

# Formules et notes

*Nicolas Bellemare*

*2019-03-11*



# Contents

<b>Preface</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction actuariat 2</b>	<b>7</b>
1.1 Théorème de la fonction quantile . . . . .	7
1.2 Espérance tronqué . . . . .	7
1.3 Fonction Stop-Loss . . . . .	7
1.4 Fonction quantile . . . . .	8
1.5 Fonction quantile et espérance . . . . .	8
1.6 TVaR . . . . .	9
1.7 Transformée de Laplace . . . . .	9
<b>2 Stats</b>	<b>11</b>
2.1 Définitions . . . . .	11
2.2 Moyenne échantillonnale: . . . . .	11
2.3 Variance échantillonnale: . . . . .	11
2.4 Loi faible des grands nombres: . . . . .	11
2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon: . . . . .	12
2.6 Distribution de $\bar{X}$ : . . . . .	12
2.7 Somme de normales au carré . . . . .	12
2.8 Statistique Student . . . . .	12
2.9 Distribution de la Statistique Student . . . . .	13
2.10 Distribution Student . . . . .	13
2.11 Statistique F . . . . .	13
2.12 Distribution F . . . . .	13
2.13 Comparer variance échantionnale . . . . .	13
2.14 Lemme de Slutsky . . . . .	14
2.15 Théorème Central Limite . . . . .	14
2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connaît pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale . . . . .	14
2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale . . . . .	14
2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur . . . . .	14
2.19 Efficacité relative . . . . .	15
2.20 Définition formelle statistique exhaustive . . . . .	15
2.21 Théoreme de factorisation de Fischer-Neyman . . . . .	15
2.22 Critère de Lehmann-Scheffé . . . . .	16
2.23 Théorème de Rao-Blackwell . . . . .	16
2.24 Estimateur sans biais et de variance minimale(MVUE) . . . . .	16
2.25 Méthode des moments . . . . .	17
2.26 Méthode des quantiles . . . . .	17
2.27 Quantile empirique lissé . . . . .	17
<b>3 GRF-2</b>	<b>19</b>

3.1	Chapitre 1 . . . . .	19
3.2	Chapitre 2 . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Preuves</b>	<b>27</b>
4.1	Théorème (1.1) de la fonction quantile . . . . .	27
4.2	Fonction Stop-Loss(1.3) . . . . .	27
4.3	Tvar . . . . .	27
4.4	Biais moyenne échantillonnale (voir 2.18.1) . . . . .	30
4.5	Biais variance échantillonnale (voir 2.18.1) . . . . .	30
4.6	Convergence (voir 2.18.3) . . . . .	30
4.7	Téorème de Rao-Blackwell (voir section 2.23) . . . . .	31

# Preface



# Chapter 1

## Introduction actuariat 2

### 1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$\begin{aligned}U &\sim Unif(0, 1) \\ Y &= F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X \\ F_Y(x) &= F_{F_X^{-1}(u)}(x) = F_X(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ainsi:

$$X = F_X^{-1}(u)$$

Voir preuve 4.1

### 1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned}E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x 0 \times f_X(y) dy + \int_x^{\infty} y f_X(y) dy \\ &= \int_x^{\infty} y f_X(y) dy\end{aligned}$$

### 1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E[\max(X - d, 0)] \quad \text{pour } d \in \mathbb{R}$$

Voir preuve 4.2

#### 1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^{\infty} \max(X - d, 0) f_X(x) dx$$

### 1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \dots)$

$$f_X(kh) = P(X = kh), \quad k \in \mathbb{N}, \quad h > 0, \quad d = k_0h$$

$$\begin{aligned} \Pi_X(k_0h) &= E[\max(X - k_0h, 0)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0h, 0) P(X = kh) \\ &= \sum_{k_0=k+1}^{\infty} (kh - k_0h) P(X = kh) \end{aligned}$$

### 1.3.3 Propriété

$$\begin{aligned} \Pi_X(0) &= \lim_{d \rightarrow 0} \Pi_X(d) \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} E[\max(X - d, 0)] \\ &= E[X] \end{aligned}$$

## 1.4 Fonction quantile

### 1.4.1 Première forme

$$\begin{aligned} \int_k^1 F_X^{-1}(u) du &= \int_k^1 [F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)] du \\ &= \int_k^1 (F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k)) du + F_X^{-1}(k) \int_k^1 (1) du \\ &= \int_0^1 \max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k), 0) du + F_X^{-1}(k)(1 - k) \\ &= E[\max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k), 0)] + (1 - k)F_X^{-1}(k) \\ &= E[\max(X - F_X^{-1}(k), 0)] + (1 - k)F_X^{-1}(k) \end{aligned}$$

### 1.4.2 Deuxième forme

$$\int_k^1 F_X^{-1}(u) du = \Pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k)$$

En remplaçant  $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$  par 4.2 on obtient:

$$\begin{aligned} &= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] - F_X^{-1}(k) \bar{F}_X(F_X^{-1}(k)) + (1 - k)F_X^{-1}(k) \\ &= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k) \end{aligned}$$

## 1.5 Fonction quantile et espérance

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_X^{-1}(u) du &= E[F_X^{-1}(x)] \\ \int_0^1 F_X^{-1}(u)(1) du &= E[X] \end{aligned}$$



Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u)) du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$

## 1.6 TVaR

$$\text{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} \int_k^1 \text{VaR}_u(X) du$$

### 1.6.1 Expression alternative 1

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} \Pi_X(\text{VaR}_k(X)) + \text{VaR}_k(X)$$

Voir preuve 4.3.1

### 1.6.2 Expression alternative 2

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k} (E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] + \text{VaR}_k(X) \times (F_X[\text{VaR}_k(X)] - k))$$

Voir preuve 4.3.2

### 1.6.3 Expression alternative 3

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)} \times E[X|X \geq \text{VaR}_k(X)] + (1 - \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)}) \times \text{VaR}_k(X), \quad k \in (0, 1)$$

Voir preuve 4.3.3

## Propriété

### Sous-additivité

Soit  $S = X_1 + X_2$ ,

$$\text{TVaR}_\kappa(S) \leq \text{TVaR}_\kappa(X_1) + \text{TVaR}_\kappa(X_2)$$

Voir section 4.3.3

## 1.7 Transformée de Laplace

Existe pour toute loi de X.

