§3. 二阶线性偏微分方程

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u + g = 0$$ ($u_x \triangleq \frac{\partial u}{\partial x}$, $a, \cdots, g$ 均为 x, y 的函数)

分类：$\Delta = b^2 - ac$　　$\Delta > 0$：双曲型　$\Delta = 0$：抛物型　$\Delta < 0$：椭圆型

- 波动　$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$　　$\Delta = a^2$　双曲
- 传导　$u_t - a^2 u_{xx} = 0$　　$\Delta = 0$　抛物
- 泊松　$u_{xx} + u_{yy} = 0$　　$\Delta = -1$　椭圆

若 a, b, c 为函数　不同区间类型不同（混合型）

$u(x,y) \longrightarrow u(\xi, \eta)$　　$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$　（ξ, η 为独立变量）

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$　　$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

$$\Rightarrow A u_{\xi\xi} + 2B u_{\xi\eta} + C u_{\eta\eta} + D u_\xi + E u_\eta + F u + G = 0$$

$$\begin{cases} A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ D = a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y \\ E = a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y \\ F = f \quad G = g \end{cases}$$

$B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$ $\Rightarrow$ 非退化变量替换不改变方程类型

特征方程　$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0$ $\Rightarrow$ 确定$\overbrace{\text{特征线}}^{\text{一组或2组}}$簇（待定常数 γ 为参量）

$\gamma(x,y)$ 确定了 1 个函数，在某确定特征线上为常数

（一簇特征线确定一个这样的函数）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$$

1. 若 $\Delta>0 \Rightarrow$ 两组特征线簇，2个 $\gamma(x,y)$，分别取为 $\xi(x,y)$ $\eta(x,y)$.

某特征线上 $\gamma(x,y)=\gamma$ $\gamma_x dx+\gamma_y dy=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{\gamma_x}{\gamma_y}$ 代入特征方程即

$a\gamma_x^2+2b\gamma_x\gamma_y+c\gamma_y^2=0$. 在全平面成立.

这样选取的 $\xi(x,y)$，$\eta(x,y)$ 使得 $A=C=0 \Rightarrow B\neq 0$

即 $u_{\xi\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0$ (双曲型方程第一标准形式)

引入变换 $\xi=\alpha+\beta$ $\eta=\alpha-\beta$.

$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}+\Phi_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)=0$ (双曲型方程第二标准形式).

2. 抛物型方程 一组特征线簇 取为 $\xi(x,y)=k$ $A=0 \Rightarrow B=0$

任取一个与 $\xi(x,y)$ 无关的 $\eta(x,y)$

$u_{\eta\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0$ (抛物型方程标准形式)

若 $\Phi=-u_\xi \Rightarrow$ 传导方程.

3. 椭圆型方程 两组特征线簇取为 $\xi(x,y)=k$ $\eta(x,y)=k^*$. $\begin{cases} A=0, C=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$

$u_{\xi\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0$. 但其中有复数，与双曲型方程不同.

引入 $\alpha=\mathrm{Re}\,\xi=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$ $\beta=\mathrm{Im}\,\xi=\frac{1}{2i}(\xi-\eta)$

$\Rightarrow u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\Phi(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)=0$ (椭圆型方程标准形式).

小结 $au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu+g=0$. $\Delta=b^2-ac$.

特征方程 $a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$ 确定一组或两组特征线簇 $\xi(x,y)=k_1$ $\eta(x,y)=k_2$

$\Delta>0$ 取 ξ,η 为新变量. $\Delta=0$，取 ξ 和与 ξ 无关的任一函数为新变量.

$\Delta<0$ 取 $\alpha=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$ $\beta=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$ 为新变量.

一阶线性偏微分方程通解

无u项

形如 $A_1(x_1,\cdots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+A_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+A_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0$

$A_1,\cdots,A_n$ 连续可微，一阶齐次式的方程，且没有含u项.

特征方程组：$\dfrac{dx_1}{A_1}=\dfrac{dx_2}{A_2}=\cdots=\dfrac{dx_n}{A_n}(=k)$

确定特征曲线族 l: $x_i=x_i(t)$

定义：如果函数 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 沿任一特征曲线 l: $x_i=x_i(t)$ 取常数值，称 $\psi(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 为特征方程组的一个一般积分.

定理：连续可微函数 $u=\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 为一阶线性齐次方程的解 $\Longleftrightarrow$ 它为特征方程组的一个一般积分.

证明：$\psi(x_1,\cdots,x_n)=C \longleftrightarrow$ 沿特征曲线 $d\psi=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i=0$

$dx_i=kA_i$ 代入 $\Rightarrow d\psi=\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}A_i\right)k=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}A_i=0$

即 $u=\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 为一阶线性齐次方程的一个解

定理：设 $\psi_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,n-1)$ 为特征方程组 $n-1$ 个连续可微无关的一般积分，则 $u=\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})$ 为线性齐次方程的通解.

常系数线性齐次偏微分方程的通解

$$A_0\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+A_n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}+B_0\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+\cdots+M\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial y}+Pu=0.$$

引入 $L(D_x,D_y)$ $\quad L(D_x,D_y)u=[A_0D_x^n+A_1D_x^{n-1}D_y+\cdots+A_nD_y^n+B_0D_x^{n-1}+\cdots+MD_x+ND_y+P]u=0$

$D_x=\frac{\partial}{\partial x},\ D_y=\frac{\partial}{\partial y}.$

1. $L(D_x,D_y)$ 为 D_x,D_y 齐次式. $L(D_x,D_y)=A_0D_x^n+A_1D_x^{n-1}D_y+\cdots+A_nD_y^n$

因式分解 $L(D_x,D_y)=A_0(D_x-\alpha_1D_y)(D_x-\alpha_2D_y)\cdots(D_x-\alpha_nD_y)$ $\quad \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为常数

取试探解 $u=\phi(y+\alpha x)$. $\quad D_x^k u=\alpha^k\phi^{(k)}(y+\alpha x)\quad D_y^k u=\phi^{(k)}(y+\alpha x)$ 代入

