Formules et notes

Nicolas Bellemare

2019-02-13

Contents

Preface

Chapter 1

Introduction actuariat 2

1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$U \sim Unif(0,1)$$
$$Y = F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X$$
$$F_y(x) = F_{F_X^{-1}(u)}(x) = F_X(x)\, pour\, x \in \mathbb{R}$$

ainsi:

$$X = F_x^{-1}(u)$$

Voir preuve 4.1

1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0 \times f_X(y) dy + \int_{x}^{\infty} y f_x(y)\, dy \\ &= \int_{x}^{\infty} y f_x(y)\, dy \end{aligned}$$

1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E[\max(X-d,0)] \quad \text{pour}\, d \in \mathbb{R}$$

Voir preuve 4.2

1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^{\infty} \max(X-d,0) f_X(x)\, dx$$

1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \dots)$

$$f_X(kh) = P(X - kh),\ k \in \mathrm{N},\ h > 0,\ d = k_0 h$$
$$\Pi_X(k_0 h) = E[\max(X - k_0 h, 0)] = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h, 0) P(X = kh) = \sum_{k_0 = k+1}^{\infty} (kh - k_0 h) P(X = kh)$$

1.3.3 Propriété

$$\Pi_X(0) = \lim_{d \to 0} \Pi_X(d) = \lim_{d \to 0} E[\max(X - d, 0)] = E[X]$$

1.4 Fonction quantile

1.4.1 Première forme

$$\begin{aligned}
\int_k^1 F_X^{-1}(u)\,du &= \int_k^1 [F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)]\,du \\
&= \int_k^1 (F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k))\,du + F_X^{-1}(k) \int_k^1 (1)\,du \\
&= \int_0^1 \max(F_x^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0)\,du + F_X^{-1}(k)(1-k) \\
&= E[\max(F_X^{-1} - F_x^{-1}(k),\, 0)] + (1-k) F_X^{-1}(k) \\
&= E[\max(X - F_X^{-1},\, 0)] + (1-k) F_X^{-1}(k)
\end{aligned}$$

1.4.2 Deuxième forme

$$\int_k^1 F_X^{-1}(u)\,du = \Pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1-k) F_X^{-1}(k)$$

En remplaçant $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$ par 4.2 on obtient:

$$\begin{aligned}
&= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] - F_X^{-1}(k) \bar{F}_X(F_X^{-1}(k)) + (1-k) F_x^{-1}(k) \\
&= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k)
\end{aligned}$$

1.5 Fonction quantile et espérance

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,du = E[F_X^{-1}(x)]$$
$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)(1)\,du = E[X]$$

Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u))\,du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$

1.6 TVaR

$$\mathrm{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\int_k^1 \mathrm{VaR}_u(X)\,du$$

1.6.1 Expression alternative 1

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X)) + \mathrm{VaR}_k(X)$$

Voir preuve 4.3.1

1.6.2 Expression alternative 2

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}(E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + \mathrm{VaR}_k(X) \times (F_X[\mathrm{VaR}_k(X)] - k))$$

Voir preuve 4.3.2

1.6.3 Expression alternative 3

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{P(X \geq \mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)} \times E[X|X \geq \mathrm{VaR}_k(X)] + (1 - \frac{P(X \geq \mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)}) \times \mathrm{VaR}_k(X), \quad k \in (0,1)$$

Voir preuve 4.3.3

Chapter 2

Stats

2.1 Définitions

Observation: réalisation d'une variable aléatoire

Échantillon aléatoire de F: ensemble de V.A. iid

Statistiques: fonction d'un échantillon aléatoire et de constantes connues

Paramêtres: quantité d'intérêt($E[X]$, $Var(x)$, etc) ou le paramêtre θ d'un modèle paramétrique.