Lien avec  $E[X]$ :

V.A. X positive tel que  $E[X] < \infty$

$$\begin{aligned} (-1) \frac{d}{dt} \mathcal{L}_X(t)|_{t=0} &= (-1) \frac{d}{dt} E[e^{-tX}]|_{t=0} \\ &= (-1) E\left[\frac{d}{dt} e^{-tX}\right]|_{t=0} \\ &= (-1) E[-X e^{-tX}]|_{t=0} \\ &= (-1) E[-X] = E[X] \end{aligned}$$

Lien avec  $E[X^m]$ :

$$E[X^m] = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{L}_X(t) \big|_{t=0}$$

# Chapter 2

## Stats

### 2.1 Définitions

Observation: réalisation d'une variable aléatoire

Échantillon aléatoire de F: ensemble de V.A. iid

Statistiques: fonction d'un échantillon aléatoire et de constantes connues

Paramètres: quantité d'intérêt ( $E[X]$ ,  $Var(x)$ , *etc*) ou le paramètre  $\theta$  d'un modèle paramétrique.

Statistique exhaustive: statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Estimateur: Statistique  $S(X_1, \dots, X_n)$  qui prend des valeurs qu'on espère proche de  $\theta$  noté  $\hat{\theta}_n$  (Variable aléatoire)

Estimation de  $\theta$ : données observées  $x_1, x_2, \dots$  de la valeur observée  $\hat{\theta}$ ,  $s(x_1, x_2, \dots)$  (réalisations)

### 2.2 Moyenne échantillonnale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### 2.3 Variance échantillonnale:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

### 2.4 Loi faible des grands nombres:

Soit  $X_1, X_2, \dots$ , une suite de V.A. iid. On suppose  $var(X_i) < \infty$  et  $E[X] = \mu$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $\mu$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Preuve par Tchebycheff:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{var(X_i)}{n\epsilon^2}$$

## 2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:

$$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

## 2.6 Distribution de $\bar{X}$ :

Soit  $X_1, \dots, X_n$ , un échantillon de  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Utilisation de la distribution d'échantillonnage de  $\bar{X}_n$ :

1. Vérifier une affirmation
2. Trouver un interval plausible
3. Déterminer une taille d'échantillon minimal

## 2.7 Somme de normales au carré

Soit  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

Soit  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

$S_n^2 \perp \bar{X}_n$

$$E[S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} E[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} (n-1) = \sigma^2$$

## 2.8 Statistique Student

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$$

## 2.9 Distribution de la Statistique Student

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1) \\
 T_n &= \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{S_n^2}} \\
 &= \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \times \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}}}}_{\sim \chi_{(n-1)}^2}
 \end{aligned}$$

## 2.10 Distribution Student

Soit  $Z \sim N(0, 1)$  et  $W \sim \chi_{(v)}^2$   $Z \perp W$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t(v)$$

Propriété

Si  $v > 1$ :  $E[T] = 0$

Si  $v > 2$ :  $Var(T) = \frac{v}{v-2}$

Si  $v \rightarrow \infty$ ,  $t(v)$  converge vers  $N(0, 1)$

## 2.11 Statistique F

Soit  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Pour comparer:  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$

$$\frac{S_n^2}{S_m^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

## 2.12 Distribution F

Soit  $W_1 \sim \chi_{(v_1)}^2$ ,  $W_2 \sim \chi_{(v_2)}^2$

$W_1 \perp W_2$

$$F = \frac{\frac{W_1}{v_1}}{\frac{W_2}{v_2}} \quad F \sim F(v_1, v_2)$$

Si  $X \sim F(v_1, v_2)$  et  $v_2 > 2$   $E[X] = \frac{v_2 - 2}{v_2 - 4}$

## 2.13 Comparer variance échantionnale

Soit  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\frac{\frac{S_n^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_m^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n-1, m-1)$$

## 2.14 Lemme de Slutsky

Soit  $X_1, X_2, \dots$  et  $Y_1, Y_2, \dots$ . Lorsque  $n \rightarrow \infty$  et  $X_n \rightsquigarrow X$  et  $Y_n \rightsquigarrow c$

1.  $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$
2.  $X_n \times Y_n \rightsquigarrow X \times c$
3. Si  $c > 0$ ,  $\frac{X_n}{Y_n} \rightsquigarrow \frac{X}{c}$

## 2.15 Théorème Central Limite

**Theorem 2.1.** Soit  $X_1, \dots, X_n$ , un échantillon de V.A. quelconque:

$$Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ :

$$P(Z_n \leq X) \rightarrow \phi(X)$$

Convergence en distribution:

$$Z_n \rightsquigarrow N(0, 1)$$

## 2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connaît pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale

$T \not\sim t(n-1)$

Soit  $X_1, \dots, X_n$ , un échantillon d'une V.A quelconque:

$E[X^4] < \infty$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ :

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

## 2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale

$$Z = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0, 1)$$

Correction de la continuité:

$$P(Y \leq y) \approx P(Z \leq y + 0.5)$$

## 2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur

### 2.18.1 Critère 1: Biais

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n - \theta] = E[\hat{\theta}_n] - \theta$$

Estimateur sans biais:

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Estimateur asymptotiquement sans biais:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Voir preuve 4.4 et 4.5 pour le développement des biais de  $\bar{X}_n$  et  $S_n^2$

### 2.18.2 Critère 2: Variance

Parmi 2 estimateurs sans biais, on préfère celui avec une plus petite variance.

Pour deux estimateur avec biais, on préfère celui avec la plus petite Erreur quadratique moyenne(EQM):

$$EQM(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}_n) + [B(\hat{\theta}_n)]^2$$

### 2.18.3 Critère 3: Convergence

L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur convergent de  $\theta$  si, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

ce qui signifie que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0$$

Voir 4.6 pour prouver la convergence

## 2.19 Efficacité relative

Soit  $\hat{\theta}_n$  et  $\tilde{\theta}_n$ , 2 estimateurs sans biais et convergent.

$$eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{Var(\tilde{\theta}_n)}{Var(\hat{\theta}_n)}$$

Si  $eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$ ,  $\hat{\theta}_n$  est préférable, sinon  $\tilde{\theta}_n$  est préférable.

## 2.20 Définition formelle statistique exhaustive

Une statistique exhaustive est une statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une distribution avec paramètre  $\theta$  inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive pour  $\theta$  ssi la distribution conditionnelle de  $X_1, \dots, X_n$  sachant  $T$  ne dépend pas de  $\theta$ .

