Formules et notes

Nicolas Bellemare

2019-03-11

Contents

Preface

Chapter 1

Introduction actuariat 2

1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$U \sim Unif(0,1)$$
$$Y = F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X$$
$$F_Y(x) = F_{F_X^{-1}(u)}(x) = F_X(x)\, pour\, x \in \mathbb{R}$$

ainsi:

$$X = F_X^{-1}(u)$$

Voir preuve 4.1

1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0 \times f_X(y) dy + \int_{x}^{\infty} y f_X(y)\, dy \\ &= \int_{x}^{\infty} y f_X(y)\, dy \end{aligned}$$

1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E[\max(X-d, 0)] \quad \text{pour}\, d \in \mathbb{R}$$

Voir preuve 4.2

1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^{\infty} \max(X-d, 0) f_X(x)\, dx$$

1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \ldots)$

$$f_X(kh) = P(X = kh),\ k \in \mathrm{N},\ h > 0,\ d = k_0 h$$

$$\begin{aligned}
\Pi_X(k_0 h) =& E[\max(X - k_0 h, 0)] \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h, 0) P(X = kh) \\
=& \sum_{k_0 = k+1}^{\infty} (kh - k_0 h) P(X = kh)
\end{aligned}$$

1.3.3 Propriété

$$\begin{aligned}
\Pi_X(0) =& \lim_{d \to 0} \Pi_X(d) \\
=& \lim_{d \to 0} E[\max(X - d, 0)] \\
=& E[X]
\end{aligned}$$

1.4 Fonction quantile

1.4.1 Première forme

$$\begin{aligned}
\int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du &= \int_k^1 [F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)]\, du \\
&= \int_k^1 (F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k))\, du + F_X^{-1}(k) \int_k^1 (1)\, du \\
&= \int_0^1 \max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0)\, du + F_X^{-1}(k)(1-k) \\
&= E[\max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0)] + (1-k) F_X^{-1}(k) \\
&= E[\max(X - F_X^{-1}(k),\, 0)] + (1-k) F_X^{-1}(k)
\end{aligned}$$

1.4.2 Deuxième forme

$$\int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du = \Pi_X(F_X^{-1}(k)) + (1-k) F_X^{-1}(k)$$

En remplaçant $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$ par 4.2 on obtient:

$$\begin{aligned}
&= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] - F_X^{-1}(k) \bar{F}_X(F_X^{-1}(k)) + (1-k) F_X^{-1}(k) \\
&= E[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}] + F_X^{-1}(k)(F_X(F_X^{-1}(k)) - k)
\end{aligned}$$

1.5 Fonction quantile et espérance

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\, du = E[F_X^{-1}(x)]$$

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)(1)\, du = E[X]$$

Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u))\,du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$

1.6 TVaR

$$\mathrm{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\int_k^1 \mathrm{VaR}_u(X)\,du$$

1.6.1 Expression alternative 1

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X)) + \mathrm{VaR}_k(X)$$

Voir preuve 4.3.1

1.6.2 Expression alternative 2

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}(E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + \mathrm{VaR}_k(X) \times (F_X[\mathrm{VaR}_k(X)] - k))$$

Voir preuve 4.3.2

1.6.3 Expression alternative 3

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{P(X \geq \mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)} \times E[X|X \geq \mathrm{VaR}_k(X)] + (1 - \frac{P(X \geq \mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)}) \times \mathrm{VaR}_k(X), \quad k \in (0,1)$$

Voir preuve 4.3.3

Propriété

Sous-additivité

Soit $S = X_1 + X_2$,

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(S) \leq \mathrm{TVaR}_\kappa(X_1) + \mathrm{TVaR}_\kappa(X_2)$$

Voir section 4.3.3

1.7 Transformée de Laplace

Existe pour toute loi de X.

Lien avec $E[X]$:

$$\begin{aligned}
&\text{V.A. X positive tel que } E[X] < \infty \\
(-1)\frac{d}{dt}\mathcal{L}_X(t)|_{t=0} &= (-1)\frac{d}{dt}E[e^{-tX}]|_{t=0} \\
&= (-1)E[\frac{d}{dt}e^{-tX}]|_{t=0} \\
&= (-1)E[-Xe^{-tX}]|_{t=0} \\
&= (-1)E[-X] = E[X]
\end{aligned}$$

Lien avec$E[X^m]$:

$$E[X^m] = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{L}_X(t)|_{t=0}$$

Chapter 2

Stats

2.1 Définitions

Observation: réalisation d'une variable aléatoire

Échantillon aléatoire de F: ensemble de V.A. iid

Statistiques: fonction d'un échantillon aléatoire et de constantes connues

Paramêtres: quantité d'intérêt($E[X]$, $Var(x)$, etc) ou le paramêtre θ d'un modèle paramétrique.

Statistique exhaustive: statistique qui contient toue l'informatiin pertinente sur le paramèetre visé.

Estimateur: Statistique $S(X_1, \dots, X_n)$ qui prend des valeurs qu'on espère proche de θ noté $\hat{\theta}_n$(Variable aléatoire)

Estimation de θ: données observées $x_1, x_2, \dots$ de la valeur observée $\hat{\theta}$, $s(x_1, x_2, \dots)$(réalisations)

2.2 Moyenne échantilonnale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.3 Variance échantillonale:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

2.4 Loi faible des grands nombres:

Soit $X_1, X_2, ...,$ une suite de V.A. iid. On suppose $var(X_i) < \infty$ et $E[X] = \mu$, lorsque $n \to \infty$

$$P(|(\bar{X}_n - \mu)| > \epsilon) \to 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$\bar{X}_n$ converge en probabilité vers μ

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Preuve par Tchebycheff:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \le \frac{var(X_i)}{n\epsilon^2}$$

2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:

$$X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$$
$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$
$$F_{X_{(n)}}(x) = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!1(n-k)!} F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

2.6 Distribution de $\bar{X}$:

Soit $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Utilisation de la distribution d'échantillonage de $\bar{X}_n$:

