Formules et notes

Nicolas Bellemare

2019-03-24

Contents

Preface

Chapter 1

Introduction actuariat 2

1.1 Théorème de la fonction quantile

Theorem 1.1.

$$\begin{gathered} U \sim Unif(0,1) \\ Y = F_x^{-1}(u) \Rightarrow Y \sim X \\ F_Y(x) = F_{F_X^{-1}(u)}(x) = F_X(x)\, pour\, x \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

ainsi:

$$X = F_X^{-1}(u)$$

Voir preuve 4.1

1.2 Espérance tronqué

$$\begin{aligned} E[X \times 1_{\{X \geq x\}}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \times 1_{\{y \geq x\}} f_X(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0 \times f_X(y) dy + \int_{x}^{\infty} y f_X(y)\, dy \\ &= \int_{x}^{\infty} y f_X(y)\, dy \end{aligned}$$

1.3 Fonction Stop-Loss

$$\Pi_X(d) = E\left[\max(X-d,0)\right], \quad \text{pour}\, d\, \in \mathbb{R}$$

Voir preuve 4.2

1.3.1 Variable continue

$$\Pi_X(d) = \int_0^{\infty} \max(X-d,0)\, f_X(x)\, dx$$

1.3.2 Variable discrète sur $(0, 1h, 2h, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
f_X(kh) =& P(X = kh),\ k \in \mathrm{N},\ h > 0,\ d = k_0 h \\
\\
\Pi_X(k_0 h) =& E[\max(X - k_0 h, 0)] \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h, 0) P(X = kh) \\
=& \sum_{k_0=k+1}^{\infty} (kh - k_0 h) P(X = kh)
\end{aligned}
$$

1.3.3 Propriété

$$
\begin{aligned}
\Pi_X(0) =& \lim_{d \to 0} \Pi_X(d) \\
=& \lim_{d \to 0} E[\max(X - d, 0)] \\
=& E[X]
\end{aligned}
$$

1.4 Fonction quantile

1.4.1 Première forme

$$
\begin{aligned}
\int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du &= \int_k^1 \left[F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k) + F_X^{-1}(k)\right]\, du \\
&= \int_k^1 \left(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k)\right)\, du + F_X^{-1}(k) \int_k^1 (1)\, du \\
&= \int_0^1 \max\left(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0\right)\, du + F_X^{-1}(k)(1-k) \\
&= E\left[\max(F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(k),\, 0)\right] + (1-k) F_X^{-1}(k) \\
&= E\left[\max(X - F_X^{-1}(k),\, 0)\right] + (1-k) F_X^{-1}(k)
\end{aligned}
$$

1.4.2 Deuxième forme

$$
\int_k^1 F_X^{-1}(u)\, du = \Pi_X\left(F_X^{-1}(k)\right) + (1-k) F_X^{-1}(k)
$$

En remplaçant $\Pi_X(F_X^{-1}(k))$ par 4.2 on obtient:

$$
\begin{aligned}
&= E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}\right] - F_X^{-1}(k) \bar{F}_X\left(F_X^{-1}(k)\right) + (1-k) F_X^{-1}(k) \\
&= E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(k)\}}\right] + F_X^{-1}(k)\left(F_X(F_X^{-1}(k)) - k\right)
\end{aligned}
$$

1.5 Fonction quantile et espérance

$$
\int_0^1 F_X^{-1}(u)\, du = E\left[F_X^{-1}(x)\right]
$$

$$
\int_0^1 F_X^{-1}(u)(1)\, du = E[X]
$$

Généralisation:

$$\int_0^1 \phi(F_X^{-1}(u))\,du = E[\phi(F_X^{-1}(u))] = E[\phi(X)]$$

1.6 TVaR

$$\mathrm{VaR}_k(X) = F_X^{-1}(k)$$

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\int_k^1 \mathrm{VaR}_u(X)\,du$$

1.6.1 Expression alternative 1

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\Pi_X\left(\mathrm{VaR}_k(X)\right) + \mathrm{VaR}_k(X)$$

Voir preuve 4.3.1

1.6.2 Expression alternative 2

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{1}{1-k}\left(E\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}\right] + \mathrm{VaR}_k(X) \times (F_X\left[\mathrm{VaR}_k(X)\right] - k)\right)$$

Voir preuve 4.3.2

1.6.3 Expression alternative 3

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{P\left(X \geq \mathrm{VaR}_k(X)\right)}{(1-k)} \times E\left[X | X \geq \mathrm{VaR}_k(X)\right] + \left(1 - \frac{P\left(X \geq \mathrm{VaR}_k(X)\right)}{(1-k)}\right) \times \mathrm{VaR}_k(X), \quad k \in (0,1)$$

Voir preuve 4.3.3

Propriété

Sous-additivité

Soit $S = X_1 + X_2$,

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(S) \leq \mathrm{TVaR}_\kappa(X_1) + \mathrm{TVaR}_\kappa(X_2)$$

Voir section 4.3.3

1.7 Transformée de Laplace

Existe pour toute loi de X.

Lien avec $E[X]$:

$$\begin{aligned}
&\text{V.A. X positive tel que } E[X] < \infty \\
(-1)\frac{d}{dt}\mathcal{L}_X(t)|_{t=0} &= (-1)\frac{d}{dt}E\left[e^{-tX}\right]|_{t=0} \\
&= (-1)E\left[\frac{d}{dt}e^{-tX}\right]|_{t=0} \\
&= (-1)E\left[-Xe^{-tX}\right]|_{t=0} \\
&= (-1)E[-X] = E[X]
\end{aligned}$$

Lien avec $E[X^m]$:

$$E[X^m] = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{L}_X(t)|_{t=0}$$

1.8 Bénéfice de mutualisation à mutualiser les risques en utilisant la $TVaR$:

$$\mathrm{BM}_\kappa^{\mathrm{TVaR}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{TVaR}_\kappa(X_i) - \mathrm{TVaR}_\kappa(S_n) \geq 0 \; \kappa \in (0,1)$$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n (X_i)$, un portefeuille de risques identiquement distribués(indep. ou pas), et $W_n = \frac{1}{n} S_n$, la part des coûts totaux par risque.
Soit ρ, une mesure de risque qui satisfait les propriétés de sous-additivité et d'homogénéité.
On déduit que

$$\begin{aligned}
\rho(W_n) &= \rho\left(\frac{1}{n} S_n\right) \\
&= \rho\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)\right) \\
\text{Par homogénéité:} & \\
&= \frac{1}{n} \rho(S_n) \\
\text{Par sous-additivité:} & \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1^n} \rho(X) \\
&= \frac{n}{n} \rho(X) \\
&= \rho(X)
\end{aligned}$$

Cette relation est intéressante si on utilise $\rho = \mathrm{TVaR}_\kappa(X)$ et si on utilise $\rho_\kappa(W_n)$ pour calculer la prime pour un risque d'un portefeuille homogène.

Soit une mesure de risque qui satisfait la propriété de convexité,ie

$$\rho(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho\left(X_i\right),$$

pour $\alpha \geq 0, \; i = 1, 2, \dots, n$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Posons $\alpha_i = \dfrac{1}{n}, \; i = 1, \dots, n$
Donc,

$$
\begin{aligned}
\rho(W_n) &= \rho(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n) \\
&\leq \frac{1}{n}\rho(X_1) + \cdots + \frac{1}{n}\rho(X_n) \\
&= \frac{1}{n}(\rho(X) + \cdots + \rho(X)) \\
&= \frac{1}{n}n\rho(X) = \rho(X)
\end{aligned}
$$

$\rho(W_n) \leq \rho(X)$ si ρ satisfait la propriété de convexité.

Modèles de risque non-vie

1.9 Modèle de base pour X

1. V.A. M = nombre de sinistres pour un risque
2. V.A. B_k = montant du sinistre $k, <; k < in\mathrm{N}^+$

Modèle fréquence sévérité pour X où X = coûts pour un risque

$$X = \begin{cases} 0, & M = 0 \\ B_1, & M = 1 \\ B_1 + B_2, & M = 2 \\ B_1 + B_2 + B_3, & M = 3 \\ \quad \dots \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} 0, & M = 0 \\ \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \end{cases}$$

X est un somme de nombre aléatoire de V.A.

1.9.1 Hypothèses traditionnelles

1. $\underline{B} = B_k,\ k \in \mathrm{N}^+$ forme une suite de V.A. indépendantes
2. $\underline{B}$: forme une suite de V.A. identiquement distribuées.
3. Convention $B_k \sim B,\ k \in \mathrm{N}$
4. $\underline{B}$ est indépendante du nombre de sinistre M

Précisions

1. H1: Les montants des sinistres sont supposés mutuellement indépendants
2. H2: Le montant de sinistre k_1 se comporte comme le montant de sinitre $k_2,\ k_1 \not= k_2$
3. H3: LE nombre de sinistre n'a pas d'impact sur les montants de sinistres

1.10 Espérance de X

$\mathrm{E}[M] < \infty,\ \mathrm{E}[B] < \infty$

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[M]\mathrm{E}[B]$$

On conditionne sur le nombre M de sinistres

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}_M\left[\mathrm{E}[X|M]\right]$$

Où $\mathrm{E}[X|M]$ = V.A.= espérance des coûts pour le risque X conditionnelle au nombre M de sinistres.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X|M=0] &= 0 \\
\mathrm{E}[X|M=1] &= \mathrm{E}[B_1] = \mathrm{E}[B] \\
\mathrm{E}[X|M=2] &= \mathrm{E}[B_1+B_2] = \mathrm{E}[B_1] + \mathrm{E}[B_2] = 2\mathrm{E}[B] \\
\mathrm{E}[X|M=k] &= \mathrm{E}[B_1+\cdots+B_k] = \mathrm{E}[B_1] + \cdots + \mathrm{E}[B_k] = k\mathrm{E}[B] \\
&\text{Donc,} \\
\mathrm{E}[X|M] &= M\mathrm{E}[B]
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}_M\left[\mathrm{E}[X|M]\right] \\
\mathrm{E}\left[M\mathrm{E}[B]\right] &= \mathrm{E}[M]\mathrm{E}[B]
\end{aligned}$$

Coûts espérés pour un risque X = (nombre espéré de sinistres)(montant espéré d'un sinistre). Cette relation est valide que si H3 est posée.

1.11 Variance de X

$\mathrm{E}[B^M] < \infty,\ m = 1,2$ et $\mathrm{E}[M^m] < \infty,\ m = 1,2$

On conditionne sur M

$$Var(X) = \mathrm{E}_M\left[Var(X|M)\right] + Var\left(\mathrm{E}[X|M]\right)$$

$$\begin{aligned}
Var(X|M=0) &= 0 \\
Var(X|M=1) &= Var(B_1) = Var(B) \\
Var(X|M=2) &= Var(B_1+B_2) = Var(B_1) + Var(B_2) = 2Var(B) \\
&\text{Donc,} \\
Var(X|M) &= M \times Var(B)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathrm{E}\left[M \times Var(B)\right] + Var\left(M \times \mathrm{E}[B]\right) \\
&= \mathrm{E}[M]Var(B) + Var(M)\mathrm{E}^2[B]
\end{aligned}$$

La variance de X est expliquée par 2 sources:

1. Variabilité associée à la fréquence

2. Variabilité asssociée au montant de sinistre

La loi d'une V.A. X définie par une somme aléatoire de V.A. est appelée une loi composée.
Les lois de bases pour M:

1. Loi de Poisson
2. Loi binomiale négative
3. Loi binomiale

Loi de base pour B:

1. Loi Gamma
2. Loi lognormale
3. Loi Pareto

1.12 Fonction de répartition

On suppose que B est une V.A. positive. On conditionne sur M.

