如何通俗的解释仿射变换?

简单来说，“仿射变换”就是：“线性变换”+“平移”。

简单来说，“仿射变换”就是：“线性变换”+“平移”。

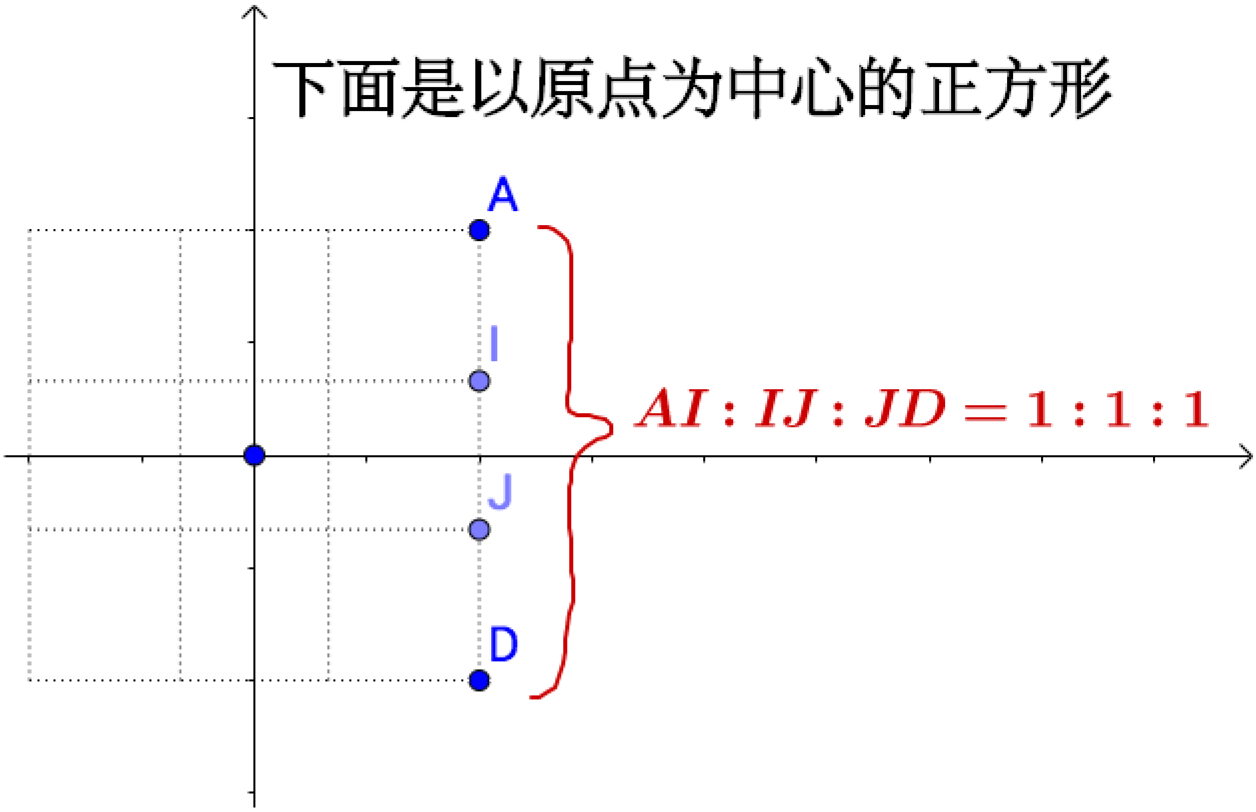
先看什么是线性变换?

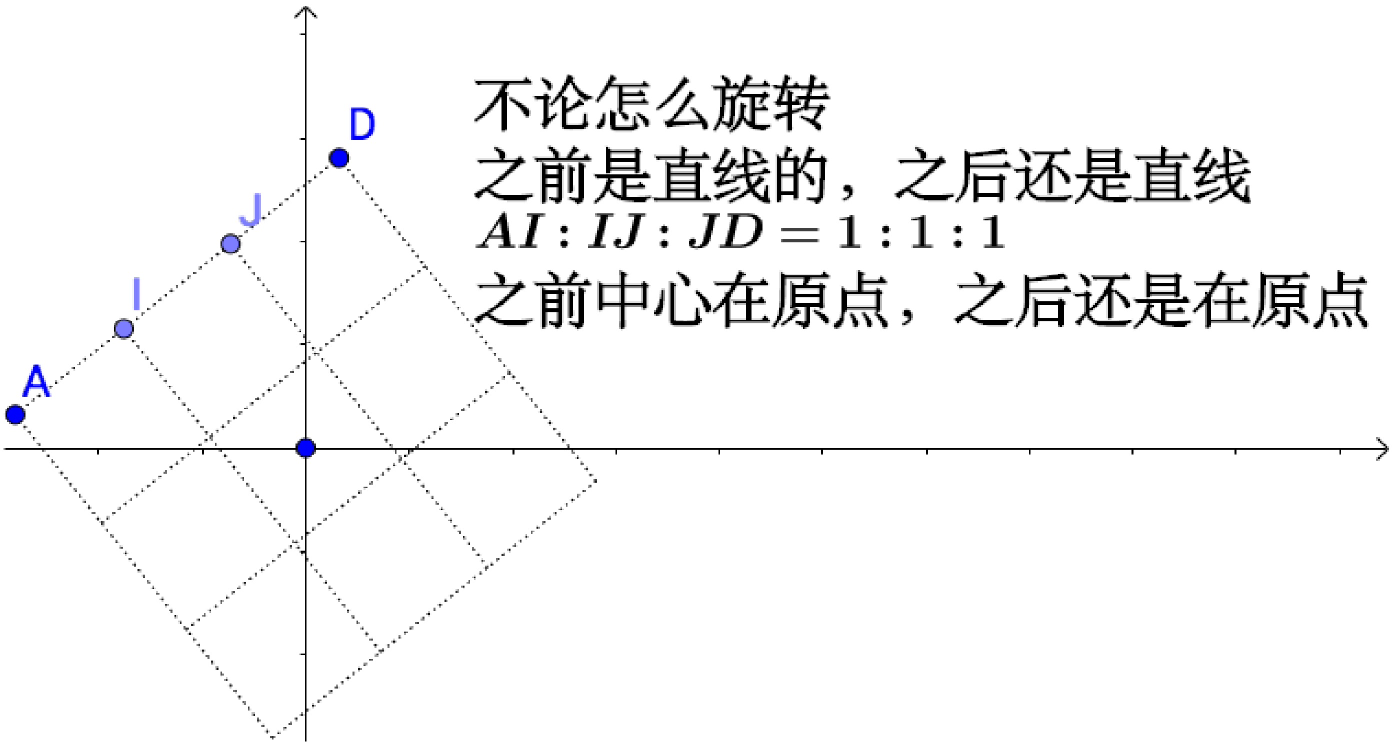
1 线性变换

线性变换从几何直观有三个要点：

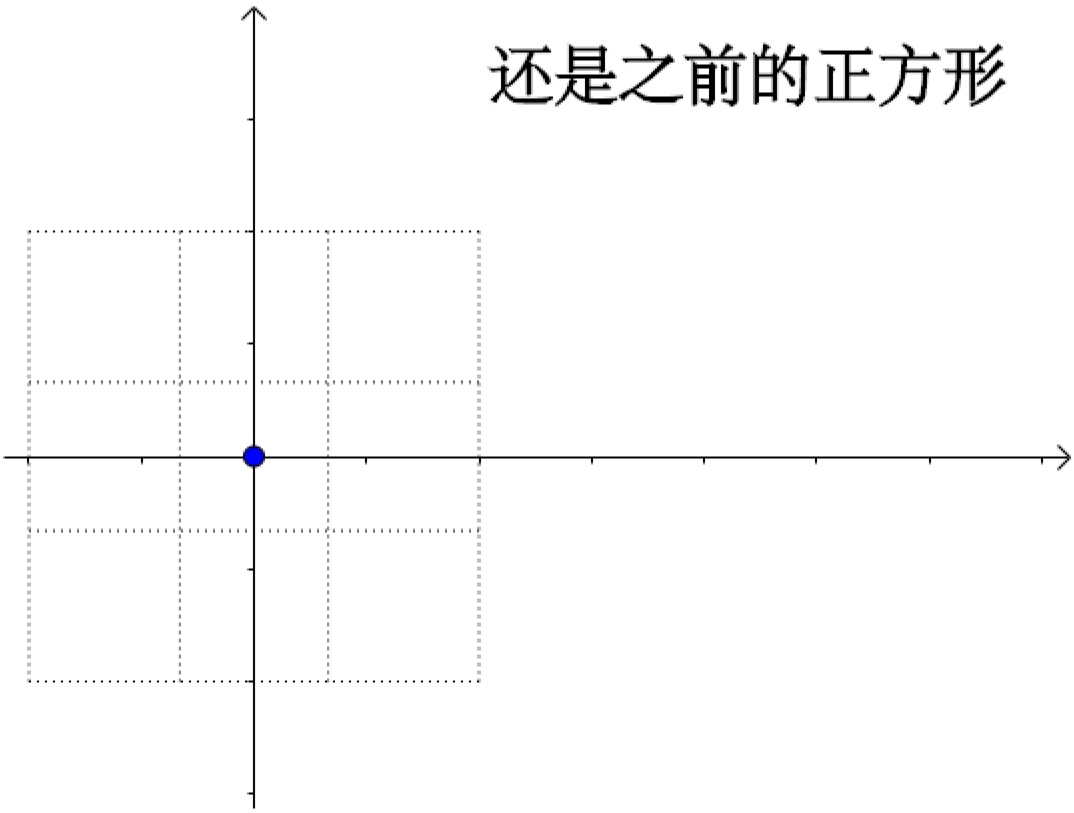
- 变换前是直线的，变换后依然是直线
- 直线比例保持不变
- 变换前是原点的，变换后依然是原点

