

Formules et notes

Nicolas Bellemare

2019-03-10

Contents

Preface	5
1 Introduction actuariat 2	7
1.1 Théorème de la fonction quantile	7
1.2 Espérance tronqué	7
1.3 Fonction Stop-Loss	7
1.4 Fonction quantile	8
1.5 Fonction quantile et espérance	8
1.6 TVaR	9
1.7 Transformée de Laplace	9
2 Stats	11
2.1 Définitions	11
2.2 Moyenne échantillonnale:	11
2.3 Variance échantillonnale:	11
2.4 Loi faible des grands nombres:	11
2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:	12
2.6 Distribution de \bar{X} :	12
2.7 Somme de normales au carré	12
2.8 Statistique Student	12
2.9 Distribution de la Statistique Student	13
2.10 Distribution Student	13
2.11 Statistique F	13
2.12 Distribution F	13
2.13 Comparer variance échantionnale	13
2.14 Lemme de Slutsky	14
2.15 Théorème Central Limite	14
2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connaît pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale	14
2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale	14
2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur	14
2.19 Efficacité relative	15
2.20 Définition formelle statistique exhaustive	15
2.21 Théoreme de factorisation de Fischer-Neyman	15
2.22 Critère de Lehmann-Scheffé	16
2.23 Théorème de Rao-Blackwell	16
2.24 Estimateur sans biais et de variance minimale(MVUE)	16
2.25 Méthode des moments	17
2.26 Méthode des quantiles	17
2.27 Quantile empirique lissé	17
3 GRF-2	19

3.1	Chapitre 1	19
3.2	Chapitre 2	21
4	Preuves	27
4.1	Théorème (1.1) de la fonction quantile	27
4.2	Fonction Stop-Loss(1.3)	27
4.3	Tvar	27
4.4	Biais moyenne échantillonnale (voir 2.18.1)	28
4.5	Biais variance échantillonnale (voir 2.18.1)	29
4.6	Convergence (voir 2.18.3)	29
4.7	Téorème de Rao-Blackwell (voir section 2.23)	29

Preface

Chapter 1

Introduction actuariat 2

1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$\begin{aligned}U &\sim Unif(0, 1) \\Y &= F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X \\F_Y(x) &= F_{F_X^{-1}(u)}(x) = F_X(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ainsi:

$$X = F_X^{-1}(u)$$

Voir preuve 4.1

1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned}E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y) dy \\&= \int_{-\infty}^x 0 \times f_X(y) dy + \int_x^{\infty} y f_X(y) dy \\&= \int_x^{\infty} y f_X(y) dy\end{aligned}$$

1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E[\max(X - d, 0)] \quad \text{pour } d \in \mathbb{R}$$

Voir preuve 4.2

1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^{\infty} \max(X - d, 0) f_X(x) dx$$

1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \dots)$

$$\begin{aligned}
 f_X(kh) &= P(X = kh), \quad k \in \mathbb{N}, \quad h > 0, \quad d = k_0h \\
 \Pi_X(k_0h) &= E[\max(X - k_0h, 0)] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0h, 0) P(X = kh) \\
 &= \sum_{k_0=k+1}^{\infty} (kh - k_0h) P(X = kh)
 \end{aligned}$$

1.3.3 Propriété

$$\begin{aligned}
 \Pi_X(0) &= \lim_{d \rightarrow 0} \Pi_X(d) \\
 &= \lim_{d \rightarrow 0} E[\max(X - d, 0)] \\
 &= E[X]
 \end{aligned}$$

1.4 Fonction quantile

1.4.1 Première forme

$$\begin{aligned}
 \int_k^1 F_X^{-1}(u) du &= \int_k^1 [F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)] du \\
 &= \int_k^1 (F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k)) du + F_X^{-1}(k) \int_k^1 (1) du \\
 &= \int_0^1 \max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k), 0) du + F_X^{-1}(k)(1 - k) \\
 &= E[\max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k), 0)] + (1 - k)F_X^{-1}(k) \\
 &= E[\max(X - F_X^{-1}(k), 0)] + (1 - k)F_X^{-1}(k)
 \end{aligned}$$

1.4.2 Deuxième forme

$$\int_k^1 F_X^{-1}(u) du = \Pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k)$$

En remplaçant $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$ par 4.2 on obtient:

$$\begin{aligned}
 &= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] - F_X^{-1}(k)\bar{F}_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k) \\
 &= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k)
 \end{aligned}$$

1.5 Fonction quantile et espérance

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 F_X^{-1}(u) du &= E[F_X^{-1}(x)] \\
 \int_0^1 F_X^{-1}(u)(1) du &= E[X]
 \end{aligned}$$

Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u)) du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$

1.6 TVaR

$$\text{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} \int_k^1 \text{VaR}_u(X) du$$

1.6.1 Expression alternative 1

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} \Pi_X(\text{VaR}_k(X)) + \text{VaR}_k(X)$$

Voir preuve 4.3.1

1.6.2 Expression alternative 2

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} (E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] + \text{VaR}_k(X) \times (F_X[\text{VaR}_k(X)] - k))$$

Voir preuve 4.3.2

1.6.3 Expression alternative 3

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)} \times E[X|X \geq \text{VaR}_k(X)] + (1 - \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)}) \times \text{VaR}_k(X), \quad k \in (0, 1)$$

Voir preuve 4.3.3

1.7 Transformée de Laplace

Existe pour toute loi de X.

