$,

$$F(\sigma_n + t\delta\sigma_n) \leq F(\sigma_n).$$

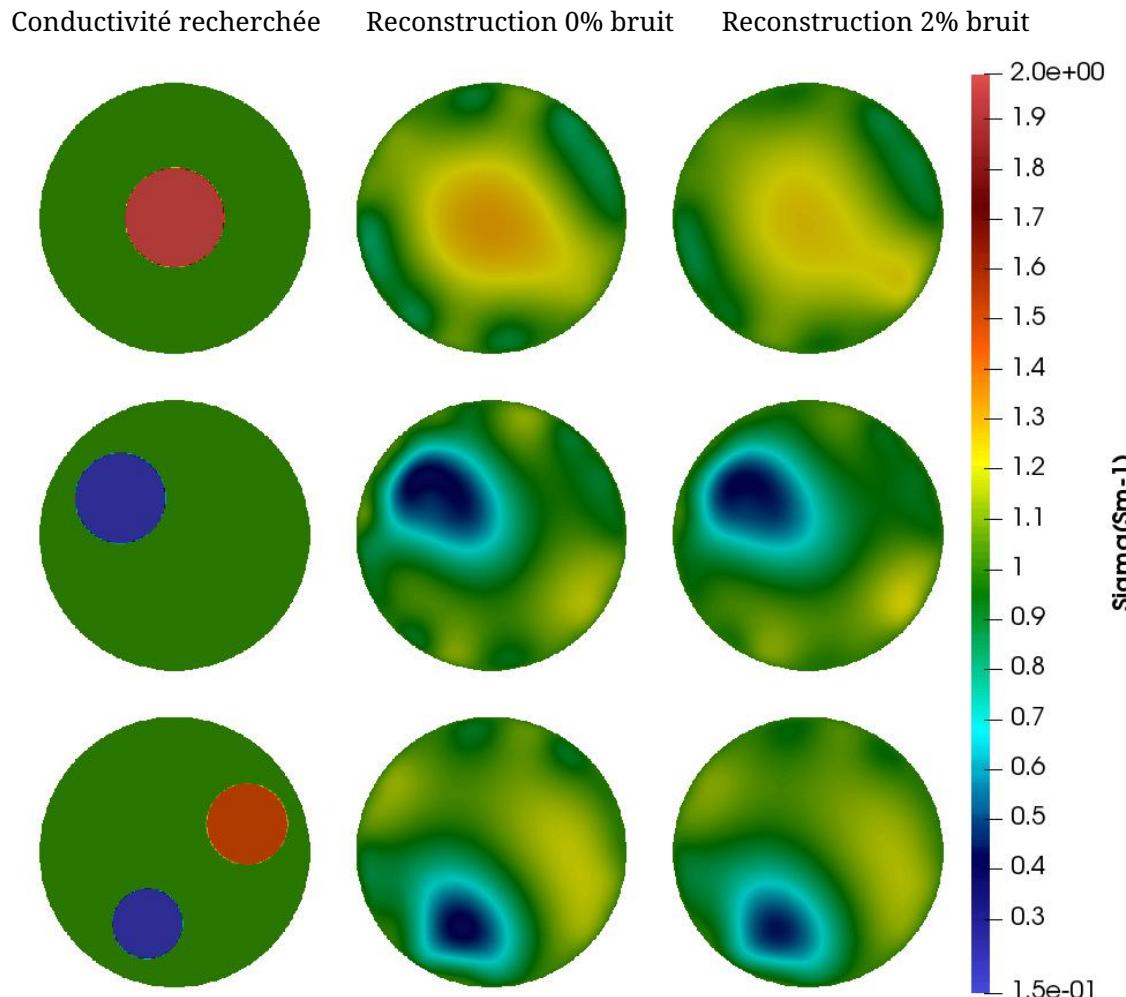
Pour une conductivité donnée σ_n , nous définissons $(d_x u_n, d_y u_n)$ par :

$\delta\sigma_n$ comme étant l'unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$d_x u_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial x} \right] \in L^2(\Omega)^d, \quad d_y u_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial y} \right] \in L^2(\Omega)^d.$$

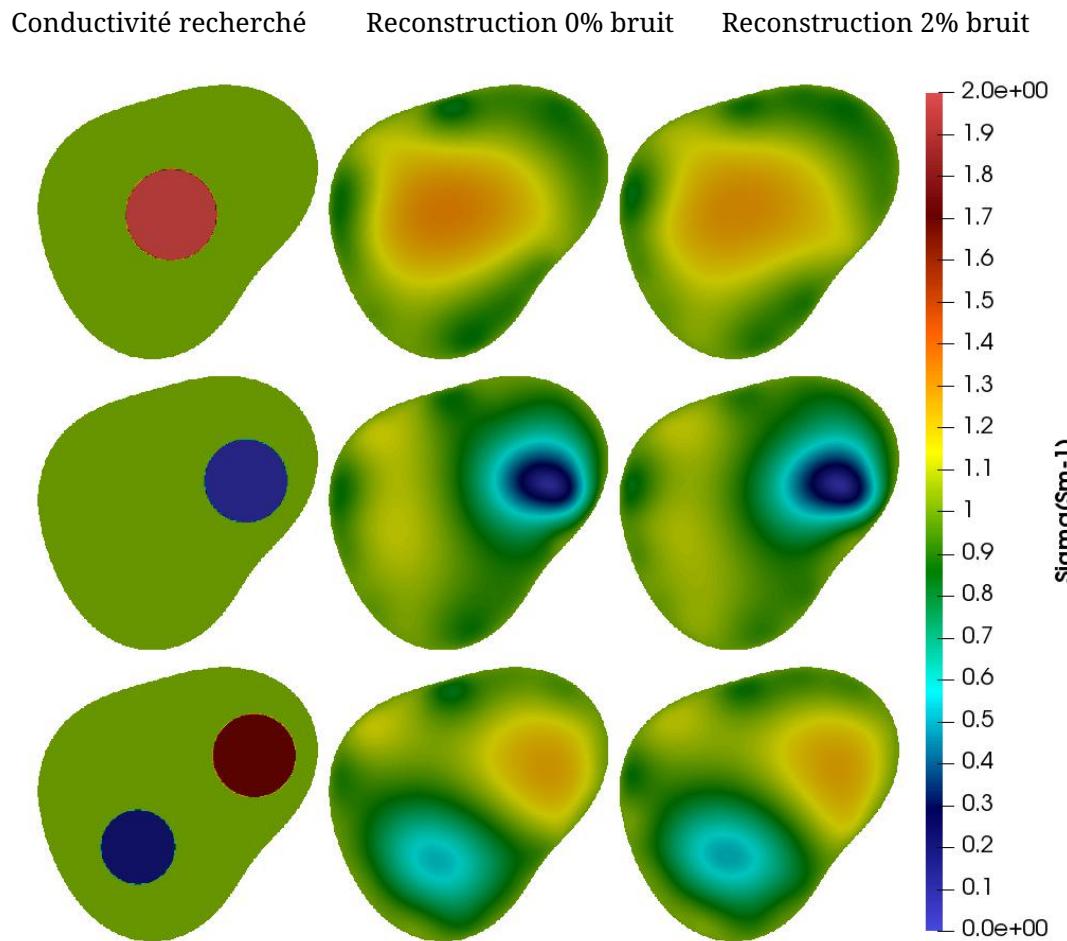
$$-\Delta v + v = \epsilon (\Delta(\sigma_n - \sigma_\star) - (\sigma_n - \sigma_\star)) + d_x u_n^T d_x w_n + d_y u_n^T d_y w_n.$$

Application 1 : problème inverse de conductivité



Reconstructions dans la géométrie 1. Première colonne : conductivité recherchée. Deuxième colonne : conductivité reconstruite avec des données non-bruitées . Troisième colonne : conductivité reconstruite avec des données bruitées .

Application 1 : problème inverse de conductivité



Reconstructions dans la géométrie 3. Première colonne : conductivité recherchée. Deuxième colonne : conductivité reconstruite avec des données non-bruitées . Troisième colonne : conductivité reconstruite avec des données bruitées .