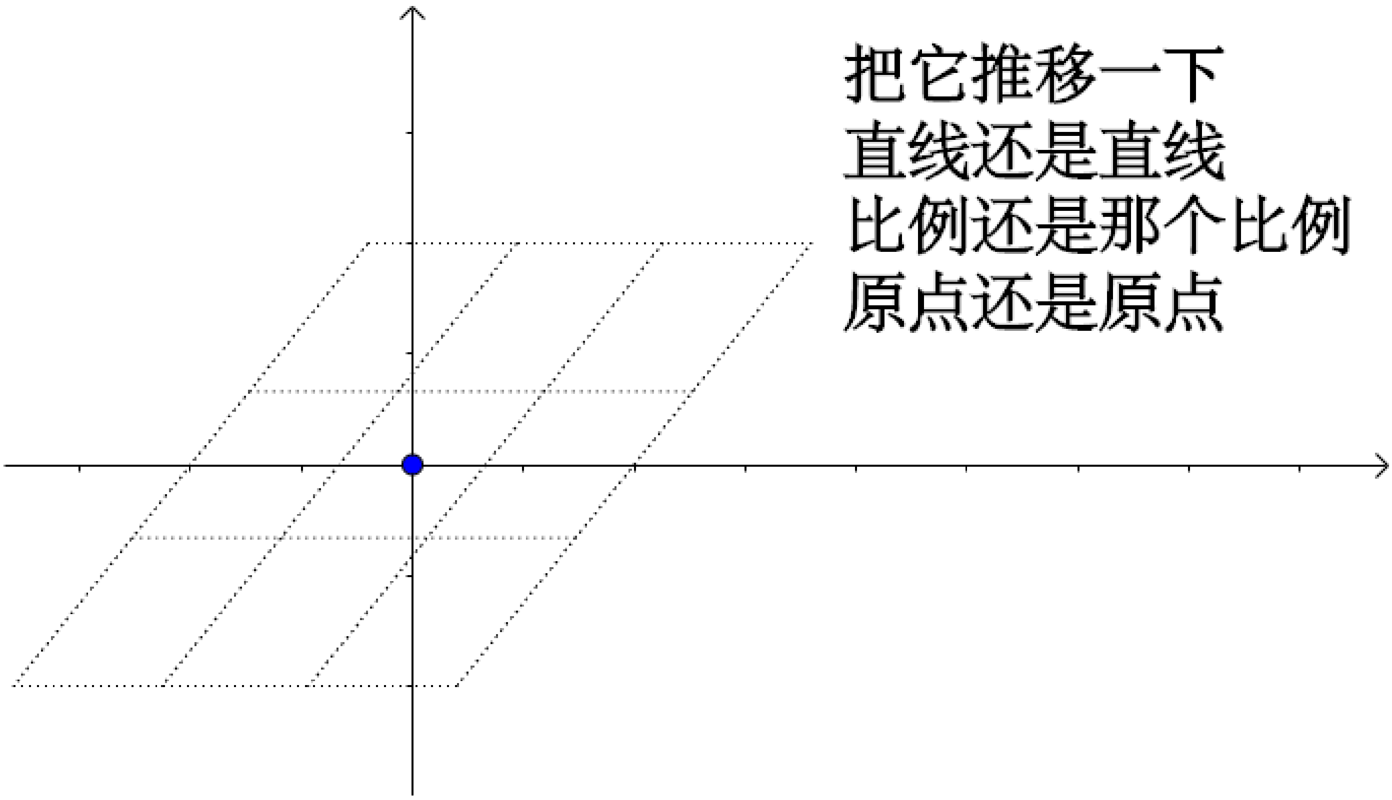
比如说旋转：



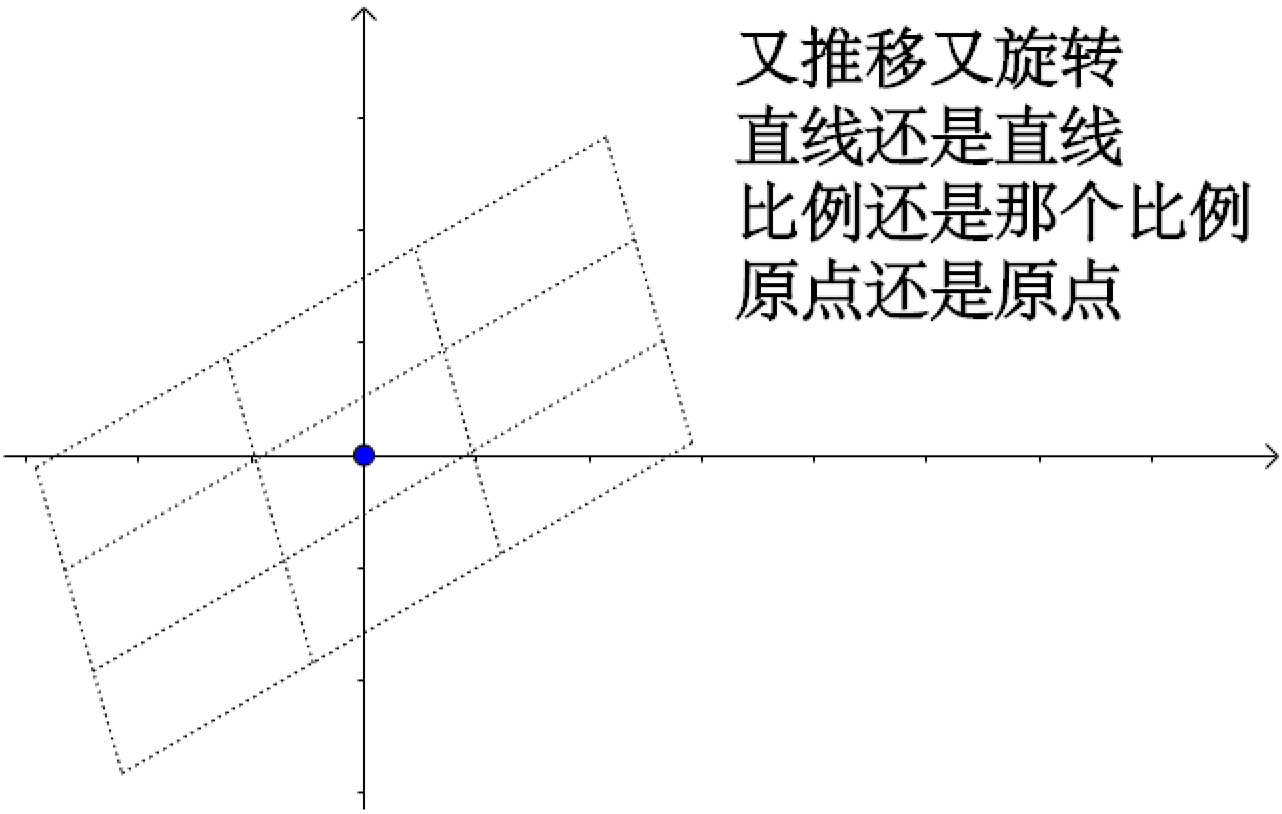

D
J
I
A
不论怎么旋转
之前是直线的，之后还是直线
$AI:IJ:JD=1:1:1$
之前中心在原点，之后还是在原点

比如说推移：

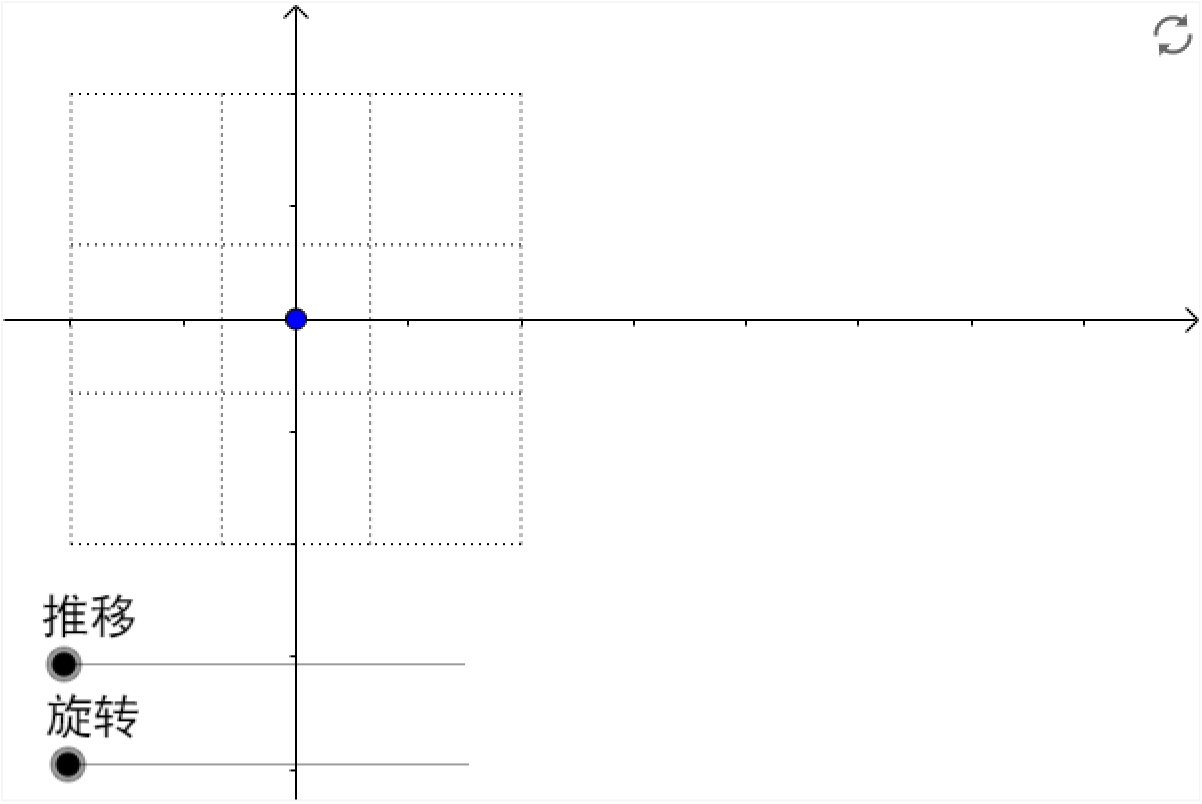

还是之前的正方形



这两个叠加也是线性变换：