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X \leq x | M = k) \times P(M = k) \\
&= P(M = 0) + P(B_1 \leq x) \times P(M = 1) \\
&+ P(B_1 + B_2 \leq x) \times P(M = 2) + \dots \\
&= P(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(M = k) \times P(B_1 + \cdots + B_k \leq x) \\
&= P(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(M = k) \times F_{B_1 + \cdots + B_k}(x)
\end{aligned}
$$

1. F_X est intéressante si on connait l'expression de $F_{B_1+\cdots+B_k}(x)$
2. Si $B_1 \sim \cdots \sim B_k \sim Gamma$, on sait que $B_1 + \cdots + B_k \sim Gamma(k\alpha, \beta)$
3. Si $B \sim LN$ ou Pareto, on ne sait pas l'expression de $F_{B_1+\cdots+B_k}(x)$
4. Pour la somme de 1 à l'∞, on fixe k_0 tel que $\bar{F}_M(k_0) < \epsilon$,ex:($10^{-7}$).

1.13 FGP de M

$$P_M(S) = \mathrm{E}[S^M] = \sum_{k=0}^{\infty} P(M = k) S^k$$

où $S \in [0, 1]$:les valeurs de S où la somme converge.

1.14 TLS de B

$$\mathcal{L}_B(t) = \mathrm{E}[e^{-tB}], \text{ pour } t \geq 0$$

1.15 TLS de X

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}[e^{-tX}]$$

On conditionne sur M:

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}_M\left[\mathrm{E}[e^{-tX}|M]\right]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{-tX}|M=0] &= 1 \\
\mathrm{E}[e^{-tX}|M=1] &= \mathrm{E}[e^{-tB_1}|M=1] \\
&= \mathrm{E}[e^{-tB_1}] \rightarrow \text{indépendante de } M \\
&= \mathrm{E}[e^{-tB}] \rightarrow B_1 \sim B \\
&= \mathcal{L}_B(t) \\
\mathrm{E}[e^{-tX}|M=2] &= \mathrm{E}[e^{-t(B_1+B_2)}|M=2] \\
&= \mathrm{E}[e^{-t(B_1+B_2)}] \\
&= \mathrm{E}[e^{-tB_1}e^{-tB_2}] \\
&= \mathrm{E}[e^{-tB_1}]\mathrm{E}[e^{-tB_2}] \\
&= \mathrm{E}^2[e^{-tB}] \\
&= \mathcal{L}_B^2(t)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{E}[e^{-tX}|M] = (\mathcal{L}_B(t))^M$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(t) &= \mathrm{E}\left[(\mathcal{L}_B(t))^M\right] \\
&= P_M\left(\mathcal{L}_B(t)\right), \ t \geq 0
\end{aligned}$$

1.16 VaR de X

Supposons,

$$F_{B_1}(0) = F_{B_2}(0) = \cdots = F_B(0) = 0$$

Alors,

$$F_X(0) = P(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(M=k)F_{B_1+\cdots+B_k}(0) = P(M=0)$$

Ainsi,

$$F_X^{-1}(u) = 0, \ u \in (0, F_X(0)]$$

Pour $u \in (F_X(0), 1)$ et si $P(M > 1) > 0$, il faut un outil d'optimisation pour la majorité des V.A. de M pour inverser F_X. Généralement, on peut évaluer F_X quand $B \sim \mathit{Gamma}$ ou $B \sim \mathit{invGauss}$.

1.17 Espérance tronquée

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>b\}}|M\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>b\}}|M=k\right] P(M=k),\ b \geq 0 \\
&= P(M=0)(0) + P(M=1)\mathrm{E}\left[B_1 \times 1_{\{B_1>b\}}|M=1\right] \\
&+ P(M=2)\mathrm{E}\left[B_1 + B_2 \times 1_{\{(B_1+B_2)>b\}}|M=2\right] \\
&+ P(M=3)\mathrm{E}\left[(B_1 + B_2 + B_3) \times 1_{\{(B_1+B_2+B_3)>b\}}|M=3\right] \\
&+ \dots \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} P(M=k)\mathrm{E}\left[(B_1 + \cdots + B_k) \times 1_{\{(B_1+\cdots+B_k)>b\}}\right]
\end{aligned}$$

Cette expression est intéressante si on connait la loi de $B_1 + \cdots + B_k$ ou si on peut évaluer $\mathrm{E}\left[(B_1 + \cdots + B_k) \times 1_{\{(B_1+\cdots+B_k)>b\}}\right]$. On peut utiliser l'expression quand $B \sim Gamma$ ou $B \sim invGauss$, mais on ne peut pas l'utiliser si $B \sim Pareto$ ou $B \sim LNorm$ et quand $P(M > 1) > 0$.

1.18 TVaR de X

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_\kappa(X)\}}\right] \\
&+ \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{VaR}_\kappa(X)\left(F_X(\mathrm{VaR}_\kappa(X)) - \kappa\right)
\end{aligned}$$

On suppose que B suit une loi continue avec $F_B(0) = 0$.
On fixe $\kappa \in (0, F_X(0))$, $\mathrm{VaR}_\kappa(X) = 0$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>0\}}\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{E}[X]
\end{aligned}$$

On fixe $\kappa \in (F_X(0), 1)$. Donc, $\mathrm{VaR}_\kappa(X) > 0$ et ses valeurs se trouvent dans la partie continue de X.
Alors,

$$F_X\left(\mathrm{VaR}_\kappa(X)\right) = \kappa$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{E}\big[X \times 1_{\{X>\underbrace{\mathrm{VaR}_\kappa(X)}_{\text{constante}}\}}\big] \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} P|(M=k)\mathrm{E}\left[(B_1 + \cdots + B_k) \times 1_{\{(B_1+\cdots+B_k)>\mathrm{VaR}_\kappa(X)\}}\right]
\end{aligned}$$

1.19 Cas particulier $M \sim Bern(q)$

$$X = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

On peut noter

$$X = M_X B$$

où $M \sim Bern(q),\ ie\ P(M=1) = q$ et $P(M=0) = 1-q$

1.19.1 Espérance de X

$$\mathrm{E}[X] = q\mathrm{E}[B]$$

1.19.2 Variance de X

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(M)\mathrm{E}[B]^2 + \mathrm{E}[M]Var(B) \\ &= q(1-q)\mathrm{E}[B]^2 + qVar(B) \end{aligned}$$

1.19.3 Fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(M=0) + P(M=1)F_B(x),\ x \geq 0 \\ &= 1 - q + qF_B(x) \end{aligned}$$

1.19.4 TLS de X

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= P_M(\mathcal{L}_B(t)),\ \text{où } P_M(S) = 1-q+qS,\ S \in (0,1) \\ &= 1 - q + q\mathcal{L}_B(t),\ t \geq 0 \end{aligned}$$

1.19.5 VaR

Soit B tel que $F_B(0) = 0$. Alors,

$$F_X(0) = 1 - q + qF_B(0) = 1 - q = P(M=0) = P(X=0)$$

On fixe $\kappa \in (0, F_X(0)] \in (0, 1-q]$

$$\mathrm{VaR}_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = 0$$

On suppose que B est continue.
On fixe $\kappa \in (F_X(0), 1)$. Alors,

$$F_X^{-1}(u), u \in (F_X(0), 1)$$

est la solution de

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x) = u$$

On déduit

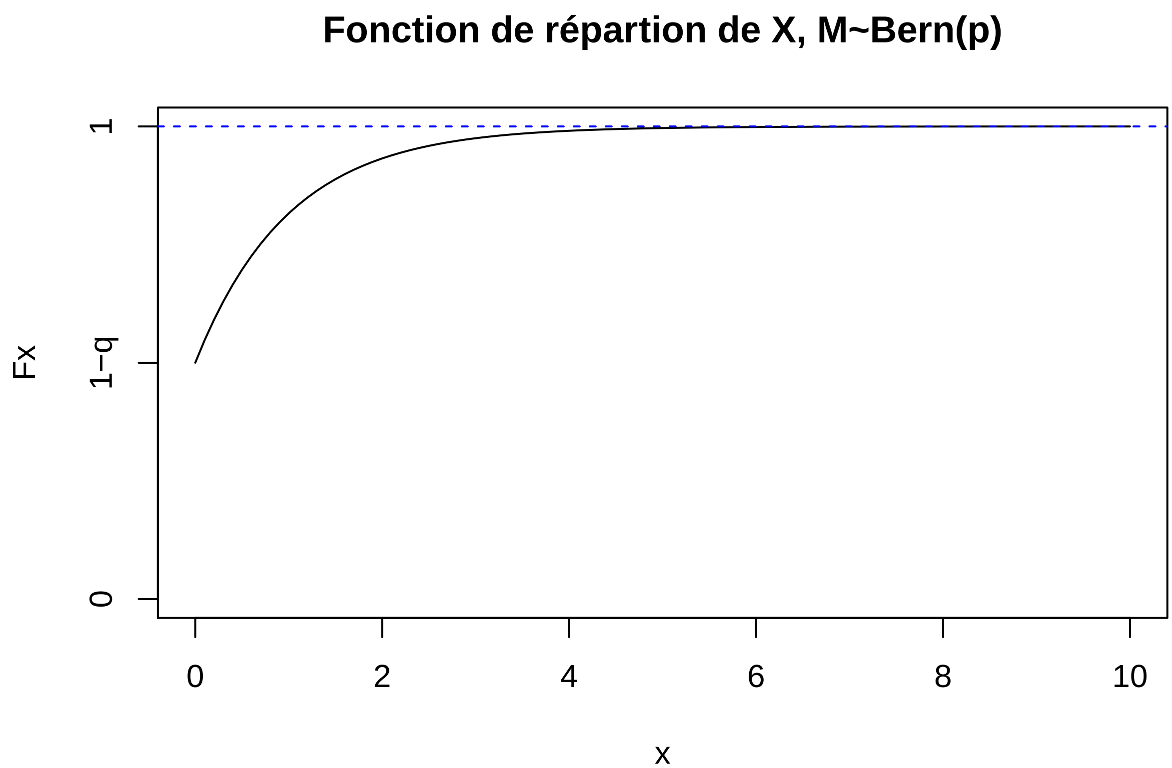
$$F_B(x) = \frac{u - (1-q)}{q}$$

On obtient

$$F_X^{-1}(u) = F_B^{-1}\left(\frac{u-(1-q)}{q}\right),\ u \in (\underbrace{1-q}_{F_X(0)}, 1)$$