$\Rightarrow (A_0\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+\cdots+A_n)\phi^{(n)}(y+\alpha x)=0\Rightarrow A_0\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+\cdots+A_n=0$ (辅助方程)

解为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 如不相等，方程通解为 $u=\phi_1(y+\alpha_1x)+\cdots+\phi_n(y+\alpha_nx).$

例: $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ $\quad$ 令 $u=\phi(y+\alpha x)$ 辅助方程为 $\alpha^2-a^2=0$ $\quad \alpha=\pm a.$

$\Rightarrow u=\phi(y+ax)+\phi(y-ax).$

若方程有2重根，通解为 $u=x\phi_1(y+\alpha x)+\phi_2(y+\alpha x).$

若为 n 重根，通解为 $u=x^{n-1}\phi_1(y+\alpha x)+x^{n-2}\phi_2(y+\alpha x)+\cdots+\phi_n(y+\alpha x).$

一阶偏微分方程 非齐次式的齐次方程 $(D_x-\alpha D_y-\beta)z=0$ $\quad z=z(x,y)$

若 $v(x,y,z)=C$ 为 $z(x,y)$ 与 x,y 的1个关系式, $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0$

$\Rightarrow dz=-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial z}dx-\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial z}dy$ $\quad$ 又 $dz=D_xz\,dx+D_yz\,dy$

$\Rightarrow D_xz=-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial z}\quad D_yz=-\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial z}$ $\quad$ 代入原方程

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}-\alpha\frac{\partial v}{\partial y}+\beta z\frac{\partial v}{\partial z}=0.\Rightarrow \frac{dx}{1}=\frac{dy}{-\alpha}=\frac{dz}{\beta z}$ (拉格朗日辅助方程组)

求解: $y+\alpha x=C$ $\quad \beta x=\ln z-\ln C'\Rightarrow z=C'e^{\beta x}=e^{\beta x}\phi(y+\alpha x)$ 为方程的解.

(重新组合微分关系组，求出两个曲面，一般积分曲线即两曲面之交

例: 求 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 的通解

即 $(D_x+D_y)(D_x-2D_y+2)u=0$ $\quad$ 通解 $u=\phi(x-y)+e^{-2x}\psi(y+2x)$

若 $(D_x-\alpha D_y-\beta)^2 u=0$ 通解为 $u=xe^{\beta x}\phi(y+\alpha x)+e^{\beta x}\psi(y+\alpha x)$

常系数线性非齐次偏微分方程通解

非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次的一个特解

寻找特解的形式方法: $L(D_x,D_y)u=f(x,y) \Rightarrow$ 特解 $u_0=L^{-1}(D_x,D_y)f(x,y)$

1. $f(x,y)=e^{ax+by}$ 若 $L(a,b)\neq 0$ $L^{-1}(D_x,D_y)e^{ax+by}=L^{-1}(a,b)e^{ax+by}$

2. $f(x,y)=e^{i(ax+by)}$

$$L^{-1}(D_x,D_y)e^{i(ax+by)}=L^{-1}(ia,ib)e^{i(ax+by)}$$

$$\begin{cases} L^{-1}(D_x,D_y)\sin(ax+by)=\mathrm{Im}\left[L^{-1}(ia,ib)e^{i(ax+by)}\right] \\ L^{-1}(D_x,D_y)\cos(ax+by)=\mathrm{Re}\left[L^{-1}(ia,ib)e^{i(ax+by)}\right] \end{cases}$$

若 $L(D_x,D_y)=G(D_x^2,D_xD_y,D_y^2)$ $G^{-1}(D_x^2,D_xD_y,D_y^2)\begin{Bmatrix}\sin(ax+by)\\ \cos(ax+by)\end{Bmatrix}=G^{-1}(-a^2,-ab,-b^2)\begin{Bmatrix}\sin(ax+by)\\ \cos(ax+by)\end{Bmatrix}$

3. 若 $f(x,y)=e^{ax+by}g(x,y)$

$$L^{-1}(D_x,D_y)e^{ax+by}g(x,y)=e^{ax+by}L^{-1}(D_x+a,D_y+b)g(x,y)$$

推导: $D_x e^{ax+by}g(x,y)=e^{ax+by}(D_x+a)g(x,y)$ $D_y e^{ax+by}g(x,y)=e^{ax+by}(D_y+b)g(x,y)$

4. 若 $f(x,y)=x^m y^n$ 则 $L^{-1}(D_x,D_y)$ 展开为 D_x,D_y 的幂级数 $\Rightarrow$ 求特解.

例: $(D_x^2-2D_xD_y+D_y^2)u=12xy$ 特解

$$u=\frac{12}{D_x^2-2D_xD_y+D_y^2}xy=\frac{12}{(D_x-D_y)^2}xy=\frac{12}{D_x^2}\left(1-\frac{D_y}{D_x}\right)^{-2}xy=\frac{12}{D_x^2}\Big(1+\frac{2D_y}{D_x}\overbrace{+\cdots}^{\text{高阶项作用到}xy\text{上结果为}0}\Big)xy$$

$$=\frac{12}{D_x^2}\left(xy+\frac{2}{D_x}x\right)=12\left(yD_x^{-2}x+2D_x^{-3}x\right)=12\left[\tfrac{1}{6}x^3y+\tfrac{1}{12}x^4\right]=x^4+2x^3y$$

5. 若非齐次项为 $f(ax+by)$ 且 $L(D_x,D_y)$ 为 D_x,D_y 的 n 阶齐次式. $D_x^r g(ax+by)=a^r g^{(r)}(ax+by)$ $D_y^s g(ax+by)=b^s g^{(s)}(ax+by)$

$\Rightarrow L(D_x,D_y)g(ax+by)=L(a,b)g^{(n)}(ax+by)=f(ax+by)$ 若 $L(a,b)\neq 0 \Rightarrow L^{-1}(D_x,D_y)g^{(n)}(ax+by)=L^{-1}(a,b)g(ax+by)$

例: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=12(x+y)$. 即 $(D_x^2+D_y^2)v=12(x+y)$ $v_0=\frac{12}{D_x^2+D_y^2}(x+y)=\frac{12}{(1^2+1^2)}\frac{1}{3!}(x+y)^3=(x+y)^3$.