Application 1 : problème inverse de conductivité et impédances de contact

On cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$F(\sigma, z) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, z, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|z - z_\star\|_{\mathbb{R}^M}^2.$$

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : (\sigma, z) \longrightarrow (u(\sigma, z, I), U(\sigma, z, I))$ est Fréchet-différentiable

Pour une conductivité σ_n et une impédance de contact z_n on définit $(\delta\sigma_n, \delta z_n)$ comme l'unique $(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ tel que

$$-\Delta v_1 + v_1 = \epsilon(\Delta(\sigma_n - \sigma_\star) - (\sigma_n - \sigma_\star)) + d_x \mathbf{u}_n^T d_x \mathbf{w}_n + d_y \mathbf{u}_n^T d_y \mathbf{w}_n.$$

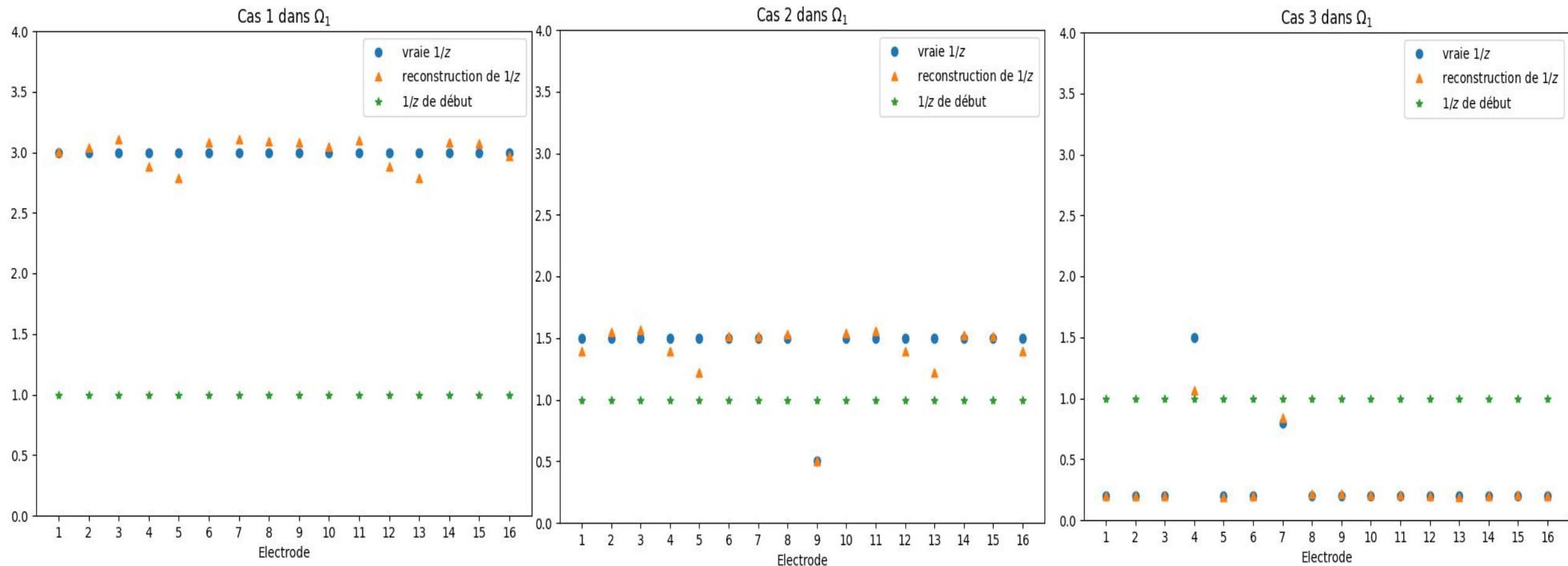
et le vecteur $v_2 \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$(v_2)_m = -\epsilon((z_n)_m - (z_\star)_m) + \sum_{i=1}^P \int_{E_m} (u(\sigma_n, z_n, I_i) - U_m(\sigma_n, z_n, I_i))(w_i - (W_i)_m) ds(x),$$

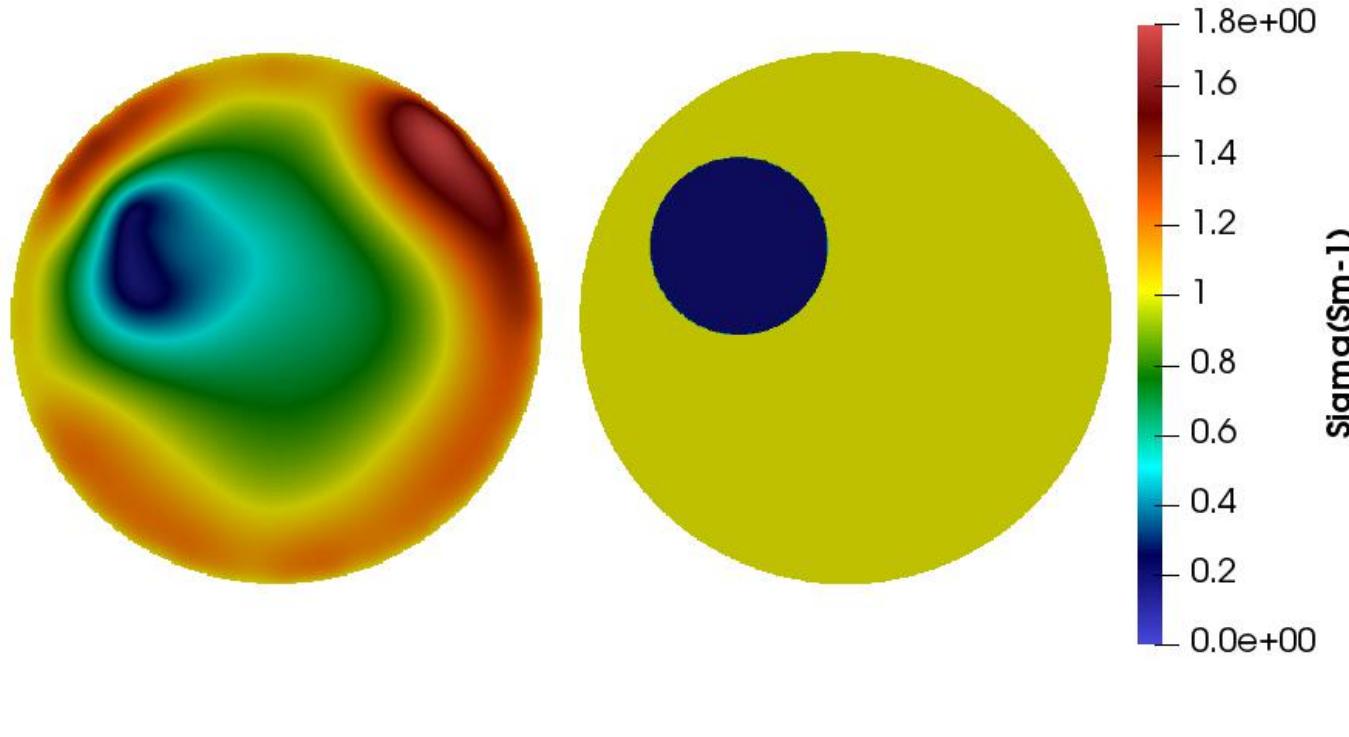
avec

$$w_i = u(\sigma_n, z_n, U(\sigma_n, z_n, I_i) - U_{meas}), \quad W_i = U(\sigma_n, z_n, U(\sigma_n, z_n, I_i) - U_{meas}),$$

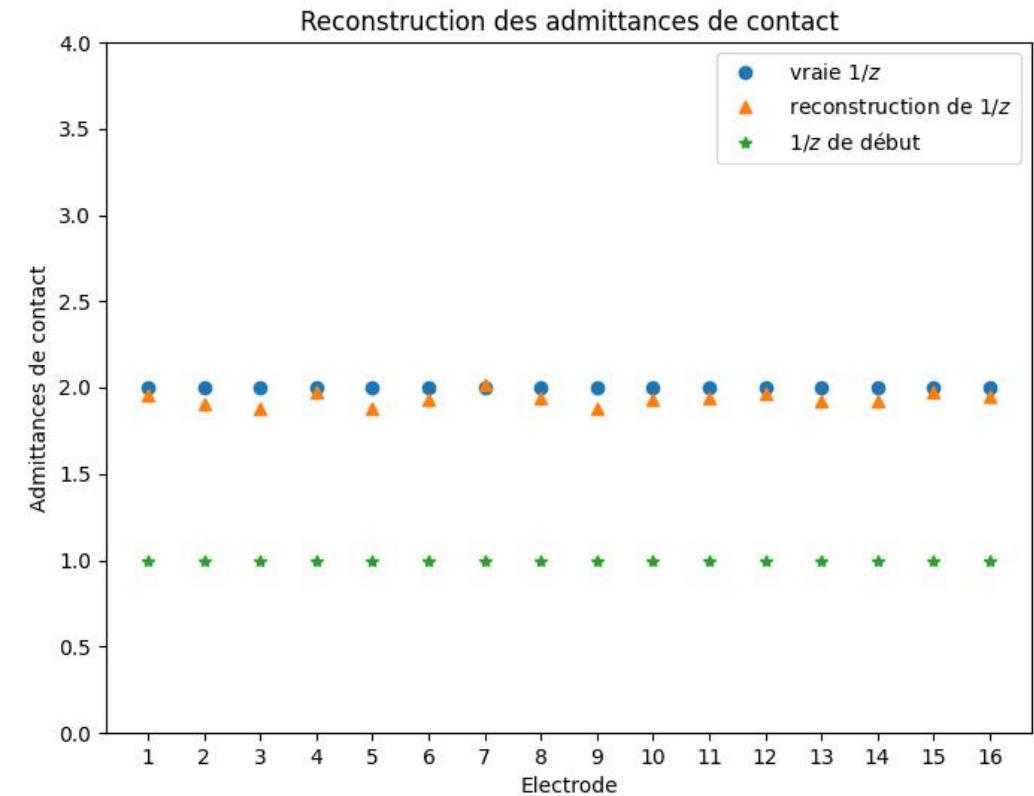
Application 1 : problème inverse d'impédances de contact