## 2.21 Théoreme de factorisation de Fischer-Neyman

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité  $f(\bullet; \theta)$  et paramètre  $\theta$  inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive pour  $\theta$  ssi,  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = g(t; \theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où

- $g(t; \theta)$  ne dépend de  $x_1, \dots, x_n$  qu'à travers  $t$ .
- $h(x_1, \dots, x_n)$  ne dépend pas de  $\theta$ .

Avec plus d'un paramètre:

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité  $f(\bullet; \theta)$  et paramètres  $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n$  inconnus. Alors, les statistiques

$$T_1 = T_1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_k = T_k(X_1, \dots, X_n)$$

sont conjointement exhaustives pour  $\theta$  ssi,  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = g(t_1, \dots, t_k; \theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où

- $g(t_1, \dots, t_k; \theta)$  ne dépend de  $x_1, \dots, x_n$  qu'à travers  $t_1, \dots, t_k$ .
- $h(x_1, \dots, x_n)$  ne dépend pas de  $\theta$ .

## 2.22 Critère de Lehmann-Scheffé

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité  $f(\bullet; \theta)$  et paramètre  $\theta$  inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive minimale pour  $\theta$  ssi,  $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)}{f(y_1; \theta) \times \dots \times f(y_n; \theta)}$$

ne dépend pas de  $\theta$  ssi

$$T(X_1, \dots, X_n) = T(Y_1, \dots, Y_n)$$

## 2.23 Théorème de Rao-Blackwell

$\hat{\theta}_n$  un estimateur sans biais tel que  $\text{var}(\hat{\theta}_n) < \infty$ . Si  $T$  est exhaustive pour  $\theta$ , la statistique:

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

est un estimateur sans biais et

$$\text{var}(\theta_n^*) \leq \text{var}(\hat{\theta}_n)$$

Voir section 4.7.

## 2.24 Estimateur sans biais et de variance minimale(MVUE)

Un estimateur  $\hat{\theta}_n$  est sans biais et de variance minimale si:

1.  $\hat{\theta}_n$  est sans biais.
2.  $\hat{\theta}_n = g(T)$ , où  $T$  est une statistique exhaustive (minimale) obtenue avec le théorème Fischer-Neymann.

### 2.24.1 Construire un MVUE

1. Trouver une statistique exhaustive (minimale)  $T$  avec le théorème Fischer-Neymann.
2. Trouver une fonction  $g$  tel que:  $E[g(T)] = \theta$
3. Poser  $\hat{\theta}_n = g(T)$ .



## 2.25 Méthode des moments

Si  $t$  paramètres sont inconnus, on résout le système à  $t$  équations:

$$m_k = E[X^k], \quad k = 1, \dots, t$$

Les estimateurs obtenus sont appelés les estimateurs des moments.

## 2.26 Méthode des quantiles

Pour certaine loi, les moments n'existent pas. Pour estimer  $t$  paramètres inconnus, on pourrait résoudre le système à  $t$  équations:

$$\hat{\pi}_{\kappa j} = VaR_{\kappa j}(X) \quad j = 1, \dots, t$$

## 2.27 Quantile empirique lissé

Pour un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  le quantile empirique de niveau  $\kappa \in (0, 1)$  est:

$$\hat{\pi}_{\kappa, n} = (1 - h)X_{(j)} + hX_{(j+1)} \quad j = \lfloor (n+1)\kappa \rfloor \text{ et } h = (n+1)\kappa - j$$

##Fonction de vraisemblance

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une distribution avec fmp ou fdd:

$$f(x; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

où  $\Theta$  est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre. Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des valeurs observées de l'échantillon, la vraisemblance de  $\theta$  basée sur  $x_1, \dots, x_n$  est définie comme:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)$$

###Observation

- $X$  est discrète: vraisemblance de  $\theta$  basée sur  $x_1, \dots, x_n$  est exactement la probabilité d'observer  $x_1, \dots, x_n$ .
- $X$  est continue: vraisemblance de  $\theta$  basée sur  $x_1, \dots, x_n$  est la densité et est proportionnelle à la probabilité d'observer  $x_1, \dots, x_n$ .
- la vraisemblance est vue comme une fonction réelle déterministe de  $\theta$
- La vraisemblance est l'objet dans le théorème de factorisation de Fischer-Neymann
- la vraisemblance  $L(\theta)$  devrait être plus grande pour des valeurs de  $\theta$  proche de celle du mécanisme générateur de données.
- on estime donc  $\theta$  par la valeur  $\hat{\theta}_n$  qui maximise  $L(\theta)$ :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$



# Chapter 3

## GRF-2

### 3.1 Chapitre 1

#### Produit dérivé

Contrat entre 2 partis qui fixe les flux monétaires futurs fondés sur ceux de l'actif sous-jacent(SJ).

#### Étapes d'une transaction

1. Acheteur et vendeur se trouve.Facilité par la bourse.
2. Obligations pour les deux partis définis (prix, produits, conditions). Si transaction à la bourse: intermédiaire, et donc, dépôts de garantie possible.
3. Transaction
4. Mise à jour du registre de propriété.

#### Mesure d'évaluation taille/activité de la bourse/marché

- Volume de transaction: nombre de titres transigés/périodes
- Valeur marchande: Valeur d'une action/cie/indice boursier
- Positions ouvertes: quantité de contrats qui ne sont pas arrivés à échéance

#### Rôle des marchés financiers

- Partage du risque:compagnie partage le risque et les profits avec les actionnaires
- Diversification du risque: risque diversifiable → théoriquement possible de diluer le risquepour qu'il devienne nul. Risque non-diversifiable → possible de transférer le risque via des produits dérivés.

