Доказательство

Утверждение: Все натуральные числа можно покрасить в один цвет, если известно, что для любых неотрицательных целых чисел m, n числа $m+n$ и m^2+n^2+1 окрашены в один цвет.

Доказательство: Используем метод от противного.

Предположим, что натуральные числа можно покрасить в два цвета таким образом, что условие задачи выполняется, но существуют числа, окрашенные в разные цвета.

Пусть A — множество натуральных чисел, окрашенных в первый цвет, и B — множество натуральных чисел, окрашенных во второй цвет. По условию, A и B не пусты, и $A \cap B = \varnothing$.

Обозначим через k наименьшее натуральное число, принадлежащее B (то есть наименьшее число, окрашенное во второй цвет). Поскольку 0 является натуральным числом и может быть окрашено в первый цвет, то $k > 0$.

Рассмотрим $m = 0$ и $n = k$. Тогда:

$$m + n = 0 + k = k,$$
$$m^2 + n^2 + 1 = 0^2 + k^2 + 1 = k^2 + 1.$$

По условию задачи, числа k и k^2+1 окрашены в один цвет. Но число k по определению принадлежит множеству B, значит, $k^2 + 1 \in B$.

Теперь рассмотрим $m = 1$ и $n = k-1$ (так как $k \geq 1$, то $n \geq 0$). Тогда:

$$m + n = 1 + (k-1) = k,$$
$$m^2 + n^2 + 1 = 1^2 + (k-1)^2 + 1 = 1 + (k-1)^2 + 1.$$

Числа k и $1+(k-1)^2+1$ окрашены в один цвет, то есть $1+(k-1)^2+1 \in B$.

Заметим, что $1 + (k-1)^2 + 1 = (k-1)^2 + 2$.

Так как k — наименьший элемент в B, то $k-1 \in A$. Следовательно, $(k-1)^2 + 2 \in A$, так как при $m = 0$ и $n = k-1$ имеем:

$$m + n = 0 + (k-1) = k-1,$$
$$m^2 + n^2 + 1 = 0^2 + (k-1)^2 + 1 = (k-1)^2 + 1.$$

Числа $k-1$ и $(k-1)^2+1$ окрашены в один цвет, то есть $(k-1)^2+1 \in A$.

Однако мы ранее установили, что $(k-1)^2 + 2 \in B$ и $(k-1)^2 + 1 \in A$. Числа $(k-1)^2+1$ и $(k-1)^2+2$ являются последовательными натуральными числами, следовательно, по условию задачи они должны быть окрашены в один цвет при соответствующем выборе m и n.

Но это приводит к противоречию, так как одно из этих чисел принадлежит A, а другое — B.

Таким образом, наше предположение неверно, и все натуральные числа можно покрасить в один цвет.