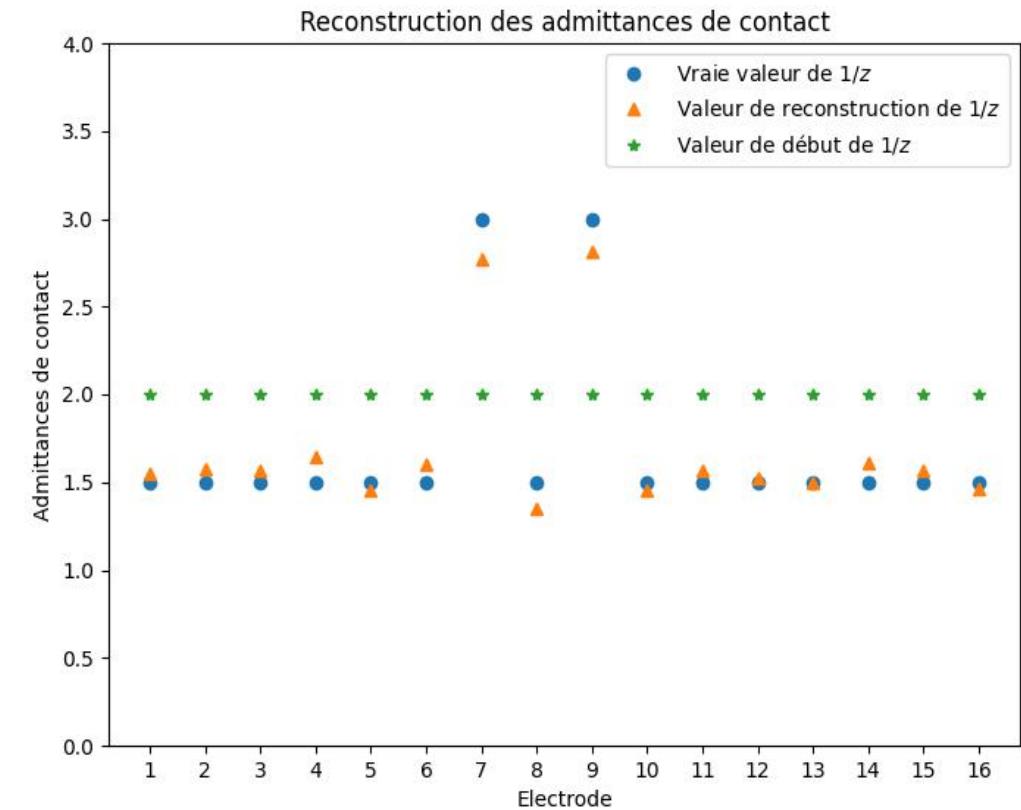
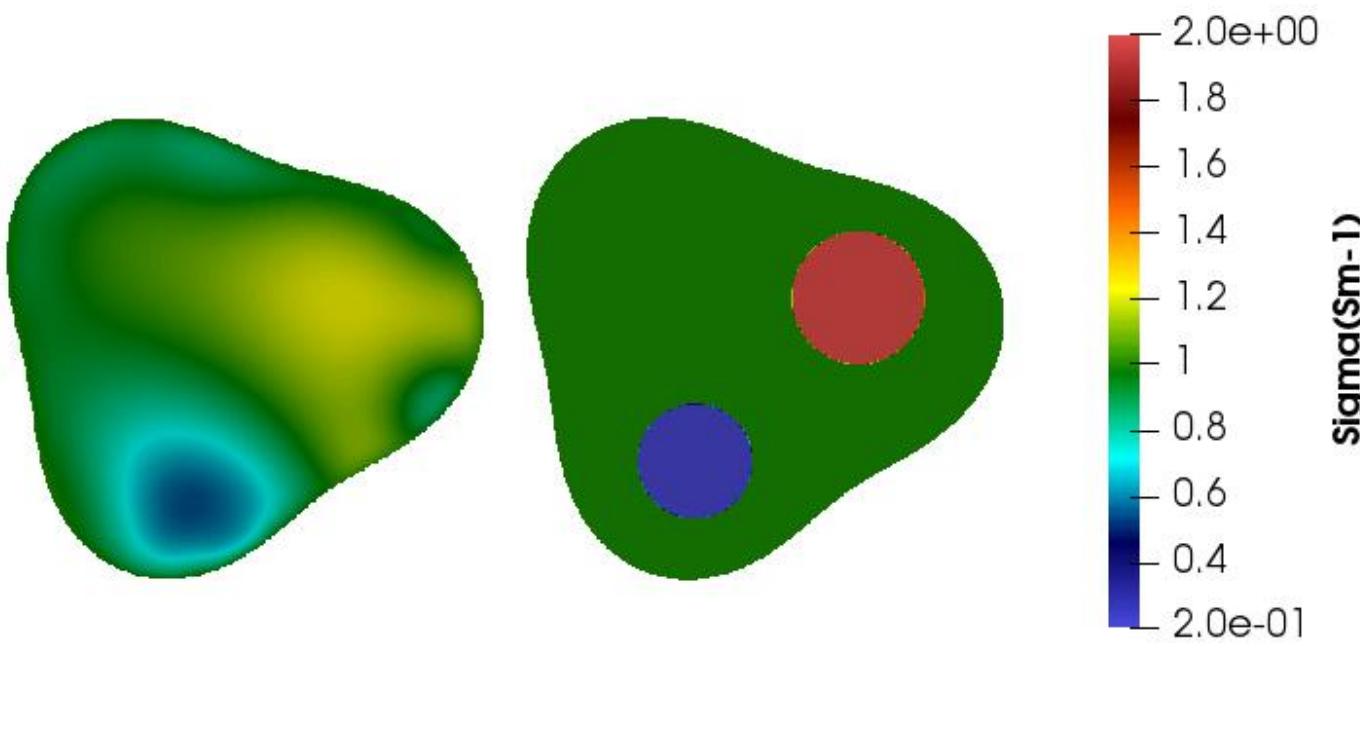
Application 1 : problème inverse de conductivité et impédances de contact



Reconstructions simultanées de la conductivité et de l'admittance de contact pour les différents cas dans la géométrie 1



Application 1 : problème inverse de conductivité et impédances de contact



Reconstructions simultanées de la conductivité et de l'admittance de contact pour les différents cas dans la géométrie 2

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

Les paramètres liés à la géométrie du bord : $\partial\Omega = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ avec $\mathbf{u}(\theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta)]$, et

$$r(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos(k\theta) + \alpha_{k+N} \sin(k\theta)).$$

où le paramètre de forme $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2N}] \in \mathbb{R}^{2N+1}$ est choisi de telle manière que $0 < r(\theta) < 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pour les électrodes :

Les M électrodes, qu'on note par, E_1, \dots, E_M sont paramétrées par deux vecteurs $(\Theta^1, \Theta^2) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ vérifiant

$$\Theta_1^1 < \Theta_1^2 < \Theta_2^2 < \dots < \Theta_M^2 < \Theta_1^1 + 2\pi,$$

tels que

$$E_m = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [\Theta_m^1, \Theta_m^2]\}.$$

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

Opérateur de mesure et dérivée de forme

L'idée consiste à dériver l'opérateur de mesure associé au CEM généralisé par rapport à un champ de vecteurs h associé à une certaine perturbation des variables de forme :

Pour $h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)$, nous définissons

$$F[h] : x \in \partial\Omega \mapsto x + h(x)$$

et

$$\partial\Omega_h = F[h](\partial\Omega).$$

Pour un h suffisamment petit, $\partial\Omega_h$ est la frontière d'un domaine lisse Ω_h , qui est une perturbation de Ω . On note que Ω_h est recouvert par M électrodes bien séparées $E_{m,h}$ définies par

$$E_{m,h} = \{x + h(x), x \in E_m\}.$$

Opérateur de mesure

$$R : (h, I) \in \mathcal{B}_d \times \mathbb{R}_{\diamond}^M \mapsto U(h),$$

avec

$$\mathcal{B}_d = \{h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^n); \|h\|_{C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)} < d\},$$

d étant une constante fixe suffisamment petite.