1. Vérifier une affirmation
2. Trouver un interval plausibe
3. Déterminer une taille d'échantillon minimal

2.7 Somme de normales au carré

Soit $Z_1, \ldots, Z_n \sim N(0,1)$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

Soit $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$S_n^2 \perp \bar{X}_n$

$$E[S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} E[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)}(n-1) = \sigma^2$$

2.8 Statistique Student

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$$

2.9 Distribution de la Statistique Student

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1)$$

$$\mathrm{T}_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{S_n^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \times \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}}}}_{\sim \chi^2_{(n-1)}}$$

2.10 Distribution Student

Soit $Z \sim N(0,1)$ et $W \sim \chi^2_(v)$ $Z \perp W$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t(v)$$

Propriété

Si $v > 1$: $E[T] = 0$

Si $v > 2$: $Var(T) = \frac{v}{v-2}$
Si $v \to \infty$, $t(v)$ converge vers $N(0,1)$

2.11 Statistique F

Soit $X_i, \ldots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Pour comparer: σ_1^2 et σ_2^2

$$\frac{S_n^2}{S_m^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

2.12 Distribution F

Soit $W_1 \sim \chi^2_{(v_1)}$, $W_2 \sim \chi^2_{(v_2)}$

$W_1 \perp W_2$

$$F = \frac{\frac{W_1}{v_1}}{\frac{W_2}{v_2}} \quad F \sim F(v_1, v_2)$$

Si $X \sim F(v_1, v_2)$ et $v_2 > 2$ $E[X = \frac{v_2}{v_2 - 2}]$

2.13 Comparer variance échantionnale

Soit $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\frac{\frac{S_n^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_m^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n-1, m-1)$$

2.14 Lemme de Slutsky

Soit $X_1, X_2, \ldots$ et $Y_1, Y_2, \ldots$ Lorsque $n \to \infty$ et $X_n \rightsquigarrow X$ et $Y_n \rightsquigarrow c$

1. $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$
2. $X_n \times Y_n \rightsquigarrow X \times c$
3. Si $c > 0$, $\frac{X_n}{Y_n} \rightsquigarrow \frac{X}{c}$

2.15 Théorème Central Limite

Theorem 2.1. *Soit $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de V.A. quelconque:*

$$Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

quand $n \to \infty$:

$$P(Z_n \leq X) \to \phi(X)$$

Convergence en distribution:

$$Z_n \rightsquigarrow N(0,1)$$

2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connait pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale

$T \not\rightsquigarrow t(n-1)$
Soit $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon d'une V.A quelconque:
$E[X^4] < \infty$, lorsque $n \to \infty$:

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale

$$Z = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0,1)$$

Correction de la continuité:

$$P(Y \leq y) \approx P(Z \leq y + 0.5)$$

2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur

2.18.1 Critère 1: Biais

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n - \theta] = E[\hat{\theta}_n] - \theta$$

Estimateur sans biais:

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Estimateur asymptotiquement sans biais:

$$\lim_{n \to \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Voir preuve 4.4 et 4.5 pour le développement des biais de $\bar{X}_n$ et S_n^2

2.18.2 Critère 2: Variance

Parmi 2 estimateurs sans biais, on préfère celui avec une plus petite variance.

Pour deux estimateur avec biais, on préfère celui avec la plus petite Erreur quadratique moyenne(EQM):

$$EQM(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}_n) + [B(\hat{\theta}_n)]^2$$

2.18.3 Critère 3: Convergence

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ si, quand $n \to \infty$,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

ce qui signifie que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$$

Voir 4.6 pour prouver la convergence

2.19 Efficacité relative

Soit $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$, 2 estimateurs sans biais et convergent.

$$eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{Var(\tilde{\theta}_n)}{Var(\hat{\theta}_n)}$$

Si $eff(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$, $\hat{\theta}_n$ est préférable, sinon $\tilde{\theta}_n$ est préférable.

2.20 Définition formelle statistique exhaustive

Une statistique exhaustive est une statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec paramètre θ inconnu.Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive pour θ ssi la distribution conditionnelle de $X_1, \dots, X_n$ sachant T ne dépend pas de θ.

2.21 Théoreme de factorisation de Fischer-Neyman

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\bullet;\theta)$ et paramètre θ inconnu.Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \dots, X_n)$$

est exhaustive pour θ ssi, $\forall\, x_1, \dots, x_n \;\in \mathbb{R}$,

$$f(x_1;\theta) \times \cdots \times f(x_n;\theta) = g(t;\theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où

- $g(t;\theta)$ ne dépend de $x_1, \dots, x_n$ qu'à travers t.
- $h(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de θ.

Avec plus d'un paramêtre:

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\bullet; \theta)$ et paramêtres $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$ inconnus.Alors, les statistiques

$$T_1 = T_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, T_k = T_k(X_1, \ldots, X_n)$$

sont conjointements exhaustives pour θ ssi, $\forall\ x_1, \ldots, x_n\ \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1; \theta) \times \cdots \times f(x_n; \theta) = g(t_1, \ldots, t_k; \theta) \times h(x_1, \ldots, x_n)$$

où

- $g(t_1, \ldots, t_n; \theta)$ ne dépend de $x_1, \ldots, x_n$ qu'à travers $t_1, \ldots, t_k$.
- $h(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend pas de θ.

2.22 Critère de Lehmann-Scheffé

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\bullet; \theta)$ et paramètre θ inconnu.Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \ldots, X_n)$$

est exhaustive minimale pour θ ssi, $\forall\ x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\ \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x_1; \theta) \times \cdots \times f(x_n; \theta)}{f(y_1; \theta) \times \cdots \times f(y_n; \theta)}$$

ne dépend pas de θ ssi

$$T(X_1, \ldots, X_n) = T(Y_1, \ldots, Y_n)$$

2.23 Théorème de Rao-Blackwell

$\hat{\theta}_n$ un estimateur sans biais tel que $var(\hat{\theta}_n) < \infty$. Si T est exhaustive pour θ, la statistique:

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

est un estimateur sans biais et

$$var(\theta_n^*) \leq var(\hat{\theta}_n)$$

Voir section 4.7.

