

# Formules et notes

*Nicolas Bellemare*

*2019-02-13*



# Contents

<b>Preface</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction actuariat</b>	<b>7</b>
1.1 Théorème de la fonction quantile . . . . .	7
1.2 Espérance tronqué . . . . .	7
1.3 Fonction Stop-Loss . . . . .	7
1.4 Fonction quantile . . . . .	8
1.5 Fonction quantile et espérance . . . . .	8
1.6 TVaR . . . . .	9
<b>2 Stats</b>	<b>11</b>
2.1 Définitions . . . . .	11
2.2 Moyenne échantillonnale: . . . . .	11
2.3 Variance échantillonnale: . . . . .	11
2.4 Loi faible des grands nombres: . . . . .	11
2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon: . . . . .	12
2.6 Distribution de $\bar{X}$ : . . . . .	12
2.7 Somme de normales au carré . . . . .	12
2.8 Statistique Student . . . . .	12
2.9 Distribution de la Statistique Student . . . . .	13
2.10 Distribution Student . . . . .	13
2.11 Statistique F . . . . .	13
2.12 Distribution F . . . . .	13
2.13 Comparer variance échantionnale . . . . .	13
2.14 Lemme de Slutsky . . . . .	14
2.15 Théorème Central Limite . . . . .	14
2.16 Distrbution Statistique Student lorsqu'on ne connaît pas la variance et X ne provien pas d'une loi Normale . . . . .	14
2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale . . . . .	14
2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur . . . . .	14
2.19 Efficacité relative . . . . .	15
<b>3 Technical Details</b>	<b>17</b>
<b>4 Preuves</b>	<b>19</b>
4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile . . . . .	19
4.2 Fonction Stop-Loss(1.3) . . . . .	19
4.3 Tvar . . . . .	19
4.4 Biais moyenne échantillonnale (2.18.1) . . . . .	20
4.5 Biais variance échantillonnale (voir {2.18.1}) . . . . .	21
4.6 Convergence (voir ??) . . . . .	21



# Preface



# Chapter 1

## Introduction actuariat 2

### 1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$\begin{aligned}U &\sim Unif(0, 1) \\Y &= F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X \\F_y(x) &= F_{F_x^{-1}(u)}(x) = F_X(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ainsi:

$$X = F_x^{-1}(u)$$

Voir preuve 4.1

### 1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned}E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y) dy \\&= \int_{-\infty}^x 0 \times f_X(y) dy + \int_x^{\infty} y f_X(y) dy \\&= \int_x^{\infty} y f_X(y) dy\end{aligned}$$

### 1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E[\max(X - d, 0)] \quad \text{pour } d \in \mathbb{R}$$

Voir preuve 4.2

#### 1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^{\infty} \max(X - d, 0) f_X(x) dx$$

### 1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \dots)$

$$f_X(kh) = P(X = kh), k \in \mathbb{N}, h > 0, d = k_0h$$

$$\Pi_X(k_0h) = E[\max(X - k_0h, 0)] = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0h, 0)P(X = kh) = \sum_{k_0=k+1}^{\infty} (kh - k_0h)P(X = kh)$$

### 1.3.3 Propriété

$$\Pi_X(0) = \lim_{d \rightarrow 0} \Pi_X(d) = \lim_{d \rightarrow 0} E[\max(X - d, 0)] = E[X]$$

## 1.4 Fonction quantile

### 1.4.1 Première forme

$$\begin{aligned} \int_k^1 F_X^{-1}(u) du &= \int_k^1 [F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)] du \\ &= \int_k^1 (F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k)) du + F_X^{-1}(k) \int_k^1 (1) du \\ &= \int_0^1 \max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k), 0) du + F_X^{-1}(k)(1 - k) \\ &= E[\max(F_X^{-1} - F_X^{-1}(k), 0)] + (1 - k)F_X^{-1}(k) \\ &= E[\max(X - F_X^{-1}(k), 0)] + (1 - k)F_X^{-1}(k) \end{aligned}$$

### 1.4.2 Deuxième forme

$$\int_k^1 F_X^{-1}(u) du = \Pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k)$$

En remplaçant  $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$  par 4.2 on obtient:

$$\begin{aligned} &= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] - F_X^{-1}(k)\bar{F}_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k) \\ &= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k) \end{aligned}$$

## 1.5 Fonction quantile et espérance

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_X^{-1}(u) du &= E[F_X^{-1}(x)] \\ \int_0^1 F_X^{-1}(u)(1) du &= E[X] \end{aligned}$$

Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u)) du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$



## 1.6 TVaR

$$\text{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} \int_k^1 \text{VaR}_u(X) du$$

### 1.6.1 Expression alternative 1

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} \Pi_X(\text{VaR}_k(X)) + \text{VaR}_k(X)$$

Voir preuve 4.3.1

### 1.6.2 Expression alternative 2

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} (E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] + \text{VaR}_k(X) \times (F_X[\text{VaR}_k(X)] - k))$$

Voir preuve 4.3.2

### 1.6.3 Expression alternative 3

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)} \times E[X|X \geq \text{VaR}_k(X)] + (1 - \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)}) \times \text{VaR}_k(X), \quad k \in (0, 1)$$

Voir preuve 4.3.3



# Chapter 2

## Stats

### 2.1 Définitions

Observation: réalisation d'une variable aléatoire

Échantillon aléatoire de F: ensemble de V.A. iid

Statistiques: fonction d'un échantillon aléatoire et de constantes connues

Paramètres: quantité d'intérêt ( $E[X]$ ,  $Var(x)$ , *etc*) ou le paramètre  $\theta$  d'un modèle paramétrique.