$L(a,b)=0$ 时, 上述方法失效 设 $L(D_x,D_y)=bD_x-aD_y$ $(bD_x-aD_y)u=e^{ax+by}$

辅助方程组 $\frac{dx}{b}=\frac{dy}{-a}=\frac{du}{e^{ax+by}}$ 特征线满足 $ax+by=c$. $a\,du+e^{ax+by}dy=0$ 即 $a\,du+e^c dy=0$ $u=-\frac{1}{a}ye^c$ $(c=ax+by)$

$\Rightarrow \frac{1}{bD_x-aD_y}e^{ax+by}=-\frac{1}{a}ye^{ax+by}$

若 $(D_x-\alpha D_y)u=x^r\psi(y+\alpha x)$ $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-\alpha}=\frac{du}{x^r\psi(y+\alpha x)}$ $\Rightarrow u=\frac{1}{r+1}x^{r+1}\psi(y+\alpha x)$

$\Rightarrow \frac{1}{D_x-\alpha D_y}x^r\psi(y+\alpha x)=\frac{1}{r+1}x^{r+1}\psi(y+\alpha x)$ $\frac{1}{(D_x-\alpha D_y)^k}x^r\psi(y+\alpha x)=\frac{r!}{(r+k)!}x^{r+k}\psi(y+\alpha x)$

推论：对一般非齐次项 $f(x,y)$ $\quad (D_x-\alpha D_y)u=f(x,y)$ $\quad \frac{dx}{1}=\frac{dy}{-\alpha}=\frac{du}{f(x,y)} \Rightarrow \begin{cases} y+\alpha x=C \\ dx=\frac{du}{f(x,y)} \end{cases}$

$du=f(x,y)dx=f(x,C-\alpha x)dx$ $\quad u=\int f(x,C-\alpha x)\,dx\Big|_{C=y+\alpha x}$

特殊的变系数线性齐次偏微分方程

$x^m y^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$ $\quad$ 令 $x=e^t, y=e^s$ $\quad t=\ln x,\ s=\ln y$ $\quad D_t=\frac{\partial}{\partial t}=\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}=xD_x$ $\quad D_s=yD_y$.

$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=D_t(D_t-1)$. $\quad \Rightarrow \quad x^m y^n D_x^m D_y^n=D_t(D_t-1)\cdots(D_t-m+1)D_s(D_s-1)\cdots(D_s-n+1)$.

行波法

达朗贝尔公式

考虑一维无界波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ (-\infty < x < \infty, t>0)$ 初值给定

$u(x,t)\big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \psi(x)$.

通解 $u = f(x-at) + g(x+at)$ 又 $\begin{cases} f(x)+g(x) = \phi(x) \\ f'(x)-g'(x) = -\frac{1}{a}\psi(x) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[\phi(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \psi(x)\,dx + C\right]$

$g(x) = \frac{1}{2}\left[\phi(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(x)\,dx - C\right]$

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}[\phi(x-at)+\phi(x+at)]}_{\text{初始波形分别向左向右传播}} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi}_{\text{初始波形的影响以波速向两边扩散}} \quad (\text{达朗贝尔公式})$$

物理意义

反射波和延拓法

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 但 $0 \le x < +\infty$, $t>0$. $u(x,t)\big|_{t=0} = \phi(x)$ $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \psi(x)$.

边界条件: $u(0,t) = 0 \quad t>0$

进行奇延拓 $\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & x\ge 0 \\ -\phi(-x) & x<0 \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x\ge 0 \\ -\psi(-x) & x<0 \end{cases}$

则消去边界条件, 化为达朗贝尔问题.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\,d\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi & t<\frac{x}{a} \\ \underbrace{\frac{1}{2}[\phi(x+at)-\phi(at-x)]}_{\text{半波损失}} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi & t\ge\frac{x}{a} \end{cases}$$

强迫振动和冲量原理法

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\quad -\infty<x<+\infty,\ t>0\qquad u(x,t)\Big|_{t=0}=0\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

齐次初值问题.

$f(x,t)$ 分解为 ∞ 个瞬时作用 $\quad f(x,t)=\int_0^\infty f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$.

$$u(x,t,\tau)=v(x,t,\tau)d\tau.\qquad u(x,t)=\int_0^{+\infty}v(x,t,\tau)d\tau.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f(x,\tau)\delta(t-\tau)\qquad v(x,t,\tau)\Big|_{t=0}=0\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

$$v(x,t,\tau)\Big|_{t<\tau}=0\qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t<\tau}=0.$$

$\tau-d\tau\to\tau$ 间作用瞬时力 $\quad v_t\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau)\quad v\Big|_{t=\tau}=0$.

$$\Rightarrow v(x,t,\tau)\Big|_{t\geq\tau}=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi.$$

无界三维空间球对称的波动方程的解.