Lien avec $E[X]$:

V.A. X positive tel que $E[X] < \infty$

$$\begin{aligned} (-1) \frac{d}{dt} \mathcal{L}_X(t) |_{t=0} &= (-1) \frac{d}{dt} E[e^{-tX}] |_{t=0} \\ &= (-1) E\left[\frac{d}{dt} e^{-tX}\right] |_{t=0} \\ &= (-1) E[-X e^{-tX}] |_{t=0} \\ &= (-1) E[-X] = E[X] \end{aligned}$$

Lien avec $E[X^m]$:

$$E[X^m] = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{L}_X(t) |_{t=0}$$

Chapter 2

Stats

2.1 Définitions

Observation: réalisation d'une variable aléatoire

Échantillon aléatoire de F: ensemble de V.A. iid

Statistiques: fonction d'un échantillon aléatoire et de constantes connues

Paramètres: quantité d'intérêt ($E[X]$, $Var(x)$, *etc*) ou le paramètre θ d'un modèle paramétrique.

Statistique exhaustive: statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Estimateur: Statistique $S(X_1, \dots, X_n)$ qui prend des valeurs qu'on espère proche de θ noté $\hat{\theta}_n$ (Variable aléatoire)

Estimation de θ : données observées x_1, x_2, \dots de la valeur observée $\hat{\theta}$, $s(x_1, x_2, \dots)$ (réalisations)

2.2 Moyenne échantillonnale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2.3 Variance échantillonnale:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2.4 Loi faible des grands nombres:

Soit X_1, X_2, \dots , une suite de V.A. iid. On suppose $var(X_i) < \infty$ et $E[X] = \mu$, lorsque $n \rightarrow \infty$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

\bar{X}_n converge en probabilité vers μ

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Preuve par Tchebycheff:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{var(X_i)}{n\epsilon^2}$$

2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:

$$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

2.6 Distribution de \bar{X} :

Soit X_1, \dots, X_n , un échantillon de $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Utilisation de la distribution d'échantillonnage de \bar{X}_n :

1. Vérifier une affirmation
2. Trouver un interval plausible
3. Déterminer une taille d'échantillon minimal

2.7 Somme de normales au carré

Soit $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

Soit $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

$S_n^2 \perp \bar{X}_n$

$$E[S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} E\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2\right] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} (n-1) = \sigma^2$$

2.8 Statistique Student

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$$

2.9 Distribution de la Statistique Student

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1) \\
 T_n &= \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{S_n^2}} \\
 &= \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \times \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2}}}}_{\sim \chi_{(n-1)}^2}
 \end{aligned}$$

2.10 Distribution Student

Soit $Z \sim N(0, 1)$ et $W \sim \chi_{(v)}^2$ $Z \perp W$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t(v)$$

Propriété

Si $v > 1$: $E[T] = 0$

Si $v > 2$: $Var(T) = \frac{v}{v-2}$

Si $v \rightarrow \infty$, $t(v)$ converge vers $N(0, 1)$

2.11 Statistique F

Soit $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Pour comparer: σ_1^2 et σ_2^2

$$\frac{S_n^2}{S_m^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

2.12 Distribution F

Soit $W_1 \sim \chi_{(v_1)}^2$, $W_2 \sim \chi_{(v_2)}^2$

$W_1 \perp W_2$

$$F = \frac{\frac{W_1}{v_1}}{\frac{W_2}{v_2}} \quad F \sim F(v_1, v_2)$$

Si $X \sim F(v_1, v_2)$ et $v_2 > 2$ $E[X] = \frac{v_2 - 2}{v_2 - 4}$

2.13 Comparer variance échantionnale

Soit $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\frac{\frac{S_n^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_m^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n-1, m-1)$$

2.14 Lemme de Slutsky

Soit X_1, X_2, \dots et Y_1, Y_2, \dots . Lorsque $n \rightarrow \infty$ et $X_n \rightsquigarrow X$ et $Y_n \rightsquigarrow c$

1. $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$
2. $X_n \times Y_n \rightsquigarrow X \times c$
3. Si $c > 0$, $\frac{X_n}{Y_n} \rightsquigarrow \frac{X}{c}$

2.15 Théorème Central Limite

Theorem 2.1. Soit X_1, \dots, X_n , un échantillon de V.A. quelconque:

$$Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

quand $n \rightarrow \infty$:

$$P(Z_n \leq X) \rightarrow \phi(X)$$

Convergence en distribution:

$$Z_n \rightsquigarrow N(0, 1)$$

2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connaît pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale

$T \not\sim t(n-1)$

Soit X_1, \dots, X_n , un échantillon d'une V.A quelconque:

$E[X^4] < \infty$, lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale

$$Z = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0, 1)$$

Correction de la continuité:

$$P(Y \leq y) \approx P(Z \leq y + 0.5)$$

2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur

2.18.1 Critère 1: Biais

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n - \theta] = E[\hat{\theta}_n] - \theta$$

Estimateur sans biais:

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Estimateur asymptotiquement sans biais:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Voir preuve 4.4 et 4.5 pour le développement des biais de \bar{X}_n et S_n^2

2.18.2 Critère 2: Variance

Parmi 2 estimateurs sans biais, on préfère celui avec une plus petite variance.

Pour deux estimateur avec biais, on préfère celui avec la plus petite Erreur quadratique moyenne(EQM):

$$EQM(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}_n) + [B(\hat{\theta}_n)]^2$$

2.18.3 Critère 3: Convergence

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ si, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

ce qui signifie que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0$$

Voir 4.6 pour prouver la convergence

2.19 Efficacité relative

Soit $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$, 2 estimateurs sans biais et convergent.

$$eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{Var(\tilde{\theta}_n)}{Var(\hat{\theta}_n)}$$

Si $eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$, $\hat{\theta}_n$ est préférable, sinon $\tilde{\theta}_n$ est préférable.