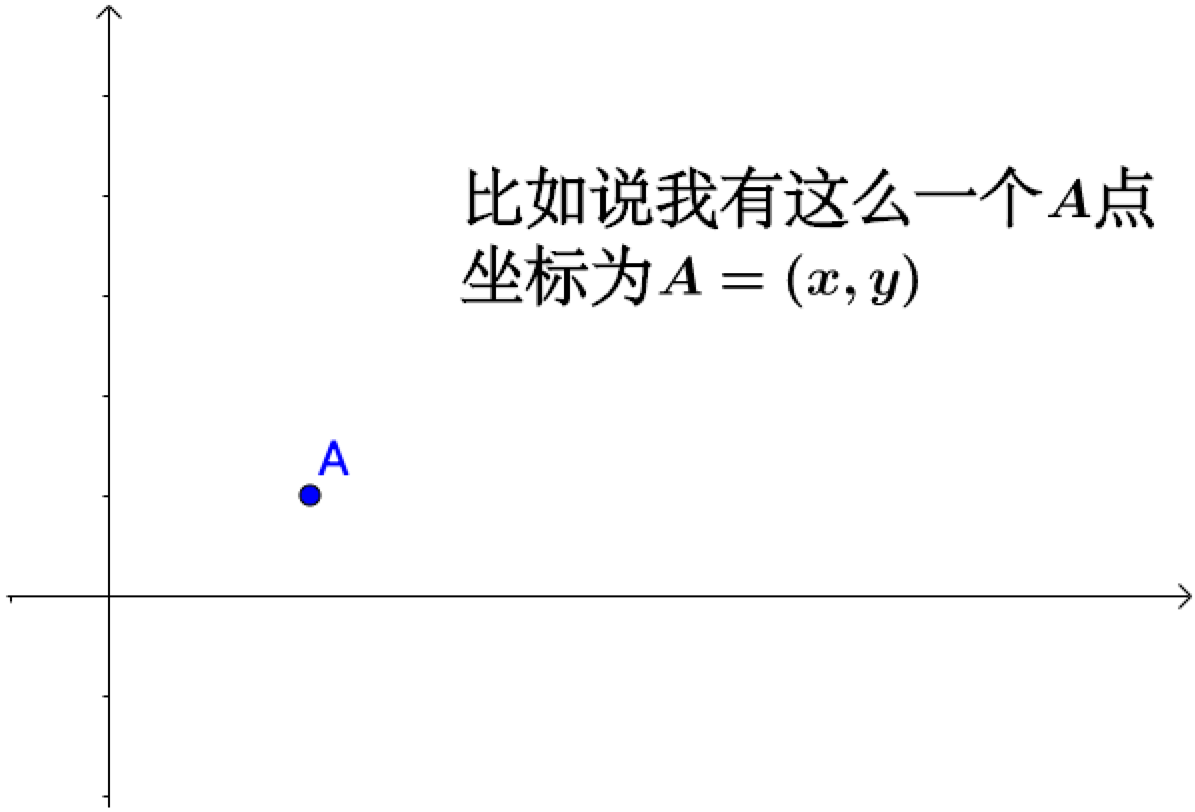
自己动手试一下（观察下是否符合之前的三个要求）：

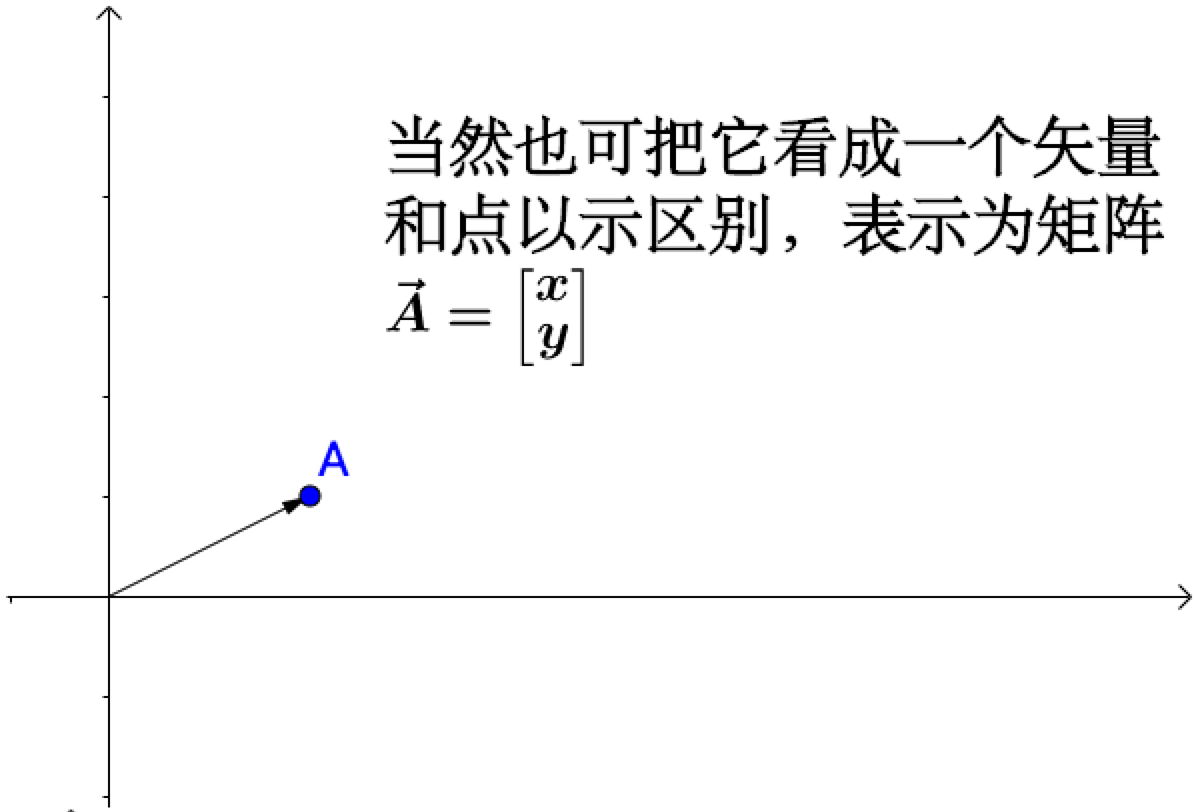


Created with GeoGebra

1.1 代数

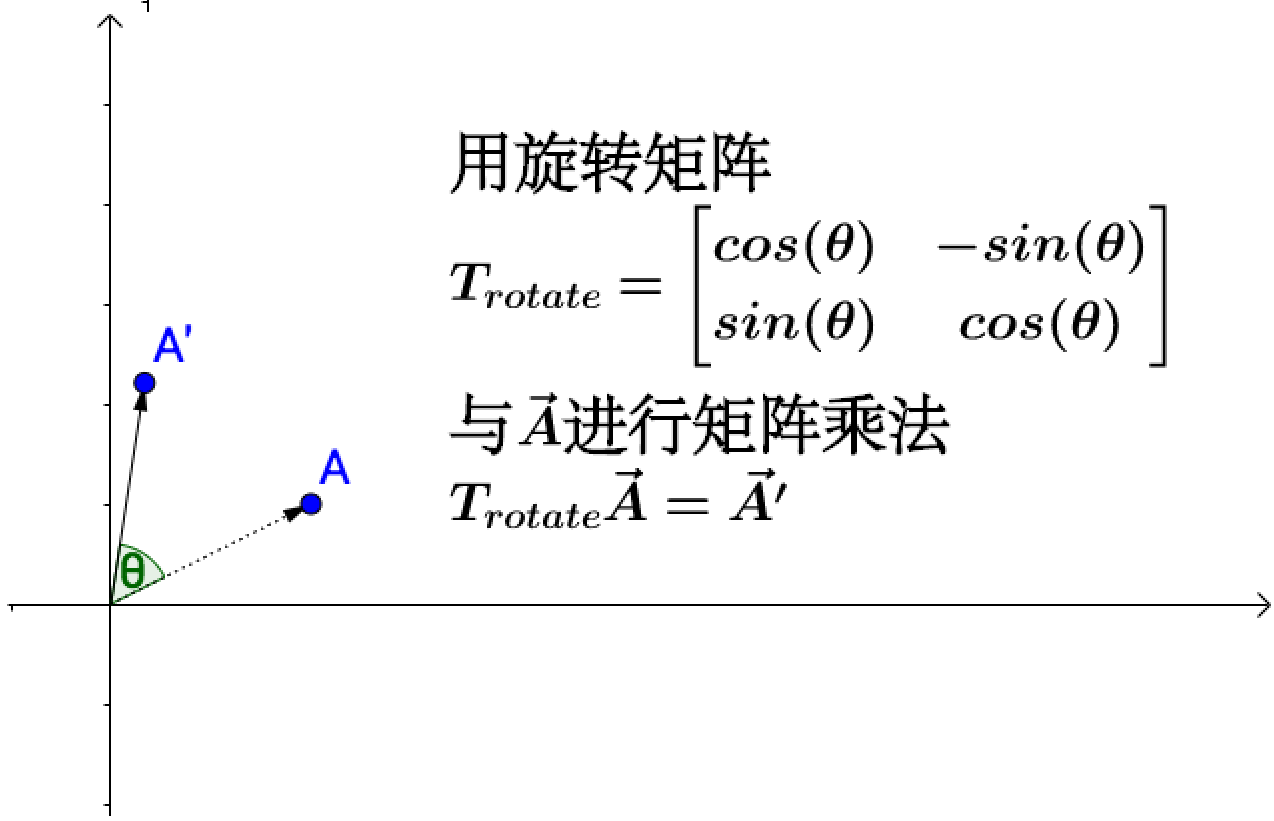
简单讲一下旋转是怎么实现的，可以让我们进一步了解代数是怎么描述线性变换的。