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

L'opérateur R est Fréchet-différentiable à l'origine par rapport à la première variable. En d'autres termes, il existe un opérateur bilinéaire borné

$$R' : C^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_{\diamond}^M \mapsto \mathbb{R}^M$$

tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} \|R(h, \cdot) - R(0, \cdot) - R'h\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

$$\begin{aligned} ((R'h)I) \cdot \tilde{I} &= - \sum_{m=1}^M \int_{\partial E_m} (h \cdot \nu_{\partial E_m})(U_m - u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \frac{1}{z_m} \int_{E_m} h_\nu ((d-1)(U_m - u)H - \partial_\nu u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} h_\nu (\sigma \nabla u)_\tau (\nabla \tilde{u})_\tau ds(x). \end{aligned}$$

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

$$\begin{aligned} \left((R'h)I \right) \cdot \tilde{I} &= - \sum_{m=1}^M \int_{\partial E_m} (h \cdot \nu_{\partial E_m})(U_m - u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \frac{1}{z_m} \int_{E_m} h_\nu ((d-1)(U_m - u)H - \partial_\nu u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &\quad - \int_{\partial \Omega} h_\nu (\sigma \nabla u)_\tau (\nabla \tilde{u})_\tau ds(x). \end{aligned}$$

Pour

k dans $\{1, 2\}$ et m dans $\{1, \dots, M\}$, définissons $\mathbf{x}_m^k = r(\Theta_m^k)[\cos(\Theta_m^k), \sin(\Theta_m^k)]$.

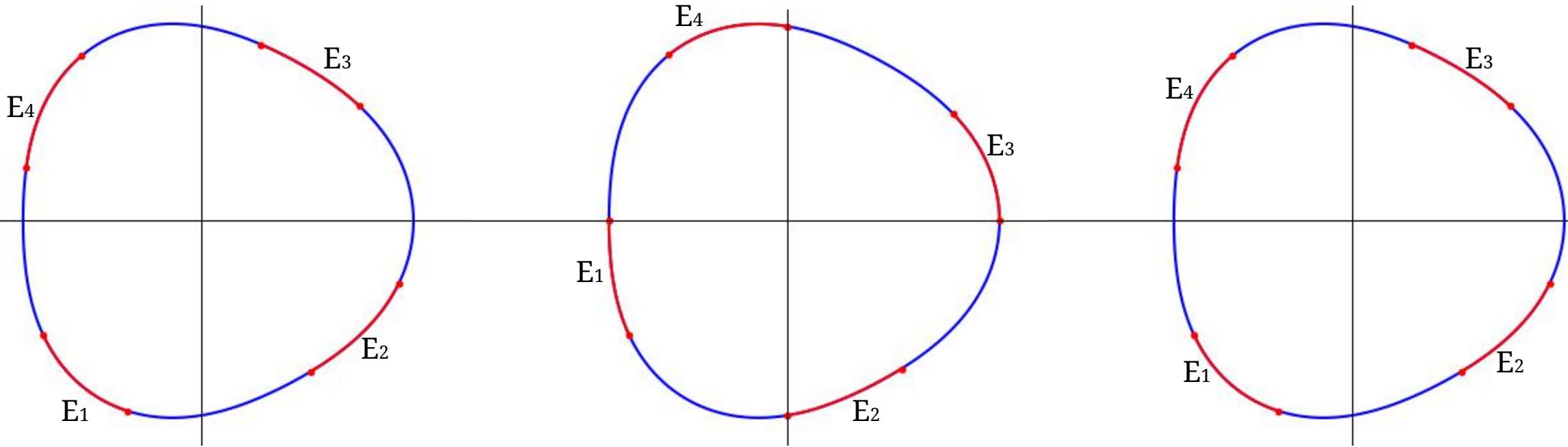
$$\frac{\partial U}{\partial \Theta_m^1} \cdot \tilde{I} = \rho(\Theta_m^1)(U_m - u(\mathbf{x}_m^1))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^1))$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta_m^2} \cdot \tilde{I} = \rho(\Theta_m^2)(U_m - u(\mathbf{x}_m^2))(\tilde{U}_m - \tilde{u}(\mathbf{x}_m^2)),$$

$$\tau(x) = \frac{1}{\rho(\theta_x)} [r'(\theta_x)\mathbf{u}(\theta_x) + r(\theta_x)\mathbf{v}(\theta_x)],$$

Dardé et al 2013.

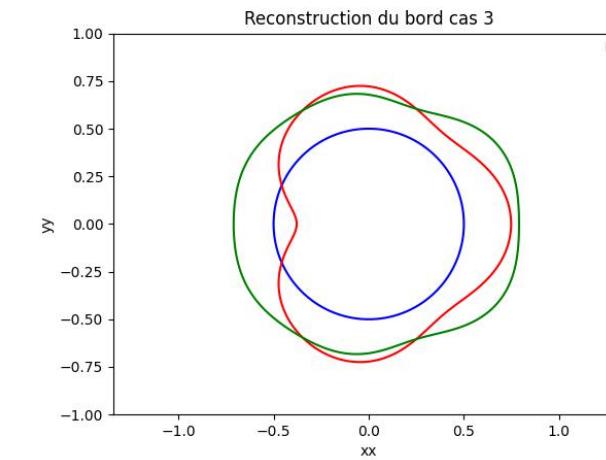
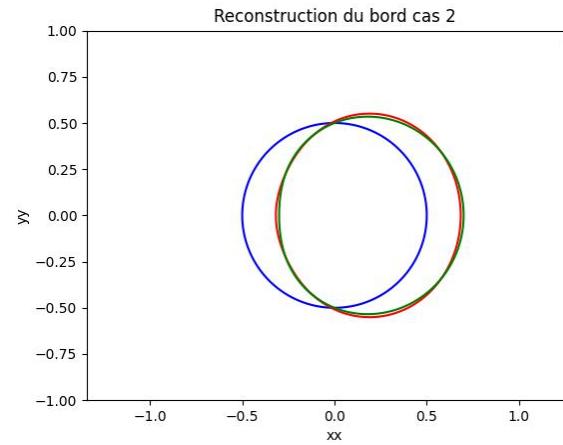
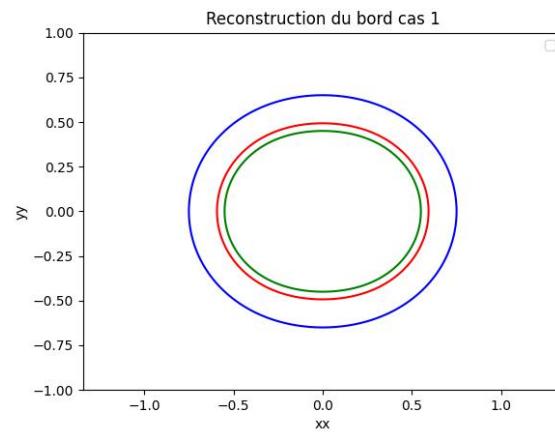
Application 2 : reconstruction de la position des électrodes