2.24 Estimateur sans biais et de variance minimale(MVUE)

Un estimateur $\hat{\theta_n}$ est sans biais et de variance minimale si:

1. $\hat{\theta_n}$ est sans biais.
2. $\hat{\theta_n} = g(T)$, où T est une statistique exhaustive (minimale) obtenue avec le théorème Fischer-Neymann.

2.24.1 Construire un MVUE

1. Trouver une statistique exhaustive (minimale) T avec le théorème Fischer-Neymann.
2. Trouver une fonction g tel que: $E[g(T)] = \theta$
3. Poser $\hat{\theta_n} = g(T)$.

2.25 Méthode des moments

Si t paramètres sont inconnus, on résout le système à t équations:

$$m_k = E[X^k], \quad k = 1, \dots, t$$

Les estimateurs obtenus sont appelés les estimateurs des moments.

2.26 Méthode des quantiles

Pour certaine loi, les moments n'existent pas. Pour estimer t paramètres inconnu, on pourrait résoudre le système à t équations:

$$\hat{\pi}_{\kappa j} = VaR_{\kappa j}(X) \quad j = 1, \dots, t$$

2.27 Quantile empirique lissé

Pour un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$ le quantile empirique de niveau $\kappa \in (0, 1)$ est:

$$\hat{\pi}_{\kappa,n} = (1 - h)X_{(j)} + hX_{(j+1)} \quad j = \lfloor (n + 1)\kappa \rfloor \ et \ h = (n + 1)\kappa - j$$

##Fonction de vraissemblance

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec fmp ou fdd:

$$f(x; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

où Θ est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des valeurs observées de l'échantillon, la vraissemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$ est définie comme:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \times \cdots \times f(x_n; \theta)$$

###Observation

- X est discrète: vraisemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$ est exactement la probabilité d'observer $x_1, \dots, x_n$.
- X est continue: vraisemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$ est la densité et est proportionelle à la probabilité d'observer $x_1, \dots, x_n$.
- la vraisemblance est vue comme une fonction réelle déterministe de θ
- La vraisemblance est l'objet dans le théorème de factorisation de Fischer-Neymann
- la vraisemblance $L(\theta)$ devrait être plus grande pour des valeurs de θ proche de celle du mécanisme générateur de données.
- on estimme donc θ par la valeur $\hat{\theta_n}$ qui maximise $L(\theta)$:

$$\hat{\theta_n} = \underset{\theta \in \Theta}{arg\,max} L(\theta)$$

Chapter 3

GRF-2

3.1 Chapitre 1

Produit dérivé

Contrat entre 2 partis qui fixe les flux monétaires futurs fondés sur ceux de l'actif sous-jacent(SJ).

Étapes d'une transaction

1. Acheteur et vendeur se trouve.Facilité par la bourse.
2. Obligations pour les deux partis définis (prix, produits, conditions). Si transaction à la bourse: intermédiaire, et donc, dépôts de garantie possible.
3. Transaction
4. Mise à jour du registre de propriété.

Mesure d'évaluation taille/activité de la bourse/marché

- Volume de transaction: nombre de titres transigés/périodes
- Valeur marchande: Valeur d'une action/cie/indice boursier
- Positions ouvertes: quantité de contrats qui ne sont pas arrivés à échéance

Rôle des marchés financiers

- Partage du risque:compagnie partage le risque et les profits avec les actionnaires
- Diversification du risque: risque diversifiable → théoriquement possible de diluer le risquepour qu'il devienne nul. Risque non-diversifiable → possible de transférer le risque via des produits dérivés.

Utilité des produits dérivés

- Gestion des risques
- Spéculation
- Réduction des frais de transaction
- arbitrage réglementaire

3 types d'acteurs

- Uilisateurs(acheteur/vendeurs)
- Teneur de marché(intermédiaire)
- Observateur(analyste/autorité)

Définitions

- Ordre au cours du marché: quantité de l'actif visé à acheter(vendre) au prix du marché, au moment où l'ordre est passée.
- Ordre à cours limité: quantité d'actions à acheter/vendre dans une tranche spécifique de prix.
- Ordre de vente «stop»: prix en -dessous duquel on vend automatiquement.
- Position longue: qui profitera de l'augmentation de la valeur du SJ.
- Position courte: qui profitera de la diminution de la valeur du SJ.
- Vente à découvert: vente d'un actif qu'on ne possède pas. L'actif est livré à une date ultérieur, mais paiement à t=0 au prix de l'actif à t=0.
  - Utilité:
    - Spéculation
    - Financement
    - Couverture contre la baisse de valeur
  - Risque:
    - de défaut
    - de rareté

3.1.1 CAPM(Capital asset pricing management)

3 postulats:

1. Transactions efficaces et sans friction: pas de frais de transaction, emprunt au taux sans risque.
2. Rationnalité des investisseurs: maximise leur ratio de Sharpe

$$\rightarrow \frac{E[R_p - r_f]}{\sigma_p}$$

3. Attentes et espérances homogênes

L'équation du CAPM pour un actif i:

$$R_i = r_f + a_i + \beta_i(R_{mkt} - r_f) + \epsilon$$

Cela implique:

$$\frac{\mathrm{d}R_i}{\mathrm{d}R_{mkt}} = \beta_i = \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})}$$

Pour un portefeuille p:

$$\frac{\mathrm{d}R_p}{\mathrm{d}R_{mkt}} = \beta_p = \frac{Cov(\sum x_i R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \beta_i$$

Incohérences du modèle

- Investisseurs non rationnels et pas informés sur leur portefeuille
- Certains ne veulent pas nécessairement maximiser leur ratio de Sharpe, ont d'autres objectifs
- Il y a des investisseurs qui ne diversifient pas leur portefeuille de manière optimale
- Il y en a qui sont ultra-actif, malgré le fait que le CAPM suppose une gestion passive

Comportements avec effet plus systémique:

- Peur du regret: garder un titre qui est en train de baisser ou vendre un titre avant qu'il remonte
- Les investisseurs sont influençables; ils achèteront les titres médiatisés,etc.
- Effet de trouppeau: on fait comme ceux qu'on connait

3.1.2 Modèle multifactoriel et l'APT(arbitrage pricing theory)

Trois types d'actifs avec des alphas strictement positifs qui contredisent le CAPM:

- Petites capitalisations: on observe des rendements supérieurs à ce que le CAPM prédit
- Book to market ratio: titre "value" avec une valeur au livre supérieur à la valeur marchande verront la valeur marchande rejoindre la valeur au livre avec le temps
- Momemtum: les compagnies qui ont connues un bon rendement dernièrement auront tendance à avoir un rendement supérieur à la moyenne

3.1.2.1 APT

$$E[R_s] - r_f = \sum_{i=1}^{N} \beta_s^{Fi}(E[R_{Fi}] - r_f)$$

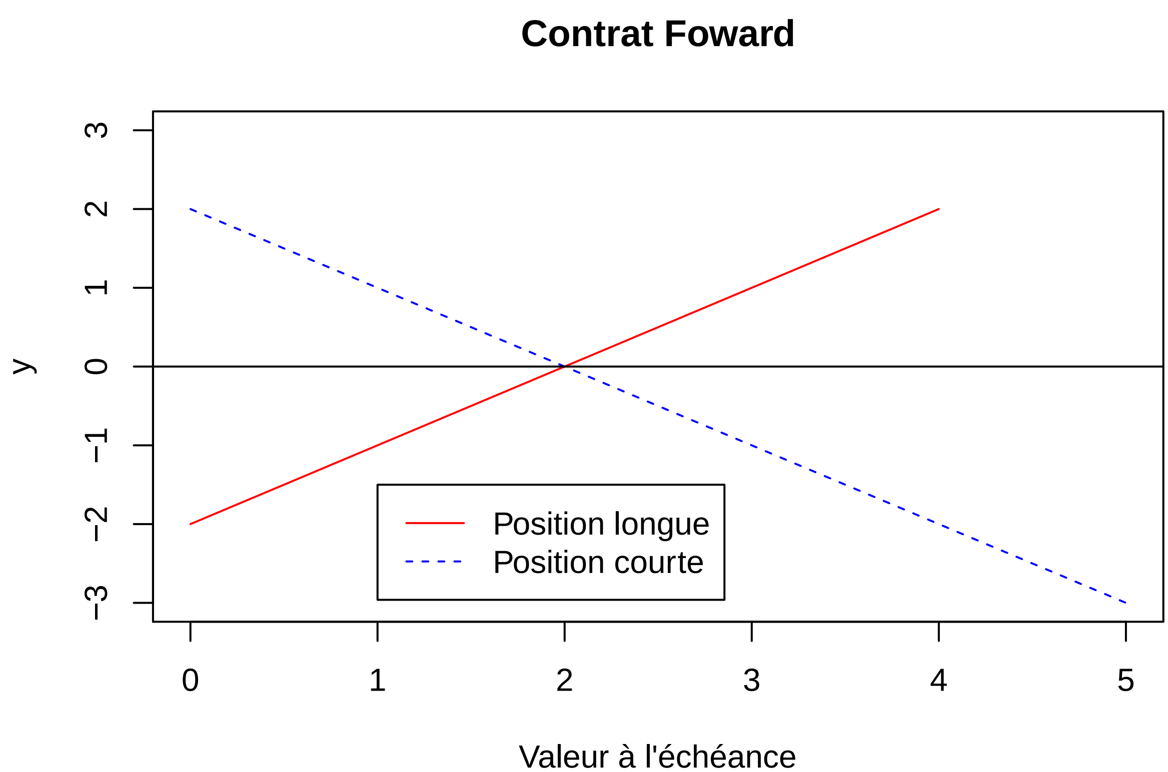
Les "F" sont des facteurs. Il est possible de créer des modèles avec n'importe quels facteurs comme des indices boursiers, par exemple.

3.2 Chapitre 2

3.2.1 Contrat Foward

Achat d'un actif prédeterminé à une valeur initiale S_0, à une date de livraison T et à un prix $F_{0,T}$. Le coût initial est nul. $F_{0,T}$ est le prix anticipé de l'acftif sous-jacent rendu à la date T. $S_0(1+r_f)^T = F_{0,T}$

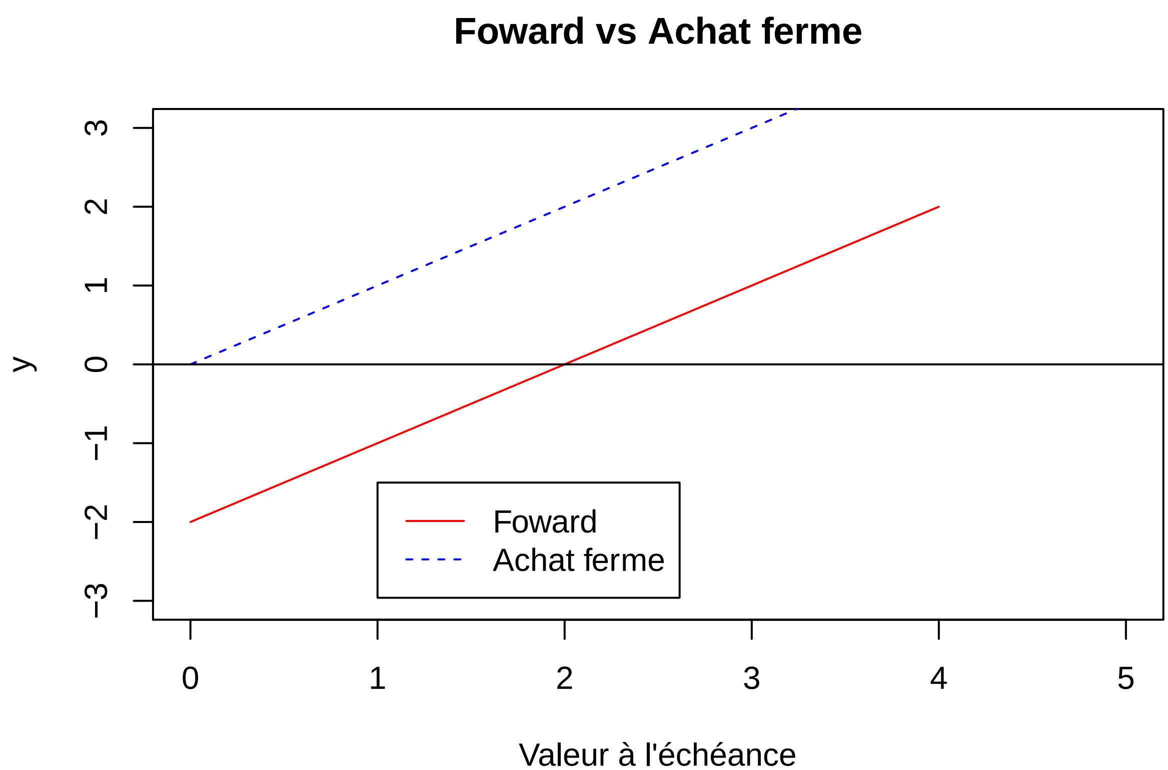
- Valeur à l'échéance:
  - Pour l'acheteur(position longue): $F_{0,T} - S_T$
  - Pour le vendeur(position courte): $S_t - F_{0,T}$