#### Utilité des produits dérivés

- Gestion des risques
- Spéculation
- Réduction des frais de transaction
- arbitrage réglementaire

#### 3 types d'acteurs

- Utilisateurs(acheteur/vendeurs)
- Teneur de marché(intermédiaire)
- Observateur(analyste/autorité)

## Définitions

- Ordre au cours du marché: quantité de l'actif visé à acheter(vendre) au prix du marché, au moment où l'ordre est passée.
- Ordre à cours limité: quantité d'actions à acheter/vendre dans une tranche spécifique de prix.
- Ordre de vente «stop»: prix en -dessous duquel on vend automatiquement.
- Position longue: qui profitera de l'augmentation de la valeur du SJ.
- Position courte: qui profitera de la diminution de la valeur du SJ.
- Vente à découvert: vente d'un actif qu'on ne possède pas. L'actif est livré à une date ultérieure, mais paiement à  $t=0$  au prix de l'actif à  $t=0$ .
  - Utilité:
    - \* Spéculation
    - \* Financement
    - \* Couverture contre la baisse de valeur
  - Risque:
    - \* de défaut
    - \* de rareté

### 3.1.1 CAPM(Capital asset pricing management)

#### 3 postulats:

1. Transactions efficaces et sans friction: pas de frais de transaction, emprunt au taux sans risque.
2. Rationnalité des investisseurs: maximise leur ratio de Sharpe

$$\rightarrow \frac{E[R_p - r_f]}{\sigma_p}$$

3. Attentes et espérances homogènes

L'équation du CAPM pour un actif i:

$$R_i = r_f + \alpha_i + \beta_i(R_{mkt} - r_f) + \epsilon$$

Cela implique:

$$\frac{dR_i}{dR_{mkt}} = \beta_i = \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})}$$

Pour un portefeuille p:

$$\frac{dR_p}{dR_{mkt}} = \beta_p = \frac{Cov(\sum x_i R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \beta_i$$

#### Incohérences du modèle

- Investisseurs non rationnels et pas informés sur leur portefeuille
- Certains ne veulent pas nécessairement maximiser leur ratio de Sharpe, ont d'autres objectifs
- Il y a des investisseurs qui ne diversifient pas leur portefeuille de manière optimale
- Il y en a qui sont ultra-actif, malgré le fait que le CAPM suppose une gestion passive

Comportements avec effet plus systémique:

- Peur du regret: garder un titre qui est en train de baisser ou vendre un titre avant qu'il remonte
- Les investisseurs sont influençables; ils achèteront les titres médiatisés, etc.
- Effet de troupeau: on fait comme ceux qu'on connaît

### 3.1.2 Modèle multifactoriel et l'APT(arbitrage pricing theory)

Trois types d'actifs avec des alphas strictement positifs qui contredisent le CAPM:

- Petites capitalisations: on observe des rendements supérieurs à ce que le CAPM prédit
- Book to market ratio: titre "value" avec une valeur au livre supérieur à la valeur marchande verront la valeur marchande rejoindre la valeur au livre avec le temps
- Momentum: les compagnies qui ont connues un bon rendement dernièrement auront tendance à avoir un rendement supérieur à la moyenne

#### 3.1.2.1 APT

$$E[R_s] - r_f = \sum_{i=1}^N \beta_s^{F_i} (E[R_{F_i}] - r_f)$$

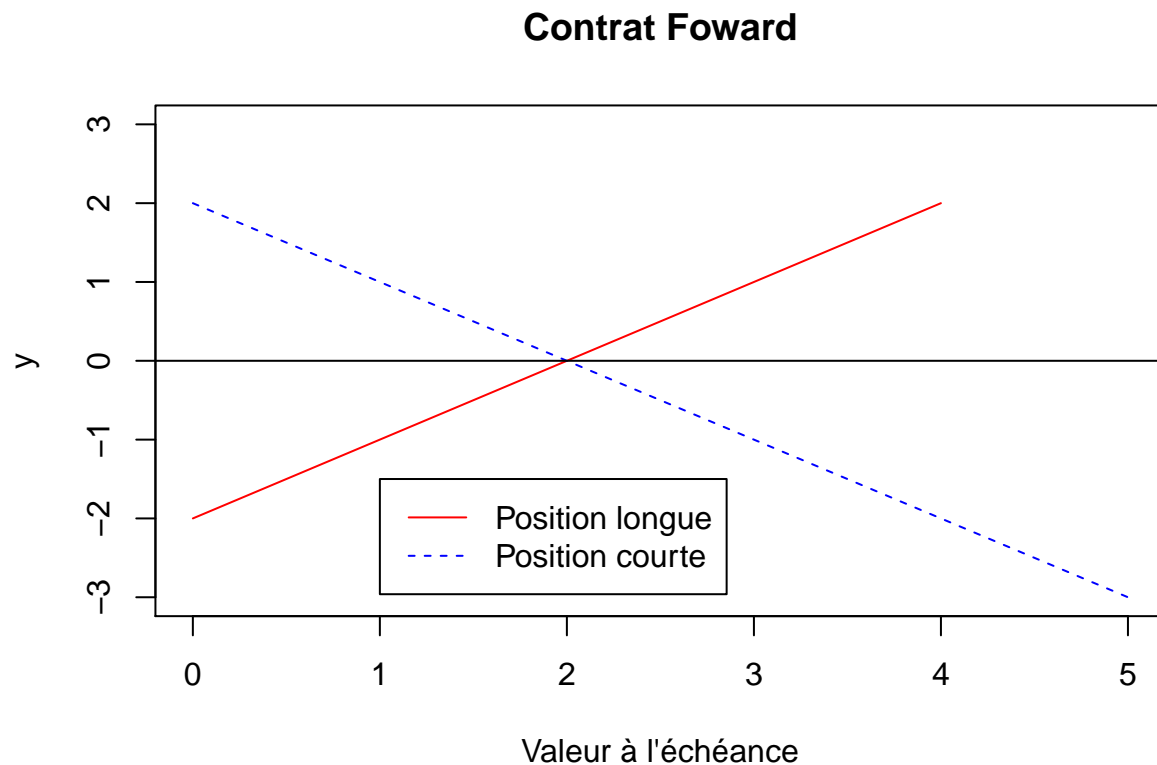
Les "F" sont des facteurs. Il est possible de créer des modèles avec n'importe quels facteurs comme des indices boursiers, par exemple.