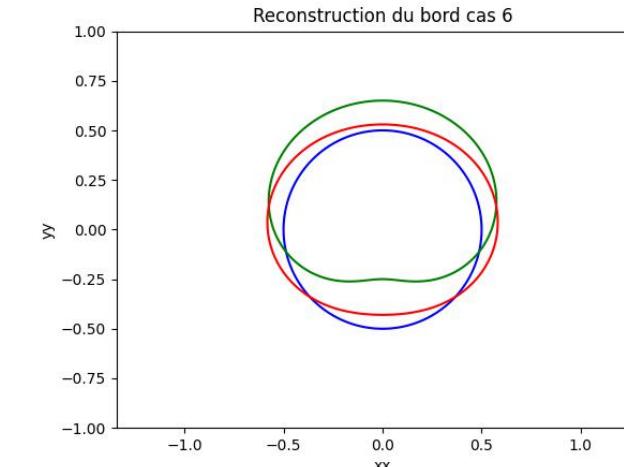
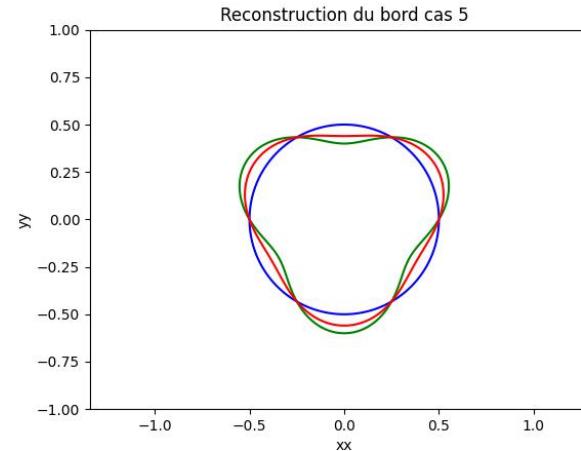
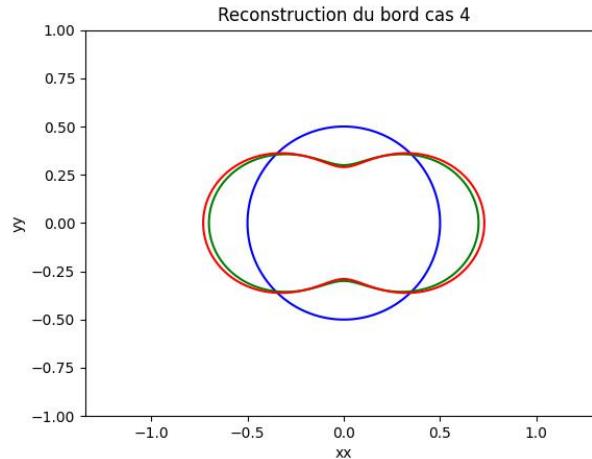
	Positions recherchées		Positions initiales		Positions reconstruites	
	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2	Θ^1	Θ^2
E_1	-2.51327	-1.93817	-3.14159	-2.51358	-2.55152	-1.97563
E_2	-0.94247	-0.30516	-1.57079	-0.91229	-0.90298	-0.27141
E_3	0.62831	1.24343	0	0.57253	0.54018	1.14782
E_4	2.19911	2.84837	1.57079	2.18999	2.08957	2.72868

Application 2 : reconstruction du bord

— géométrie reconstruite
— géométrie désirée
— géométrie de départ



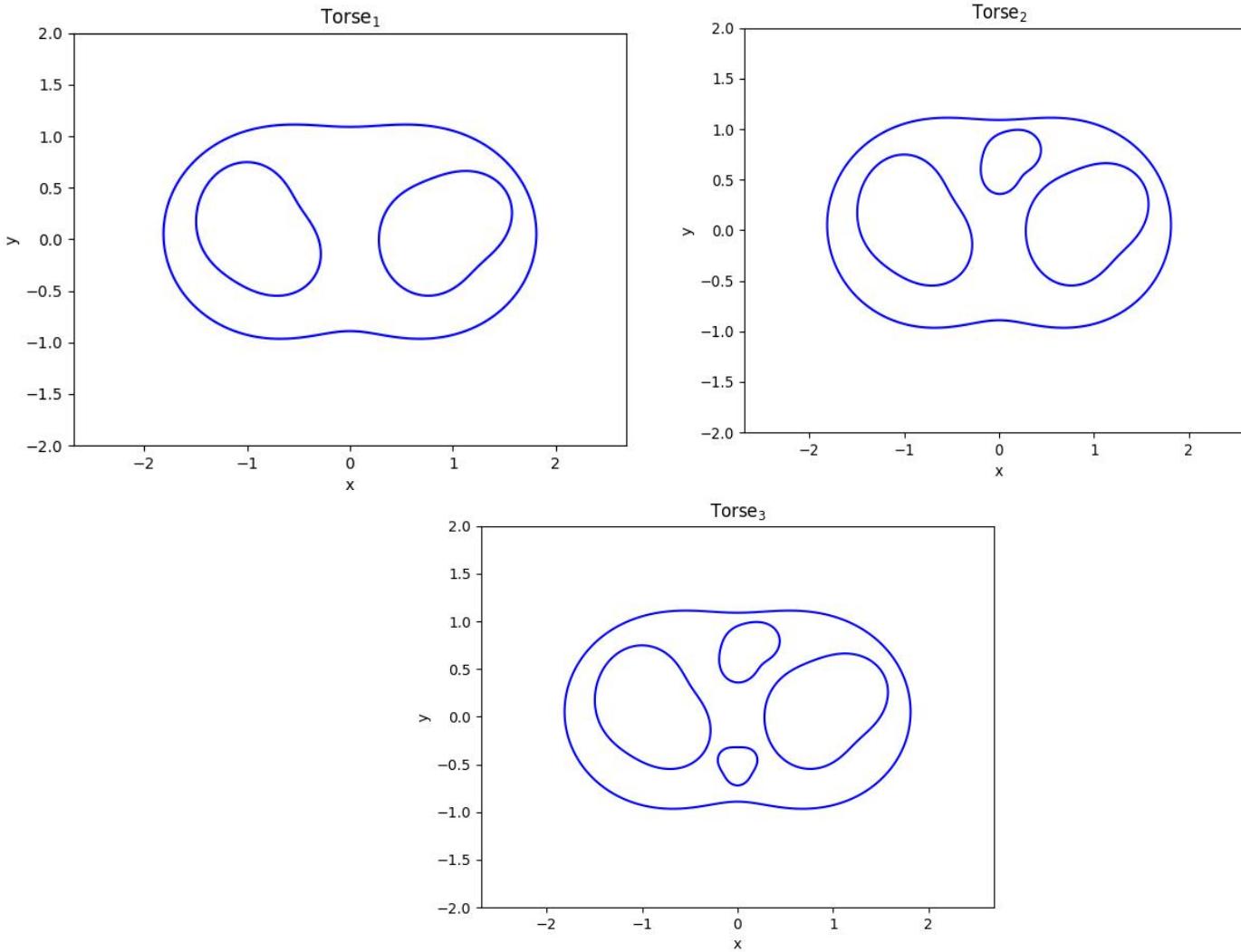
Avec 4 électrodes sur le bord : en bleu la géométrie de départ; en vert la géométrie désirée; en rouge la géométrie reconstruite.



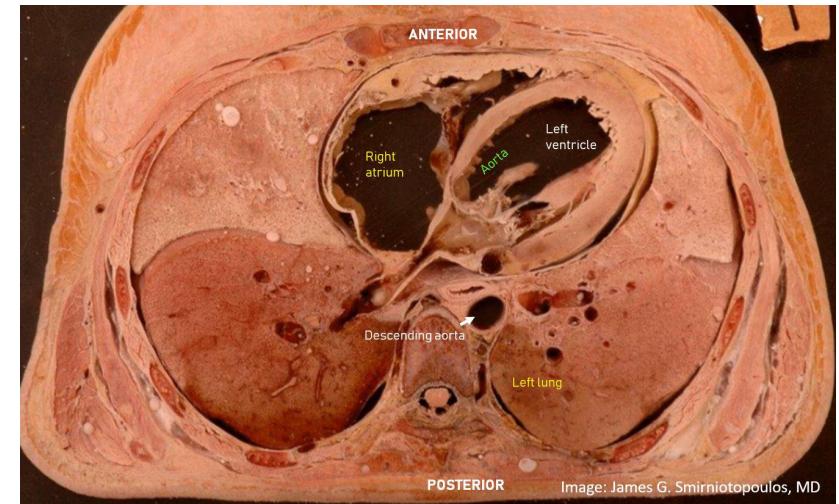
Avec 8 électrodes sur le bord : en bleu la géométrie de départ; en vert la géométrie désirée; en rouge la géométrie reconstruite.