3.2.2 Foward prépayé

Dans certian cas, l'acheteur voudra payé à $t = 0$. Le coût initial sera $F_{0,T}^P$. On achète immédiatemment sans avoir l'actif à la date de transaction. La position de l'acheteur est *capitalisée*. Dans un achat ferme, la position de l'acheteur est pleinement capitalisée. Le contrat foward, lui, implique une position non capitalisée.

Temps	Acheteur	Vendeur
$t = 0$	$-F_{0,T}^P$	$F_{0,T}^P$
$t = T$	S_T	$-S_T$



Pour recréer les cashflows d'un contrat foward avec un achat ferme, on finance l'achat ferme avec un emprunt au taux sans risque.

Temps	Achat ferme	+ Emprunt	= Foward
$t = 0$	$-S_0$	S_0	$\varnothing$
$t = T$	S_T	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

On peut aussi recréer les cashflows d'un achat ferme avec un foward et en investissant la valeur actualisée de $F_{0,T}$. $F_{0,T}(1 + r_f)^{-T} = S_0(1 + r_f)^T(1 + r_f)^{-T} = S_0$.

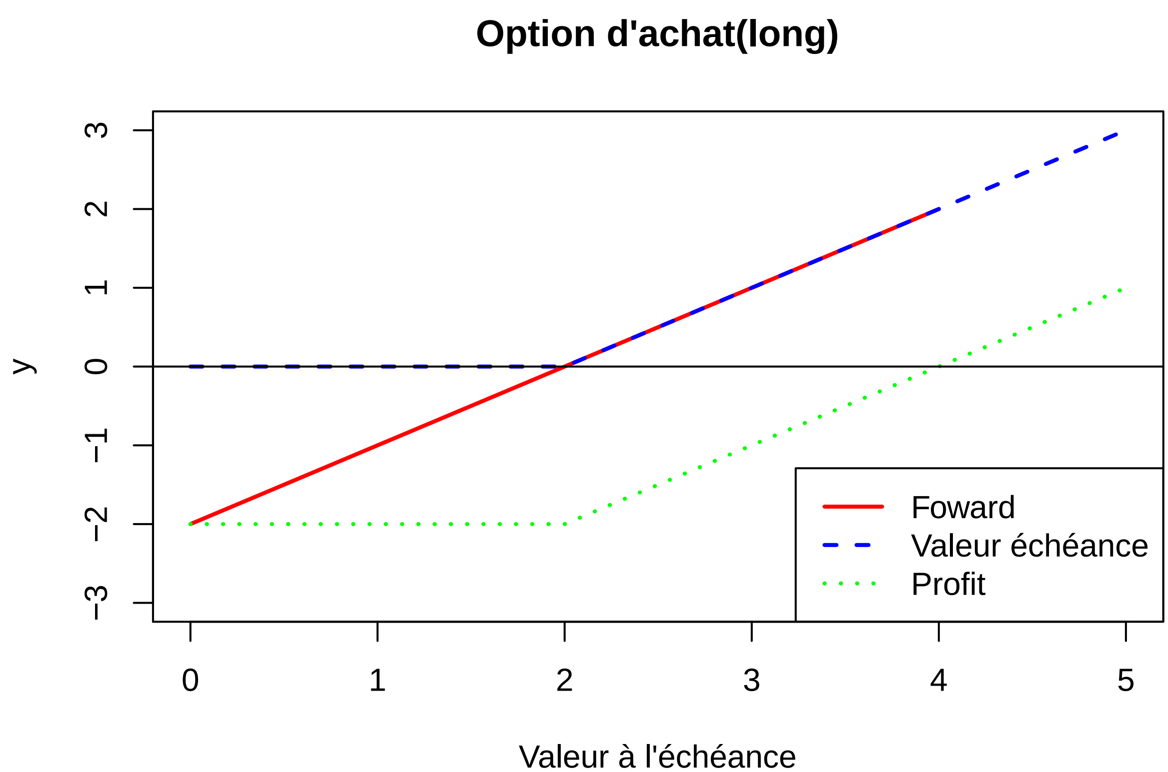
Temps	Dépot	+ Foward	= Achat ferme
$t = 0$	$-S_0$	$\varnothing$	$-S_0$
$t = T$	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$	S_T