Puisque $u \in (1-q,1) \Rightarrow \dfrac{u-(1-q)}{q} \in (0,1)$ et $F_X^{-1}\dfrac{u-(1-q)}{q}$ existe.
Ainsi,

$$\mathrm{VaR}_\kappa(X) = \begin{cases} 0, & 0 < u \leq 1-q \\ \mathrm{VaR}\left(\dfrac{u-(1-q)}{q}\right)(B), & 1-q < u < 1 \end{cases}$$



1.19.6 Esprance tronquée

$$\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] = P(M=1)\mathrm{E}\left[B \times 1_{\{B>b\}}\right], \text{ pour } b \geq 0$$

1.19.7 TVaR

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_\kappa(X)\}}\right] + \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{VaR}_\kappa(X)\left(F_X(\mathrm{VaR}_\kappa(X)) - \kappa\right)$$

On suppose $F_B(0) = 0$.

$$\text{Pour la partie: } \mathrm{VaR}_\kappa(X)\left(F_X(\mathrm{VaR}_\kappa(X)) - \kappa\right) \begin{cases} \mathrm{VaR}_\kappa(X) = 0, & \text{si } \kappa \in (0, F_X(0)] \\ F_X(\mathrm{VaR}_\kappa(X)) = \kappa, & \text{si } \kappa \in (F_X(0), 1) \end{cases}$$

Donc, dans les deux cas,

$$\frac{1}{1-\kappa}\mathrm{VaR}_\kappa(X)\left(F_X(\mathrm{VaR}_\kappa(X)) - \kappa\right) = 0$$

On suppose que B est continue.

$$\begin{aligned}\mathrm{TVaR}_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{E}\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_\kappa(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa}P(M=1)\mathrm{E}\left[B \times 1_{\{B>\mathrm{VaR}_\kappa(X)\}}\right]\end{aligned}$$

1.20 Lois de fréquence

La loi de Poisson est fondamentale en actuariat. On l'utilise pour modeliser le nombre de sinistres pour le contrat.

Caractéristiques $M \sim Pois(\lambda)$

1. $\mathrm{E}[M] = \lambda$
2. $Var(M) = \lambda$

1.20.1 Loi de X: loi Poisson composée

1.20.1.1 Fgp de M

$$P_M(S) = e^{\lambda(S-1)},\ s \in (0,1)$$

1.20.1.2 TLS de X

$$\mathcal{L}_X(t) = P_M\left(\mathcal{L}_B(t)\right) = e^{\lambda(\mathcal{L}_B(t)-1)}$$

1.20.1.3 Espérance de X

Supposons $\mathrm{E}[B] < \infty$

$$\mathrm{E}[X] = \lambda\mathrm{E}[B]$$

1.20.1.4 Variance de X

Supposons $Var(B) < \infty$
Alors,

$$\begin{aligned}Var(X) &= \lambda\mathrm{E}[B]^2 + \lambda Var(B) \\ &= \lambda\mathrm{E}[B^2]\end{aligned}$$

1.20.2 Loi de Tweedie

Est utilisée dans la tarification en assurance dommages.
Soit $B \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned}F_X(x) &= P(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(M=k)H(x;\alpha k,\beta),\ x \geq 0 \\ &= e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}H(x;\alpha k,\beta)\end{aligned}$$

Note:
En actuariat, une loi de fréquence où $Var(M) = \mathrm{E}[M]$ pose un problème, car cette propriété n'est pas toujours observé en pratique. On observe plutôt $Var(X) \geq \mathrm{E}[M]$.

1.20.3 Loi binomiale négative

Elle présente une alternative à la loi de Poisson en IARD. Elle est un loi “Poisson mélange”.
Caractéristiques:

1. $M \sim BinNeg(r, q),\ r \in (0, \infty),\ q \in (0, 1)$
2. Loi de $X \sim BinNeg(r, q, F_B)$
3. $\mathrm{E}[M] = \dfrac{r(1-q)}{q}$
4. $Var(M) = \dfrac{r(1-q)}{q^2} = \dfrac{\mathrm{E}[M]}{q} \geq \mathrm{E}[M],\ \text{pour } q \in (0, 1)$

1.20.4 Loi Poisson mélange

La famille de lois Poisson mélange est importante en assurances de dommages. Elles sont utilisées pour modéliser le nombre, ou le montant, de sinistres pour un portefeuille hétérogène de risque.

Soit Θ une V.A. de mélange tel que

$$\mathrm{E}[\Theta] = 1$$

On suppose que $M|\Theta = \theta \sim Pois(\theta\lambda)$, une loi Poisson mélange.

1.20.4.1 Espérance de M

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[M] &= \mathrm{E}_\Theta\left[\mathrm{E}[M|\Theta]\right] \\
&= \mathrm{E}[\Theta\lambda] = \lambda\mathrm{E}[\Theta] = \lambda
\end{aligned}$$

Car, $\mathrm{E}[M|\Theta] = \theta\lambda$

1.20.4.2 Variance de M

$Var(\Theta) < \infty$

$$\begin{aligned}
Var(M) &= \mathrm{E}_\Theta\left[Var(M|\Theta)\right] + Var\left(\mathrm{E}[M|\Theta]\right) \\
&= \mathrm{E}[\lambda\Theta] + Var(\lambda\Theta) \\
&= \lambda\mathrm{E}[\Theta] + \lambda^2 Var(\Theta) \\
&= \lambda + \lambda^2 Var(\Theta) = \lambda(1 + Var(\Theta)) > \lambda = \mathrm{E}[M]
\end{aligned}$$

Le V.A. Θ représente ainsi l’incertitude liée aux caractéristiques cachées des assurés. Cette variable permet de tenir compte de l’hétérogénéité souvent présente dans un portefeuille de contrat d’assurance de dommages.

1.20.4.3 Fgp de M

On suppose que la fgm de Θ existe.

$$\begin{aligned}
P_M(S) &= \mathrm{E}[S^M] \\
&= \mathrm{E}_\Theta\big[\underbrace{\mathrm{E}[S^M|\Theta]}_{P_{M|\Theta}(S)}\big] \\
&= \mathrm{E}[e^{\lambda\Theta(S-1)}] \\
&= M_\Theta\left(\lambda(S-1)\right)
\end{aligned}$$

Si Θ est une V.A. discrète:

$$P(\Theta = \theta_j) = \alpha_j,\ j = 1, 2, \ldots,\ \text{et } 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_k$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(M = k) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(\Theta = \theta_j) P(M = k | \Theta = \theta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{e^{-\lambda \theta_j} (\lambda \theta_j)^k}{k!} \end{aligned}$$

Si Θ est une V.A. continue strictement positive:

$$\begin{aligned} P(M = k) &= \int_0^{\infty} P(M = k | \Theta = \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} \frac{(\lambda \theta)^k}{k!} f_{\Theta}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Si $\Theta \sim Gamma(\alpha = r, \beta = r)$,

$$\mathrm{E}[\Theta] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r} = 1$$

On veut identifier la loi de M à partir de sa fgp

$$\begin{aligned} P_M(S) &= M_{\Theta}\left(\lambda(S-1)\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - \lambda(S-1)}\right)^{\alpha} \\ &= \left(\frac{r}{r - \lambda(S-1)}\right)^{r} \end{aligned}$$

Cela ressemble à une fgp d'une loi binomiale négative.
On sait que

$$\mathrm{E}[M] = \frac{r(1-q)}{q} = \frac{r}{r}\lambda$$

Donc,

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{(1-q)}{q}$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
P_M(S) &= \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(S-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{(1-q)}{q}(S-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{q-(1-q)(S-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)S}\right)^r \\
&= \text{la fgp d'une BinNeg}
\end{aligned}
$$

$$M \sim BinNeg(r,q),\ \text{où } r \in \Re^+ \text{ et } q \in (0,1)$$

Chapter 2

Stats

2.1 Définitions

Observation: réalisation d'une variable aléatoire

Échantillon aléatoire de F: ensemble de V.A. iid

Statistiques: fonction d'un échantillon aléatoire et de constantes connues

Paramètres: quantité d'intérêt($E[X]$, $Var(x)$, etc) ou le paramètre θ d'un modèle paramétrique.

Statistique exhaustive: statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Estimateur: Statistique $S(X_1, \ldots, X_n)$ qui prend des valeurs qu'on espère proche de θ noté $\hat{\theta}_n$(Variable aléatoire)

Estimation de θ: données observées $x_1, x_2, \ldots$ de la valeur observée $\hat{\theta}$, $s(x_1, x_2, \ldots)$(réalisations)

2.2 Moyenne échantilonnale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.3 Variance échantillonale:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

2.4 Loi faible des grands nombres:

Soit $X_1, X_2, \ldots$, une suite de V.A. iid. On suppose $var(X_i) < \infty$ et $E[X] = \mu$, lorsque $n \to \infty$

$$P\left(|\left(\bar{X}_n - \mu\right)| > \epsilon\right) \to 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$\bar{X}_n$ converge en probabilité vers μ

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Preuve par Tchebycheff:

$$P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon\right) \leq \frac{var(X_i)}{n\epsilon^2}$$

2.5 Statistiques d'ordre d'un échantillon:

$$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$
$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$
$$F_{X_{(n)}}(x) = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!1(n-k)!} F_X(x)^{k-1}(1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

2.6 Distribution de $\bar{X}$:

Soit $X_1, \dots, X_n$, un échantillon de $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Utilisation de la distribution d'échantillonage de $\bar{X}_n$:

1. Vérifier une affirmation
2. Trouver un interval plausibe
3. Déterminer une taille d'échantillon minimal

2.7 Somme de normales au carré

Soit $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

Soit $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

$S_n^2 \perp \bar{X}_n$

$$E[S_n^2] = \frac{\sigma^2}{(n-1)} E\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2\right] = \frac{\sigma^2}{(n-1)}(n-1) = \sigma^2$$

2.8 Statistique Student

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$$

2.9 Distribution de la Statistique Student

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1)$$

$$\mathrm{T}_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{S_n^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \times \underbrace{\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}}}}_{\sim \chi^2_{(n-1)}}$$

2.10 Distribution Student

Soit $Z \sim N(0,1)$ et $W \sim \chi^2_{(v)}$ $Z \perp W$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t(v)$$

Propriété

Si $v > 1$: $E[T] = 0$

Si $v > 2$: $Var(T) = \frac{v}{v-2}$
Si $v \to \infty$, $t(v)$ converge vers $N(0,1)$

2.11 Statistique F

Soit $X_i, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Pour comparer: σ_1^2 et σ_2^2

$$\frac{S_n^2}{S_m^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

2.12 Distribution F

Soit $W_1 \sim \chi^2_{(v_1)}$, $W_2 \sim \chi^2_{(v_2)}$

$W_1 \perp W_2$

$$F = \frac{W_1}{v_1} \div \frac{W_2}{v_2} \quad F \sim F(v_1, v_2)$$

Si $X \sim F(v_1, v_2)$ et $v_2 > 2$ $E\left[X = \frac{v_2}{v_2-2}\right]$

2.13 Comparer variance échantionnale

Soit $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\frac{S_n^2}{\sigma_1^2} \div \frac{S_m^2}{\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