Estimateur: Statistique  $S(X_1, \dots, X_n)$  qui prend des valeurs qu'on espère proche de  $\theta$  noté  $\hat{\theta}_n$  (Variable aléatoire)

Estimation de  $\theta$ : données observées  $x_1, x_2, \dots$  de la valeur observée  $\hat{\theta}$ ,  $s(x_1, x_2, \dots)$  (réalisations)

### 2.2 Moyenne échantillonnale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### 2.3 Variance échantillonnale:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

### 2.4 Loi faible des grands nombres:

Soit  $X_1, X_2, \dots$ , une suite de V.A. iid. On suppose  $var(X_i) < \infty$  et  $E[X] = \mu$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $\mu$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Preuve par Tchebycheff:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{var(\bar{X}_n)}{\epsilon^2}$$

## 2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:

$$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

## 2.6 Distribution de $\bar{X}$ :

Soit  $X_1, \dots, X_n$ , un échantillon de  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Utilisation de la distribution d'échantillonnage de  $\bar{X}_n$ :

1. Vérifier une affirmation
2. Trouver un interval plausible
3. Déterminer une taille d'échantillon minimal

## 2.7 Somme de normales au carré

Soit  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

Soit  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

$$S_n^2 \perp \bar{X}_n$$

$$E[S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} E[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} (n-1) = \sigma^2$$

## 2.8 Statistique Student

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$$

## 2.9 Distribution de la Statistique Student

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1) \\
 T_n &= \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \times \sqrt{\frac{S_n^2}{\sigma^2}} \\
 &= \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \times \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2}}}}_{\sim \chi_{(n-1)}^2}
 \end{aligned}$$

## 2.10 Distribution Student

Soit  $Z \sim N(0, 1)$  et  $W \sim \chi_v^2$   $Z \perp W$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t(v)$$

Propriété

Si  $v > 1$ :  $E[T] = 0$  Si  $v > 2$ :  $Var(T) = \frac{v}{v-2}$

Si  $v \rightarrow \infty$ ,  $t(v)$  converge vers  $N(0, 1)$

## 2.11 Statistique F

Soit  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Pour comparer:  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$

$$\frac{S_n^2}{S_m^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

## 2.12 Distribution F

Soit  $W_1 \sim \chi_{(v_1)}^2$ ,  $W_2 \sim \chi_{(v_2)}^2$

$W_1 \perp W_2$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\frac{W_1}{v_1}}{\frac{W_2}{v_2}} \\
 F &\sim F(v_1, v_2)
 \end{aligned}$$

Si  $X \sim F(v_1, v_2)$  et  $v_2 > 2$   $E[X] = \frac{v_2}{v_2-2}$

## 2.13 Comparer variance échantionnale

Soit  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\frac{\frac{S_n^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_m^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n-1, m-1)$$

## 2.14 Lemme de Slutsky

Soit  $X_1, X_2, \dots$  et  $Y_1, Y_2, \dots$ . Lorsque  $n \rightarrow \infty$  et  $X_n \rightsquigarrow X$  et  $Y_n \rightsquigarrow c$

1.  $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$
2.  $X_n \times Y_n \rightsquigarrow X \times c$
3. Si  $c > 0$ ,  $\frac{X_n}{Y_n} \rightsquigarrow \frac{X}{c}$

## 2.15 Théorème Central Limite

**Theorem 2.1.** Soit  $X_1, \dots, X_n$ , un échantillon de V.A. quelconque:

$$Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ :

$$P(Z_n \leq X) \rightarrow \phi(X)$$

Convergence en distribution:

$$Z_n \rightsquigarrow N(0, 1)$$

## 2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connaît pas la variance et X ne provien pas d'une loi Normale

$T \not\sim t(n-1)$  Soit  $X_1, \dots, X_n$ , un échantillon d'une V.A quelconque:  
 $E[X^4] < \infty$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ :

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

## 2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale

$$Z = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0, 1)$$

Correction de la continuité:

$$P(Y \leq y) \approx P(Z \leq y + 0.5)$$

## 2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur

### 2.18.1 Critère 1: Biais

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n - \theta] = E[\hat{\theta}_n] - \theta$$

Estimateur sans biais:

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Estimateur asymptotiquement sans biais:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Voir preuve 4.4 et 4.5 pour le développement des biais de  $\bar{X}_n$  et  $S_n^2$

### 2.18.2 Critère 2: Variance

Parmi 2 estimateurs sans biais, on préfère celui avec une plus petite variance

Pour deux estimateur avec biais, on préfère celui avec la plus petite Erreur quadratique moyenne(EQM):

$$EQM(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}_n) + [B(\hat{\theta}_n)]^2$$

### 2.18.3 Critère 3: Convergence

L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur convergent de  $\theta$  si, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

ce qui signifie que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$$

Voir 4.6 pour prouver la convergence

## 2.19 Efficacité relative

Soit  $\hat{\theta}_n$  et  $\tilde{\theta}_n$ , 2 estimateurs sans biais et convergent.

$$eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{Var(\tilde{\theta}_n)}{Var(\hat{\theta}_n)}$$

Si  $eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$ ,  $\hat{\theta}_n$  est préférable, sinon  $\tilde{\theta}_n$  est préférable.





## Chapter 3

# Technical Details

Now I'll teach you some crazy math, but I need to work it out first...



## Chapter 4

## Preuves

### 4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile

*Proof.*

$$\begin{aligned} F_{F_x^{-1}(u)}(x) &= P(F_X^{-1} \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

□

### 4.2 Fonction Stop-Loss(1.3)

*Proof.*

$$\begin{aligned} \Pi_X(d) &= E[\max(X - d, 0)] \\ &= E[X1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}] \\ &= E[X1_{\{X>d\}}] - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

□

### 4.3 Tvar

#### 4.3.1 Expresion alternative 1(1.6.1)

*Proof.* On applique 1.4.1, ainsi:

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)} \int_k^1 \text{VaR}_k(u) du \\ &= \frac{1}{1-k} (\Pi_X(\text{VaR}_k(X))) + \text{VaR}_k(X) \end{aligned}$$

□

### 4.3.2 Expression alternative 2(1.6.2)

*Proof.* On remplace  $\Pi_X(\text{VaR}_k(X))$  dans 4.3.2 par sa définition 1.3

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \text{VaR}_k(X) + \frac{1}{(1-k)}(E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{VaR}_k(X)\bar{F}(\text{VaR}_k(X))) \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(\bar{F}_X(\text{VaR}_k(X)) - (1-k))] \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k)] \end{aligned}$$

□

Pour une V.A. continue  $\text{VaR}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k) = 0$  donc,

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}]}{P(X > \text{VaR}_k(X))} = E[X|X > \text{VaR}_k(X)]$$

### 4.3.3 Expression alternative 3(1.6.3)

On fait la preuve à partir de l'expression alternative 2:

*Proof.*

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k)] \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}} + X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}} - X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(1 - \bar{F}_X(\text{VaR}_k(X)) - (1 - k))] \\ &= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X \geq \text{VaR}_k(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + \text{VaR}_k(X)[(1-k) - P(X > \text{VaR}_k(X))]\} \\ &= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X \geq \text{VaR}_k(X)\}}] - (E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \text{VaR}_k(X)) \times \text{VaR}_k(X))\} \end{aligned}$$

Deux cas possibles: 1)V.A. discrète  $P(X = \text{VaR}_k(X)) > 0$  2)V.A. continue  $P(X = \text{VaR}_k(X)) = 0$  Donc la portion  $(E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \text{VaR}_k(X)) \times \text{VaR}_k(X)) = \text{VaR}_k(X)[1 - \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)}]$  □

## 4.4 Biais moyenne échantillonnale (2.18.1)

*Proof.*

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}_n) &= E[\bar{X}_n] - E[X] \\ &= E[x] - E[X] = 0 \end{aligned}$$

□

## 4.5 Biais variance échantillonnale (voir {2.18.1})

*Proof.*

$$\begin{aligned}
 S_n^2 &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{2}{n-1} (\bar{X}_n \sum_{i=1}^n X_i) + \frac{n}{(n-1)} ((\bar{X}_n)^2) \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{n}{(n-1)} (\bar{X}_n^2) \\
 E[S_n^2] &= E\left[\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)\right] - E\left[\frac{n}{(n-1)} (\bar{X}_n^2)\right] \\
 &= \frac{n}{n-1} (Var(X) + E^2[X]) - \frac{1}{(n-1)} (Var(X)) - \frac{n}{n-1} (E[X^2]) \\
 &= Var(X)
 \end{aligned}$$

$$B(S_n^2) = Var(X) - \sigma^2 = 0$$

□

## 4.6 Convergence (voir ??)

*Proof.* On prouve avec Tchebycheff

Un estimateur sans biais est convergent si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\text{On fixe } \epsilon > 0, \\
 P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \epsilon) \\
 &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \epsilon \times \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)} \times \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}) \\
 &\leq \frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2}
 \end{aligned}$$

Donc si  $Var(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\theta}_n$  est convergent

□