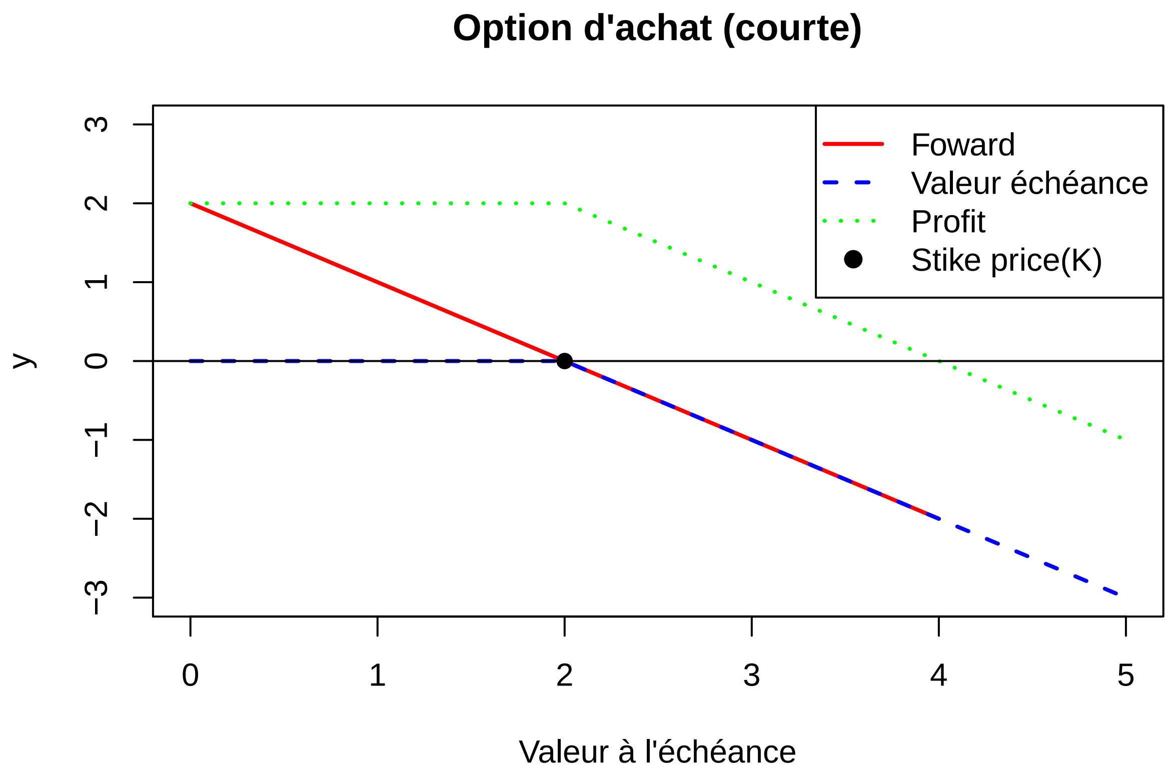
3.2.3 Option d'achat(call)

Contrat qui permet au détenteur(position longue) d'acheter un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price $= K$, à une date d'échéance ou d'içi cette date, s'il le désire.

3 types de levées: 1. Européenne (à la date T) 2. Américaine (d'içi la date T) 3. Bermudienne (à certains moments d'içi T)

Profit		
Actif SJ	Acheteur	Vendeur
$S_T > K$	$S_T - K - C(K,T)(1 + r_f)^T$	$K - S_T + C(K,T)(1 + r_f)^T$
$S_T < K$	$-C(K,T)(1 + r_f)^T$	$C(K,T)(1 + r_f)^T$