2.20 Définition formelle statistique exhaustive

Une statistique exhaustive est une statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une distribution avec paramètre θ inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive pour θ ssi la distribution conditionnelle de X_1, \dots, X_n sachant T ne dépend pas de θ .

2.21 Théoreme de factorisation de Fischer-Neyman

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\bullet; \theta)$ et paramètre θ inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive pour θ ssi, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = g(t; \theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où

- $g(t; \theta)$ ne dépend de x_1, \dots, x_n qu'à travers t .
- $h(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de θ .

Avec plus d'un paramètre:

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\bullet; \theta)$ et paramètres $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n$ inconnus. Alors, les statistiques

$$T_1 = T_1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_k = T_k(X_1, \dots, X_n)$$

sont conjointement exhaustives pour θ ssi, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = g(t_1, \dots, t_k; \theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où

- $g(t_1, \dots, t_k; \theta)$ ne dépend de x_1, \dots, x_n qu'à travers t_1, \dots, t_k .
- $h(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de θ .

2.22 Critère de Lehmann-Scheffé

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\bullet; \theta)$ et paramètre θ inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive minimale pour θ ssi, $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)}{f(y_1; \theta) \times \dots \times f(y_n; \theta)}$$

ne dépend pas de θ ssi

$$T(X_1, \dots, X_n) = T(Y_1, \dots, Y_n)$$

2.23 Théorème de Rao-Blackwell

$\hat{\theta}_n$ un estimateur sans biais tel que $\text{var}(\hat{\theta}_n) < \infty$. Si T est exhaustive pour θ , la statistique:

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

est un estimateur sans biais et

$$\text{var}(\theta_n^*) \leq \text{var}(\hat{\theta}_n)$$

Voir section 4.7.

2.24 Estimateur sans biais et de variance minimale(MVUE)

Un estimateur $\hat{\theta}_n$ est sans biais et de variance minimale si:

1. $\hat{\theta}_n$ est sans biais.
2. $\hat{\theta}_n = g(T)$, où T est une statistique exhaustive (minimale) obtenue avec le théorème Fischer-Neymann.

2.24.1 Construire un MVUE

1. Trouver une statistique exhaustive (minimale) T avec le théorème Fischer-Neymann.
2. Trouver une fonction g tel que: $E[g(T)] = \theta$
3. Poser $\hat{\theta}_n = g(T)$.

2.25 Méthode des moments

Si t paramètres sont inconnus, on résout le système à t équations:

$$m_k = E[X^k], \quad k = 1, \dots, t$$

Les estimateurs obtenus sont appelés les estimateurs des moments.

2.26 Méthode des quantiles

Pour certaine loi, les moments n'existent pas. Pour estimer t paramètres inconnus, on pourrait résoudre le système à t équations:

$$\hat{\pi}_{\kappa j} = VaR_{\kappa j}(X) \quad j = 1, \dots, t$$

2.27 Quantile empirique lissé

Pour un échantillon aléatoire X_1, \dots, X_n le quantile empirique de niveau $\kappa \in (0, 1)$ est:

$$\hat{\pi}_{\kappa, n} = (1 - h)X_{(j)} + hX_{(j+1)} \quad j = \lfloor (n+1)\kappa \rfloor \text{ et } h = (n+1)\kappa - j$$

##Fonction de vraisemblance

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une distribution avec fmp ou fdd:

$$f(x; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

où Θ est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre. Si x_1, \dots, x_n sont des valeurs observées de l'échantillon, la vraisemblance de θ basée sur x_1, \dots, x_n est définie comme:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)$$

###Observation

- X est discrète: vraisemblance de θ basée sur x_1, \dots, x_n est exactement la probabilité d'observer x_1, \dots, x_n .
- X est continue: vraisemblance de θ basée sur x_1, \dots, x_n est la densité et est proportionnelle à la probabilité d'observer x_1, \dots, x_n .
- la vraisemblance est vue comme une fonction réelle déterministe de θ
- La vraisemblance est l'objet dans le théorème de factorisation de Fischer-Neymann
- la vraisemblance $L(\theta)$ devrait être plus grande pour des valeurs de θ proche de celle du mécanisme générateur de données.
- on estime donc θ par la valeur $\hat{\theta}_n$ qui maximise $L(\theta)$:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

Chapter 3

GRF-2

3.1 Chapitre 1

Produit dérivé

Contrat entre 2 partis qui fixe les flux monétaires futurs fondés sur ceux de l'actif sous-jacent(SJ).

Étapes d'une transaction

1. Acheteur et vendeur se trouve.Facilité par la bourse.
2. Obligations pour les deux partis définis (prix, produits, conditions). Si transaction à la bourse: intermédiaire, et donc, dépôts de garantie possible.
3. Transaction
4. Mise à jour du registre de propriété.

Mesure d'évaluation taille/activité de la bourse/marché

- Volume de transaction: nombre de titres transigés/périodes
- Valeur marchande: Valeur d'une action/cie/indice boursier
- Positions ouvertes: quantité de contrats qui ne sont pas arrivés à échéance

Rôle des marchés financiers

- Partage du risque:compagnie partage le risque et les profits avec les actionnaires
- Diversification du risque: risque diversifiable → théoriquement possible de diluer le risquepour qu'il devienne nul. Risque non-diversifiable → possible de transférer le risque via des produits dérivés.