2.14 Lemme de Slutsky

Soit $X_1, X_2, \dots$ et $Y_1, Y_2, \dots$ Lorsque $n \to \infty$ et $X_n \rightsquigarrow X$ et $Y_n \rightsquigarrow c$

1. $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$
2. $X_n \times Y_n \rightsquigarrow X \times c$
3. Si $c > 0$, $\frac{X_n}{Y_n} \rightsquigarrow \frac{X}{c}$

2.15 Théorème Central Limite

Theorem 2.1. *Soit $X_1, \dots, X_n$, un échantillon d'une V.A. quelconque:*

$$Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

quand $n \to \infty$:

$$P(Z_n \leq X) \to \phi(X)$$

Convergence en distribution:

$$Z_n \rightsquigarrow N(0,1)$$

2.16 Distribution Statistique Student lorsqu'on ne connait pas la variance et X ne provient pas d'une loi Normale

$T \not\sim t(n-1)$
Soit $X_1, \dots, X_n$, un échantillon d'une V.A quelconque:
$E[X^4] < \infty$, lorsque $n \to \infty$:

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

2.17 Aproximation de la loi Binomiale avec la loi Normale

$$Z = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0,1)$$

Correction de la continuité:

$$P(Y \leq y) \approx P(Z \leq y + 0.5)$$

2.18 Critères pour évaluer la performance d'un estimateur

2.18.1 Critère 1: Biais

$$B(\hat{\theta}_n) = E\left[\hat{\theta}_n - \theta\right] = E\left[\hat{\theta}_n\right] - \theta$$

Estimateur sans biais:

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Estimateur asymptotiquement sans biais:

$$\lim_{n \to \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Voir preuve 4.4 et 4.5 pour le développement des biais de $\bar{X}_n$ et S_n^2

2.18.2 Critère 2: Variance

Parmi 2 estimateurs sans biais, on préfère celui avec une plus petite variance.

Pour deux estimateur avec biais, on préfère celui avec la plus petite Erreur quadratique moyenne(EQM):

$$EQM\left(\hat{\theta}_n\right) = E\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right] = Var\left(\hat{\theta}_n\right) + \left[B(\hat{\theta}_n)\right]^2$$

2.18.3 Critère 3: Convergence

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ si, quand $n \to \infty$,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

ce qui signifie que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$$

Voir 4.6 pour prouver la convergence

2.19 Efficacité relative

Soit $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$, 2 estimateurs sans biais et convergent.

$$\text{eff}(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{Var(\tilde{\theta}_n)}{Var(\hat{\theta}_n)}$$

Si $\text{eff}(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$, $\hat{\theta}_n$ est préférable, sinon $\tilde{\theta}_n$ est préférable.

2.20 Définition formelle statistique exhaustive

Une statistique exhaustive est une statistique qui contient toute l'information pertinente sur le paramètre visé.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec paramètre θ inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \ldots, X_n)$$

est exhaustive pour θ ssi la distribution conditionnelle de $X_1, \ldots, X_n$ sachant T ne dépend pas de θ.

2.21 Théoreme de factorisation de Fischer-Neyman

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\cdot;\theta)$ et paramètre θ inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \ldots, X_n)$$

est exhaustive pour θ ssi, $\forall\ x_1, \ldots, x_n \ \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1;\theta) \times \cdots \times f(x_n;\theta) = g(t;\theta) \times h(x_1, \ldots, x_n)$$

où

- $g(t;\theta)$ ne dépend de $x_1, \ldots, x_n$ qu'à travers t.
- $h(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend pas de θ.

Avec plus d'un paramètre:

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\cdot;\theta)$ et paramètres $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$ inconnus. Alors, les statistiques

$$T_1 = T_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, T_k = T_k(X_1, \ldots, X_n)$$

sont conjointements exhaustives pour θ ssi, $\forall\ x_1, \ldots, x_n\ \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1;\theta) \times \cdots \times f(x_n;\theta) = g(t_1, \ldots, t_k;\theta) \times h(x_1, \ldots, x_n)$$

où

- $g(t_1, \ldots, t_n;\theta)$ ne dépend de $x_1, \ldots, x_n$ qu'à travers $t_1, \ldots, t_k$.
- $h(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend pas de θ.

2.22 Critère de Lehmann-Scheffé

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec densité $f(\cdot;\theta)$ et paramètre θ inconnu. Alors, la statistique

$$T = T(X_1, \ldots, X_n)$$

est exhaustive minimale pour θ ssi, $\forall\ x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\ \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x_1;\theta) \times \cdots \times f(x_n;\theta)}{f(y_1;\theta) \times \cdots \times f(y_n;\theta)}$$

ne dépend pas de θ ssi

$$T(X_1, \ldots, X_n) = T(Y_1, \ldots, Y_n)$$

2.23 Théorème de Rao-Blackwell

$\hat{\theta}_n$ un estimateur sans biais tel que $var(\hat{\theta}_n) < \infty$. Si T est exhaustive pour θ, la statistique:

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

est un estimateur sans biais et

$$var(\theta_n^*) \leq var(\hat{\theta}_n)$$

Voir section 4.7.

2.24 Estimateur sans biais et de variance minimale(MVUE)

Un estimateur $\hat{\theta}_n$ est sans biais et de variance minimale si:

1. $\hat{\theta}_n$ est sans biais.
2. $\hat{\theta}_n = g(T)$, où T est une statistique exhaustive (minimale) obtenue avec le théorème Fischer-Neymann.

2.24.1 Construire un MVUE

1. Trouver une statistique exhaustive (minimale) T avec le théorème Fischer-Neymann.
2. Trouver une fonction g tel que: $E[g(T)] = \theta$
3. Poser $\hat{\theta}_n = g(T)$.

2.25 Méthode des moments

Si t paramètres sont inconnus, on résout le système à t équations:

$$m_k = E\left[X^k\right], \quad k = 1, \dots, t$$

Les estimateurs obtenus sont appelés les estimateurs des moments.

2.26 Méthode des quantiles

Pour certaine loi, les moments n'existent pas. Pour estimer t paramètres inconnus, on pourrait résoudre le système à t équations:

$$\hat{\pi}_{\kappa j} = VaR_{\kappa j}(X) \quad j = 1, \dots, t$$

2.27 Quantile empirique lissé

Pour un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$ le quantile empirique de niveau $\kappa \in (0, 1)$ est:

$$\hat{\pi}_{\kappa,n} = (1-h)X_{(j)} + hX_{(j+1)} \quad j = \lfloor (n+1)\kappa \rfloor \; et \; h = (n+1)\kappa - j$$

2.28 Fonction de vraissemblance

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution avec fmp ou fdd:

$$f(x; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

où Θ est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des valeurs observées de l'échantillon, la vraisemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$ est définie comme:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \times \cdots \times f(x_n; \theta)$$

2.28.1 Observation

- X est discrète: vraisemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$ est exactement la probabilité d'observer $x_1, \dots, x_n$.
- X est continue: vraisemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$ est la densité et est proportionelle à la probabilité d'observer $x_1, \dots, x_n$.
- la vraisemblance est vue comme une fonction réelle déterministe de θ
- La vraisemblance est l'objet dans le théorème de factorisation de Fischer-Neymann
- la vraisemblance $L(\theta)$ devrait être plus grande pour des valeurs de θ proche de celle du mécanisme générateur de données.
- on estime donc θ par la valeur $\hat{\theta}_n$ qui maximise $L(\theta)$:

$$\hat{\theta}_n = \underset{\theta \in \Theta}{arg\,max}\, L(\theta)$$

2.29 Estimateur du maximum de vraissemblance

Soit $x_1, \dots, x_n$, les valeurs observées d'un échantillon aléatoire de $f(x; \theta)$, où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ sont des paramètres inconnus ($\in \Theta$, l'espace des paramètres). La valeur observée de l'EMV de θ est la valeur $\hat{\theta}$ qui maximise la vraisemblance de θ basée sur $x_1, \dots, x_n$

$$\hat{\theta}_n = \underset{\theta \in \Theta}{argmax}\, L(\theta)$$

On suppose que le max est unique.

Les EMVs sont basés sur des statistiques exhaustives, sont souvent biaisés, mais habituellement asymptotiquement sans biais. On obtient souvent des MVUEs lorsqu'on corrige le biais.

2.30 Log-vraisemblance

$$\ell(\theta) = ln\,(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} ln\,(f(x_i;\theta))$$

Cette fonction est strictement croissante. Ainsi, l'EMV peut être obtenu en maximisant la log-vraisemblance.

$$\hat{\theta} = \underset{\theta\in\Theta}{argmax}\,\ell(\theta)$$

2.30.1 EMV et exhaustivité

Avec le théorème de Fischer-Neymann

$$L(\theta) = g(t,\theta)\,h(x_1,\ldots,x_n)$$

et la log-vraisemblance

$$\ell(\theta) = ln(g(t,\theta)) + ln(h(x_1,\ldots,x_n))$$

Ainsi, puisque $h(x_1,\ldots,x_n)$ ne dépend pas de θ, l'estimation du MV est

$$\underset{\theta\in\Theta}{argmax}\,ln(g(t,\theta))$$

une fonction de la valeur t de la statistique exhaustive T.

2.31 Propriété de l'EMV pour de grands échantillons

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction de masse de probabilté ou de la densité, l'EMV $\hat{\theta}$ existe et est unique avec probabilité convergeant vers 1 lorsque $n \to \infty$

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\dfrac{1}{nI(\theta)}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

quand,$n \to \infty$.

Information de Fischer

$$I(\theta) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} lnf(X;\theta)\right)^2\right]$$

On peut aussi formuler l'EMV pour les grandes valeurs de n comme

$$\hat{\theta} \approx N\left(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}\right)$$

et

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} lnf(X;\theta)\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} lnf(X;\theta)\right] \end{aligned}$$

Si les conditions de régularité sont vérifées, l'EMV est convergent

$$\hat{\theta}_n \rightsquigarrow \theta$$

et

$$\lim_{n\to\infty} var(\hat{\theta}_n) = 0$$

On peut montrer que tout estimateur sans biais $\hat{\theta}$ satisfait l'inégalité de Cramer-Rao:

$$var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

L'EMV est donc asymptotiquement efficace. Il a la plus petite variance possible, asymptotiquement. On retrouve des formes fermées pour les EMVs dans les cas simples seulement. On doit obtenir les autres par des techniques d'optimisation numérique. La fonction de log-vraisemblance est convexe et lisse, ce qui facilite l'optimisation. On utilise les estimateurs des moments comme valeurs de départs dans les fonctions d'optimisation.

2.32 Propriété d'invariance de l'EMV

Supposons que le paramètre d'intérèt est $\lambda = g(\theta)$, où g est une fonction bijective sur Θ. Puisque

$$L(\theta) = L(g^{-1}(\lambda))$$

le maximum est atteint à

$$\hat{\theta}_n = g^{-1}(\hat{\lambda}_n) \Leftrightarrow \hat{\lambda}_n = g(\hat{\theta}_n)$$

où $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ.