当然也可把它看成一个矢量和点以示区别，表示为矩阵

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

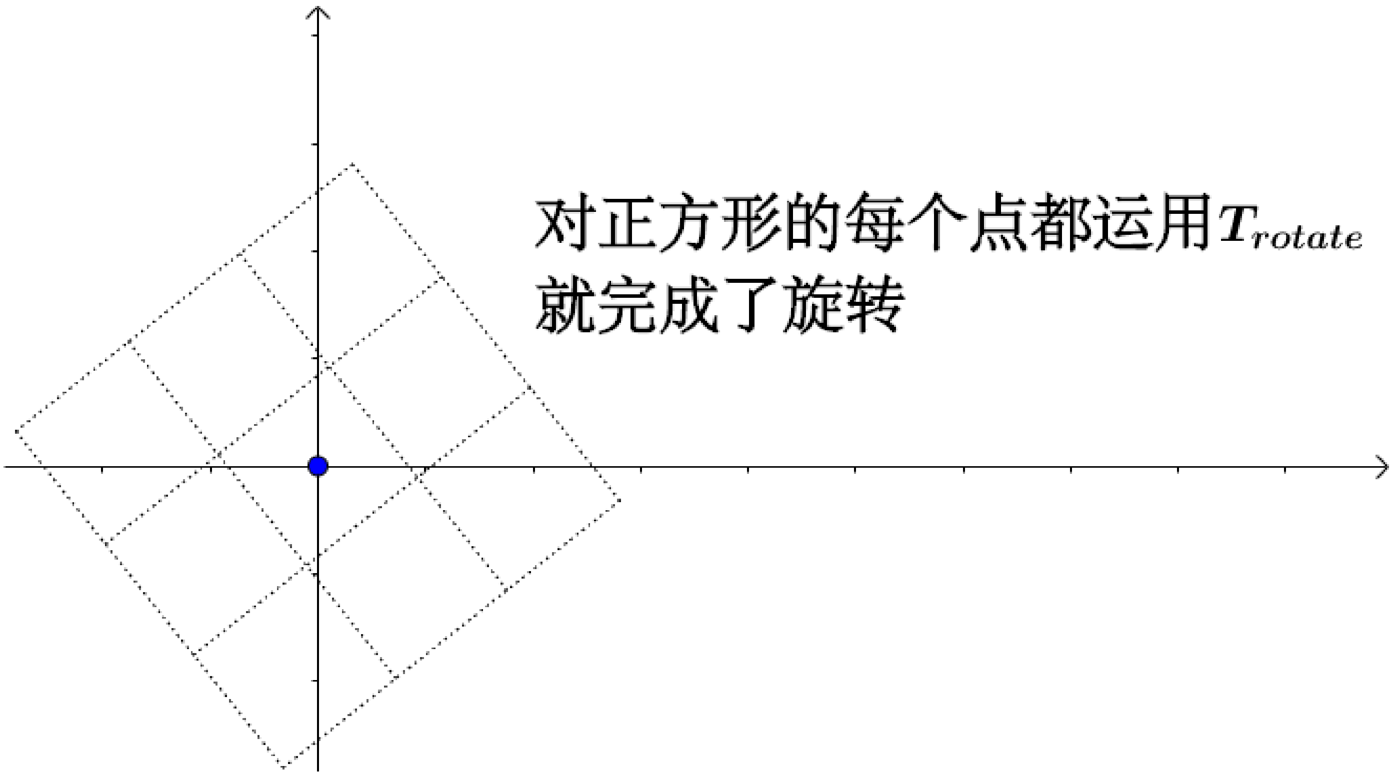


用旋转矩阵

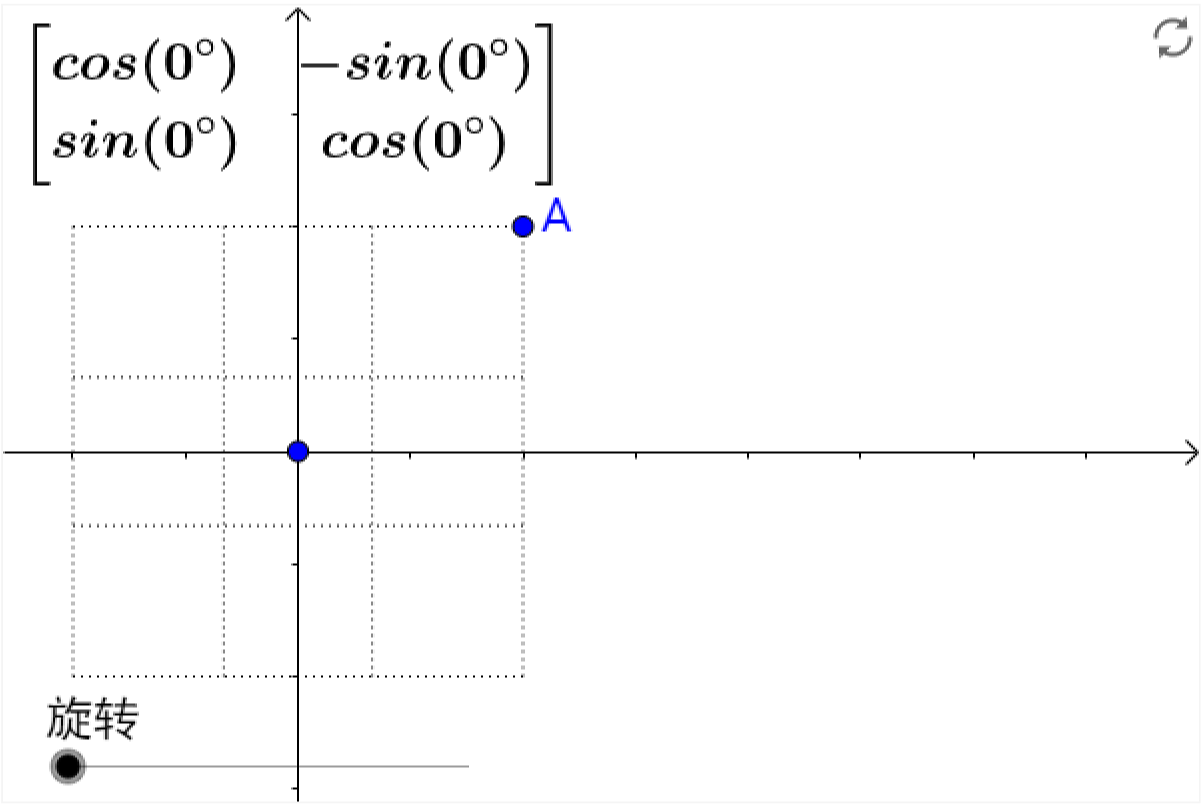
$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