## 3.2 Chapitre 2

### 3.2.1 Contrat Foward

Achat d'un actif prédéterminé à une valeur initiale  $S_0$ , à une date de livraison  $T$  et à un prix  $F_{0,T}$ . Le coût initial est nul.  $F_{0,T}$  est le prix anticipé de l'actif sous-jacent rendu à la date  $T$ .  $S_0(1 + r_f)^T = F_{0,T}$

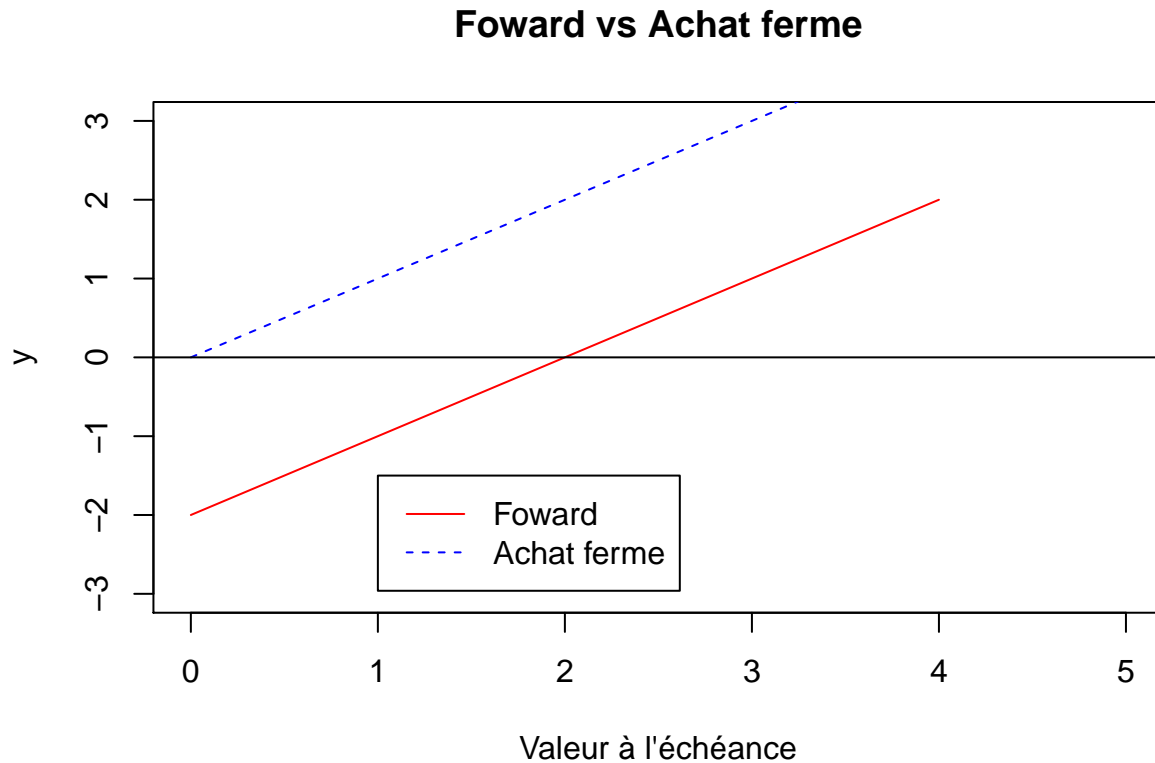
- Valeur à l'échéance:
  - Pour l'acheteur(position longue):  $F_{0,T} - S_T$
  - Pour le vendeur(position courte):  $S_T - F_{0,T}$



### 3.2.2 Foward prépayé

Dans certain cas, l'acheteur voudra payé à  $t = 0$ . Le coût initial sera  $F_{0,T}^P$ . On achète immédiatement sans avoir l'actif à la date de transaction. La position de l'acheteur est *capitalisée*. Dans un achat ferme, la position de l'acheteur est pleinement capitalisée. Le contrat foward, lui, implique une position non capitalisée.

Temps	Acheteur	Vendeur
$t = 0$	$-F_{0,T}^P$	$F_{0,T}^P$
$t = T$	$S_T$	$-S_T$



Pour recréer les cashflows d'un contrat foward avec un achat ferme, on finance l'achat ferme avec un emprunt au taux sans risque.

Temps	Achat ferme	+ Emprunt	= Foward
$t = 0$	$-S_0$	$S_0$	$\emptyset$
$t = T$	$S_T$	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

On peut aussi recréer les cashflows d'un achat ferme avec un foward et en investissant la valeur actualisée de  $F_{0,T}$ .  $F_{0,T}(1 + r_f)^{-T} = S_0(1 + r_f)^T(1 + r_f)^{-T} = S_0$ .

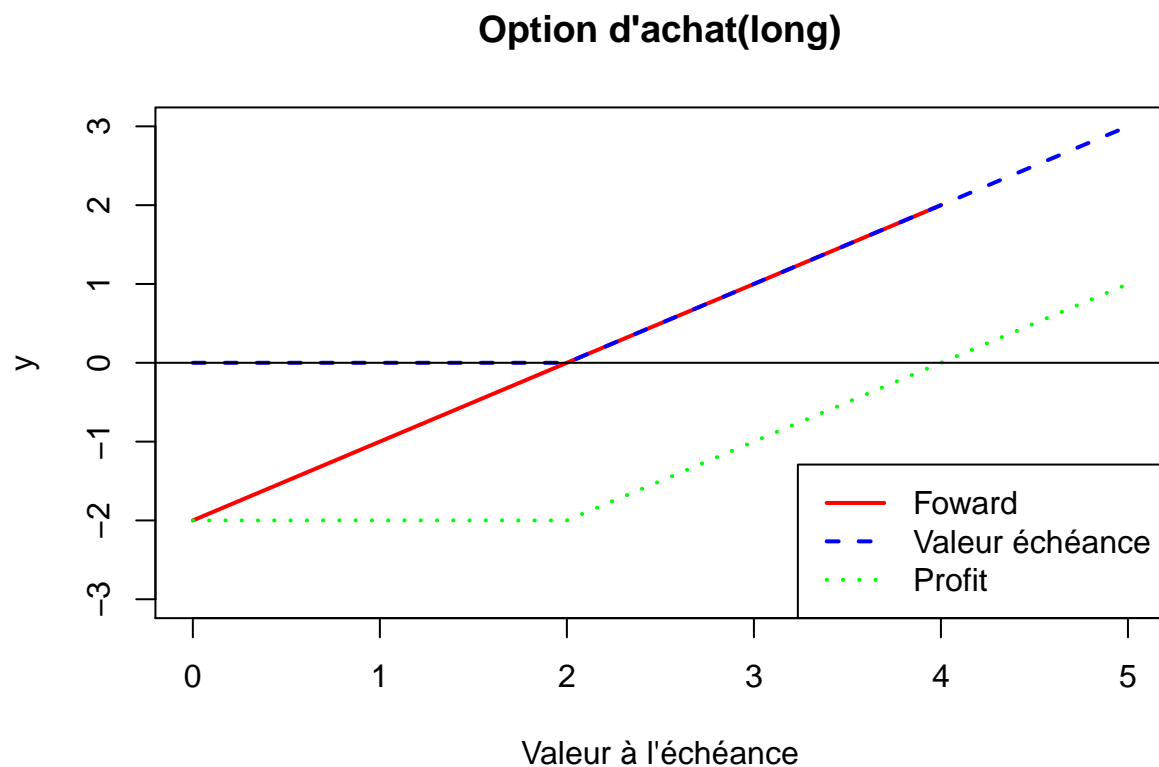
Temps	Dépot	+ Foward	= Achat ferme
$t = 0$	$-S_0$	$\emptyset$	$-S_0$
$t = T$	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$	$S_T$