2.33 Diagramme quantile-quantile

Outil pour vérifier l'ajustement d'un modèle.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont les données d'un modèle paramétrique qu'on a ajusté avec fonction de répartition $F(\cdot;\theta)$. Le diagramme Q-Q comprend les points

$$\left(F^{-1}\left(\frac{1}{n+1};\hat{\theta}_n\right), x_{(i)}\right),\ i = 1, \dots, n$$

où $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ sont les observations ordonnées de $x_1, \dots, x_n$.

Avec ce diagramme, on compare les quantiles empiriques avec les quantiles théoriques. Si le modèle est bien ajusté, les points devraient formés une droite. S'ils forment une courbe vers le haut/bas, les quantiles théoriques sont trop petits/grands.

2.34 Critère d'information d'Akaike

Soit un modèle paramétrique pour les données, avec paramètre

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$$

$\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ. Le critère d'information d'Akaike est

$$AIC = 2(-\ell(\hat{\theta}_n) + k)$$

On préfère le modèle avec le plus petit AIC

2.35 Critère d'information bayésien de Schwartz

$$BIC = -2\ell(\hat{\theta}_n) + kln(n)$$

Chapter 3

GRF-2

3.1 Chapitre 1

Produit dérivé

Contrat entre 2 partis qui fixe les flux monétaires futurs fondés sur ceux de l'actif sous-jacent(SJ).

Étapes d'une transaction

1. Acheteur et vendeur se trouve. Facilité par la bourse.
2. Obligations pour les deux partis définis (prix, produits, conditions). Si transaction à la bourse: intermédiaire, et donc, dépôts de garantie possibles.
3. Transaction
4. Mise à jour du registre de propriété.

Mesure d'évaluation taille(activité) de la bourse(marché)

- Volume de transaction: nombre de titres transigés parpériodes
- Valeur marchande: Valeur d'une action/cie/indice boursier
- Positions ouvertes: quantité de contrats qui ne sont pas arrivés à échéance

Rôle des marchés financiers

- Partage du risque: compagnie partage le risque et les profits avec les actionnaires
- Diversification du risque: risque diversifiable $\rightarrow$ théoriquement possible de diluer le risque pour qu'il devienne nul. Risque non-diversifiable $\rightarrow$ possible de transférer le risque via des produits dérivés.

Utilité des produits dérivés

- Gestion des risques
- Spéculation
- Réduction des frais de transaction
- arbitrage réglementaire

3 types d'acteurs

- Uilisateurs(acheteur/vendeurs)
- Teneur de marché(intermédiaire)
- Observateur(analyste/autorité)

Définitions

- Ordre au cours du marché: quantité de l'actif visé à acheter(vendre) au prix du marché, au moment où l'ordre est passée.
- Ordre à cours limité: quantité d'actions à acheter/vendre dans une tranche spécifique de prix.
- Ordre de vente «stop»: prix en dessous duquel on vend automatiquement.
- Position longue: qui profitera de l'augmentation de la valeur du SJ.
- Position courte: qui profitera de la diminution de la valeur du SJ.
- Vente à découvert: vente d'un actif qu'on ne possède pas. L'actif est livré à une date ultérieur, mais paiement à t=0 au prix de l'actif à t=0.
  - Utilité:
    - Spéculation
    - Financement
    - Couverture contre la baisse de valeur
  - Risque:
    - de défaut
    - de rareté

3.1.1 CAPM(Capital asset pricing management)

3 postulats:

1. Transactions efficaces et sans friction: pas de frais de transaction, emprunt au taux sans risque.
2. Rationnalité des investisseurs: maximise leur ratio de Sharpe

$$\rightarrow \frac{E[R_p - r_f]}{\sigma_p}$$

3. Attentes et espérances homogènes

L'équation du CAPM pour un actif i:

$$R_i = r_f + a_i + \beta_i(R_{mkt} - r_f) + \epsilon$$

Cela implique:

$$\frac{dR_i}{dR_{mkt}} = \beta_i = \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})}$$

Pour un portefeuille p:

$$\frac{dR_p}{dR_{mkt}} = \beta_p = \frac{Cov(\sum x_i R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \frac{Cov(R_i, R_{mkt})}{Var(R_{mkt})} = \sum x_i \beta_i$$

Incohérences du modèle

- Investisseurs non rationnels et pas informés sur leur portefeuille
- Certains ne veulent pas nécessairement maximiser leur ratio de Sharpe, ont d'autres objectifs
- Il y a des investisseurs qui ne diversifient pas leur portefeuille de manière optimale
- Il y en a qui sont ultra-actif, malgré le fait que le CAPM suppose une gestion passive

Comportements avec effet plus systémique:

- Peur du regret: garder un titre qui est en train de baisser ou vendre un titre avant qu'il remonte
- Les investisseurs sont influençables; ils achèteront les titres médiatisés,etc.
- Effet de trouppeau: on fait comme ceux qu'on connait

3.1.2 Modèle multifactoriel et l'APT(arbitrage pricing theory)

Trois types d'actifs avec des alphas strictement positifs qui contredisent le CAPM:

- Petites capitalisations: on observe des rendements supérieurs à ce que le CAPM prédit
- Book to market ratio: titres "value" avec une valeur au livre supérieur à la valeur marchande verront la valeur marchande rejoindre la valeur au livre avec le temps
- Momemtum: les compagnies qui ont connues un bon rendement dernièrement auront tendance à avoir un rendement supérieur à la moyenne

3.1.2.1 APT

$$E[R_s] - r_f = \sum_{i=1}^{N} \beta_s^{Fi}(E[R_{Fi}] - r_f)$$

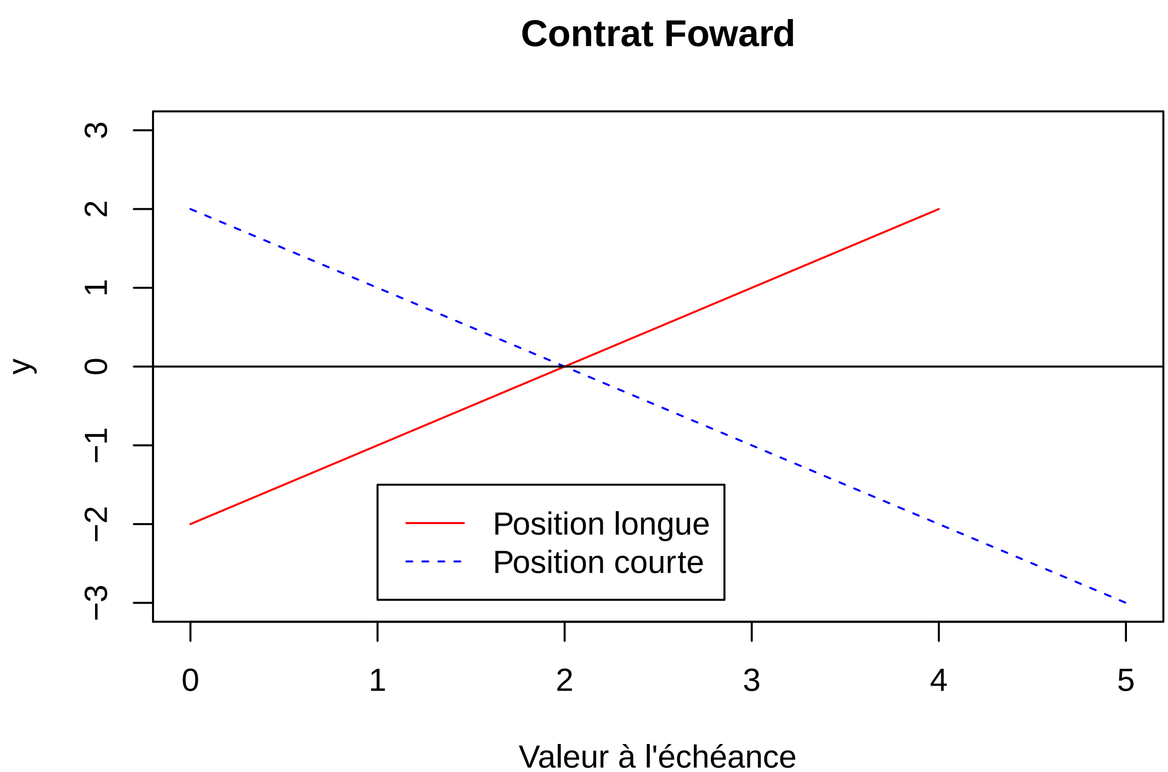
Les "F" sont des facteurs. Il est possible de créer des modèles avec n'importe quels facteurs comme des indices boursiers.

3.2 Chapitre 2

3.2.1 Contrat Foward

Achat d'un actif prédeterminé à une valeur initiale S_0, à une date de livraison T et à un prix $F_{0,T}$. Le coût initial est nul. $F_{0,T}$ est le prix anticipé de l'acftif sous-jacent rendu à la date T. $S_0(1+r_f)^T = F_{0,T}$

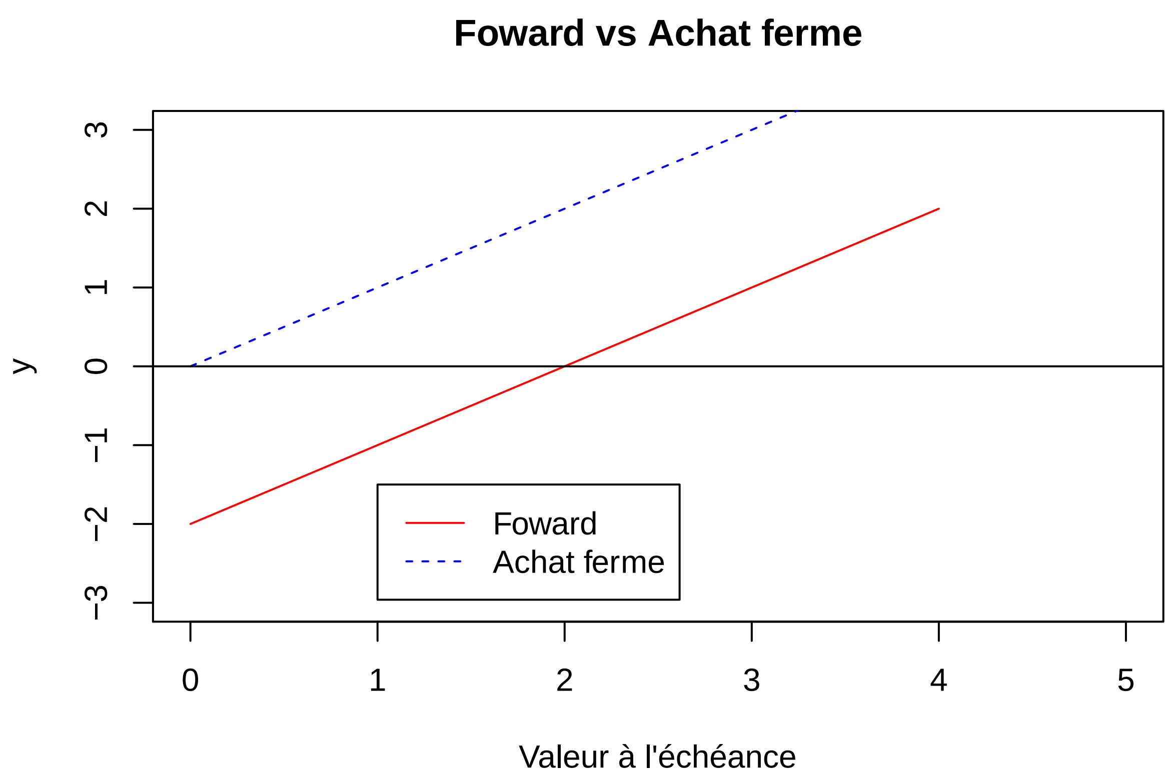
- Valeur à l'échéance:
  - Pour l'acheteur(position longue): $F_{0,T} - S_T$
  - Pour le vendeur(position courte): $S_t - F_{0,T}$



3.2.2 Foward prépayé

Dans certain cas, l'acheteur voudra payé à $t = 0$. Le coût initial sera $F^P_{0,T}$. On achète immédiatemment sans avoir l'actif à la date de transaction. La position de l'acheteur est *capitalisée*. Dans un achat ferme, la position de l'acheteur est pleinement capitalisée. Le contrat foward, lui, implique une position non capitalisée.