与$\vec{A}$进行矩阵乘法

$$T_{rotate}\vec{A} = \vec{A}'$$



你可以手动操作下，会发现旋转矩阵在不断变化（为了方便观察旋转，我标记出一个顶点）：



Created with GeoGebra

总结下来，线性变换是通过矩阵乘法来实现的。

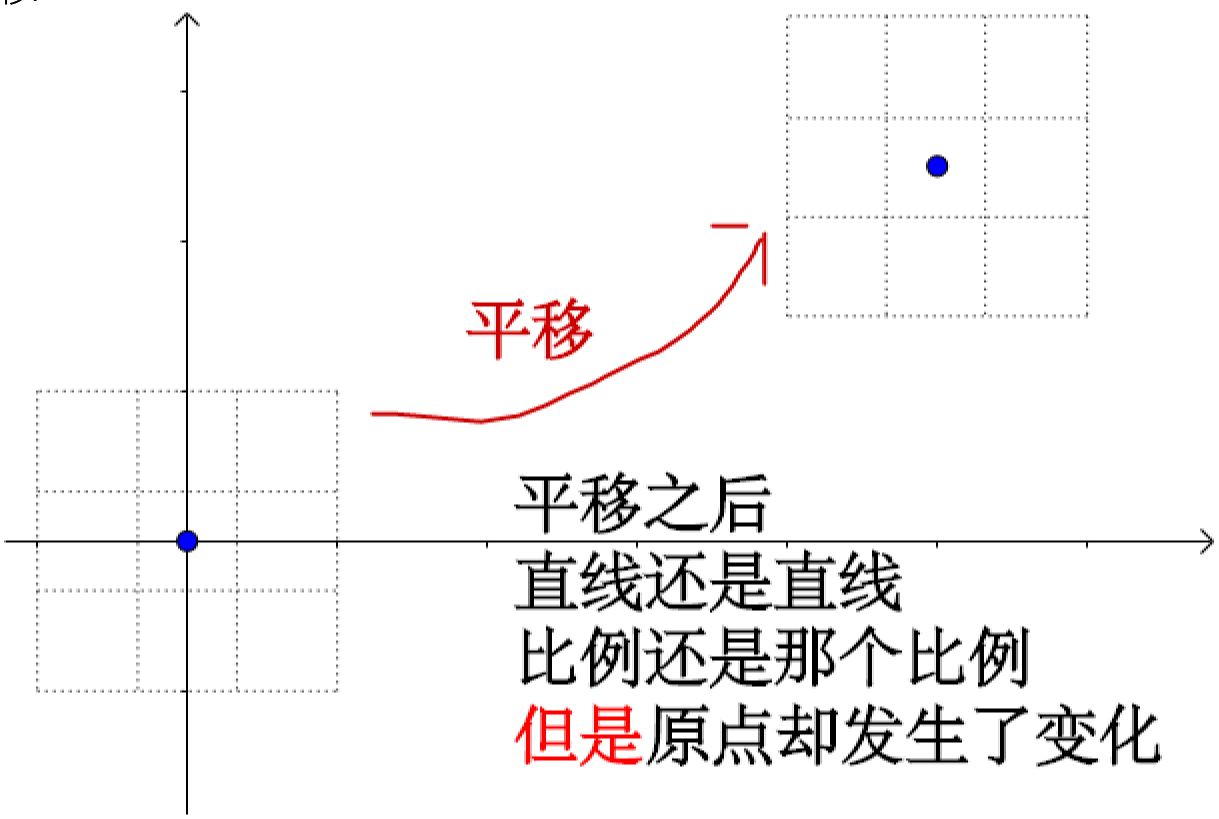
2 仿射变换

仿射变换从几何直观只有两个要点：

- 变换前是直线的，变换后依然是直线
- 直线比例保持不变

少了原点保持不变这一条。

比如平移：

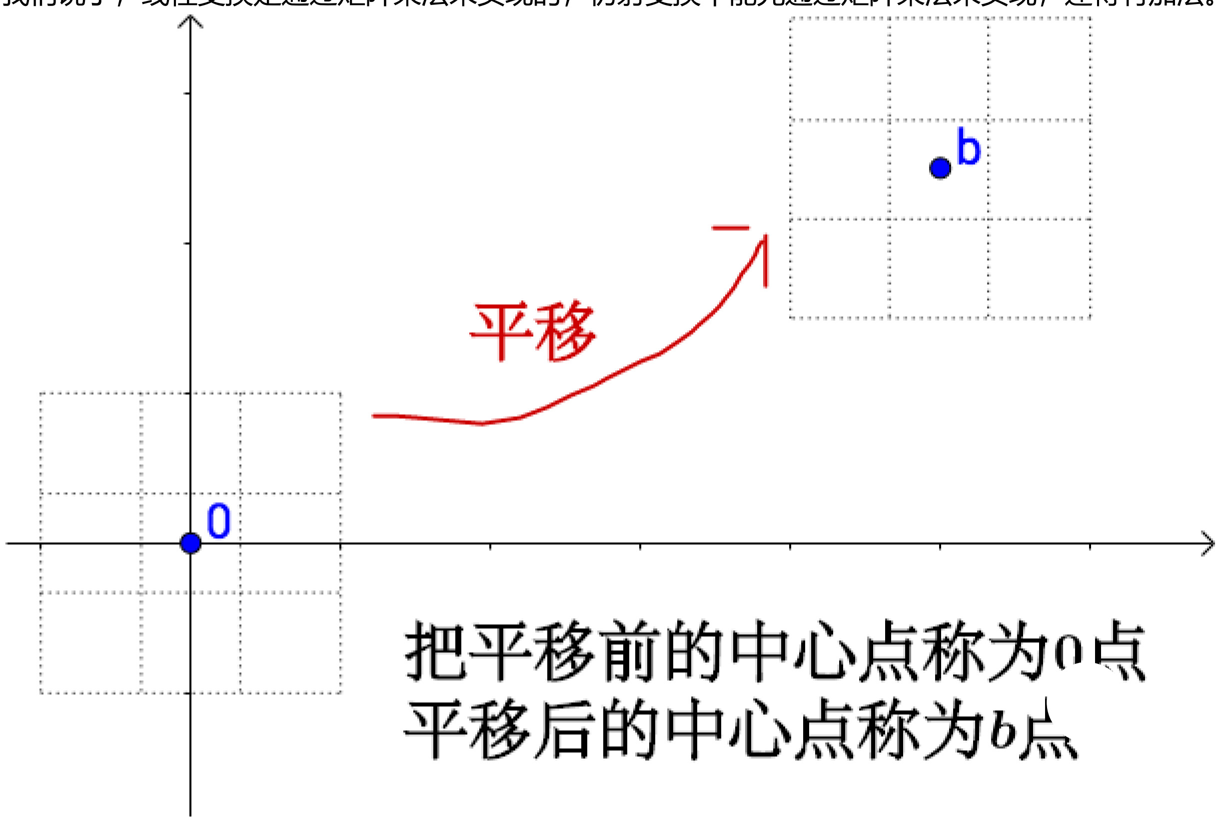