Utilité des produits dérivés

- Gestion des risques
- Spéculation
- Réduction des frais de transaction
- arbitrage réglementaire

3 types d'acteurs

- Utilisateurs(acheteur/vendeurs)
- Teneur de marché(intermédiaire)
- Observateur(analyste/autorité)

Définitions

- Ordre au cours du marché: quantité de l'actif visé à acheter(vendre) au prix du marché, au moment où l'ordre est passée.
- Ordre à cours limité: quantité d'actions à acheter/vendre dans une tranche spécifique de prix.
- Ordre de vente «stop»: prix en -dessous duquel on vend automatiquement.
- Position longue: qui profitera de l'augmentation de la valeur du SJ.
- Position courte: qui profitera de la diminution de la valeur du SJ.
- Vente à découvert: vente d'un actif qu'on ne possède pas. L'actif est livré à une date ultérieure, mais paiement à $t=0$ au prix de l'actif à $t=0$.
 - Utilité:
 - * Spéculation
 - * Financement
 - * Couverture contre la baisse de valeur
 - Risque:
 - * de défaut
 - * de rareté

3.1.1 CAPM(Capital asset pricing management)

3 postulats:

1. Transactions efficaces et sans friction: pas de frais de transaction, emprunt au taux sans risque.
2. Rationnalité des investisseurs: maximise leur ratio de Sharpe

$$\rightarrow \frac{E[R_p - r_f]}{\sigma_p}$$

3. Attentes et espérances homogènes

L'équation du CAPM pour un actif i:

$$R_i = r_f + \alpha_i + \beta_i(R_{mkt} - r_f) + \epsilon$$

Cela implique:

$$\frac{dR_i}{dR_{mkt}} = \beta_i = \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})}$$

Pour un portefeuille p:

$$\frac{dR_p}{dR_{mkt}} = \beta_p = \frac{Cov(\sum x_i R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \beta_i$$

Incohérences du modèle

- Investisseurs non rationnels et pas informés sur leur portefeuille
- Certains ne veulent pas nécessairement maximiser leur ratio de Sharpe, ont d'autres objectifs
- Il y a des investisseurs qui ne diversifient pas leur portefeuille de manière optimale
- Il y en a qui sont ultra-actif, malgré le fait que le CAPM suppose une gestion passive

Comportements avec effet plus systémique:

- Peur du regret: garder un titre qui est en train de baisser ou vendre un titre avant qu'il remonte
- Les investisseurs sont influençables; ils achèteront les titres médiatisés, etc.
- Effet de troupeau: on fait comme ceux qu'on connaît

3.1.2 Modèle multifactoriel et l'APT(arbitrage pricing theory)

Trois types d'actifs avec des alphas strictement positifs qui contredisent le CAPM:

- Petites capitalisations: on observe des rendements supérieurs à ce que le CAPM prédit
- Book to market ratio: titre "value" avec une valeur au livre supérieur à la valeur marchande verront la valeur marchande rejoindre la valeur au livre avec le temps
- Momentum: les compagnies qui ont connues un bon rendement dernièrement auront tendance à avoir un rendement supérieur à la moyenne

3.1.2.1 APT

$$E[R_s] - r_f = \sum_{i=1}^N \beta_s^{F_i} (E[R_{F_i}] - r_f)$$

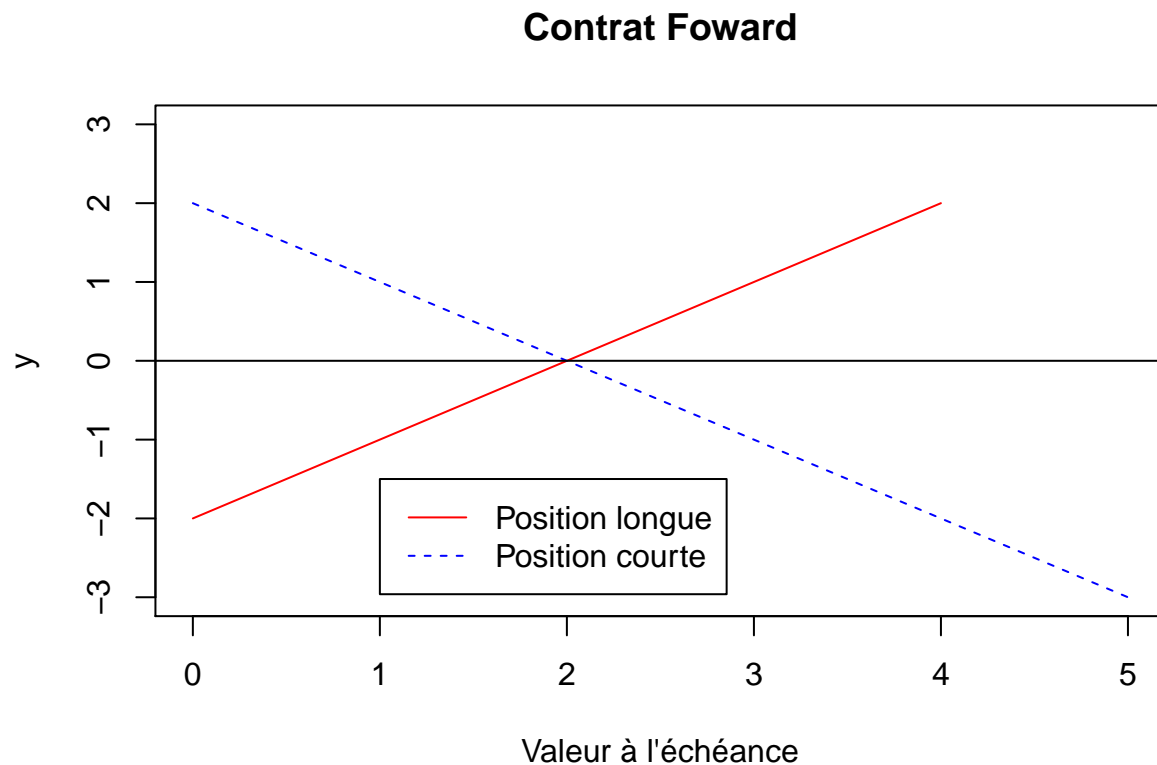
Les "F" sont des facteurs. Il est possible de créer des modèles avec n'importe quels facteurs comme des indices boursiers, par exemple.

