Formules et notes

Nicolas Bellemare

2019-03-09

Contents

Preface

Chapter 1

Introduction actuariat 2

1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$\begin{gathered}U \sim Unif(0,1)\\ Y = F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X\\ F_Y(x) = F_{F_X^{-1}(u)}(x) = F_X(x)\, pour\, x \in \mathbb{R}\end{gathered}$$

ainsi:

$$X = F_X^{-1}(u)$$

Voir preuve **??**

1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned}E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y)\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{x} 0 \times f_X(y) dy + \int_{x}^{\infty} y f_X(y)\, dy\\ &= \int_{x}^{\infty} y f_X(y)\, dy\end{aligned}$$

1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E[\max(X-d,0)] \quad \text{pour}\, d\, \in \mathbb{R}$$

Voir preuve **??**

1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^\infty \max(X-d,0) f_X(x)\, dx$$

1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \ldots)$

$$\begin{aligned} f_X(kh) =& P(X-kh),\ k\in \mathrm{N},\ h>0,\ d=k_0h \\ \Pi_X(k_0h) =& E[\max(X-k_0h,0)] = \sum_{k=0}^{\infty}\max(kh-k_0h,0)P(X=kh) = \sum_{k_0=k+1}^{\infty}(kh-k_0h)P(X=kh) \end{aligned}$$

1.3.3 Propriété

$$\begin{aligned} \Pi_X(0) &= \lim_{d\to 0}\Pi_X(d) \\ &= \lim_{d\to 0} E[\max(X-d,0)] \\ &= E[X] \end{aligned}$$

1.4 Fonction quantile

1.4.1 Première forme

$$\begin{aligned} \int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du &= \int_k^1 [F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)]\, du \\ &= \int_k^1 (F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k))\, du + F_X^{-1}(k)\int_k^1 (1)\, du \\ &= \int_0^1 \max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0)\, du + F_X^{-1}(k)(1-k) \\ &= E[\max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0)] + (1-k)F_X^{-1}(k) \\ &= E[\max(X - F_X^{-1}(k),\, 0)] + (1-k)F_X^{-1}(k) \end{aligned}$$

1.4.2 Deuxième forme

$$\int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du = \Pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1-k)F_X^{-1}(k)$$

En remplaçant $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$ par **??** on obtient:

$$\begin{aligned} &= E[X\times 1_{\{X>F_X^{-1}(k)\}}] - F_X^{-1}(k)\bar{F}_X(F_X^{-1}(k)) + (1-k)F_X^{-1}(k) \\ &= E[X\times 1_{\{X>F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k) \end{aligned}$$

1.5 Fonction quantile et espérance

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,du = E[F_X^{-1}(x)]$$
$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)(1)\,du = E[X]$$

Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u))\,du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$

1.6 TVaR

$$\mathrm{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\int_k^1 \mathrm{VaR}_u(X)\,du$$

1.6.1 Expression alternative 1

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X)) + \mathrm{VaR}_k(X)$$

Voir preuve **??**

1.6.2 Expression alternative 2

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}(E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + \mathrm{VaR}_k(X) \times (F_X[\mathrm{VaR}_k(X)] - k))$$

Voir preuve **??**

1.6.3 Expression alternative 3

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{P(X \geq \mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)} \times E[X|X \geq \mathrm{VaR}_k(X)] + (1 - \frac{P(X \geq \mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)}) \times \mathrm{VaR}_k(X), \quad k \in (0,1)$$

Voir preuve **??**

1.7 Transformée de Laplace

Existe pour toute loi de X.

Lien avec $E[X]$:

V.A. X positive tel que $E[X] < \infty$

$$\begin{aligned}(-1)\frac{d}{dt}\mathcal{L}_X(t)|_{t=0} &= (-1)\frac{d}{dt}E[e^{-tX}]|_{t=0}\\ &= (-1)E[\frac{d}{dt}e^{-tX}]|_{t=0}\\ &= (-1)E[-Xe^{-tX}]|_{t=0}\\ &= (-1)E[-X] = E[X]\end{aligned}$$

Lien avec$E[X^m]$:

$$E[X^m] = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\mathcal{L}_X(t)|_{t=0}$$

Chapter 2

Stats

Placeholder

2.1 Distribution de la Statistique Student

2.2 Distribution Student

Chapter 3

GRF-2

Placeholder

Chapter 4

Preuves

Placeholder