Temps	Acheteur	Vendeur
$t = 0$	$-F^P_{0,T}$	$F^P_{0,T}$
$t = T$	S_T	$-S_T$



Pour recréer les cashflows d'un contrat foward avec un achat ferme, on finance l'achat ferme avec un emprunt au taux sans risque.

Temps	Achat ferme	+ Emprunt	= Foward
$t = 0$	$-S_0$	S_0	$\varnothing$
$t = T$	S_T	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

On peut aussi recréer les cashflows d'un achat ferme avec un foward et en investissant la valeur actualisée de $F_{0,T}$.
$F_{0,T}(1 + r_f)^{-T} = S_0(1 + r_f)^T(1 + r_f)^{-T} = S_0$.

Temps	Dépot	+ Foward	= Achat ferme
$t = 0$	$-S_0$	$\varnothing$	$-S_0$
$t = T$	$F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$	S_T

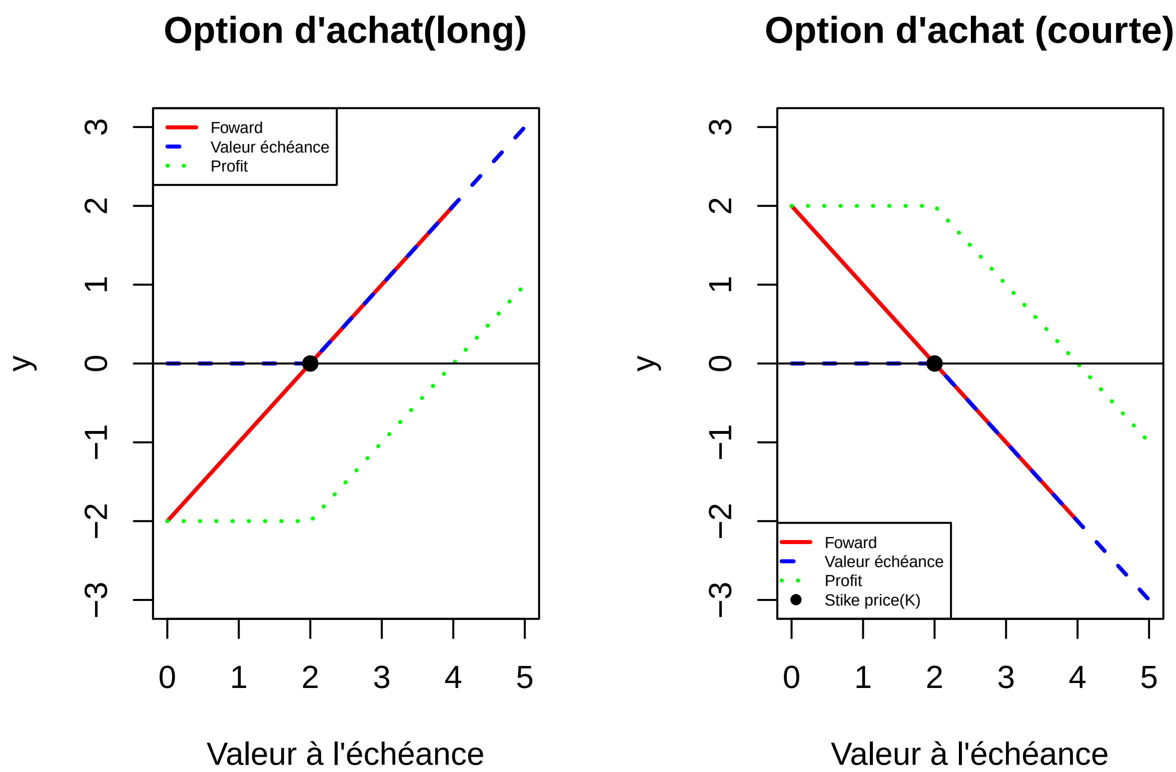
3.2.3 Option d'achat(call)

Contrat qui permet au détenteur(position longue) d'acheter un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price $= K$, à une date d'échéance ou d'içi cette date, s'il le désire.

3 types de levées:

1. Européenne (à la date T)
2. Américaine (d'içi la date T)
3. Bermudienne (à certains moments d'içi T)

Profit		
Actif SJ	Acheteur	Vendeur
$S_T > K$	$S_T - K - C(K,T)(1+r_f)^T$	$K - S_T + C(K,T)(1+r_f)^T$
$S_T < K$	$-C(K,T)(1+r_f)^T$	$C(K,T)(1+r_f)^T$

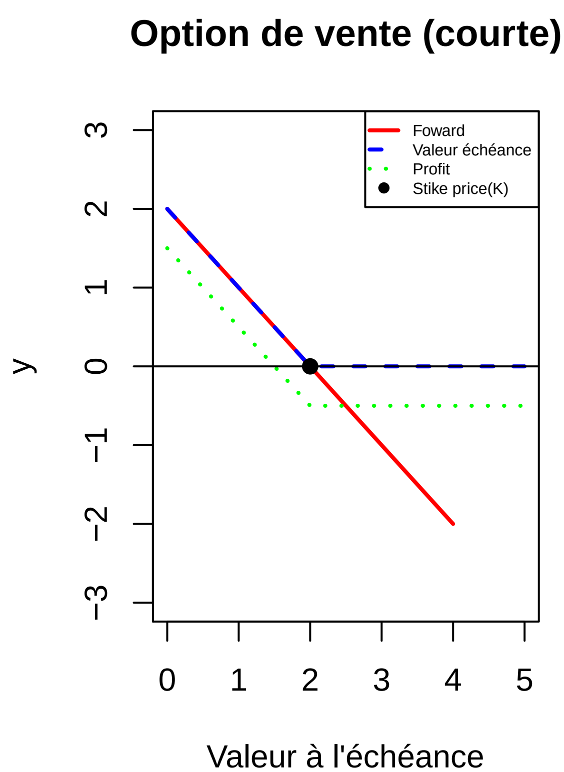


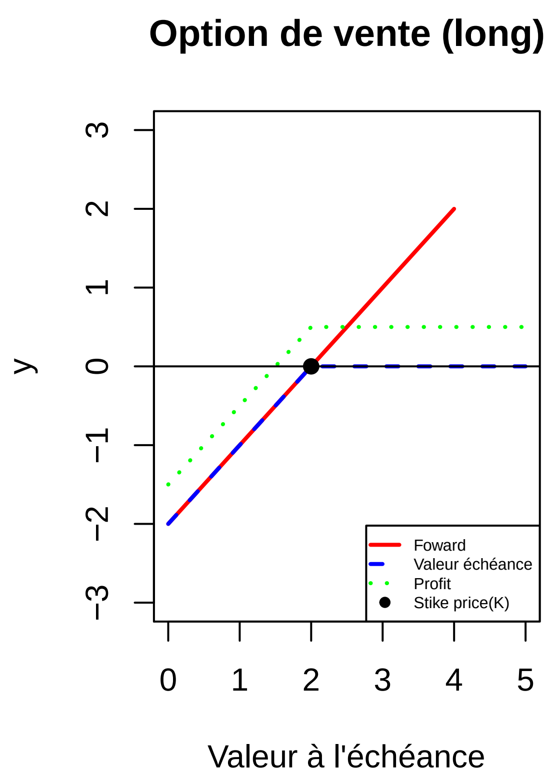
Valeur à l'échéance	
Acheteur	$max(0; S_T - K)$
Vendeur	$-max(0; S_T - K)$

3.2.4 Option de vente(put)

Contrat qui permet au détenteur(position courte) de vendre un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, strike price $= K$, à une date d'échéance ou d'içi cette date, s'il le désire. Le vendeur(position longue) de l'option devra acheter le SJ à ce prix si le détenteur(acheteur) le désire.

Option de vente		
Position	Profit	Valeur à l'échéance
Acheteur	$max(0; K - S_T) - P(K,T)(1+r_f)^T$	$max(0; K - S_T)$
Vendeur	$P(1+r_f)^T - max(0; K - S_T)$	$-max(0; K - S_T)$





3.3 Floor

Combinaison d'une postion longue dans le SJ(on le possède) et une position courte dans une option de vente(achat). Permet de se couvrir contre une baisse du prix du SJ.

Valeur à l'échéance	$= S_T + \max(0; K - S_T) = \max(S_T; K)$
Profit	$= \max(S_T, K) - (S_0 + P(T,K))(1+r_f)^T$

3.4 Vente de couverture:vendre un floor(option de vente couverte)

Combinaison d'une position longue dans l'option de vente(vente) et d'une position courte dans le SJ(vente à découvert)

Valeur à l'échéance	$= -S_T - \max(0; K - S_T) = -\max(S_T; K))$
Profit	$= -\max(S_T, K) + (S_0 + P(T,K))(1+r_f)^T$

3.5 Cap

Combinaison d'une position courte dans le SJ(vente à découvert)et d'une position longue dans une option d'achat(achat).

Valeur à l'échéance	$= S_T + \max(0; S_T - K) = \max(-S_T; -K) = -\min(S_T; K)$
Profit	$= -\min(S_T, K) + (S_0 - C(T, K))(1 + r_f)^T$

3.6 Vente de couverture:vendre un cap(option d'achat couverte)

Combinaison d'une position courte dans l'option d'achat(vente) et d'une position longue dans le SJ(achat).

Valeur à l'échéance	$= S_T - \max(0; S_T - K) = -\max(-S_T; -K) = \min(S_T; K)$
Profit	$= \min(S_T, K) - (S_0 - C(T, K))(1 + r_f)^T$

3.7 Foward synthétique

On fait un foward en combinant une position longue dans une option d'achat et une position longue dans une option de vente avec la même échéance et le même strike price.