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 & r\geq0,\ t\geq0\\ u|_{t=0}=\phi(r)\\ u_t|_{t=0}=\psi(r)\end{cases}$$

引入 $v=ur$
$$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{rr}=0 & r\geq0\quad t\geq0\\ v|_{r=0}=0, & t\geq0\\ v|_{t=0}=r\phi(r) & v_t|_{t=0}=r\psi(r),\ r\geq0\end{cases}$$

$v=f(r-at)+g(r+at)\qquad u=\frac{v}{r}.\qquad f$: 发散波 $\quad g$: 收敛波

代入定解条件
$$f(-at)+g(at)=0\quad t\geq0\qquad\Rightarrow f(-r)=-g(r),\ r\geq0$$

$$\begin{cases}f(r)+g(r)=r\phi(r) & r\geq0\\ a[g'(r)-f'(r)]=r\psi(r) & r\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(r)=\frac{1}{2}\left[r\phi(r)-\frac{1}{a}\int_0^r\xi\psi(\xi)d\xi-C\right]\\ g(r)=\frac{1}{2}\left[r\phi(r)+\frac{1}{a}\int_0^r\xi\psi(\xi)d\xi+C\right]\end{cases}r\geq0$$

$$g(r+at) = \frac{1}{2}\left[(r+at)\phi(r+at) + \frac{1}{a}\int_0^{r+at} \xi\psi(\xi)d\xi + C\right]$$

$$f(r-at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[(r-at)\phi(r-at) - \frac{1}{a}\int_0^{r-at} \xi\psi(\xi)d\xi - C\right] & r-at \geq 0 \\ -g(at-r) = \frac{-1}{2}\left[(at-r)\phi(at-r) + \frac{1}{a}\int_0^{at-r} \xi\psi(\xi)d\xi + C\right] & r-at < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r,t) = \begin{cases} \frac{1}{2r}\left[(r-at)\phi(r-at) + (r+at)\phi(r+at) + \frac{1}{a}\int_{r-at}^{r+at} \xi\psi(\xi)d\xi\right] & r-at \geq 0 \\ \frac{1}{2r}\left[(r+at)\phi(r+at) - (at-r)\phi(at-r) + \frac{1}{a}\int_{at-r}^{at+r} \xi\psi(\xi)d\xi\right] & r-at < 0 \end{cases}$$

波的耗散与色散

理想波 $u(x,t) = f(x-at)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 　若出现高阶效应 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $(\alpha > 0)$

谐波解 $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$ 　代入方程 $\omega = ka - i\alpha k^2$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{-\alpha k^2 t}\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$ 波的耗散

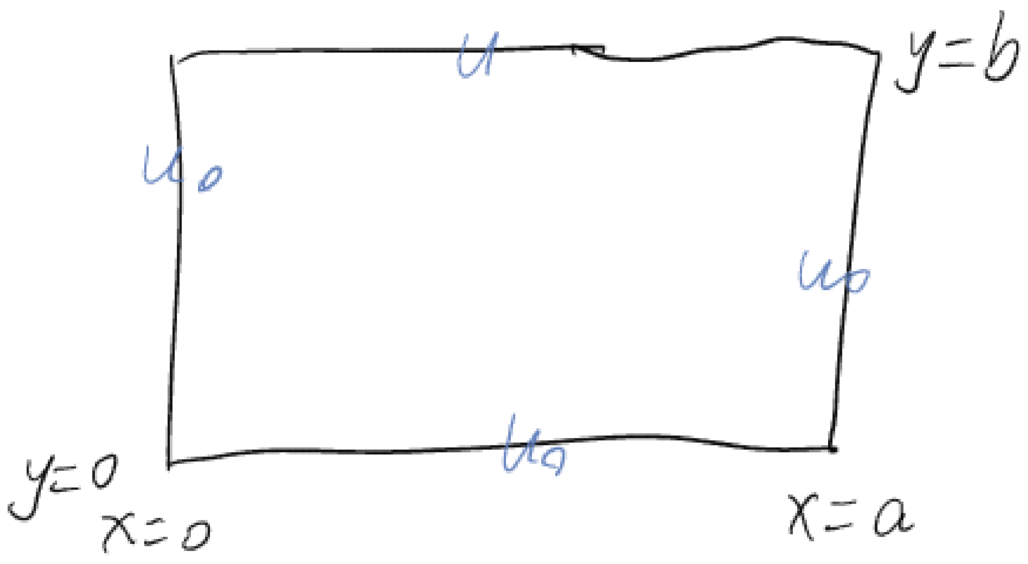
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \omega = k(a-\beta k^2)$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{ik[x-(a-\beta k^2)t]}\, dk$$

相速度 $v = \frac{\omega}{k} = a - \beta k^2$ 　波的色散

分离变量法

矩形区域的稳定问题 $u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 0<x<a,\ 0<y<b$



$u|_{x=0}=u_0 \quad u|_{x=u}=u_0 \quad u|_{y=0}=u_0 \quad u|_{y=b}=u$

令 $u=v+w$ $\quad \nabla^2 v=0,\ \nabla^2 w=0$

$v|_{x=0}=u_0 \quad v|_{x=a}=u_0 \quad v|_{y=0}=0 \quad v|_{y=b}=0$

$w|_{x=0}=0 \quad w|_{x=a}=0 \quad w|_{y=0}=u_0 \quad w|_{y=b}=U$

或者令 $u(x,y)=u_0+v(x,y)$ $\quad \nabla^2 v=0 \quad v|_{x=0}=v|_{x=a}=v|_{y=0}=0 \quad v|_{y=b}=U-u_0$

令 $v(x,y)=X(x)Y(y)$ $\quad X''+\lambda X=0 \quad Y''-\lambda Y=0$

本征值 $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ $\quad n=1,2,3,\cdots \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \quad Y_n(x)=A\,sh\frac{n\pi y}{a}+B\,ch\frac{n\pi y}{a}$

$$\Rightarrow v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n sh\frac{n\pi y}{a}+B_n ch\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$v|_{y=0}=0 \Rightarrow B_n=0 \quad v|_{y=b}=U-u_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n sh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=U-u_0$

$$\Rightarrow A_n sh\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a (U-u_0)\sin\frac{n\pi x}{a}dx=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ \frac{4}{n\pi}(U-u_0) & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=u_0+\frac{4(U-u_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{sh\frac{(2n+1)\pi y}{a}}{sh\frac{(2n+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}$$

多于两个变量的方程

散热片 四周绝热. $\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \quad 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0$

$u_x|_{x=0}=0 \quad u_x|_{x=a}=0 \quad u_y|_{y=0}=0 \quad u_y|_{y=b}=0 \quad u|_{t=0}=\phi(x,y)$