3.2 Chapitre 2

3.2.1 Contrat Foward

Achat d'un actif prédéterminé à une valeur initiale S_0 , à une date de livraison T et à un prix $F_{0,T}$. Le coût initial est nul. $F_{0,T}$ est le prix anticipé de l'actif sous-jacent rendu à la date T . $S_0(1 + r_f)^T = F_{0,T}$

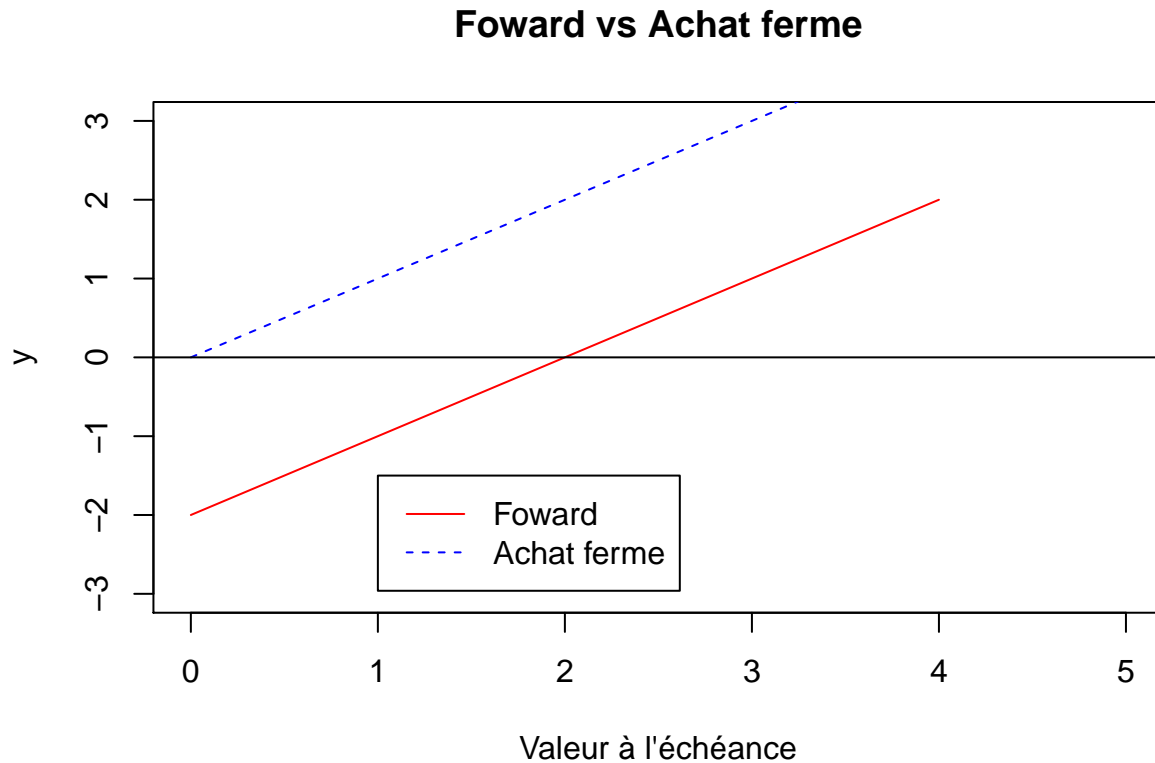
- Valeur à l'échéance:
 - Pour l'acheteur(position longue): $F_{0,T} - S_T$
 - Pour le vendeur(position courte): $S_T - F_{0,T}$



3.2.2 Foward prépayé

Dans certain cas, l'acheteur voudra payé à $t = 0$. Le coût initial sera $F_{0,T}^P$. On achète immédiatement sans avoir l'actif à la date de transaction. La position de l'acheteur est *capitalisée*. Dans un achat ferme, la position de l'acheteur est pleinement capitalisée. Le contrat foward, lui, implique une position non capitalisée.

Temps	Acheteur	Vendeur
$t = 0$	$-F_{0,T}^P$	$F_{0,T}^P$
$t = T$	S_T	$-S_T$



Pour recréer les cashflows d'un contrat foward avec un achat ferme, on finance l'achat ferme avec un emprunt au taux sans risque.

Temps	Achat ferme	+ Emprunt	= Foward
$t = 0$	$-S_0$	S_0	\emptyset
$t = T$	S_T	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

On peut aussi recréer les cashflows d'un achat ferme avec un foward et en investissant la valeur actualisée de $F_{0,T}$. $F_{0,T}(1 + r_f)^{-T} = S_0(1 + r_f)^T(1 + r_f)^{-T} = S_0$.