Estimateur: Statistique $S(X_1, \dots, X_n)$ qui prend des valeurs qu'on espère proche de θ noté $\hat{\theta}_n$(Variable aléatoire)

Estimation de θ: données observées $x_1, x_2, \dots$ de la valeur observée $\hat{\theta}$, $s(x_1, x_2, \dots)$(réalisations)

2.2 Moyenne échantilonnale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.3 Variance échantillonale:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2.4 Loi faible des grands nombres:

Soit $X_1, X_2, ...,$ une suite de V.A. iid. On suppose $var(X_i) < \infty$ et $E[X] = \mu$, lorsque $n \to \infty$

$$P(|(\bar{X}_n - \mu)| > \epsilon) \to \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

$\bar{X}_n$ converge en probabilité vers μ

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Preuve par Tchebycheff:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{var(X_i)}{n\epsilon^2}$$

2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:

$$X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$$
$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$
$$F_{X_{(n)}}(x) = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!1(n-k)!} F_X(x)^{k-1}(1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

2.6 Distribution de $\bar{X}$:

Soit $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Utilisation de la distribution d'échantillonage de $\bar{X}_n$:

1. Vérifier une affirmation
2. Trouver un interval plausibe
3. Déterminer une taille d'échantillon minimal

2.7 Somme de normales au carré

Soit $Z_1, \ldots, Z_n \sim N(0, 1)$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

Soit $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$S_n^2 \perp \bar{X}_n$

$$E[S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} E[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)}(n-1) = \sigma^2$$

2.8 Statistique Student

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$$

2.9 Distribution de la Statistique Student

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1)$$

$$\mathrm{T}_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{S_n^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \times \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}}}}_{\sim \chi^2_{(n-1)}}$$

2.10 Distribution Student

Soit $Z \sim N(0,1)$ et $W \sim \chi^2_(v)$ $Z \perp W$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t(v)$$

Propriété

Si $v > 1$: $E[T] = 0$

Si $v > 2$: $Var(T) = \frac{v}{v-2}$
Si $v \to \infty$, $t(v)$ converge vers $N(0,1)$

2.11 Statistique F

Soit $X_i, \ldots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Pour comparer: σ_1^2 et σ_2^2

$$\frac{S_n^2}{S_m^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

2.12 Distribution F

Soit $W_1 \sim \chi^2_{(v_1)}$, $W_2 \sim \chi^2_{(v_2)}$

$W_1 \perp W_2$

$$F = \frac{\frac{W_1}{v_1}}{\frac{W_2}{v_2}} \quad F \sim F(v_1, v_2)$$

Si $X \sim F(v_1, v_2)$ et $v_2 > 2$ $E[X = \frac{v_2}{v_2 - 2}]$

2.13 Comparer variance échantionnale

Soit $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\frac{\frac{S_n^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_m^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n-1, m-1)$$

2.14 Lemme de Slutsky

Soit $X_1, X_2, \ldots$ et $Y_1, Y_2, \ldots$ Lorsque $n \to \infty$ et $X_n \rightsquigarrow X$ et $Y_n \rightsquigarrow c$

1. $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$
2. $X_n \times Y_n \rightsquigarrow X \times c$
3. Si $c > 0$, $\frac{X_n}{Y_n} \rightsquigarrow \frac{X}{c}$

2.15 Théorème Central Limite

Theorem 2.1. *Soit $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de V.A. quelconque:*

$$Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

quand $n \to \infty$:

$$P(Z_n \leq X) \to \phi(X)$$

Convergence en distribution:

$$Z_n \rightsquigarrow N(0, 1)$$

2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connait pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale

$T \not\sim t(n-1)$
Soit $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon d'une V.A quelconque:
$E[X^4] < \infty$, lorsque $n \to \infty$:

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale

$$Z = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0, 1)$$

Correction de la continuité:

$$P(Y \leq y) \approx P(Z \leq y + 0.5)$$

2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur

2.18.1 Critère 1: Biais

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n - \theta] = E[\hat{\theta}_n] - \theta$$

Estimateur sans biais:

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Estimateur asymptotiquement sans biais:

$$\lim_{n \to \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Voir preuve 4.4 et 4.5 pour le développement des biais de $\bar{X}_n$ et S_n^2

2.18.2 Critère 2: Variance

Parmi 2 estimateurs sans biais, on préfère celui avec une plus petite variance.

Pour deux estimateur avec biais, on préfère celui avec la plus petite Erreur quadratique moyenne(EQM):

$$EQM(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}_n) + [B(\hat{\theta}_n)]^2$$

2.18.3 Critère 3: Convergence

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ si, quand $n \to \infty$,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

ce qui signifie que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$$

Voir 4.6 pour prouver la convergence

2.19 Efficacité relative

Soit $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$, 2 estimateurs sans biais et convergent.

$$eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{Var(\tilde{\theta}_n)}{Var(\hat{\theta}_n)}$$

Si $eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$, $\hat{\theta}_n$ est préférable, sinon $\tilde{\theta}_n$ est préférable.