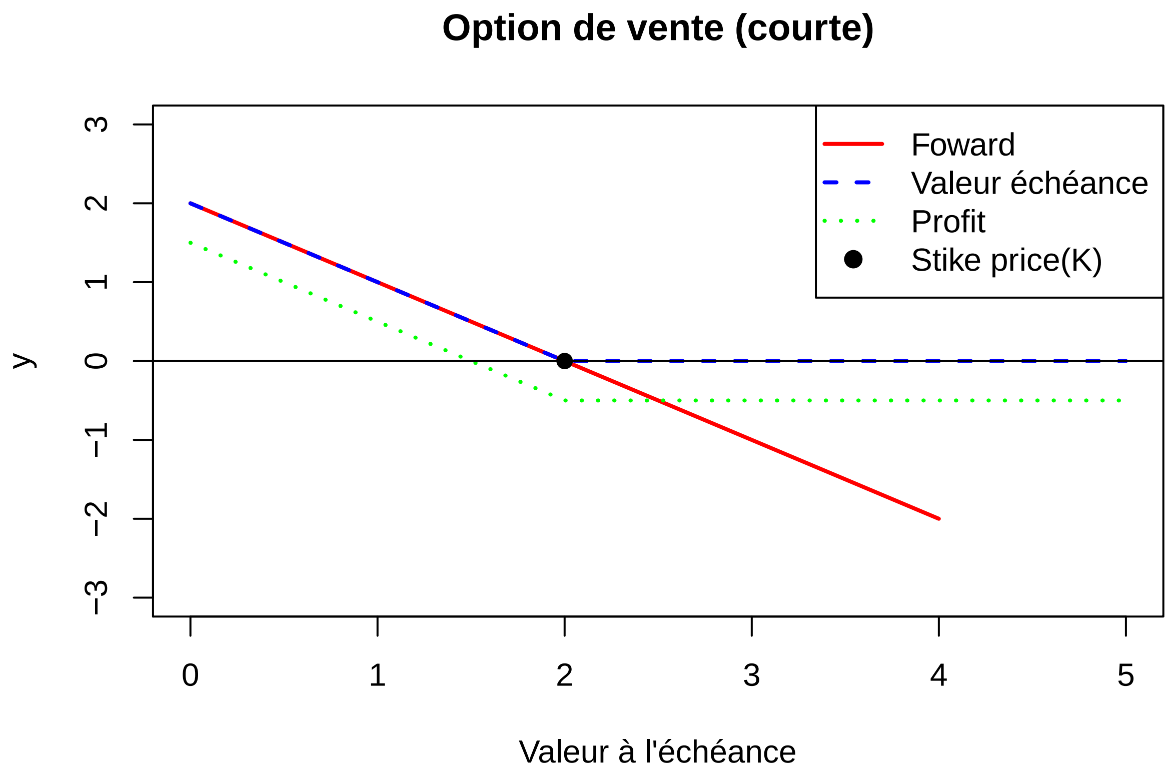


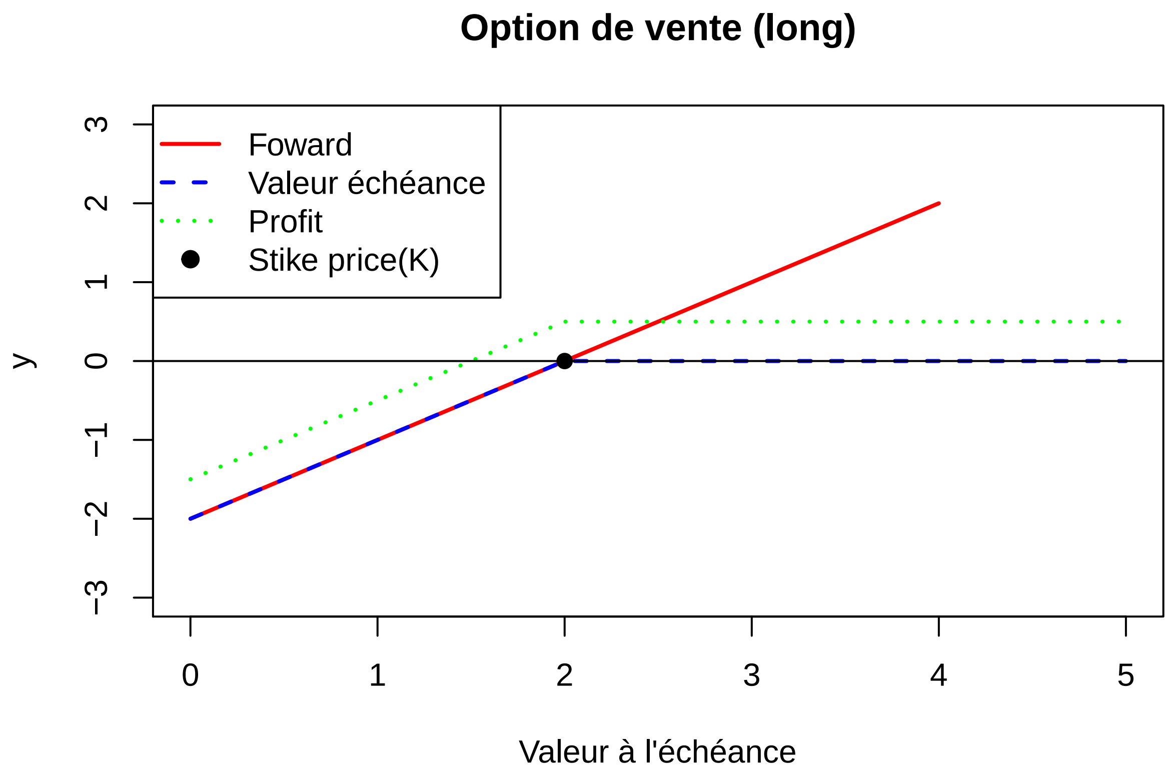
	Valeur à l'échéance
Acheteur	$max(0; S_T - K)$
Vendeur	$-max(0; S_T - K)$

3.2.4 Option de vente(put)

Contrat qui permet au détenteur(position courte) de vendre un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price $= K$, à une date d'échéance ou d'içi cette date, s'il le désire. Le vendeur(position longue) de l'option devra acheter le SJ à ce prix si le détenteur(acheteur) le désire.

Option de vente		
Position	Profit	Valeur à l'échéance
Acheteur	$max(0; K - S_T) - P(K,T)(1 + r_f)^T$	$max(0; K - S_T)$
Vendeur	$P(1 + r_f)^T - max(0; K - S_T)$	$-max(0; K - S_T)$


Option de vente (courte)
Foward
Valeur échéance
Profit
Stike price(K)
y
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
1
2
3
4
5
Valeur à l'échéance


Option de vente (long)
Foward
Valeur échéance
Profit
Stike price(K)
y
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
1
2
3
4
5
Valeur à l'échéance

Chapter 4

Preuves

4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile

Proof.

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(u)}(x) &= P(F_X^{-1} \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

$\square$

4.2 Fonction Stop-Loss(1.3)

Proof.

$$\begin{aligned} \Pi_X(d) &= E[\max(X-d,0)] \\ &= E[X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}] \\ &= E[X \times 1_{\{X>d\}}] - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

$\square$

4.3 Tvar

4.3.1 Expresion alternative 1(1.6.1)

Proof. On applique 1.4.1, ainsi:

$$\begin{aligned} \mathrm{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)} \int_k^1 \mathrm{VaR}_k(u)\, du \\ &= \frac{1}{1-k}(\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X))) + \mathrm{VaR}_k(X) \end{aligned}$$

$\square$

4.3.2 Expression alternative 2(1.6.2)

Proof. On remplace $\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X))$ dans 4.3.2 par sa définition 1.3

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_k(X) &= \mathrm{VaR}_k(X) + \frac{1}{(1-k)}(E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{VaR}_k(X)\bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X))) \\
&= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{Var}_k(X)(\bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - (1-k))] \\
&= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{Var}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k)]
\end{aligned}$$

□

Pour une V.A. continue $\mathrm{VaR}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k) = 0$ donc,

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}]}{P(X > \mathrm{VaR}_k(X))} = E[X|X > \mathrm{VaR}_k(X)]$$

4.3.3 Expression alternative 3(1.6.3)

On fait la preuve à partir de l'expression alternative 2:

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{VaR}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k)] \\
&= \frac{1}{(1-k)}[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}} + X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}} - X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] \\
&- \mathrm{VaR}_k(X)(1 - \bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - (1-(1-k))) \\
&= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X\geq\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + \mathrm{VaR}_k(X)[(1-k) - P(X > \mathrm{VaR}_k(X))]\} \\
&= \frac{1}{(1-k)}\{E[X \times 1_{\{X\geq\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - (E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \mathrm{VaR}_k(X)) \times \mathrm{VaR}_k(X))\}
\end{aligned}$$

Deux cas possibles:\ 1. V.A. discrète $P(X = \mathrm{VaR}_k(X)) > 0$ \ 2. V.A. continue $P(X = \mathrm{VaR}_k(X)) = 0$ \ \
Donc la portion $(E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \mathrm{VaR}_k(X)) \times \mathrm{VaR}_k(X)) = \mathrm{VaR}_k(X)[1 - \frac{P(X\geq\mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)}]$ □

Propriété

Sous-additivité

3 preuves. La première est basée sur les statistiques d'ordre, la deuxième est basée sur la représentation de la TVaR par la stop-loss.