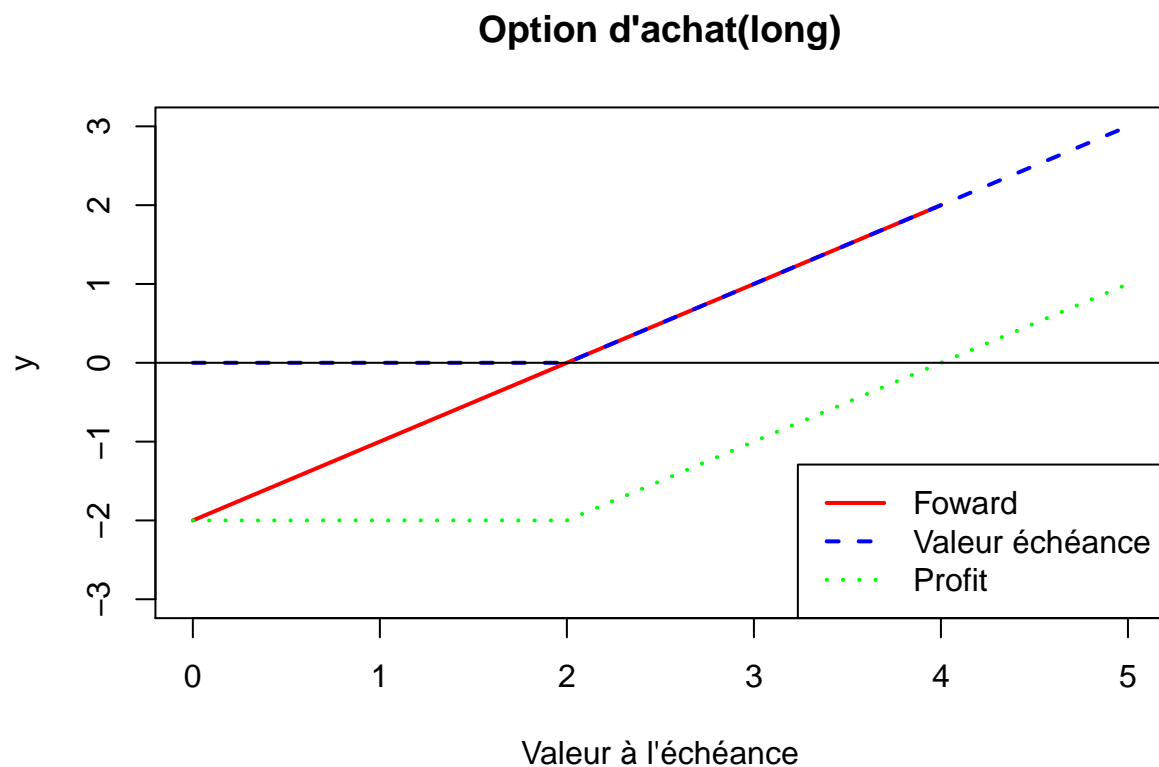
Temps	Dépot	+ Foward	= Achat ferme
$t = 0$	$-S_0$	\emptyset	$-S_0$
$t = T$	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$	S_T

3.2.3 Option d'achat(call)

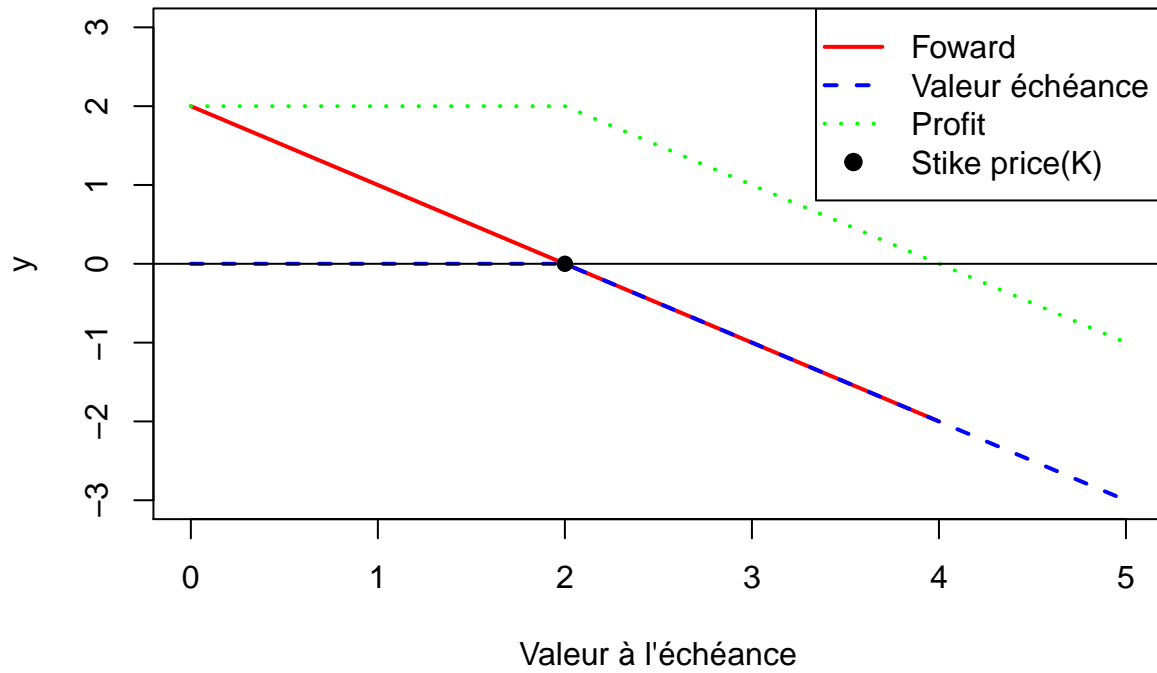
Contrat qui permet au détenteur(position longue) d'acheter un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price = K , à une date d'échéance ou d'ici cette date, s'il le désire.