Chapter 3

Technical Details

Now I'll teach you some crazy math, but I need to work it out first...

Chapter 4

Preuves

4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile

Proof.

$$\begin{aligned} F_{F_x^{-1}(u)}(x) &= P(F_X^{-1} \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

□

4.2 Fonction Stop-Loss(1.3)

Proof.

$$\begin{aligned} \Pi_X(d) &= E[\max(X-d,0)] \\ &= E[X1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}] \\ &= E[X1_{\{X>d\}}] - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

□

4.3 Tvar

4.3.1 Expresion alternative 1(1.6.1)

Proof. On applique 1.4.1, ainsi:

$$\begin{aligned} \mathrm{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)} \int_k^1 \mathrm{VaR}_k(u)\, du \\ &= \frac{1}{1-k}(\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X))) + \mathrm{VaR}_k(X) \end{aligned}$$

□

4.3.2 Expression alternative 2(1.6.2)

Proof. On remplace $\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X))$ dans 4.3.2 par sa définition 1.3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_k(X) &= \mathrm{VaR}_k(X) + \frac{1}{(1-k)}(E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{VaR}_k(X)\bar{F}(\mathrm{VaR}_k(X))) \\
&= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{Var}_k(X)(\bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - (1-k))] \\
&= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{Var}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k)]
\end{aligned}
$$

□

Pour une V.A. continue $\mathrm{VaR}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k) = 0$ donc,

$$
\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}]}{P(X > \mathrm{VaR}_k(X))} = E[X|X > \mathrm{VaR}_k(X)]
$$

4.3.3 Expression alternative 3(1.6.3)

On fait la preuve à partir de l'expression alternative 2:

Proof.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{Var}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k)] \\
&= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}} + X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}} - X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{Var}_k(X)(1 - \bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - (1 - \\
&= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X\geq\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + \mathrm{VaR}_k(X)[(1-k) - P(X > \mathrm{VaR}_k(X))]\} \\
&= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X\geq\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - (E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \mathrm{VaR}_k(X)) \times \mathrm{VaR}_k(X))\}
\end{aligned}
$$

Deux cas possibles: 1)V.A. discrète $P(X = \mathrm{VaR}_k(X)) > 0$ 2)V.A. continue $P(X = \mathrm{VaR}_k(X)) = 0$ Donc la portion $(E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \mathrm{VaR}_k(X)) \times \mathrm{VaR}_k(X)) = \mathrm{VaR}_k(X)[1 - \frac{P(X\geq\mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)}]$ □

4.4 Biais moyenne échantillonale (voir 2.18.1)

Proof.

$$
\begin{aligned}
B(\hat{\theta}_n) &= E[\bar{X}_n] - E[X] \\
&= E[x] - E[X] = 0
\end{aligned}
$$

□

4.5 Biais variance échantillonale (voir 2.18.1)

Proof.

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2)) \\
&= \frac{1}{n-1}[(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - \frac{2}{n-1}(\bar{X}_n\sum_{i=1}^{n} X_i) + \frac{n}{(n-1)}((\bar{X}_n)^2)] \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - \frac{n}{(n-1)}(\bar{X}_n^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[S_n^2] &= E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n})] - E[\frac{n}{(n-1)}(\bar{X}_n)] \\
&= \frac{n}{n-1}((Var(X) + E^2[X])) - \frac{1}{(n-1)}(Var(X)) - \frac{n}{n-1}(E[X^2]) \\
&= Var(X)
\end{aligned}$$

$$B(S_n^2) = Var(X) - \sigma^2 = 0$$

□

4.6 Convergence (voir 2.18.3)

Proof. On prouve avec Tchebycheff
Un estimateur sans biais est convergent si:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\text{On fixe } \epsilon > 0, \\
P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \epsilon) \\
&= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \frac{\epsilon \times \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}) \\
&\leq \frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2}
\end{aligned}$$

Donc si $Var(\hat{\theta}_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, $\hat{\theta}_n$ est convergent □