Vers des applications plus réalistes

Application 3: Un modèle de torse humain en 2D



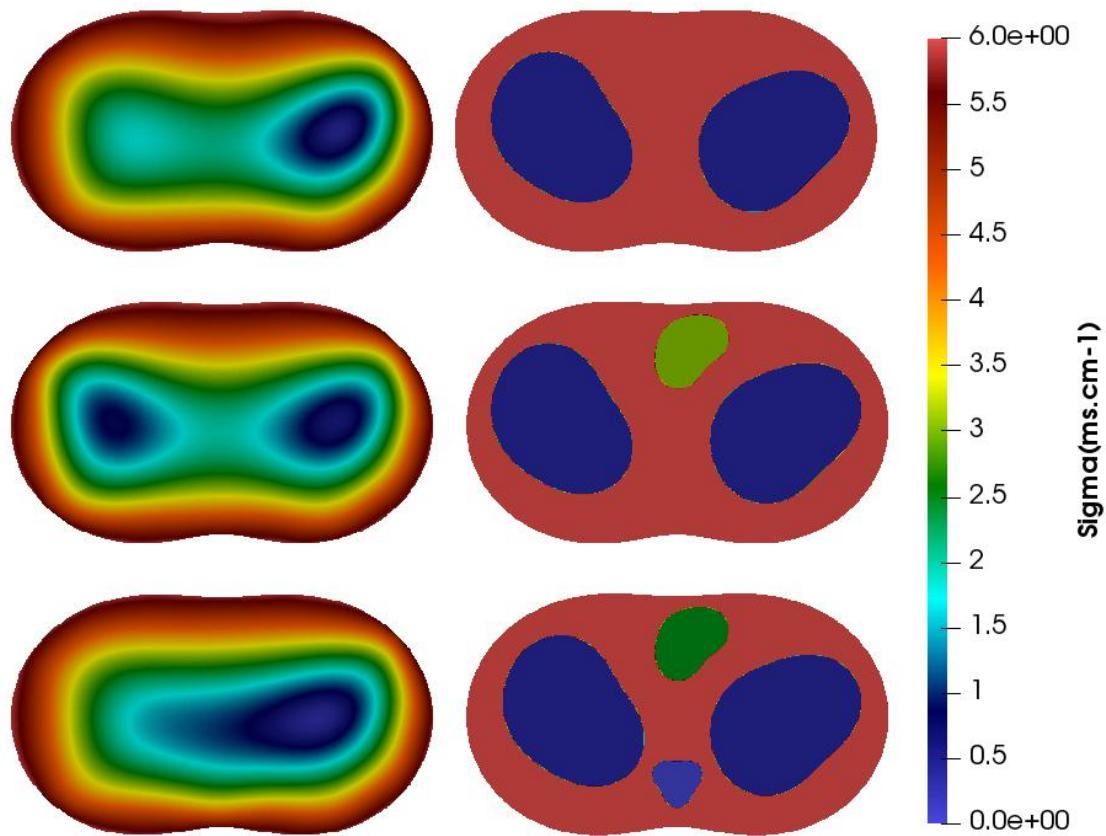
Une image réelle d'un torse humain



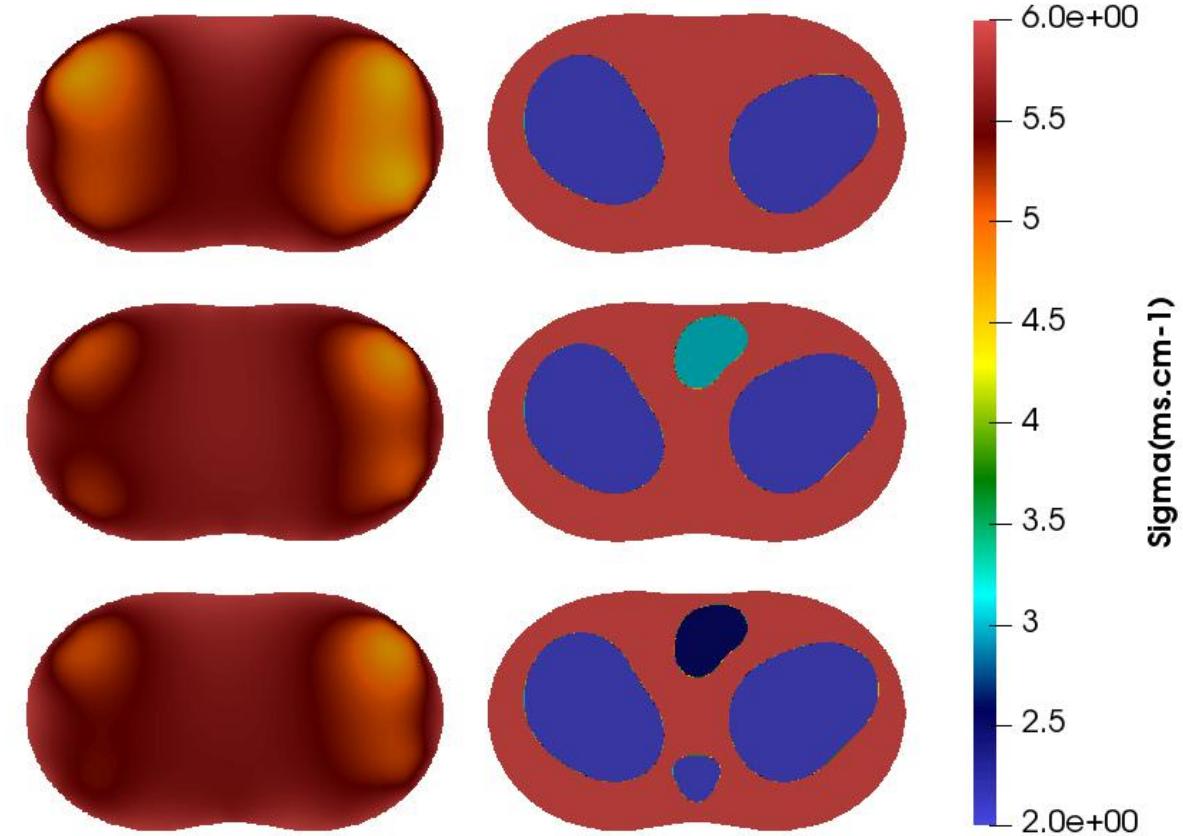
Tissu	Conductivité (mS/cm)
Muscle	0.56 à 8
Sang	6.67
Poumon	0.42 à 1.38
Graisse	0.40
Os	0.06
Tissu cardiaque (myocarde)	2 à 4

Tableau des conductivités des tissus

Application 3: Un modèle de torse humain en 2D

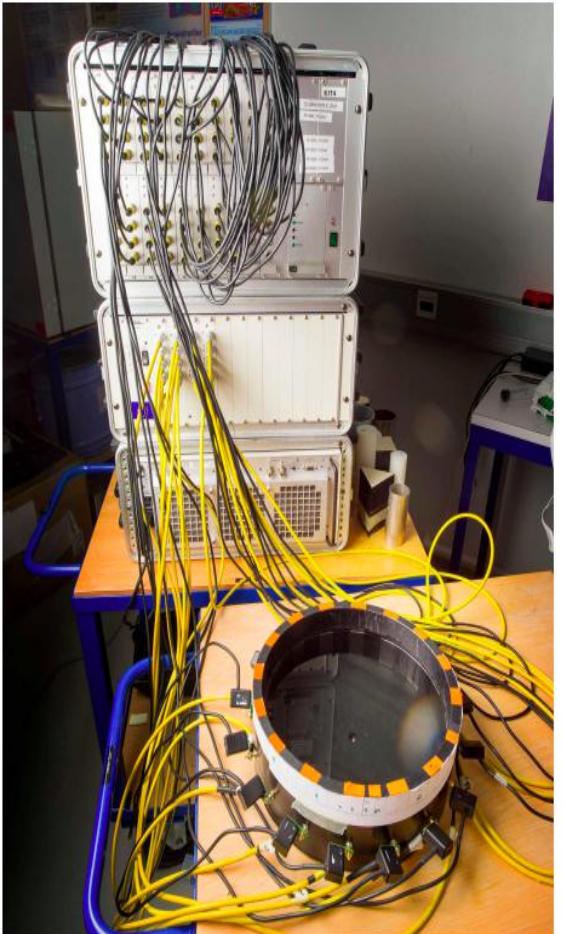


Reconstruction dans une géométrie simplifiée du torse, dans un carré $[-2, 2]\text{cm}$

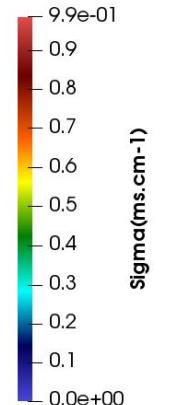
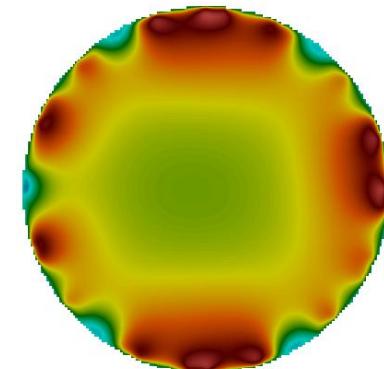
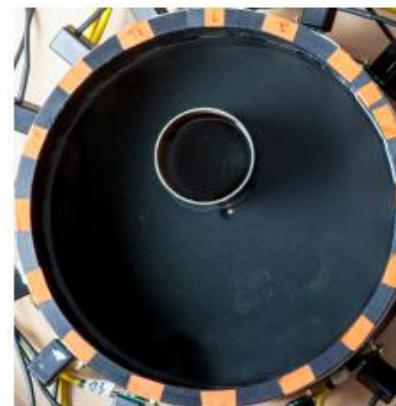
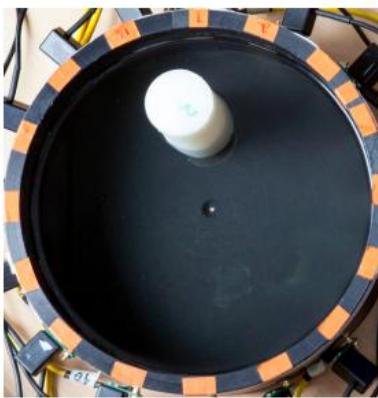


Reconstruction dans une géométrie simplifiée du torse, dans un carré $[-30, 30]\text{cm}$

Application 3: Reconstruction avec des données réelles



À droite : une configuration expérimentale pour la collecte de données EIT en 2D avec une configuration homogène et une autre avec deux inclusions plastiques. À gauche : le système de mesure KIT4 à l'Université de Eastern-Finland.