Foward synthétique	$= Call(K, T) - Put(K, T)$
Coût initial	$C(K, T) - P(K, T)$
Valeur à l'échéance	$= \max(0; S_T - K) - \max(0; K - S_T) = S_T - K$
Profit	$(S_T - K) - (C(K, T) - P(K, T))(1 + r_f)^T$

Si on remplace K par $F_{0,T}$, le prix d'exercice sera le même qu'avec un foward standard. La différence avec un foward synthétique est que $K \neq F_{0,T}$ est possible et, ainsi, le coût initial ne sera pas nul. Si $K < F_{0,T}$, on payera le SJ moins cher, mais on payeune prime initiale. Si $K > F_{0,T}$, on payera plus cher le SJ, mais on recevra une prime initiale.

3.8 Parité des options d'achat et de vente

$$E\left[S_T - K - (C(K, T) - P(K, T)(1 + r_f)^T\right] = E\left[\text{Profit}\right] = 0$$
$$E\left[S_T\right] - K = (C(K, T) - P(K, T))(1 + r_f)^T$$
$$C(K, T) - P(K, T) = (F_{0,T} - k)(1 + r_f)^{-T}$$

3.9 Bull spread

3.9.1 Première façon:

Combinaison d'une position longue dans une option d'achat à un prix d'exercice K_1 et d'une position courte dans une option d'achcat à un prix d'exercice $K_2,\ K_1 < K_2$, avec la même date d'échéance.

Bull spread(call)	$= Call(K_2, T) - Call(K_1, T)$
Coût initial	$C(K_1, T) - C(K_2, T)$
Valeur à l'échéance	$= \max(0; S_T - K_1) - \max(0; S_T - K_2)$
Profit	$\max(0; S_T - K_1) - \max(0; S_T - K_2) - (C(K_1, T) - C(K_2, T))(1 + r_f)^T$

3.9.2 Deuxième façon:

Combinaison d'une position courte(achat) dans une option de vente à un prix d'exercice K_1 et d'une position longue(vente) dans une option de vente à un prix d'exercice $K_2,\ K_1 < K_2$, avec la même date d'échéance.

Bull spread(Put)	$= Put(K_2, T) - Put(K_1, T)$
Coût initial	$P(K_1, T) - P(K_2, T)$
Valeur à l'échéance	$= \max(0; K_1 - S_T) - \max(0; K_2 - S_T)$
Profit	$\max(0; K_1 - S_T) - \max(0; K_2 - S_T) - (P(K_1, T) - P(K_2, T))(1 + r_f)^T$

3.10 Bear Spread(-Bull spread)

3.10.1 Première façon:

Combinaison d'une position courte(vente) dans une option d'achat à un prix d'exercice K_1 et d'une position longue(achat) dans une option d'achcat à un prix d'exercice $K_2,\ K_1 < K_2$, avec la même date d'échéance.

Bear spread(call)	$= Call(K_1, T) - Call(K_2, T)$
Coût initial	$C(K_2, T) - C(K_1, T)$
Valeur à l'échéance	$= \max(0; S_T - K_2) - \max(0; S_T - K_1)$
Profit	$\max(0; S_T - K_2) - \max(0; S_T - K_1) - (C(K_2, T) - C(K_1, T))(1 + r_f)^T$

3.10.2 Deuxième façon:

Combinaison d'une position longue(vente) dans une option de vente à un prix d'exercice K_1 et d'une position courte(achat) dans une option de vente à un prix d'exercice $K_2,\ K_1 < K_2$, avec la même date d'échéance.

Bull spread(Put)	$= Put(K_1, T) - Put(K_2, T)$
Coût initial	$P(K_2, T) - P(K_1, T)$
Valeur à l'échéance	$= \max(0; K_2 - S_T) - \max(0; K_1 - S_T)$
Profit	$\max(0; K_2 - S_T) - \max(0; K_1 - S_T) - (P(K_2, T) - P(K_1, T))(1 + r_f)^T$

3.11 Ratio spread

Combinaison de n position longue(achat) dans les options d'achat à un prix d'exercice K_1 et m position courte(vente) dans les options d'achat à un prix d'exercice K_2, avec la m^me date d'échéance. Permet la possibilité de créer une combinaison quirésulte en un coût initial nul.

3.12 Box spread

Combinaison de positions longue dans une option d'achat(achat) et de vente(vente) à un prix d'exercice K_1 et de positions courtes dans une option d'achat(vente) et d'une option de vente(achat) à un prix d'exercice K_2, avec toutes les options de mêmes dates d'échéance.

Box spread	$= Call(K_1, T) + Put(K_2, T)$	$-Call(K_2, T) - Put(K_1, T)$
Box spread	Bull spread(call)	+ Bear spread(put)
Box spread	$= Call(K_1, T) - Call(K_2, T)$	$+Put(K_2, T) - Put(K_1, T)$
Box spread	Foward synthétique K_1	- Foward synthétique K_2
Box spread	$= Call(K_1, T) - Put(K_1, T)$	$-(Call(K_2, T) - Put(K_2, T))$
Coût initial	$= C(K_1, T) + P(K_2, T)$	$-C(K_2, T) - P(K_1, T) > 0$
Valeur à l'échéance	$= \max(0; S_T - K_1) + \max(0; K_2 - S_T)$	$-\max(0; S_t - K_2) - \max(0; K_1 - S_T)$
Profit	=0	

Chapter 4

Preuves

4.1 Théorème (1.1) de la fonction quantile

Proof.

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(u)}(x) &= P(F_X^{-1} \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

$\square$

4.2 Fonction Stop-Loss(1.3)

Proof.

$$\begin{aligned} \Pi_X(d) &= E[\max(X-d, 0)] \\ &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}\right] \\ &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\bar{F}(d) \end{aligned}$$

$\square$

4.3 Tvar

4.3.1 Expresion alternative 1(1.6.1)

Proof. On applique 1.4.1, ainsi:

$$\begin{aligned} \mathrm{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)} \int_k^1 \mathrm{VaR}_k(u)\, du \\ &= \frac{1}{1-k} \left(\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X))\right) + \mathrm{VaR}_k(X) \end{aligned}$$

$\square$

4.3.2 Expression alternative 2(1.6.2)

Proof. On remplace $\Pi_X(\mathrm{VaR}_k(X))$ dans 4.3.2 par sa définition 1.3

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_k(X) &= \mathrm{VaR}_k(X) + \frac{1}{(1-k)}\left(E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{VaR}_k(X)\bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X))\right) \\
&= \frac{1}{(1-k)}\left[E\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}\right] - \mathrm{Var}_k(X)\left(\bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - (1-k)\right)\right] \\
&= \frac{1}{(1-k)}\left[E\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}\right] - \mathrm{Var}_k(X)\left(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k\right)\right]
\end{aligned}$$

□

Pour une V.A. continue $\mathrm{VaR}_k(X)\left(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k\right) = 0$ donc,

$$\mathrm{TVaR}_k(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}\right]}{P(X > \mathrm{VaR}_k(X))} = E\left[X | X > \mathrm{VaR}_k(X)\right]$$

4.3.3 Expression alternative 3(1.6.3)

On fait la preuve à partir de l'expression alternative 2:

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_k(X) &= \frac{1}{(1-k)}\left[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - \mathrm{VaR}_k(X)(F_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - k)\right] \\
&= \frac{1}{(1-k)}\left[E[X \times 1_{\{X>\mathrm{VaR}_k(X)\}} + X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}} - X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}\right] \\
&- \mathrm{VaR}_k(X)\left(1 - \bar{F}_X(\mathrm{VaR}_k(X)) - (1-(1-k))\right) \\
&= \frac{1}{(1-k)}\left\{E[X \times 1_{\{X\geq\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + \mathrm{VaR}_k(X)\left[(1-k) - P(X > \mathrm{VaR}_k(X))\right]\right\} \\
&= \frac{1}{(1-k)}\left\{E[X \times 1_{\{X\geq\mathrm{VaR}_k(X)\}}] - (E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \mathrm{VaR}_k(X)) \times \mathrm{VaR}_k(X))\right\}
\end{aligned}$$

Deux cas possibles:

1. V.A. discrète $P(X = \mathrm{VaR}_k(X)) > 0$
2. V.A. continue $P(X = \mathrm{VaR}_k(X)) = 0$

Donc la portion $(E[X \times 1_{\{X=\mathrm{VaR}_k(X)\}}] + P(X > \mathrm{VaR}_k(X)) \times \mathrm{VaR}_k(X)) = \mathrm{VaR}_k(X)[1 - \frac{P(X\geq\mathrm{VaR}_k(X))}{(1-k)}]$ □

Propriété

Sous-additivité

3 preuves. La première est basée sur les statistiques d'ordre, la deuxième est basée sur la représentation de la TVaR par la stop-loss.
1ere preuve:

Proof. 1er lemme: Soit une V.A. X quelconque, dont $E[X] < \infty$.
Soit m réalisations indépendantes de X: $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$.

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{n} X^{[j]}\right)}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor}, \text{ pour } \lfloor m\kappa\rfloor < m$$

Où,

$$\lfloor x \rfloor = \text{partie entière de } x$$
$$X^{[1]} \leq X^{[2]} \leq \cdots \leq X^{[m]} = \text{réalisations triées de} X$$

2e lemme:
Soit les réalisations : $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$
On définit $X^{[1]} \leq X^{[2]} \leq \cdots \leq X^{[m]}$ comme les réalisations triées de X.

$$\sum_{j=m-1}^{m} X^{[j]} = \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)},\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq m\}$$
$$\sum_{j=m-2}^{m} X^{[j]} = \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)} + X^{(j_3)},\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq m\}$$
$$\sum_{j=k_0+1}^{m} X^{[j]} = \sup\{X^{(j_1)} + X^{(j_2)} + \cdots + X^{(j_{m-k_0})},\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{m-k_0} \leq m\}$$

Soit les V.A. X_1, X_2 avec $E[X_i] < \infty,\ i = 1, 2.$
$S = X_1 + X_2$

Avec le 1er lemme:

$$\text{TVaR}_\kappa(S) = \frac{\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{n} S^{[j]}\right)}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor}$$

On développe $\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} S^{[j]}$ en utilisant le 2e lemme et on pose $\kappa_0 = \lfloor m\kappa \rfloor$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} S^{[j]} &= \sup\{S^{(j_1)} + \cdots + S^{(j_{m-\lfloor m\kappa\rfloor})}, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\lfloor m\kappa\rfloor} \leq m\} \\
&= \sup\{\left(X_1^{(j_1)} + X_2^{(j_1)}\right) + \left(X_1^{(j_2)} + X_2^{(j_2)}\right) + \cdots + \left(X_1^{(j_{m-\kappa_0})} + X_2^{(j_{m-\kappa_0})}\right) \\
&, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&= \sup\{\left(X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)} + \cdots + X_1^{(j_{m-\kappa_0})}\right) + \left(X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)} + \cdots + X_2^{(j_{m-\kappa_0})}\right) \\
&, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&\leq \sup\{\left(X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)} + \cdots + X_1^{(j_{m-\kappa_0})}\right), 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&+ \sup\{\left(X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)} + \cdots + X_2^{(j_{m-\kappa_0})}\right), 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{m-\kappa_0} \leq m\} \\
&= \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_1^{[j]} + \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_2^{[j]}
\end{aligned}$$