令 $u(t,x,y)=T(t)X(x)Y(y)$. $\quad \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\frac{1}{\kappa}\frac{T'(t)}{T(t)}=0$

$\Rightarrow X''(x)+\mu X(x)=0 \quad Y''(y)+\nu Y(y)=0 \quad T'(t)+\lambda\kappa T(t)=0 \quad \lambda=\mu+\nu$

$\mu=0 \quad X(x)=Ax+B,\ A=0. \quad \mu\neq 0 \quad X(x)=A\sin\sqrt{\mu}x+B\cos\sqrt{\mu}x \quad A=0,\ B\neq 0,\ \mu=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

$Y(y)$ 和 ν 同理 $\nu_m=\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad Y_m(y)=\cos\frac{m\pi y}{b} \quad \lambda_{nm}=\mu_n+\nu_m$

$$u(t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\exp\left\{-\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\kappa t\right\}$$

利用 $\int_0^a X_n(x)X_{n'}(x)\,dx=\frac{a}{2}(1+\delta_{n0})\delta_{nn'} \quad \int_0^b Y_m(y)Y_{m'}(y)\,dy=\frac{b}{2}(1+\delta_{m0})\delta_{mm'}$

$$\Rightarrow \quad A_{mn} = \frac{4}{ab(1+\delta_{n0})(1+\delta_{m0})}\int_0^a dx\int_0^b dy\ \phi(x,y)\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}.$$

非齐次方程有界问题

本征函数展开法（本征函数完备）　冲量原理法（把方程的非齐次项变为非齐次边界条件）　特解法.

$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$　$0<x<l,\ t>0$.　$u|_{x=0}=0$　$u|_{x=l}=0$

$u|_{t=0}=\phi(x)$　$u_t|_{t=0}=\psi(x)$.

(1) 本征函数展开法

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$　$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)X_n(x)$.

代入 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\{T_n''(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n''(x)\}=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)X_n(x)$　又 $X_n''+\lambda_nX_n(x)=0$.

$\Rightarrow T_n''(t)+\lambda_na^2T_n(t)=g_n(t)$　由初始条件 $T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\phi_n$.

$T_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\psi_n$.

(2) 冲量原理法

$u(x,t)=\int_0^{\infty}v(x,t,\tau)\,d\tau$.　$v_{tt}-a^2v_{xx}=0$　$0<x<l,\ t>\tau$.　$v|_{t=\tau}=0$　$v_t|_{t=\tau}=f(x,\tau)$

$v|_{x=0}=0$　$v|_{x=l}=0$

(3) 特解法.

特解 $w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t)$　设 $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$　$v_{tt}-a^2v_{xx}=0$.

$v|_{x=0}=-w|_{x=0}=0$　$v|_{x=l}=-w|_{x=l}=0$　$v|_{t=0}=\phi(x)-w|_{t=0}$　$v_t|_{t=0}=\psi(x)-w_t|_{t=0}$

若 $f(x,t)=f(x)$，取 $w(x,t)=w(x)$　则 $-a^2w_{xx}=f(x)$　$w|_{x=0}=0$　$w|_{x=l}=0$.

非齐次边界条件齐次化：以方程非齐次化为代价

$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$　$0<x<l,\ t>0$.　$u|_{x=0}=\mu(t)$　$u|_{x=l}=\nu(t)$　$t>0$.

$u|_{t=0}=\phi(x)$　$u_t|_{t=0}=\psi(x)$　$0<x<l$.

引入 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$　$w(x,t)$ 满足 $w|_{x=0}=\mu(t)$　$w|_{x=l}=\nu(t)$.

$v(x,t)$ 满足 $v_{tt}-a^2v_{xx}=-(w_{tt}-a^2w_{xx})$　$v|_{x=0}=0$　$v|_{x=l}=0$

$v|_{t=0}=\phi(x)-w(x,0)$　$v_t|_{t=0}=\psi(x)-w_t(x,0)$

$w(x,t)$ 选取： ① $w(x,t)=A(t)x+B(t)$ $B(t)=\mu(t)$ $A(t)=\frac{1}{l}(\nu(t)-\mu(t))$

② $w(x,t)=A(t)x^2+B(t)$. ③ $w(x,t)=A(t)(l-x)^2+B(t)x^2$ 等.

若能选取 $w_{tt}-a^2w_{xx}=0$ 则可以使方程和边界同时齐次化.

正交曲面坐标系

曲面坐标系 $\{x^1,x^2,x^3\}$ 坐标面为三簇曲面 $x^i=$常数 $(i=1,2,3)$

为了保证 x^1,x^2,x^3 相互独立 $\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(x,y,z)}\neq 0$

若过某点的三个坐标曲面相互垂直，称为正交曲面坐标系.

$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=g_{ij}dx^idx^j$ $g_{ij}=g_{ji}=\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^j}+\frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^j}+\frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^j}$.

$(\frac{\partial x}{\partial x^i},\frac{\partial y}{\partial x^i},\frac{\partial z}{\partial x^i})$ 为 x^i 坐标面的法向量. 坐标面相互垂直 $\Leftrightarrow$ g_{ij} 为对角矩阵，称为空间的度规

令 $g_i=\sqrt{g_{ii}}$ x^i 坐标面垂直方向单位弧长 $ds_i=g_idx^i$.

$\nabla u=\sum_i\frac{1}{g_i}\frac{\partial u}{\partial x^i}$

散度 $\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\oint_\Sigma A_nd\Sigma=\sum_i\frac{1}{g_1g_2g_3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{g_1g_2g_3}{g_i}A_i\right)$

$\nabla^2u=\frac{1}{g_1g_2g_3}\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{g_1g_2g_3}{g_i^2}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)$

Laplace 算符 ∇^2 有空间对称性： 平移，转动，反射.

圆形区域的稳定问题

$\nabla^2u=0$ $r<a$ $u|_{r=a}=f(\theta)$.