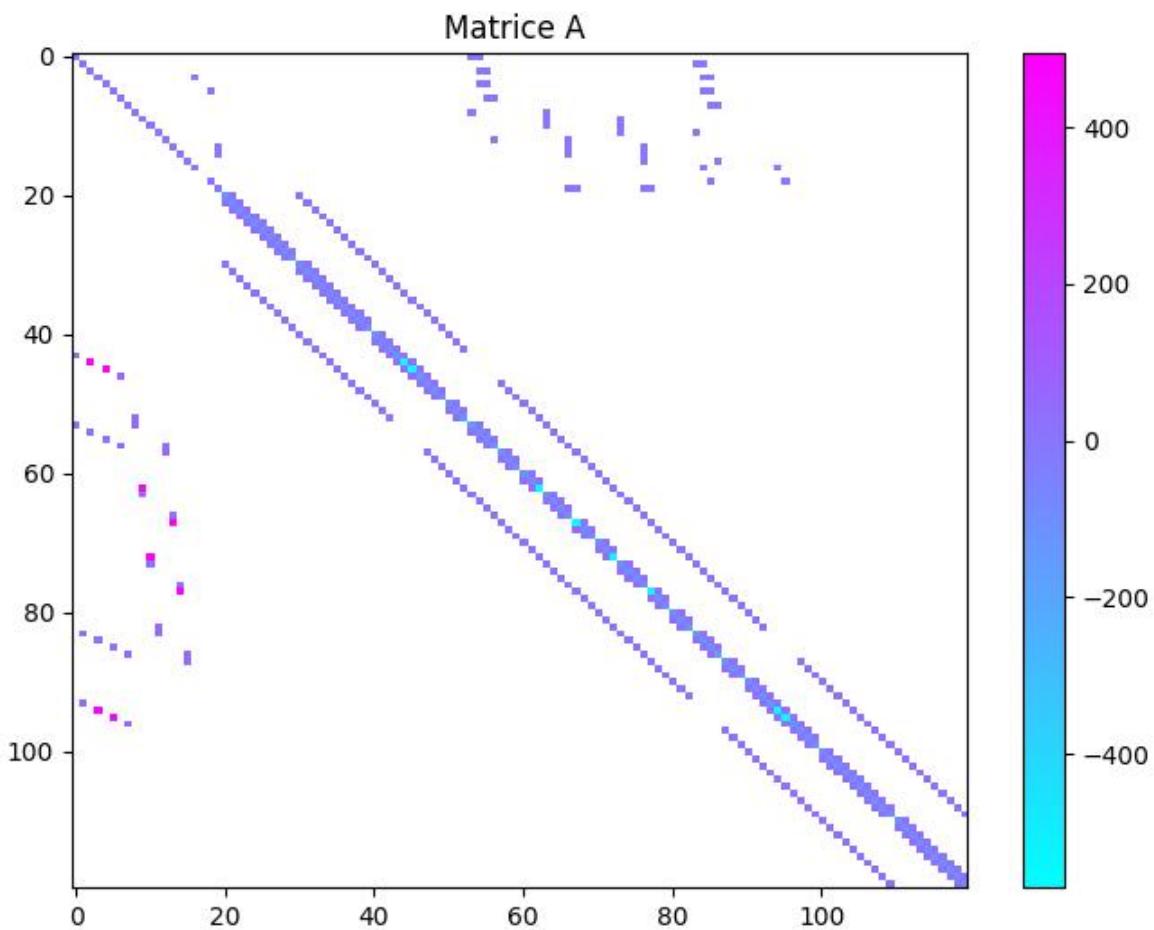
$\text{Sigma}(\text{ms.cm}^{-1})$

$\text{Sigma}(\text{ms.cm}^{-1})$

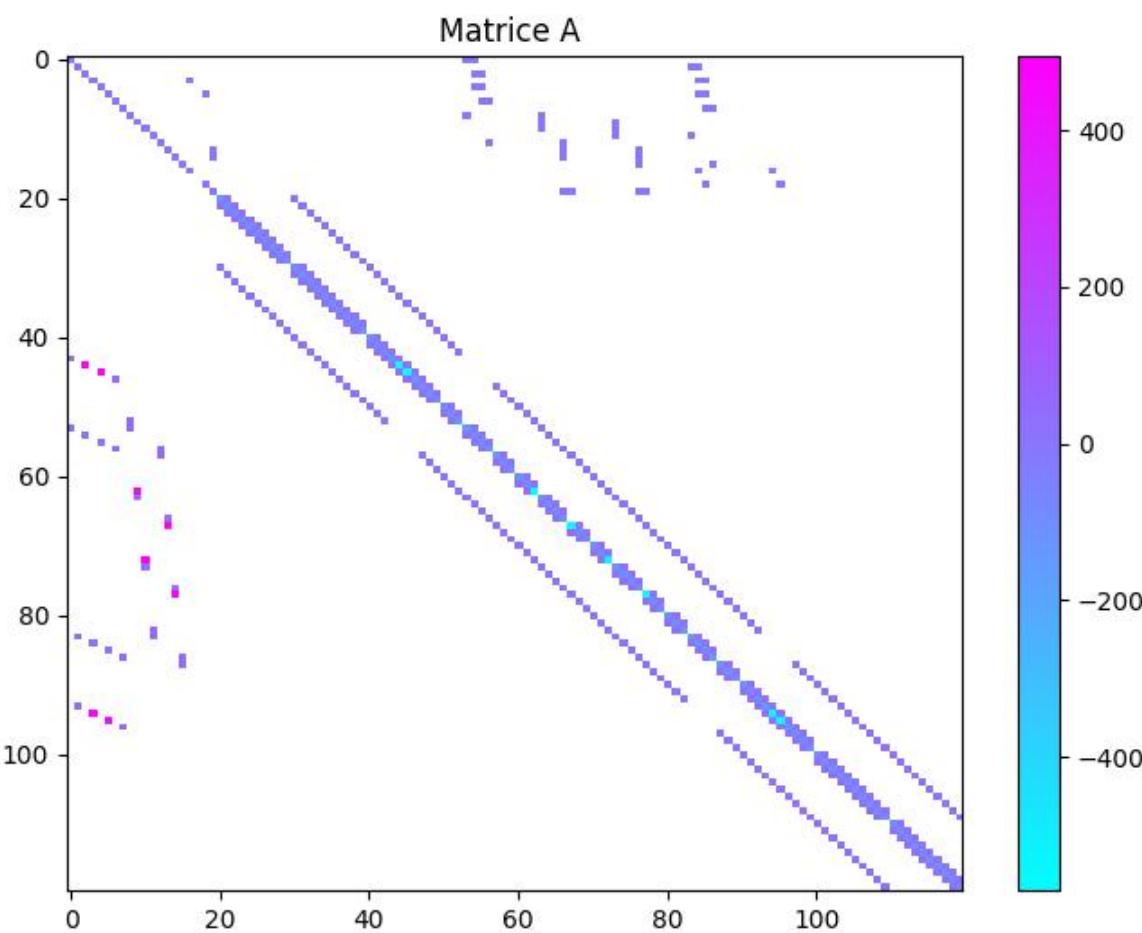
Reconstruction à l'aide de l'ensemble de données avec 16 électrodes