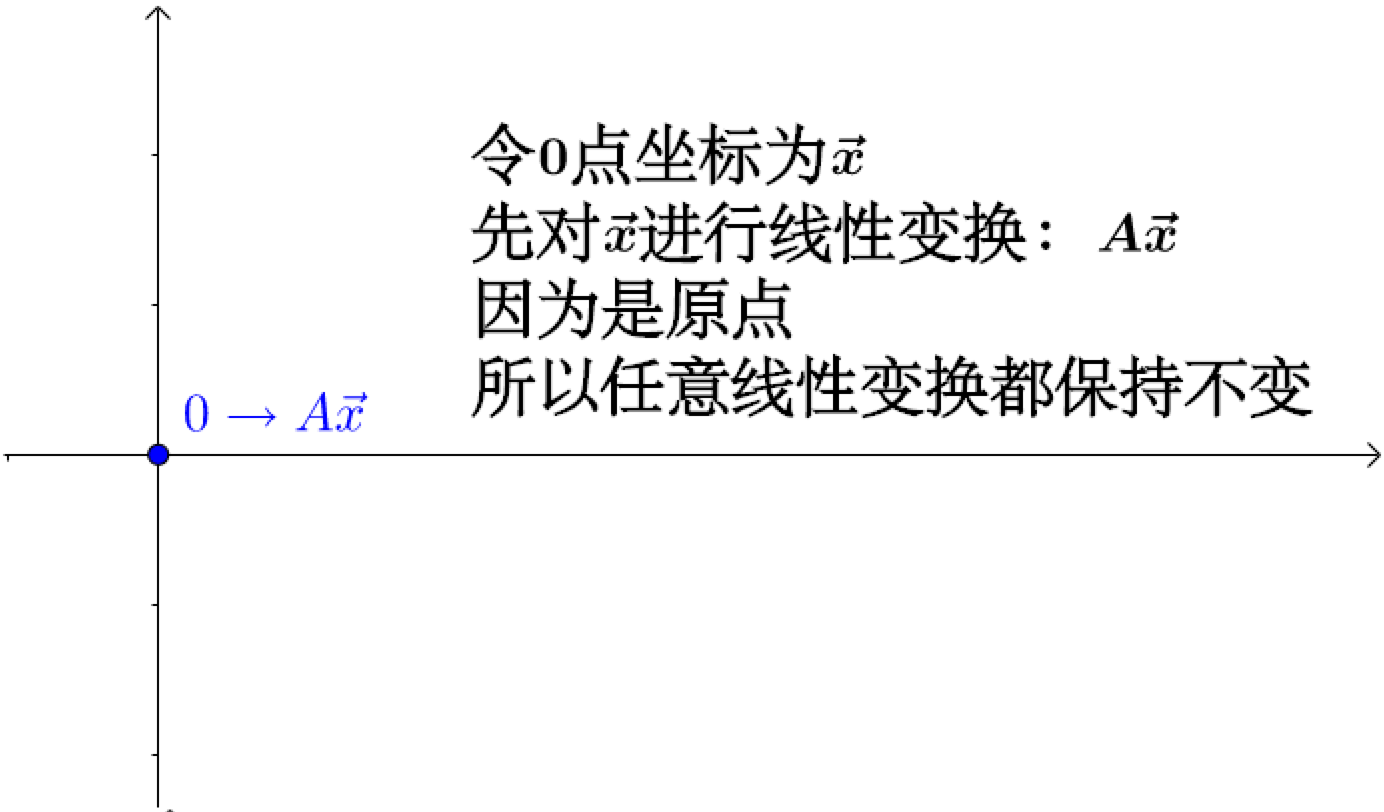
因此，平移不再是线性变化了，而是仿射变化。

2.1 代数

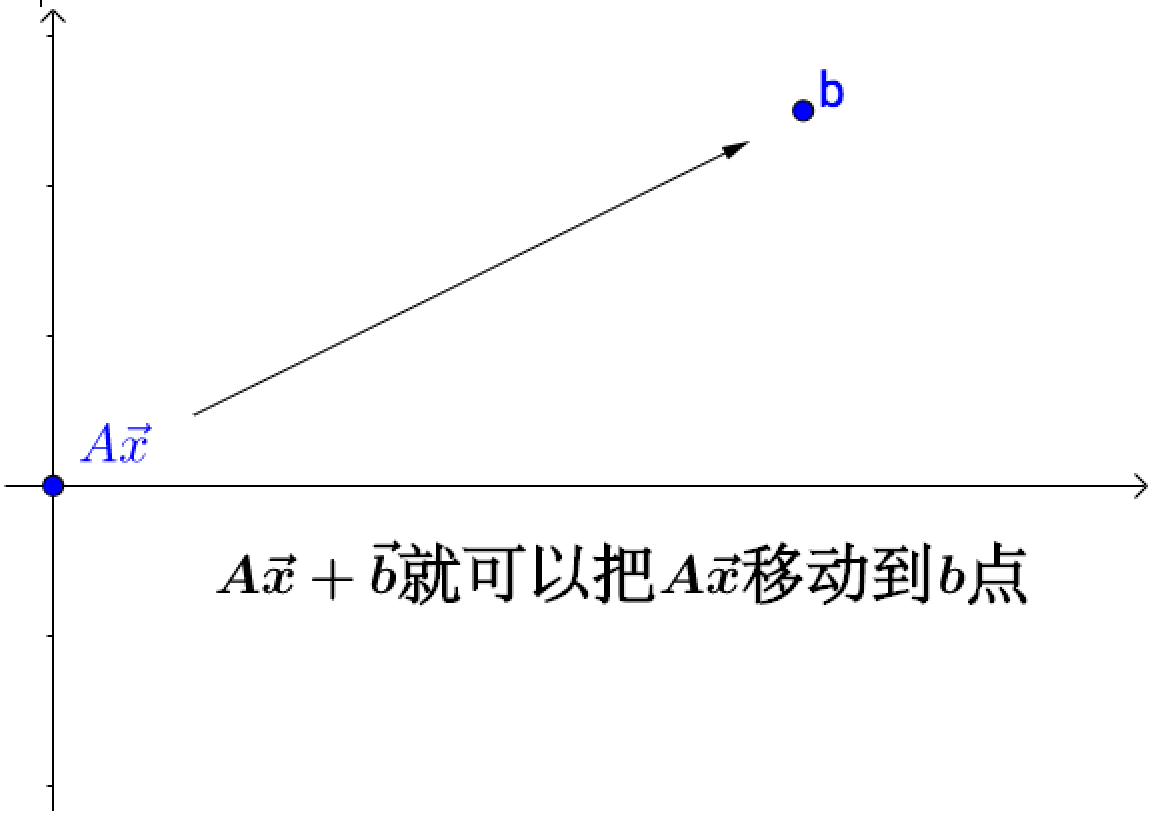
我们来看下仿射变换是怎么用代数来表示的。

上一节我们说了，线性变换是通过矩阵乘法来实现的，仿射变换不能光通过矩阵乘法来实现，还得有加法。

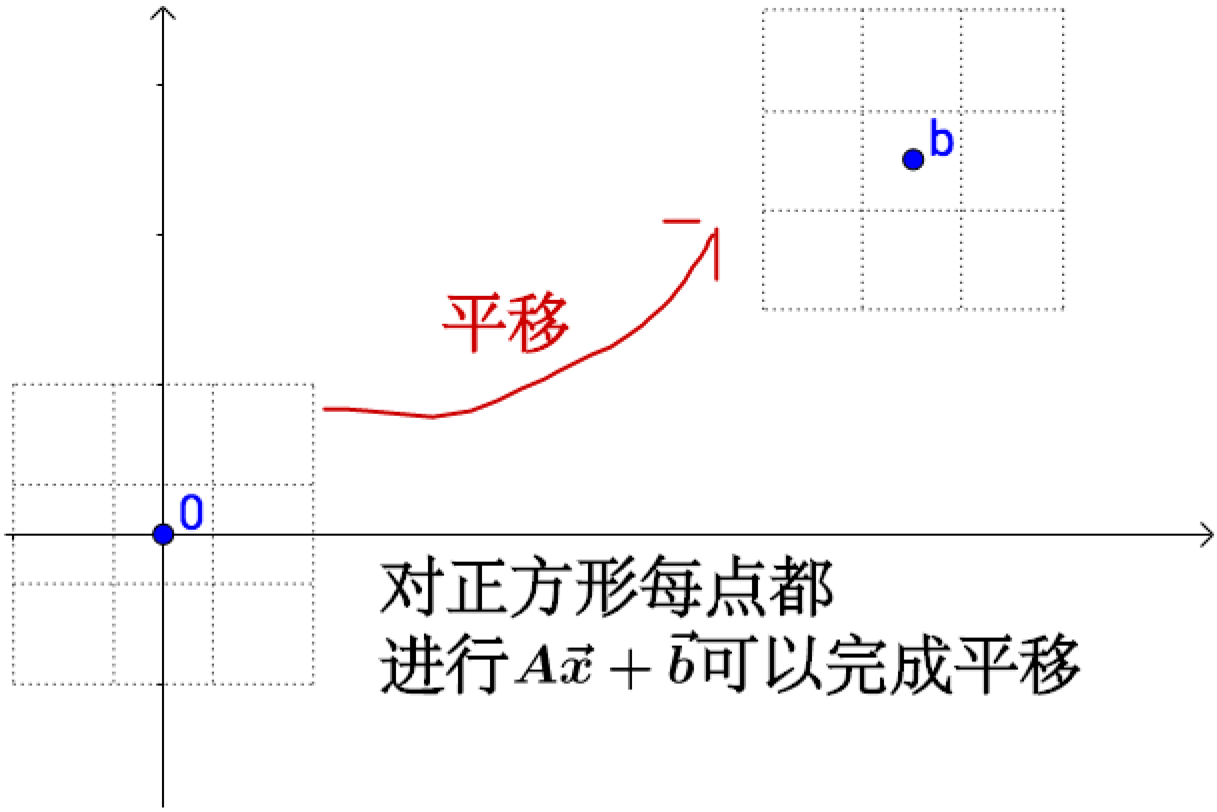




令0点坐标为$\vec{x}$
先对$\vec{x}$进行线性变换：$\boldsymbol{A}\vec{x}$
因为是原点
所以任意线性变换都保持不变
$0 \to A\vec{x}$