$\nabla^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0$. $u(r,\varphi)|_{r=a}=f(\varphi)$

令 $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ $\Rightarrow$ $\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{\Phi}\Phi''=\lambda$.

$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\lambda R=0$ $\Phi''+\lambda\Phi=0$ 由 $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$ $u'(r,\varphi)=u'(r,\varphi+2\pi)$

自然边界条件： $u(r,\varphi)|_{r=0}$ 有界.

本征值 $\lambda_0=0$ $\Phi_0(\varphi)=1$ $\lambda>0$ $\lambda_m=m^2$ $\Phi_m(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$.

$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$ 这是欧拉方程，令 $t = \ln r$ $\quad \frac{d^2R}{dt^2} - \lambda R = 0.$

$\lambda_0 = 0,\quad R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \qquad \lambda_m = m^2 \quad R_m(r) = C_m r^m + D_m r^{-m}.$

$R|_{r=0}$ 有界 $\Rightarrow D_0 = 0,\quad D_m = 0.$

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (C_{m1}\sin m\varphi + C_{m2}\cos m\varphi)$$

由 $u(a,\varphi) = f(\varphi)$. $\quad C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \quad C_{m1} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin m\varphi\, d\varphi \quad C_{m2} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi.$

一个 $\lambda_m \Rightarrow 2$ 个本征函数，在周期性边界条件出现的简并.

§7.3. 亥姆霍兹方程及其变量分离

波动方程 $u_{tt} - a^2\nabla^2 u = 0$ 分离时间变量 $u(x,y,z,t) = T(t)\,v(x,y,z)$

$\Rightarrow T''(t) + a^2k^2 T(t) = 0 \qquad \nabla^2 v + k^2 v = 0.$ （亥姆霍兹方程）

热传导方程 $u_t - D\nabla^2 u = 0$ 分离 $\Rightarrow T' + Dk^2 T = 0 \qquad \nabla^2 v + k^2 v = 0$

空间部分都是亥姆霍兹方程.

柱坐标系中亥姆霍兹方程的变量分离

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0.$ 代入 $u(r,\varphi,z) = v(r,\varphi)Z(z)$

$\Rightarrow \frac{d^2Z}{dz^2} + \lambda Z = 0. \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \lambda)v = 0 \qquad$ 代入 $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu\Phi = 0.\quad , \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0.$ Bessel 方程

周期条件：$\mu = m^2.\ (m = 0, 1, \cdots) \qquad \Phi = \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}.$

若 $r=0$ 在求解空间内，$R|_{r=0}$ 有界（根据具体问题）.

球坐标系下的分离变量

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0 \qquad$ 令 $u(r,\theta,\varphi) = R(r)S(\theta,\varphi).$

$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0 \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} + \lambda S = 0. \qquad$ 令 $S(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$

球 Bessel 方程

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \qquad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu\Phi = 0.$ （周期条件 $\Rightarrow \mu = m^2$）

连带 Legendre 方程

若 $\mu = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \lambda\Theta = 0$

Legendre 方程

§8. 常微分方程的本征值问题

§8.1 内积空间

Bessel 不等式：$(\vec{x},\vec{x}) \geq \sum_{i=1}^{k} |(\vec{x}_i,\vec{x})|^2$

§8.2 函数空间

在一定区域（$[a,b]$）上的复平方可积函数 $f(x)$ 构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 $\mathcal{H}$.

$(f_1,f_2) = \int_a^b f_1^*(x)\, f_2(x)\, dx$

若对 $\mathcal{H}$ 的任一函数 $f(x)$，总可表为正交归一集 $\{f_i, i=1,\dots\}$ 的线性组合，称这组基是完备的.

§8.3 自伴算符的本征值问题 → 线性

设 L, M 为 $\mathcal{H}$ 上的算符，$\forall u,v\in\mathcal{H}$，有 $(v,\hat{L}u) = (\hat{M}v,u)$.
称 $\hat{L}$ 与 $\hat{M}$ 互为伴算符，$\hat{L}$ 伴算符记为 $\hat{L}^+$

例：$L = i\frac{d}{dx}$ 边界条件 $u(a)=u(b)$，$\hat{L}^+=\hat{L}$.

若 $\hat{L}=\hat{L}^+$，称 $\hat{L}$ 是自伴算符. 方程 $\hat{L}y(x) = \lambda y(x)$ 称为自伴算符的本征值问题.

性质1 自伴算符的本征值必为实数.

性质2 不同本征值的本征函数正交.

性质3 $\hat{L}$ 的全体本征函数构成完备的函数组，即任何一个 $[a,b]$ 中有连续二阶导数且满足与自伴算符 $\hat{L}$ 相同边界条件的函数 $f(x)$ 均可按本征函数展开成绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x). \qquad C_n = \frac{\langle y_n(x), f(x)\rangle}{\langle y_n(x), y_n(x)\rangle}$$

若函数空间为实数空间，自伴算符也称对称算符. 在复数空间自伴算符也称厄米算符.

§8.4 施图姆-刘维尔（S-L）型方程的本征值问题

S-L型方程：$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]\,y = 0$ λ为参数 p,q,ρ 为实函数

Bessel 方程，球 Bessel 方程，（连带）Lengendre 方程都是 S-L 型方程.

对一般的二阶常微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0$

可化为：

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int a(x)dx}\frac{dy}{dx}\right) + \left[b(x)e^{\int a(x)dx}\right]y + \lambda\left[c(x)e^{\int a(x)dx}\right]y = 0$$

是S-L型方程.

31入 $\hat{L} = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$ $\Rightarrow$ SL型方程 $\hat{L}y(x) = \lambda\rho(x)y(x)$.

加上齐次一、二、三类边界条件或周期条件或自然边界条件，构成S-L型方程本征值问题

令 $u(x) = \sqrt{\rho(x)}\,y(x)$. $\tilde{L}u(x) = \lambda u(x)$ $\tilde{L} = -\frac{d}{dx}\left[\tilde{p}(x)\frac{d}{dx}\right] + \tilde{q}(x)$.