### 3.2.3 Option d'achat(call)

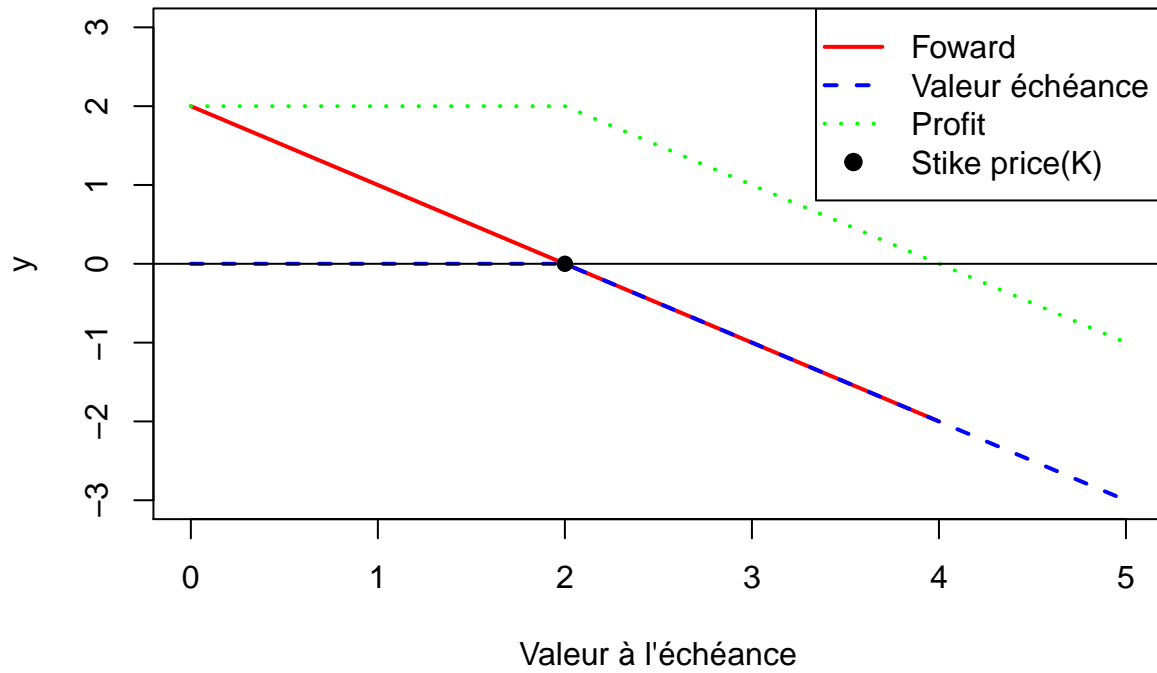
Contrat qui permet au détenteur(position longue) d'acheter un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price =  $K$ , à une date d'échéance ou d'ici cette date, s'il le désire.

3 types de levées: 1. Européenne (à la date T) 2. Américaine (d'ici la date T) 3. Bermudienne (à certains moments d'ici T)

Profit		
Actif SJ	Acheteur	Vendeur
$S_T > K$	$S_T - K - C(K, T)(1 + r_f)^T$	$K - S_T + C(K, T)(1 + r_f)^T$
$S_T < K$	$-C(K, T)(1 + r_f)^T$	$C(K, T)(1 + r_f)^T$



### Option d'achat (courte)



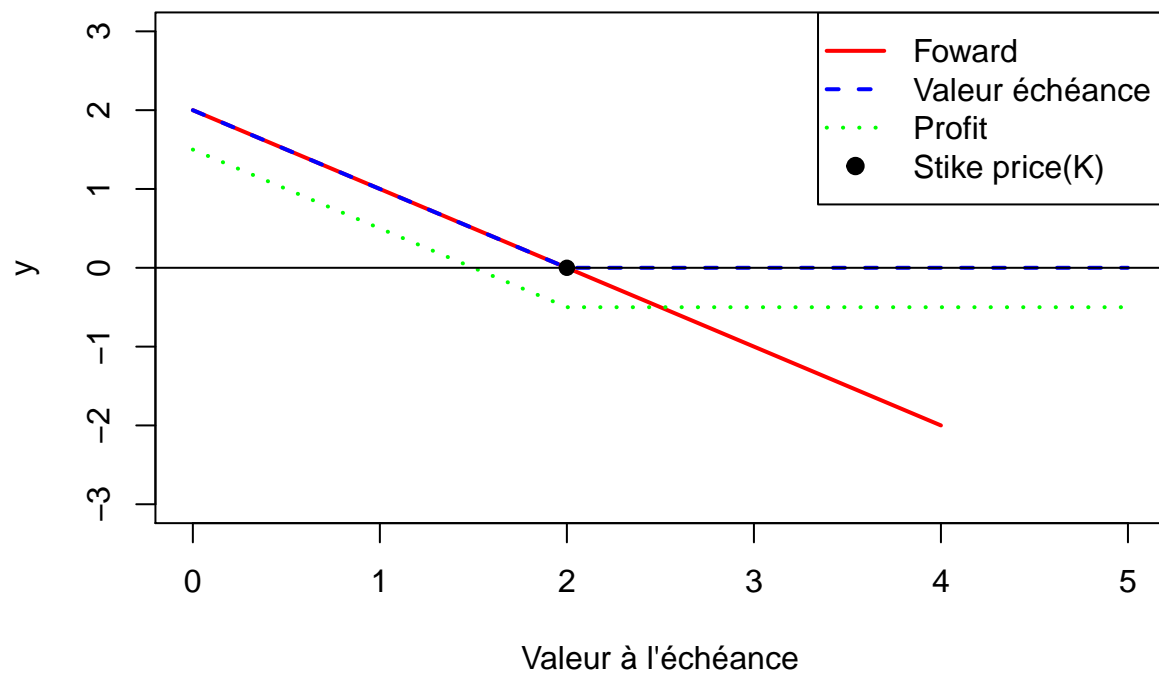
Valeur à l'échéance	
Acheteur	$\max(0; S_T - K)$
Vendeur	$-\max(0; S_T - K)$