Proof. 1er lemme: Soit une V.A. X quelconque, dont $E[X] < \infty$.
Soit m réalisations indépendantes de X: $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$.

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{n} X^{[j]}\right)}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor},\ \text{pour } \lfloor m\kappa\rfloor < m$$

Où,

$$\lfloor x \rfloor = \text{partie entière de } x$$
$$X^{[1]} \leq X^{[2]} \leq \cdots \leq X^{[m]} = \text{réalisations triées de} X$$

2e lemme:
Soit les réalisations : $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$
On définit $X^{[1]} \leq X^{[2]} \leq \cdots \leq X^{[m]}$ comme les réalisations triées de X.

$$\sum_{j=m-1}^{m} X^{[j]} = \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)},\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq m\}$$
$$\sum_{j=m-2}^{m} X^{[j]} = \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)} + X^{(j_3)},\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq m\}$$
$$\sum_{j=k_0+1}^{m} X^{[j]} = \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)} + \cdots + X^{(j_{m-k_0})},\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{m-k_0} \leq m\}$$

Soit les V.A. X_1, X_2 avec $E[X_i] < \infty,\ i = 1, 2.$
$S = X_1 + X_2$

Avec le 1er lemme:

$$\text{TVaR}_\kappa(S) = \frac{\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^{n} S^{[j]}\right)}{\lfloor m(1-\kappa) \rfloor}$$

On développe $\sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^{m} S^{[j]}$ en utilisant le 2e lemme et on pose $\kappa_0 = \lfloor m\kappa \rfloor$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\lfloor m\kappa \rfloor+1}^{m} S^{[j]} &= \sup\{S^{(j_1)} + \cdots + S^{(j_{m-\lfloor m\kappa \rfloor})}, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\lfloor m\kappa \rfloor} \leq m\} \\
&= \sup\{\left(X_1^{(j_1)} + X_2^{(j_1)}\right) + \left(X_1^{(j_2)} + X_2^{(j_2)}\right) + \cdots + \left(X_1^{(j_{m-\kappa_0})} + X_2^{(j_m-\kappa_0)}\right) \\
&, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&= \sup\{\left(X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)} + \cdots + X_1^{(j_{m-\kappa_0})}\right) + \left(X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)} + \cdots + X_2^{(j_{m-\kappa_0})}\right) \\
&, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&\leq sup\{\left(X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)} + \cdots + X_1^{(j_{m-\kappa_0})}\right), 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&+ sup\{\left(X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)} + \cdots + X_2^{(j_{m-\kappa_0})}\right), 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&= \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_1^{[j]} + \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_2^{[j]}
\end{aligned}$$

On applique le 1er lemme de chaque coté de l'innégalité $\sum_{j=\kappa_0+1}^{m} S^{[j]} \leq \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_1^{[j]} + \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_2^{[j]}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa(S) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} S^{[j]} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_1^{[j]} + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_2^{[j]} \\
&= \mathrm{TVaR}_\kappa(X_1) + \mathrm{TVaR}_\kappa(X_2)
\end{aligned}
$$

□

4.4 Biais moyenne échantillonale (voir 2.18.1)

Proof.

$$
\begin{aligned}
B(\hat{\theta}_n) &= E[\bar{X}_n] - E[X] \\
&= E[X] - E[X] = 0
\end{aligned}
$$

□

4.5 Biais variance échantillonale (voir 2.18.1)

Proof.

$$
\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2)) \\
&= \frac{1}{n-1}[(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - \frac{2}{n-1}(\bar{X}_n \sum_{i=1}^{n} X_i) + \frac{n}{(n-1)}((\bar{X}_n)^2)] \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - \frac{n}{(n-1)}(\bar{X}_n^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[S_n^2] &= E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n})] - E[\frac{n}{(n-1)}(\bar{X}_n)] \\
&= \frac{n}{n-1}((Var(X) + E^2[X])) - \frac{1}{(n-1)}(Var(X)) - \frac{n}{n-1}(E[X^2]) \\
&= Var(X)
\end{aligned}
$$

$$
B(S_n^2) = Var(X) - \sigma^2 = 0
$$

□

4.6 Convergence (voir 2.18.3)

Proof. On prouve avec Tchebycheff
Un estimateur sans biais est convergent si:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\text{On fixe } \epsilon > 0, \\
P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) &= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \epsilon) \\
&= P(|\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]| > \frac{\epsilon \times \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}) \\
&\le \frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2}
\end{aligned}$$

Donc si $Var(\hat{\theta}_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, $\hat{\theta}_n$ est convergent □

4.7 Téorème de Rao-Blackwell (voir section 2.23)

Puisque T est exhaustive pour θ, la distribution conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ sachant T ne dépend pas de θ. Alors,

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

ne dépend pas de θ. Donc, θ_n^* est une statistique. Par l'espérance totale,

$$E[\theta_n^*] = E[E[\hat{\theta}_n|T]] = E[\hat{\theta}_n] = \theta,$$

θ_n^* est donc sans biais. Par la variance totale,

$$\begin{aligned}
var(\hat{\theta}_n) &= var(E[\hat{\theta}_n|T]) + E[var(\hat{\theta}_n|T)] \\
&= var(\theta_n^*) + E[var(\hat{\theta}_n|T)]
\end{aligned}$$

Sachant que

$$E[var(\hat{\theta}_n|T)] \ge 0$$

$$var(\theta_n^*) \le var(\hat{\theta}_n)$$