b
$A\vec{x}$
$\boldsymbol{A}\vec{x}+\vec{b}$就可以把$\boldsymbol{A}\vec{x}$移动到$b$点



因为我们表示仿射变换为：

$$\vec{y}=A\vec{x}+\vec{b}$$

2.2 通过线性变换来完成仿射变换

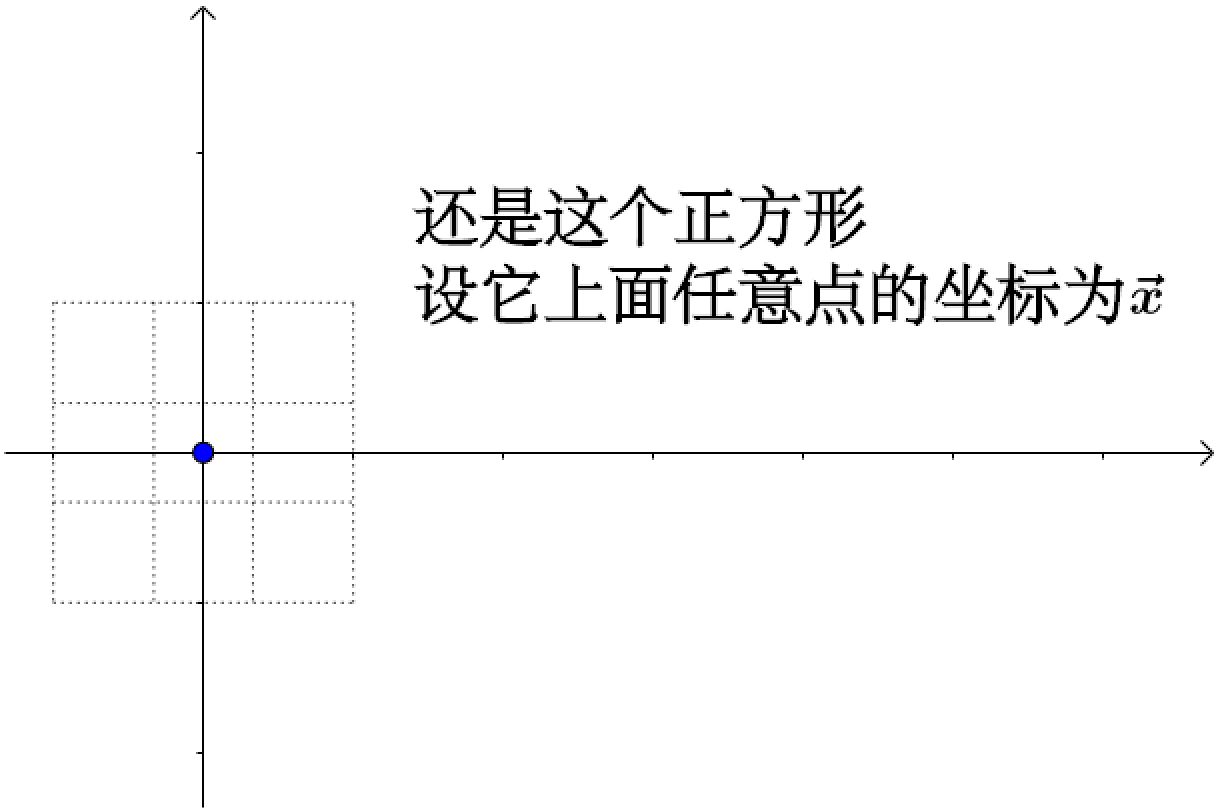
这是我觉得非常优美的一个地方：

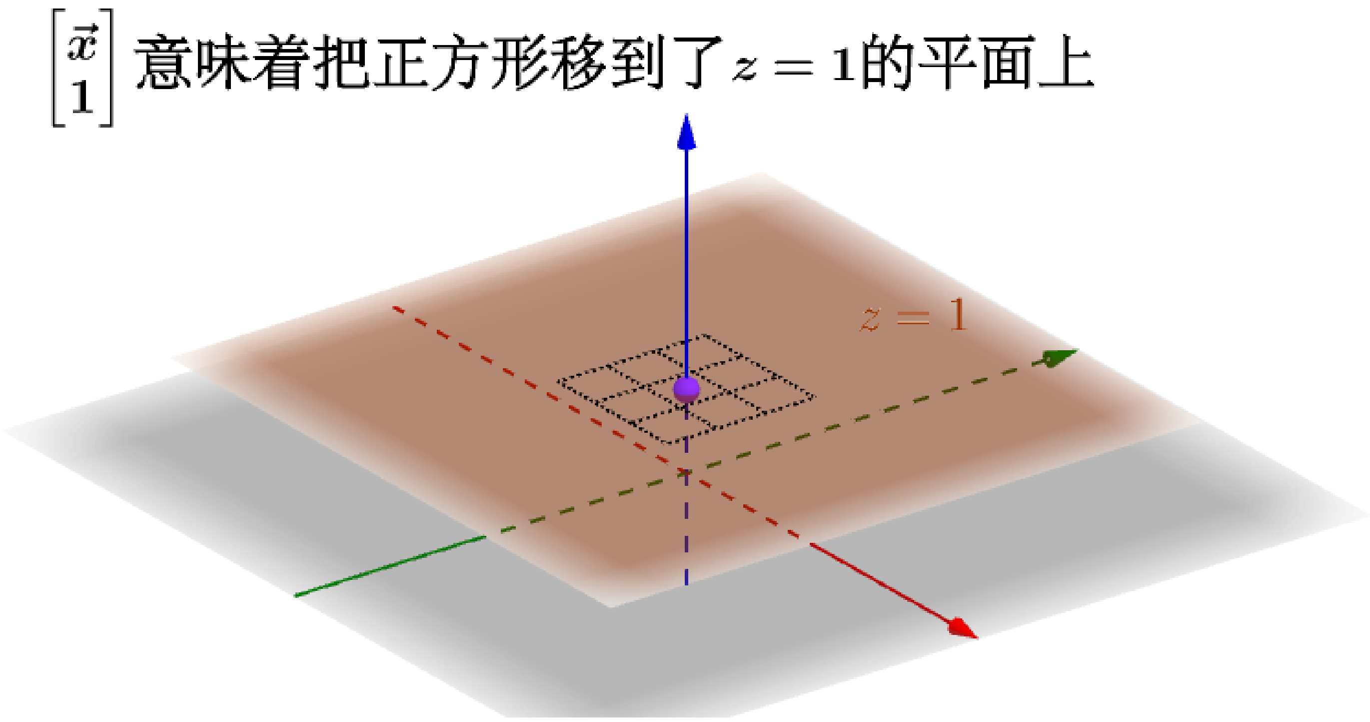
仿射变换　　　　　　　　　　　　　　线性变换

$\vec{y}=A\vec{x}+\vec{b}$可以写作$\begin{bmatrix}\vec{y}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&\vec{b}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{x}\\1\end{bmatrix}$