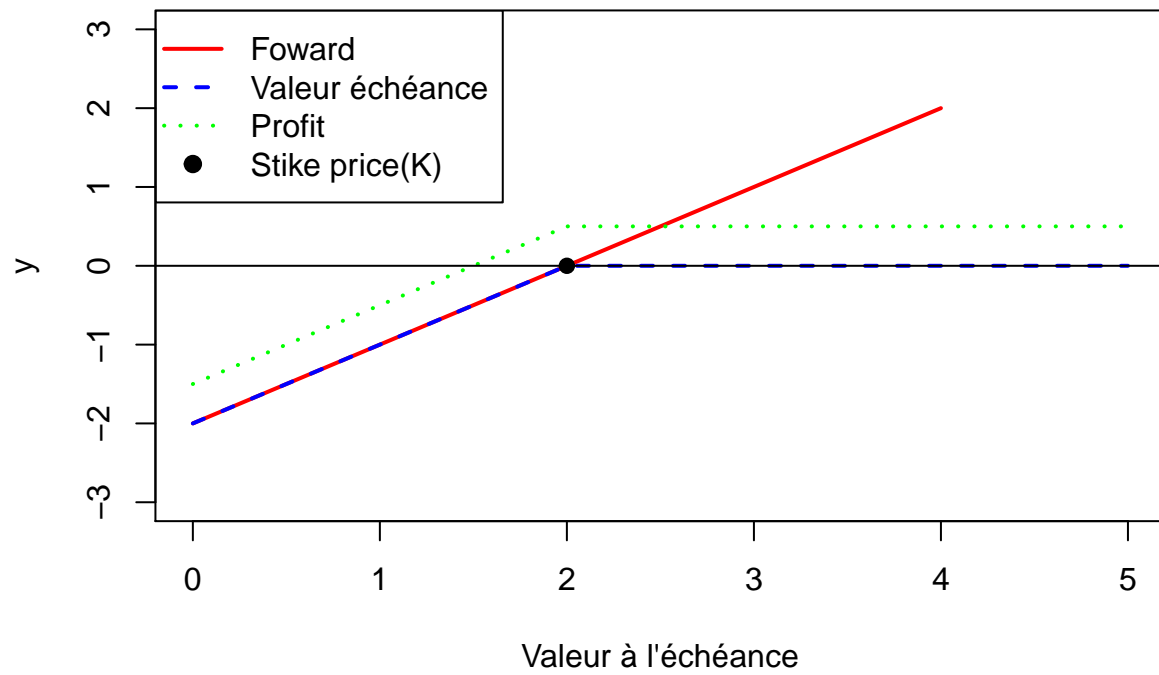
#### 3.2.4 Option de vente(put)

Contrat qui permet au détenteur(position courte) de vendre un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price =  $K$ , à une date d'échéance ou d'ici cette date, s'il le désire. Le vendeur(position longue) de l'option devra acheter le SJ à ce prix si le détenteur(acheteur) le désire.

Option de vente		
Position	Profit	Valeur à l'échéance
Acheteur	$\max(0; K - S_T) - P(K, T)(1 + r_f)^T$	$\max(0; K - S_T)$
Vendeur	$P(1 + r_f)^T - \max(0; K - S_T)$	$-\max(0; K - S_T)$



**Option de vente (courte)**

**Option de vente (long)**

## Chapter 4

## Preuves

### 4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile

*Proof.*

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(u)}(x) &= P(F_X^{-1} \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

□

### 4.2 Fonction Stop-Loss(1.3)

*Proof.*

$$\begin{aligned} \Pi_X(d) &= E[\max(X - d, 0)] \\ &= E[X \times 1_{\{X > d\}} - d \times 1_{\{X > d\}}] \\ &= E[X \times 1_{\{X > d\}}] - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

□

### 4.3 Tvar

#### 4.3.1 Expression alternative 1(1.6.1)

*Proof.* On applique 1.4.1, ainsi:

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)} \int_k^1 \text{VaR}_k(u) du \\ &= \frac{1}{1-k} (\Pi_X(\text{VaR}_k(X))) + \text{VaR}_k(X) \end{aligned}$$

□

### 4.3.2 Expression alternative 2(1.6.2)

*Proof.* On remplace  $\Pi_X(\text{VaR}_k(X))$  dans 4.3.2 par sa définition 1.3

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \text{VaR}_k(X) + \frac{1}{(1-k)}(E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{VaR}_k(X)\bar{F}_X(\text{VaR}_k(X))) \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(\bar{F}_X(\text{VaR}_k(X)) - (1-k))] \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{Var}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k)] \end{aligned}$$

□

Pour une V.A. continue  $\text{VaR}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k) = 0$  donc,

$$\text{TVaR}_k(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}]}{P(X > \text{VaR}_k(X))} = E[X|X > \text{VaR}_k(X)]$$

### 4.3.3 Expression alternative 3(1.6.3)

On fait la preuve à partir de l'expression alternative 2:

*Proof.*

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] - \text{VaR}_k(X)(F_X(\text{VaR}_k(X)) - k)] \\ &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X > \text{VaR}_k(X)\}}] + X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}} - X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] \\ &\quad - \text{VaR}_k(X)(1 - \bar{F}_X(\text{VaR}_k(X)) - (1 - (1-k))) \\ &= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X \geq \text{VaR}_k(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + \text{VaR}_k(X)[(1-k) - P(X > \text{VaR}_k(X))]\} \\ &= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X \geq \text{VaR}_k(X)\}}] - (E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \text{VaR}_k(X)) \times \text{VaR}_k(X))\} \end{aligned}$$

Deux cas possibles: \ 1. V.A. discrète  $P(X = \text{VaR}_k(X)) > 0$  \ 2. V.A. continue  $P(X = \text{VaR}_k(X)) = 0$  \ \

Donc la portion  $(E[X \times 1_{\{X = \text{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \text{VaR}_k(X)) \times \text{VaR}_k(X)) = \text{VaR}_k(X)[1 - \frac{P(X \geq \text{VaR}_k(X))}{(1-k)}]$  □

## Propriété

### Sous-additivité

3 preuves. La première est basée sur les statistiques d'ordre, la deuxième est basée sur la représentation de la TVaR par la stop-loss.