$\tilde{p}(x) = \frac{p(x)}{\rho(x)}$ $\tilde{q}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} + \frac{q(x)}{\rho(x)}$.

设 $\rho(x)=1$. 第一、二、三类齐次边界条件 $\begin{cases}\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = 0\\ \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0\end{cases}$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为实数，$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \neq 0$ $|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 \neq 0$.

若 $u(x)$，$v(x)$ 满足上述边界条件

$\int_a^b u^* L v\, dx = \int_a^b [Lu]^* v\, dx$ $\Rightarrow$ L 为自伴算符.

§8.5 SL型方程本征值的简并现象

定理1：若SL型方程本征值问题的一个本征函数为复函数，且其实部与虚部线性无关，则此本征值问题是二重简并的.

$(\hat{L}(f+ig) = \lambda(f+ig) \Rightarrow \hat{L}f = \lambda f \quad \hat{L}g = \lambda g)$

（注意，SL型方程是二阶，最高两重简并. 物理图像：若 $[\hat{\Theta}, H] = 0$，能级不简并则能量本征函数是实的，反之若是复的说明能级简并）

定理2：设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为SL型方程本征值的两个实的且线性无关的本征函数，且满足第一、二、三类边界条件，则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 对应不同本征值 λ.

$\Rightarrow$ 在一、二、三类边界条件或有界条件下 SL方程本征值问题不可能有简并，只有在周期条件下才有可能发生简并.

§9. 球函数

$(\nabla^2+k^2)u=0$　连带 Lengendre 方程：$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$

令 $x=\cos\theta$，$y=\Theta$，$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{1-x^2}\right]y=0\quad(-1\le x\le 1)$

§9.1 Lengendre 方程的解

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{\lambda y}{1-x^2}=0$$

三个奇点：$x=\pm1,\infty$　在奇点外 方程解在复平面解析.

$x=0$ 为常点，$|x|<1$ 圆内解析，$x=0$ 处展开 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$

$$\Rightarrow c_{k+2}=\frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}c_k$$

$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}x^{2k}$，$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}$　收敛半径为1

$x\to\pm1$　$c_n=\frac{(n-1)(n-2)-\lambda}{n(n-1)}c_{n-2}=\cdots=\frac{1}{n}\left[1-\frac{\lambda}{(n-1)(n-2)}\right]\cdots\left[1-\frac{\lambda}{N(N+1)}\right]Nc_N$

当 n 足够大，$c_n\sim\frac{M}{n}$　$y_1(x)\sim\sum_{k=N}^{\infty}\frac{M}{2n}x^{2n}$　$y_2(x)\sim\sum_{k=N}^{\infty}\frac{M}{2n+1}x^{2n+1}$

$\Rightarrow x\to1$ 时 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 级数 都发散

但若 $\lambda=l(l+1)$　$(l=0,1,2,\cdots)$ 时 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 其中之一被截断，成为 l 次多项式.

令 $c_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$　$c_k=\frac{(k+2)(k+1)}{k(k+1)-l(l+1)}c_{k+2}=-\frac{(k+2)(k+1)}{(l-k)(l+k+1)}c_{k+2}$

$$c_{l-2}=-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}c_l=-\frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}$$

$$\Rightarrow c_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{2^l(l-n)!(l-2n)!\,n!}\qquad n=0,1,2,\cdots,\left[\tfrac{l}{2}\right]$$

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

$P_0(x)=1$　$P_1(x)=x$　$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$　$P_l(1)=1$

§3. 第二类勒让德函数

$$Q_l(x) = P_l(x)\int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{[P_l(x)]^2}dx = P_l(x)\int \frac{dx}{(1-x^2)P_l(x)^2}.$$

$x=\pm 1$时发散.

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad Q_1(x) = \frac{1}{2}P_1(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}P_2(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x \qquad Q_3(x) = \frac{1}{2}P_3(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

方程通解 $y_l(x) = \underbrace{C_1 P_l(x)}_{x=\pm1\text{有界}} + \underbrace{C_2 Q_l(x)}_{x=\pm1\text{发散}}$

§4 勒让德多项式的微积分表示

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l}$$ (Rodrigues公式，罗巨格公式).

由高阶导数公式，$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\eta)\,d\eta}{(\eta-z)^{n+1}}$

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint \frac{(\eta^2-1)^l}{(\eta-x)^{l+1}}d\eta \qquad \text{(施列夫利积分)}$$

若取 C为圆周，圆心在$x>1$，半径为 $\sqrt{x^2-1}$ C上 $\eta - x = \sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}$ $d\eta = i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}d\psi$.

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi})^2-1]^l}{(\sqrt{x^2-1})^{l+1}(e^{i\psi})^{l+1}}(i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi})d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}+(x^2-1)e^{2i\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}}\right]^l d\psi$$

$$\Rightarrow P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\psi)^l d\psi. \quad \text{(拉普拉斯积分)}$$

令 $x=\cos\theta$， $P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^l d\psi.$

不难看出 $P_l(1)=1$ $P_l(-1) = (-)^l$.

$|P_l(\cos\theta)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi|^l d\psi \le 1$ ($|x|\le 1$时)

由 $(x^2-1)^l = (x-1)^l(2+(x-1))^l = \sum_{n=0}^{l}\frac{l!}{n!(l-n)!}2^{l-n}(x-1)^{l+n}$.

$$P^{(l)}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!(l-n)!}2^{-n}\frac{d^l}{dx^l}(x-1)^{l+n} = \sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!(l-n)!}\frac{(l+n)!}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n.$$

即 $p^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

§9.5 勒让德多项式的正交归一性

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x)\, dx = \delta_{kl} \frac{2}{2l+1}}$$ 证明如下：

定理：若 $f(x)$ 为 k 次多项式，$k<l$，则 $f(x)$ 与 $P_l(x)$ 正交

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx = \frac{1}{2^l l!}\left\{\left[f(x)\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l dx\right\}.$$

$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^l = 0 \quad (x=\pm1,\ k<l)$.