On applique le 1er lemme de chaque coté de l'inégalité
$\sum_{j=\kappa_0+1}^{m} S^{[j]} \leq \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_1^{[j]} + \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_2^{[j]}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa(S) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} S^{[j]} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_1^{[j]} + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \sum_{j=\kappa_0+1}^{m} X_2^{[j]} \\
&= \mathrm{TVaR}_\kappa(X_1) + \mathrm{TVaR}_\kappa(X_2)
\end{aligned}$$

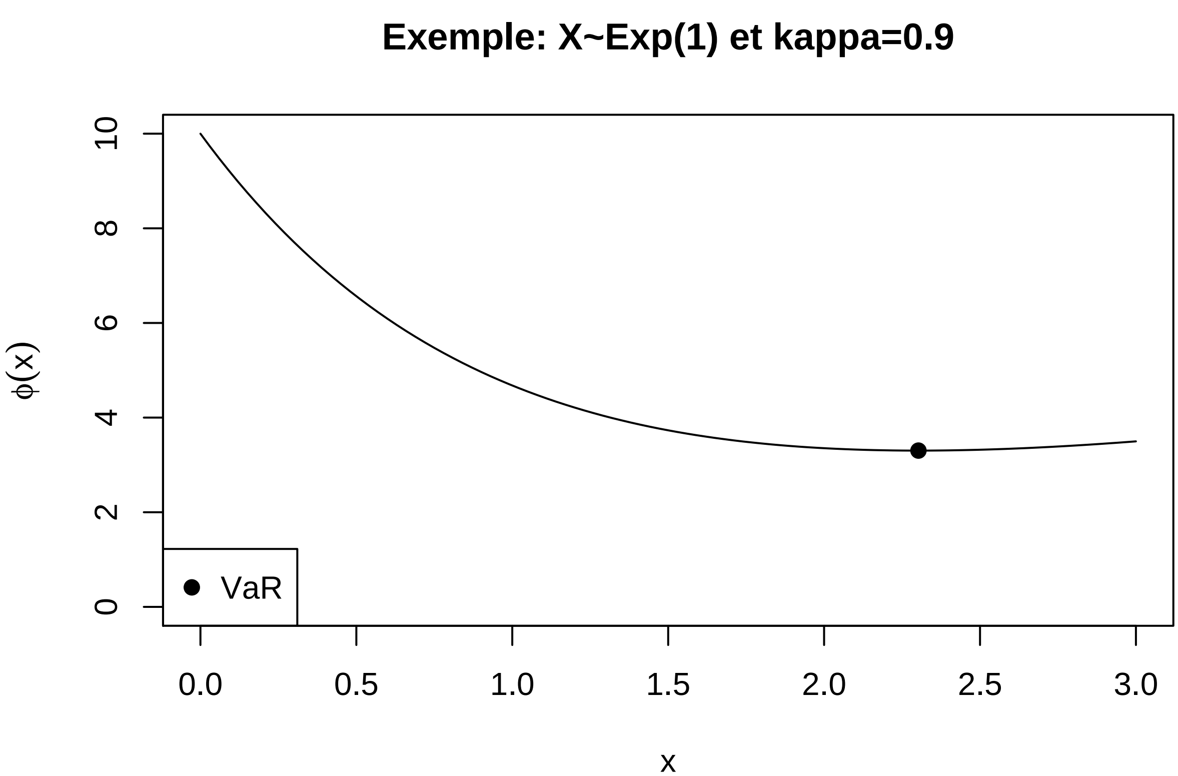
□

2e preuve:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa(X) &= \mathrm{VaR}_\kappa + \frac{1}{1-\kappa}\Pi_X(VaR_\kappa(X)) \\
&= \phi(VaR_\kappa(X)) \\
\text{où } \phi(X) &= x + \frac{1}{1-\kappa}\Pi_X(x) \\
\text{et } \Pi_X(x) &= E\left[\max(X-x;0)\right]
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \inf \phi(X), \text{ où } \phi(X) \text{ est une fonction convexe le minimum est atteint à } \mathrm{VaR}_\kappa(X)$$



Vérification que $\phi(X)$ ext convexe en x:
Supposons que Xest continue:

$$\phi(X) = x + \frac{1}{1-\kappa}\int_x^\infty \bar{F}_X(y)dy,\ x \geq 0$$

Dérivée première de $\phi(X)$:

$$\frac{d\phi(X)}{dx} = 1 + \frac{1}{1-\kappa}(-\bar{F}_X(x))$$

Dérivée seconde de $\phi(X)$:

$$\frac{d^2\phi(X)}{d^2x} = \frac{1}{1-\kappa}f_X(x) \geq 0, \quad x \geq 0$$

Valeur qui minimise $\phi(X)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\phi(X)}{dx} = 1 + \frac{1}{1-\kappa}(-\bar{F}_X(x)) = 0 \\
&\bar{F}_X(x) = 1-\kappa \\
&F_X(x) = \kappa
\end{aligned}$$

Alors,

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \phi_X(\mathrm{VaR}_\kappa(X)) \leq \phi_X(x), \quad x \in \mathrm{R}$$

Soit X_1 et X_2 tel que $E[X_i] \leq \infty$, pour $i = 1,2$
$S = X_1 + X_2$, $\kappa \in (0,1)$.
On développe $\mathrm{TVaR}_\kappa((1-\alpha)X_1 + \alpha X_2)$, où $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa((1-\alpha)X_1+\alpha X_2) &= \phi_{((1-\alpha)X_1+\alpha X_2)}(\mathrm{VaR}_\kappa((1-\alpha)X_1+\alpha X_2))\\
&\leq x\frac{1}{1-\kappa}\Pi_{((1-\alpha)X_1+\alpha X_2)}(x), \quad x\in \mathrm{R}\\
&= x+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left((1-\alpha)X_1+\alpha X_2;0\right)\right], \quad x\in \mathrm{R}
\end{aligned}$$

On fixe $x=(1-\alpha)\mathrm{VaR}_\kappa(X_1)+\alpha\mathrm{VaR}_\kappa(X_2)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\kappa((1-\alpha)X_1+\alpha X_2) &\leq (1-\alpha)\mathrm{VaR}_\kappa(X_1)+\alpha\mathrm{VaR}_\kappa(X_2)\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max((1-\alpha)X_1+\alpha X_2-(1-\alpha)\mathrm{VaR}_\kappa(X_1)-\alpha\mathrm{VaR}_\kappa(X_2);0)\right],\\
&\text{vrai pour } \alpha\in(0,1)\\
&= (1-\alpha)\mathrm{VaR}_\kappa(X_1)+\alpha\mathrm{VaR}_\kappa(X_2)\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max((1-\alpha)(X_1-\mathrm{VaR}_\kappa(X_1))\alpha(X_2-\mathrm{VaR}_\kappa(X_2));0)\right]\\
&\leq (1-\alpha)\mathrm{VaR}_\kappa(X_1)+\alpha\mathrm{VaR}_\kappa(X_2)\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max((1-\alpha)(X_1-\mathrm{VaR}_\kappa(X_1));0)\right]\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max((\alpha)(X_2-\mathrm{VaR}_\kappa(X_2));0)\right]\\
&= \mathrm{VaR}_\kappa((1-\alpha)X_1)+\mathrm{VaR}_\kappa(\alpha X_2)\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max((1-\alpha)X_1-\mathrm{VaR}_\kappa((1-\alpha)X_1))\right]\\
&+\frac{1}{1-\kappa}E\left[\max(\alpha X_2-\mathrm{VaR}_\kappa(\alpha X_2))\right]\\
&= \mathrm{TVaR}_\kappa((1-\alpha)X_1)+\mathrm{TVaR}_\kappa(\alpha X_2), \quad \alpha\in(0,1)\\
\text{On fixe } \alpha &= \frac{1}{2}\\
\mathrm{TVaR}_\kappa(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2) &= \mathrm{TVaR}_\kappa(\frac{1}{2}(X_1+X_2))\\
&= \frac{1}{2}(TVaR)_\kappa(X_1+X_2)\\
&\leq \frac{1}{2}(TVaR)_\kappa(X_1)+\frac{1}{2}(TVaR)_\kappa(X_2)\\
\text{On multiplie par 2 et on déduit :}&\\
(TVaR)_\kappa(X_1+X_2) &\leq (TVaR)_\kappa(X_1)+(TVaR)_\kappa(X_2)
\end{aligned}$$

4.4 Biais moyenne échantillonale (voir 2.18.1)

Proof.

$$\begin{aligned}
B(\hat{\theta}_n) &= E[\bar{X}_n]-E[X]\\
&= E[X]-E[X]=0
\end{aligned}$$

□

4.5 Biais variance échantillonale (voir 2.18.1)

Proof.

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}_n\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\bar{X}_n+\bar{X}_n^2)\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\frac{2}{n-1}\left(\bar{X}_n\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+\frac{n}{(n-1)}\bar{X}_n^2\right]\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\frac{n}{(n-1)}\bar{X}_n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[S_n^2\right] &= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right]-E\left[\frac{n}{(n-1)}(\bar{X}_n)\right]\\
&= \frac{n}{n-1}((Var(X)+E^2[X]))-\frac{1}{(n-1)}(Var(X))-\frac{n}{n-1}(E[X^2])\\
&= Var(X)
\end{aligned}$$

$$B(S_n^2)=Var(X)-\sigma^2=0$$

□

4.6 Convergence (voir 2.18.3)

Proof. On prouve avec Tchebycheff
Un estimateur sans biais est convergent si:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n)=0$$

$$\begin{gathered}
\text{On fixe } \epsilon>0,\\
P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\epsilon)=P(|\hat{\theta}_n-E[\hat{\theta}_n]|>\epsilon)\\
=P(|\hat{\theta}_n-E[\hat{\theta}_n]|>\frac{\epsilon\times\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}})\\
\leq\frac{Var(\hat{\theta}_n)}{\epsilon^2}
\end{gathered}$$

Donc si $Var(\hat{\theta}_n)\to 0$ quand $n\to\infty$, $\hat{\theta}_n$ est convergent □

4.7 Téorème de Rao-Blackwell (voir section 2.23)

Puisque T est exhaustive pour θ, la distribution conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ sachant T ne dépend pas de θ. Alors,

$$\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T]$$

ne dépend pas de θ. Donc, θ_n^* est une statistique. Par l'espérance totale,

$$E[\theta_n^*] = E[E[\hat{\theta}_n | T]] = E[\hat{\theta}_n] = \theta,$$

θ_n^* est donc sans biais. Par la variance totale,

$$\begin{aligned} var(\hat{\theta}_n) &= var(E[\hat{\theta}_n | T]) + E[var(\hat{\theta}_n | T)] \\ &= var(\theta_n^*) + E[var(\hat{\theta}_n | T)] \end{aligned}$$

Sachant que

$$E[var(\hat{\theta}_n | T)] \geq 0$$

$$var(\theta_n^*) \leq var(\hat{\theta}_n)$$