*Proof.* 1er lemme: Soit une V.A.  $X$  quelconque, dont  $E[X] < \infty$ .

Soit  $m$  réalisations indépendantes de  $X$ :  $\{X^{(1)}, \dots, X^{(m)}\}$ .

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=[m\kappa]+1}^m X^{[j]} \right)}{[m(1-\kappa)]}, \text{ pour } [m\kappa] < m$$

Où,

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \text{partie entière de } x \\ X^{[1]} \leq X^{[2]} \leq \dots \leq X^{[m]} &= \text{réalisations triées de } X \end{aligned}$$

2e lemme:

Soit les réalisations :  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$

On définit  $X^{[1]} \leq X^{[2]} \leq \dots \leq X^{[m]}$  comme les réalisations triées de  $X$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-1}^m &= \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)}, 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq m\} \\ \sum_{j=m-2}^m &= \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)} + X^{(j_3)}, 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq m\} \\ \sum_{j=\kappa_0+1}^m &= \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)} + \dots + X^{(j_{m-\kappa_0})}, 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \end{aligned}$$

Soit les V.A.  $X_1, X_2$  avec  $E[X_i] < \infty$ ,  $i = 1, 2$ .

$S = X_1 + X_2$

Avec le 1er lemme:

$$\text{TVaR}_\kappa(S) = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^n S^{[j]} \right)}{\lfloor m(1-\kappa) \rfloor}$$

On développe  $\sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^m S^{[j]}$  en utilisant le 2e lemme et on pose  $\kappa_0 = \lfloor m\kappa \rfloor$

$$\begin{aligned} \sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^m S^{[j]} &= \sup\{S^{(j_1)} + \dots + S^{(j_{m-\lfloor m\kappa \rfloor})}, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-\lfloor m\kappa \rfloor} \leq m\} \\ &= \sup\left\{ \left( X^{(j_1)}_1 + X^{(j_1)}_2 \right) + \left( X^{(j_2)}_1 + X^{(j_2)}_2 \right) + \dots + \left( X^{(j_{m-\kappa_0})}_1 + X^{(j_{m-\kappa_0})}_2 \right), 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m \right\} \\ &= \sup\left\{ \left( X^{(j_1)}_1 + X^{(j_1)}_2 + \dots + X^{(j_{m-\kappa_0})}_1 \right) + \left( X^{(j_1)}_2 + X^{(j_2)}_2 + \dots + X^{(j_{m-\kappa_0})}_2 \right), 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \left( X^{(j_1)}_1 + X^{(j_1)}_2 + \dots + X^{(j_{m-\kappa_0})}_1 \right), 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m \right\} + \sup\left\{ \left( X^{(j_1)}_2 + X^{(j_2)}_2 + \dots + X^{(j_{m-\kappa_0})}_2 \right), 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m \right\} \\ &= \sum_{j=\kappa_0+1}^m X_1^{[j]} + \sum_{j=\kappa_0+1}^m X_2^{[j]} \end{aligned}$$

On applique le 1er lemme de chaque coté de l'innégalité  $\sum_{j=\kappa_0+1}^m S^{[j]} \leq \sum_{j=\kappa_0+1}^m X_1^{[j]} + \sum_{j=\kappa_0+1}^m X_2^{[j]}$

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_\kappa(S) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa) \rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^m S^{[j]} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa) \rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^m X_1^{[j]} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa) \rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^m X_2^{[j]} \\ &= \text{TVaR}_\kappa(X_1) + \text{TVaR}_\kappa(X_2) \end{aligned}$$

□

#### 4.4 Biais moyenne échantillonnale (voir 2.18.1)

*Proof.*

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}_n) &= E[\bar{X}_n] - E[X] \\ &= E[X] - E[X] = 0 \end{aligned}$$

□

#### 4.5 Biais variance échantillonnale (voir 2.18.1)

*Proof.*

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{2}{n-1} (\bar{X}_n \sum_{i=1}^n X_i) + \frac{n}{(n-1)} ((\bar{X}_n)^2) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{n}{(n-1)} (\bar{X}_n^2) \\ E[S_n^2] &= E\left[\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)\right] - E\left[\frac{n}{(n-1)} (\bar{X}_n^2)\right] \\ &= \frac{n}{n-1} ((Var(X) + E^2[X])) - \frac{1}{(n-1)} (Var(X)) - \frac{n}{n-1} (E[X^2]) \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

$$B(S_n^2) = Var(X) - \sigma^2 = 0$$

□

#### 4.6 Convergence (voir 2.18.3)

*Proof.* On prouve avec Tchebycheff

Un estimateur sans biais est convergent si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$$

On fixe  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \epsilon) \\ &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \frac{\epsilon \times \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}) \\ &\leq \frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

Donc si  $Var(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\theta}_n$  est convergent

□

## 4.7 Théorème de Rao-Blackwell (voir section 2.23)

Puisque  $T$  est exhaustive pour  $\theta$ , la distribution conditionnelle de  $(X_1, \dots, X_n)$  sachant  $T$  ne dépend pas de  $\theta$ . Alors,

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

ne dépend pas de  $\theta$ . Donc,  $\theta_n^*$  est une statistique. Par l'espérance totale,

$$E[\theta_n^*] = E[E[\hat{\theta}_n | T]] = E[\hat{\theta}_n] = \theta,$$

$\theta_n^*$  est donc sans biais. Par la variance totale,

$$\begin{aligned} var(\hat{\theta}_n) &= var(E[\hat{\theta}_n | T]) + E[var(\hat{\theta}_n | T)] \\ &= var(\theta_n^*) + E[var(\hat{\theta}_n | T)] \end{aligned}$$

Sachant que

$$E[var(\hat{\theta}_n | T)] \geq 0$$

$$var(\theta_n^*) \leq var(\hat{\theta}_n)$$