3 types de levées: 1. Européenne (à la date T) 2. Américaine (d'ici la date T) 3. Bermudienne (à certains moments d'ici T)

Profit		
Actif SJ	Acheteur	Vendeur
$S_T > K$	$S_T - K - C(K, T)(1 + r_f)^T$	$K - S_T + C(K, T)(1 + r_f)^T$
$S_T < K$	$-C(K, T)(1 + r_f)^T$	$C(K, T)(1 + r_f)^T$



Option d'achat (courte)

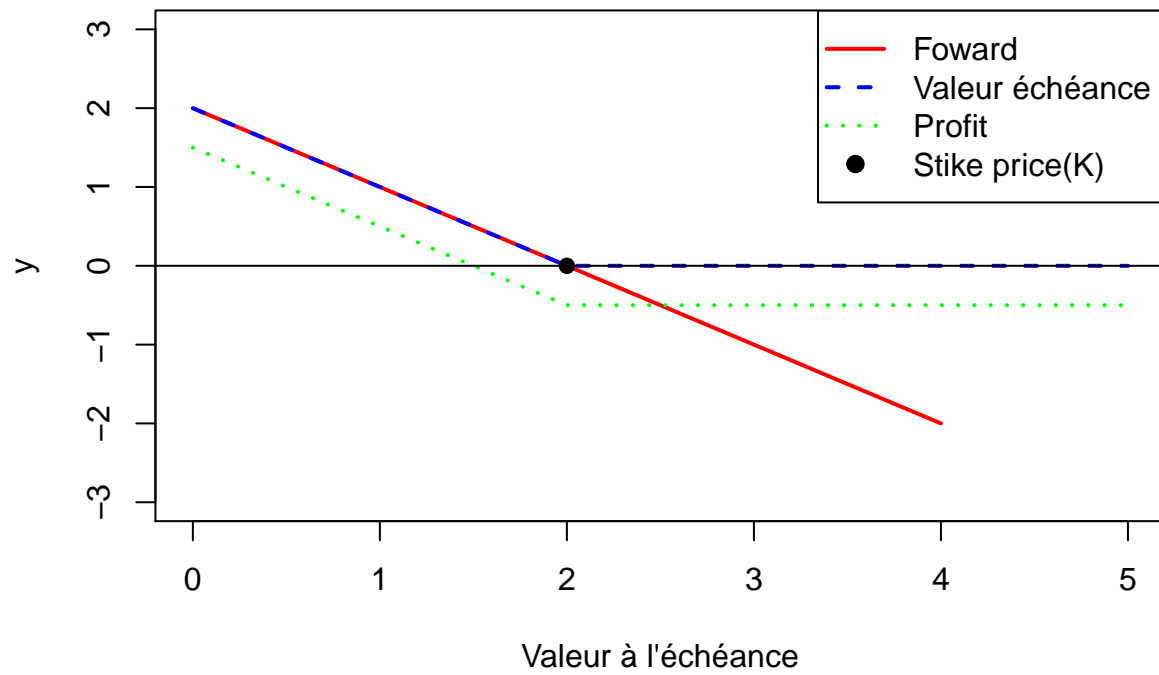


Valeur à l'échéance	
Acheteur	$\max(0; S_T - K)$
Vendeur	$-\max(0; S_T - K)$

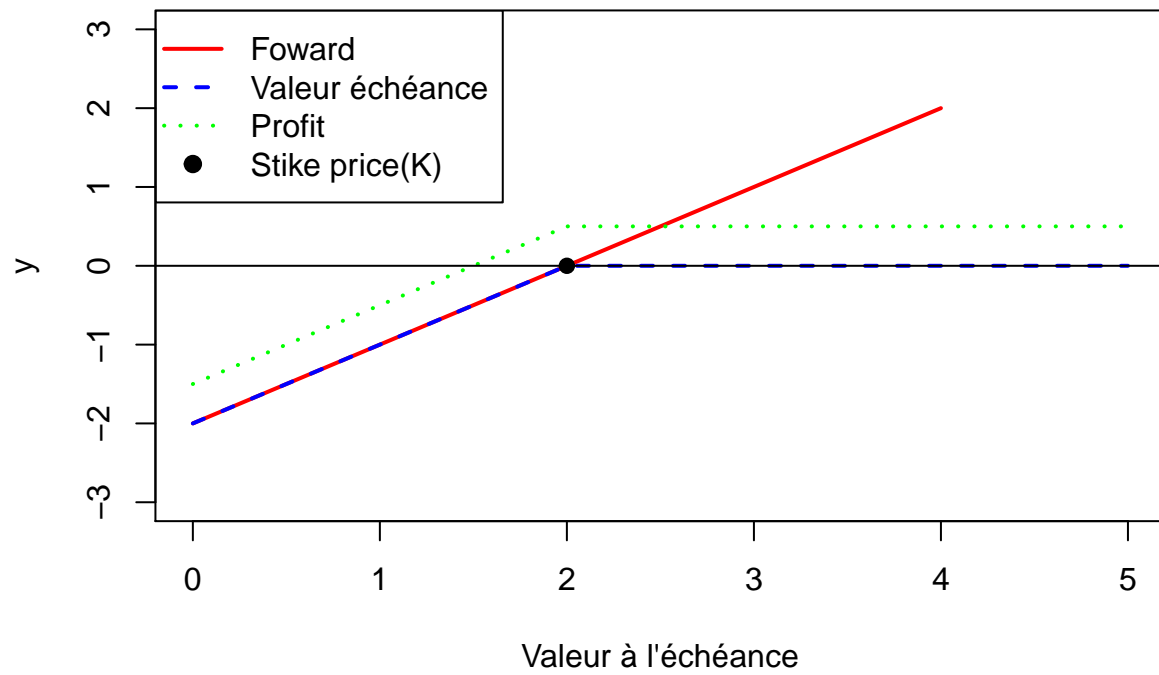
3.2.4 Option de vente(put)

Contrat qui permet au détenteur(position courte) de vendre un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price = K , à une date d'échéance ou d'ici cette date, s'il le désire. Le vendeur(position longue) de l'option devra acheter le SJ à ce prix si le détenteur(acheteur) le désire.