Développement et calcul scientifique

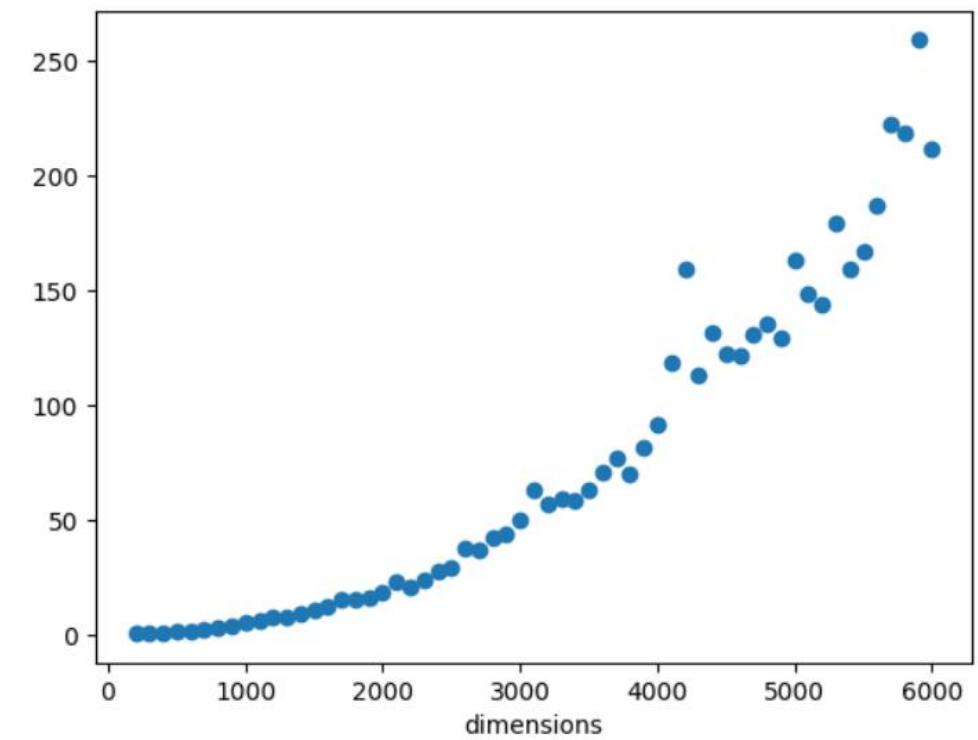
Développement et calcul scientifique pour l'EIT



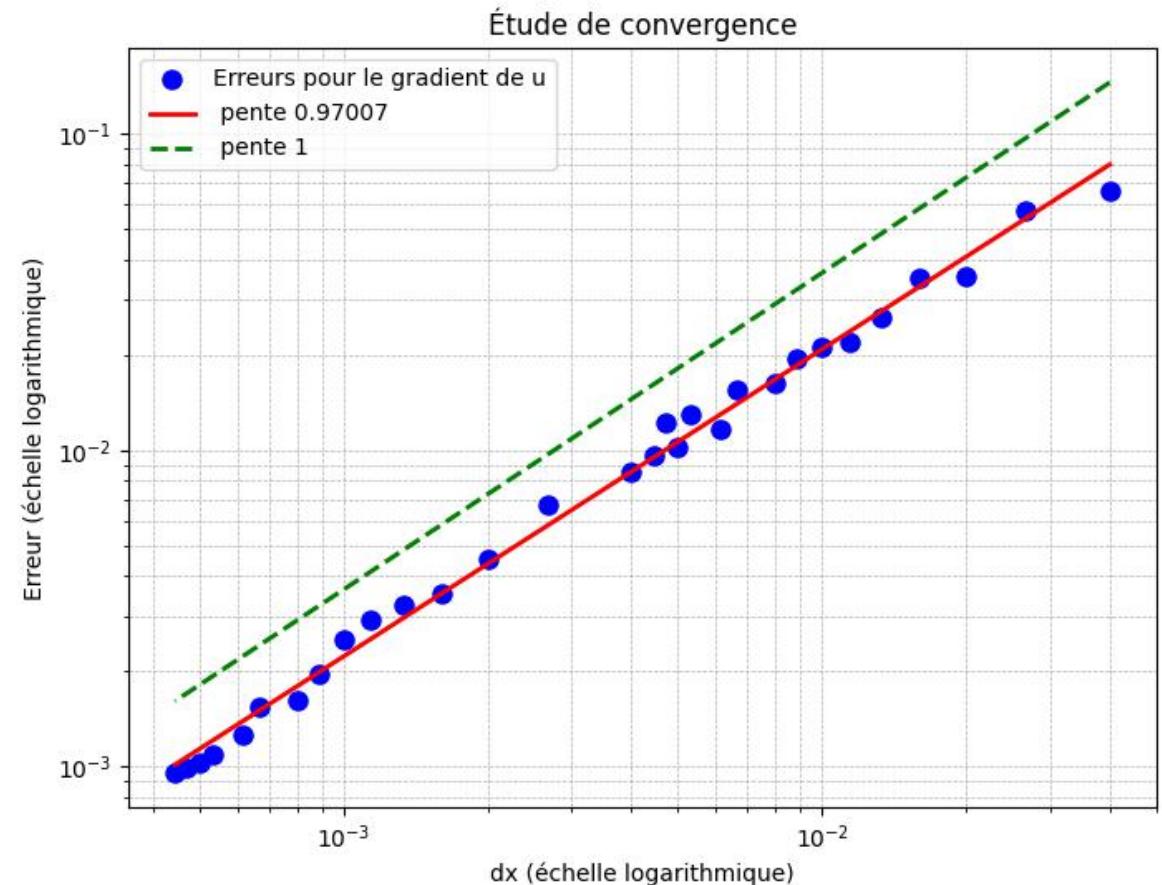
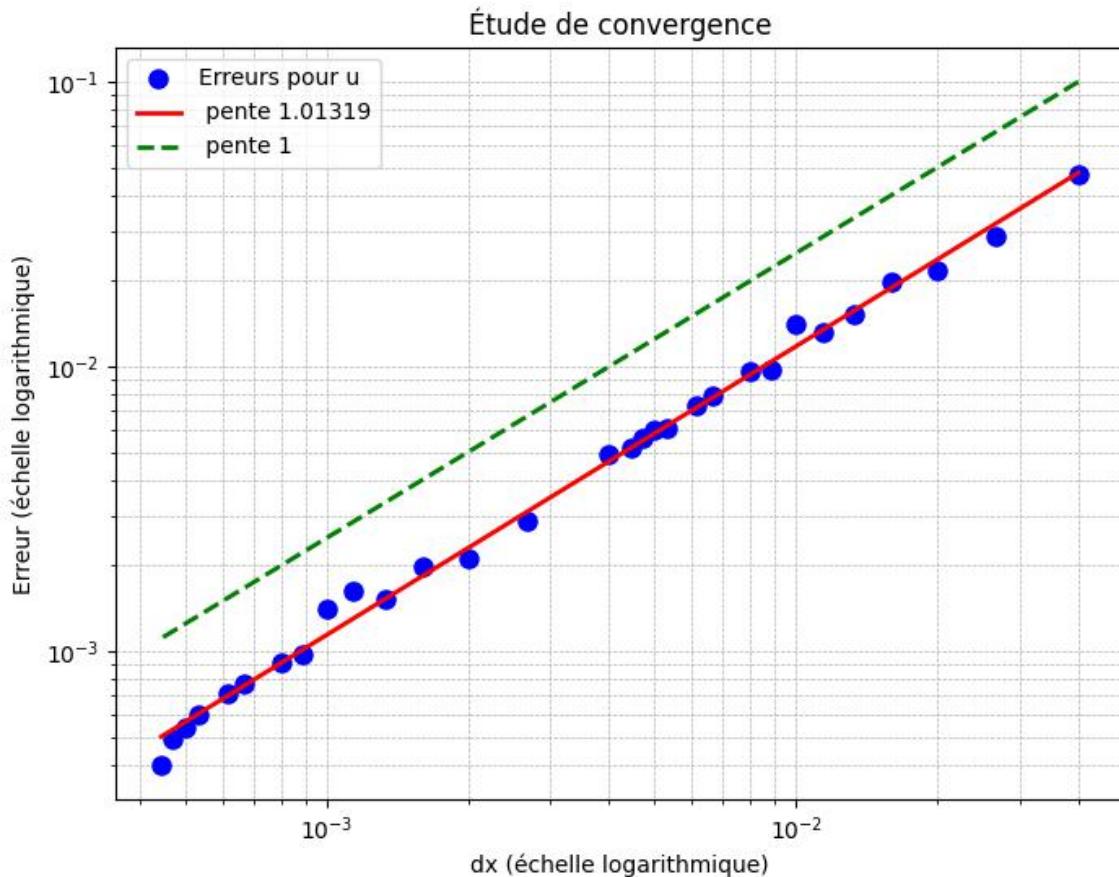
Développement et calcul scientifique pour l'EIT



Pour une grille cartésienne de taille $N_x = N_y = 4000$ lancée sur 6 processeurs: la partie d'assemblage à l'aide de la librairie SPM et la classe «Grid» atteint les alentours des 300ms, la partie résolution atteint les alentours des 150ms.



Développement de code parallèle pour l'EIT : MPI +
PaStiX solver :



Étude de convergence pour la résolution de son gradient, on considère la solution manufacturée: $u(x,y) = \sin(xy)$ et $U = 0$.

Conclusion et perspectives

- Résolution numérique de l'EIT à l'aide d'une méthode de frontière immergée.
 - Tester la résolution du problème inverse : conductivité - forme.
 - Développement de code parallèle pour l'EIT.
-
- Tester des algorithmes plus sophistiqués pour le problème inverse.
 - Développement de code pour le problème inverse.
 - Reconstruction avec des données réelles.

Merci pour votre attention :)