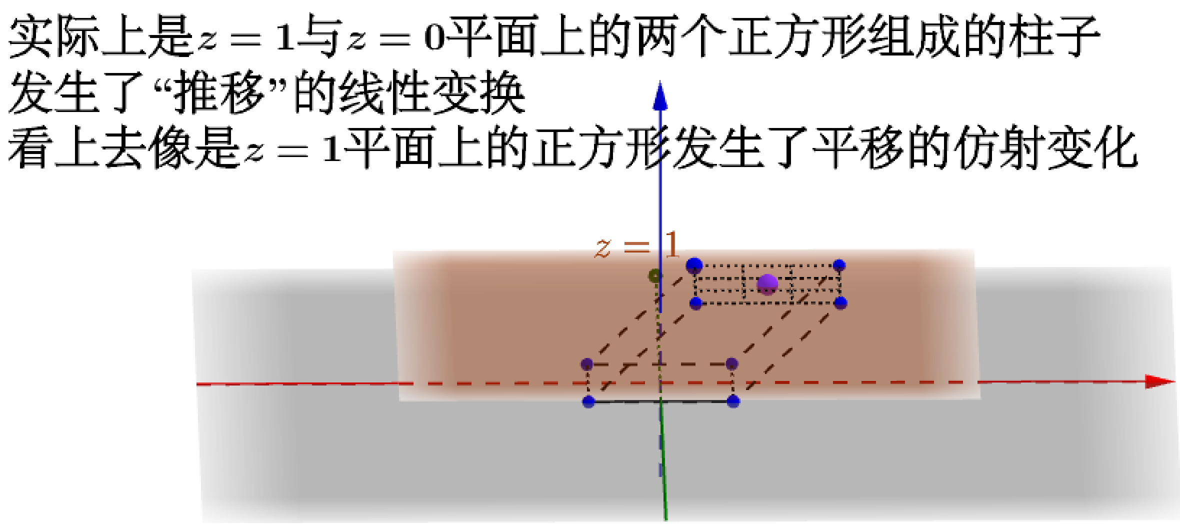
增加一个维度之后
就可以在高维度
通过线性变换来完成低维度的仿射变换

什么意思？继续举例子：

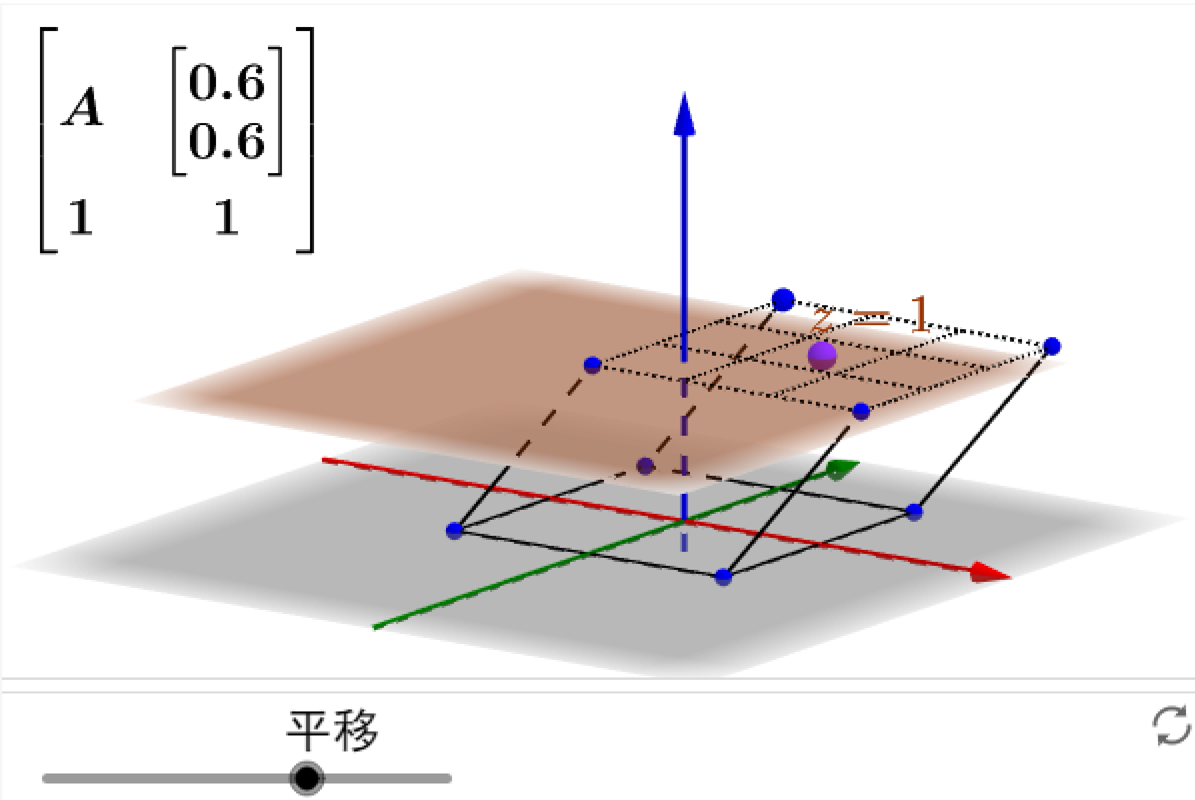




这样我就可以在三维空间下通过 $\begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 这个线性变换来操作 $z=1$ 平面上的二维正方形，完成仿射变换：

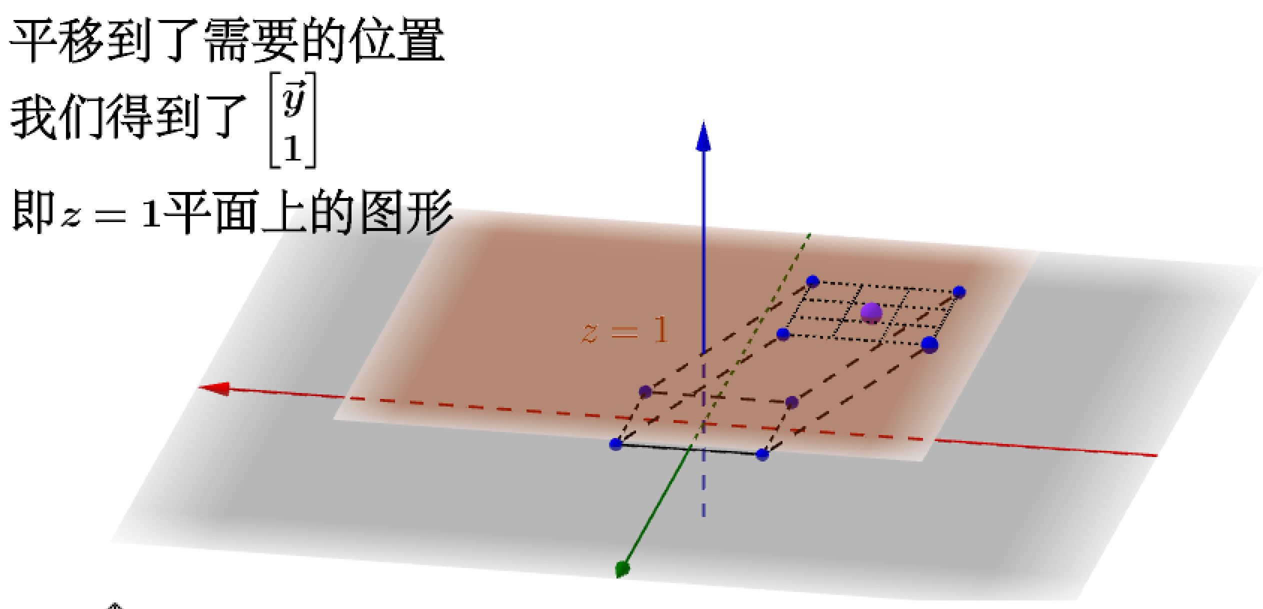


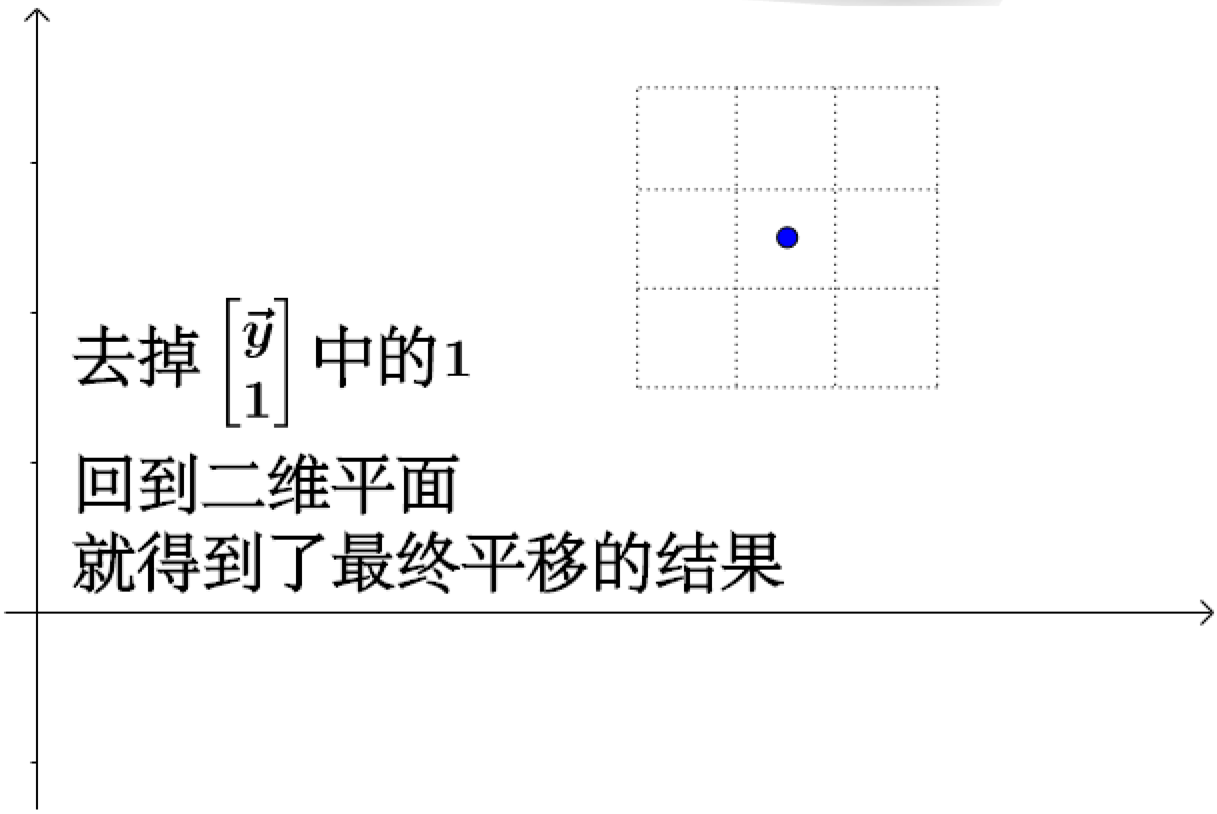
自己动手操作一下：



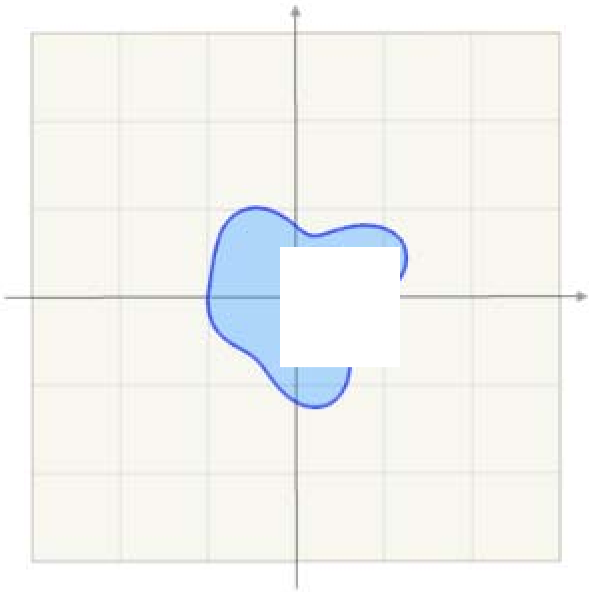
Created with GeoGebra

我们平移到需要的位置的时候：





如果还有没有清楚的地方，可以结合之前的描述，看一下维基百科"仿射变换"词条里的一个gif动图，非常生动的表明了这一过程：



标签与声明

标签： 仿射变换

声明：原创内容，未授权请勿转载，内容合作意见反馈联系公众号: matongxue314

关注马同学

微信公众号：matongxue314