Option de vente		
Position	Profit	Valeur à l'échéance
Acheteur	$\max(0; K - S_T) - P(K, T)(1 + r_f)^T$	$\max(0; K - S_T)$
Vendeur	$P(1 + r_f)^T - \max(0; K - S_T)$	$-\max(0; K - S_T)$

Option de vente (courte)

Option de vente (long)



Chapter 4

Preuves

4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile

Proof.

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(u)}(x) &= P(F_X^{-1} \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

□

4.2 Fonction Stop-Loss(1.3)

Proof.

$$\begin{aligned} \Pi_X(d) &= E[\max(X - d, 0)] \\ &= E[X \times 1_{\{X > d\}} - d \times 1_{\{X > d\}}] \\ &= E[X \times 1_{\{X > d\}}] - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

□

4.3 Tvar

4.3.1 Expression alternative 1(1.6.1)

Proof. On applique 1.4.1, ainsi:

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)} \int_k^1 \text{VaR}_k(u) du \\ &= \frac{1}{1-k} (\Pi_X(\text{VaR}_k(X))) + \text{VaR}_k(X) \end{aligned}$$

□

4.3.2 Expression alternative 2(1.6.2)

Proof. On remplace $\Pi_X(\text{VaR}_k(X))$ dans 4.3.2 par sa définition 1.3

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \text{VaR}_k(X) + \frac{1}{(1-k)}(E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{VaR}_k(X)\bar{F}_X(\text{VaR}_k(X))) \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(\bar{F}_X(\text{VaR}_k(X)) - (1-k))] \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k)] \end{aligned}$$

□

Pour une V.A. continue $\text{VaR}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k) = 0$ donc,

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}]}{P(X > \text{VaR}_k(X))} = E[X|X > \text{VaR}_k(X)]$$

4.3.3 Expression alternative 3(1.6.3)

On fait la preuve à partir de l'expression alternative 2:

Proof.

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{VaR}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k)] \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] + X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}} - X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] \\ &\quad - \text{VaR}_k(X)(1 - \bar{F}_X(\text{VaR}_k(X)) - (1 - (1-k))) \\ &= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X \geq \text{VaR}_k(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + \text{VaR}_k(X)[(1-k) - P(X > \text{VaR}_k(X))]\} \\ &= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X \geq \text{VaR}_k(X)\}}] - (E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \text{VaR}_k(X)) \times \text{VaR}_k(X))\} \end{aligned}$$

Deux cas possibles: 1. V.A. discrète $P(X = \text{VaR}_k(X)) > 0$ 2. V.A. continue $P(X = \text{VaR}_k(X)) = 0$

Donc la portion $(E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \text{VaR}_k(X)) \times \text{VaR}_k(X)) = \text{VaR}_k(X)[1 - \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)}]$ □

4.4 Biais moyenne échantillonnale (voir 2.18.1)

Proof.

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}_n) &= E[\bar{X}_n] - E[X] \\ &= E[X] - E[X] = 0 \end{aligned}$$

□

4.5 Biais variance échantillonnale (voir 2.18.1)

Proof.

$$\begin{aligned}
 S_n^2 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{2}{n-1} (\bar{X}_n \sum_{i=1}^n X_i) + \frac{n}{(n-1)} ((\bar{X}_n)^2) \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{n}{(n-1)} (\bar{X}_n^2) \\
 E[S_n^2] &= E\left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)\right] - E\left[\frac{n}{(n-1)} (\bar{X}_n^2)\right] \\
 &= \frac{n}{n-1} (Var(X) + E^2[X]) - \frac{1}{(n-1)} (Var(X)) - \frac{n}{n-1} (E[X^2]) \\
 &= Var(X)
 \end{aligned}$$

$$B(S_n^2) = Var(X) - \sigma^2 = 0$$

□

4.6 Convergence (voir 2.18.3)

Proof. On prouve avec Tchebycheff

Un estimateur sans biais est convergent si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$$

On fixe $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
 P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \epsilon) \\
 &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \frac{\epsilon \times \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}) \\
 &\leq \frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2}
 \end{aligned}$$

Donc si $Var(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, $\hat{\theta}_n$ est convergent

□

4.7 Théorème de Rao-Blackwell (voir section 2.23)

Puisque T est exhaustive pour θ , la distribution conditionnelle de (X_1, \dots, X_n) sachant T ne dépend pas de θ . Alors,

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

ne dépend pas de θ . Donc, θ_n^* est une statistique. Par l'espérance totale,

$$E[\theta_n^*] = E[E[\hat{\theta}_n|T]] = E[\hat{\theta}_n] = \theta,$$

θ_n^* est donc sans biais. Par la variance totale,

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\theta}_n) &= \text{var}(E[\hat{\theta}_n|T]) + E[\text{var}(\hat{\theta}_n|T)] \\ &= \text{var}(\theta_n^*) + E[\text{var}(\hat{\theta}_n|T)] \end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} E[\text{var}(\hat{\theta}_n|T)] &\geq 0 \\ \text{var}(\theta_n^*) &\leq \text{var}(\hat{\theta}_n) \end{aligned}$$