继续递归，微分 k 次，$f^{(k)}(x) =$ 常数，

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\, dx = \frac{(-)^k}{2^l l!} f^{(k)}(x) \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(x^2-1)^l dx = \frac{(-)^k f^{(k)}(x)}{2^l l!}\left[\frac{d^{l-k-1}}{dx^{l-k-1}}(x^2-1)^l\right]_{-1}^{1} = 0$$

$k<l$ 时令 $f(x) = P_k(x)$；$k>l$ 时令 $f(x) = P_l(x)$ 即证 $\int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x) dx = 0 \quad (k\neq l)$

$k=l$ 时 $N_l^2 = \int_{-1}^{1} P_l(x)^2 dx = \frac{(-)^l}{2^l l!} \frac{d^l P_l(x)}{dx^l}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l dx$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l dx = (-)^l\int_{-1}^{1}(1+x)^l(1-x)^l dx \xlongequal{t=\frac{1+x}{2}} (-)^l\int_0^1 2^{2l+1} t^l(1-t)^l dt.$$

$$= (-)^l 2^{2l+1} B(l+1,l+1) = (-)^l 2^{2l+1}\frac{(l!)^2}{(2l+1)!}$$

$$\frac{d^l P_l(x)}{dx^l} = C_l\cdot l! = \frac{(2l)!}{2^l l!} \quad \Rightarrow \quad N_l^2 = \frac{2}{2l+1}.$$

$[-1,1]$ 分段连续的函数 $f(x)$ 可展开为 $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x)$，$C_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx$.

例：$\int_0^1 x^\alpha P_l(x)dx \quad (\alpha>1)$

$P_l(x) = a_0x^l + a_1x^{l-2} + a_2x^{l-4} + \cdots$ 共 $[\frac{l}{2}]+1$ 项

$$\int_0^1 x^\alpha P_l(x)dx = \frac{a_0}{l+\alpha+1} + \frac{a_1}{l+\alpha-1} + \frac{a_2}{\alpha+l-3} + \cdots = \frac{f(\alpha)}{(\alpha+l+1)(\alpha+l-1)\cdots\begin{cases}(\alpha+1)\\(\alpha+2)\end{cases}}.$$

$P_l(1) = a_0 + a_1 + \cdots = 1 \quad \Rightarrow f(\alpha)$ 最高次幂系数为 1

$\alpha = l-2$ 时，$\int_0^1 x^\alpha P_l(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^\alpha P_l(x)dx = 0$

$\Rightarrow f(\alpha)$ 中有 $(\alpha-l+2)$ 的因子，同理有 $(\alpha-l+4)$ $\cdots\cdots$ α 或 $(\alpha-1)$ 的因子.

l为偶数 $l\to 2l$. $\int_0^1 x^\alpha P_{2l}(x)\,dx = \frac{(\alpha-2l+2)(\alpha-2l+4)\cdots\alpha}{(\alpha+2l+1)(\alpha+2l-1)\cdots(\alpha+1)}$

l为奇数 $l\to 2l+1$ $\int_0^1 x^\alpha P_{2l+1}(x)\,dx = \frac{(\alpha-2l+1)(\alpha-2l+3)\cdots(\alpha-1)}{(\alpha+2l+2)(\alpha+2l)\cdots(\alpha+2)}$

§9.6 勒让德多项式的生成函数

定义：设函数 $g(t)$ 在 $t=0$ 某邻域内可展开为收敛级数 $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 则 $g(t)$ 为序列 $\{a_n\}$ 的生成函数或母函数.

若 $K(z,t)$ 在 (z,t) 某区域内可展开为 z,t 的收敛级数 $K(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)t^n$，称 $K(z,t)$ 为函数序列 $\{f_n(z)\}$ 的生成函数.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\,t^l}$$

设 $t\in\mathbb{C}$，$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ 在 $t=0$ 邻域解析，展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)\,t^n$.

$c_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}}\,dt$. 令 $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1-tu$.

$t=\frac{2(u-x)}{u^2-1}$ $\quad dt=-2\frac{1-2xu+u^2}{(u^2-1)^2}\,du$ $\quad (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{u^2-1}{1-2xu+u^2}$.

$c_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c'}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-x)^{n+1}}\,du = P_n(x)$.

$x=\pm1$, $(1\mp 2t+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1\mp t)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty}(\pm t)^l \Rightarrow \begin{array}{l} P_l(1)=1 \\ P_l(-1)=(-)^l \end{array}$

§9.7 勒让德多项式的递推关系

$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$ ①.

$\frac{\partial ①}{\partial t} \Rightarrow (x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)\,t^{l-1}$ ②

②×$(1-2xt+t^2)$ $\quad (x-t)\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = (1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)\,t^{l-1}$.

$\Rightarrow$ $(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) = (2l+1)xP_l(x)$. $\quad l\geq 1$. ③

$P_1(x) - xP_0(x) = 0$ $\quad l=0$

$\frac{\partial ①}{\partial x} \Rightarrow t(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l$.

$\Rightarrow t\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = (1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)\,t^l$.

$\Rightarrow P_l(x) = P_{l+1}'(x) - 2xP_l'(x) + P_{l-1}'(x)$ ④

$\frac{d③}{dx}$ 与④ $\Rightarrow$ $P_{l+1}'(x) = xP_l'(x) + (l+1)P_l(x)$. ⑤

④与⑤消去 $P_{l+1}'(x)$ $\Rightarrow$ $xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) = lP_l(x)$ ⑥

⑤与⑥消去 $P_l'(x)$ $\Rightarrow$ $(2l+1)P_l(x) = P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x)$ ⑦

⑤中 $l \to l-1$ 与⑥消去 $P_{l-1}'(x) \Rightarrow$ $(x^2-1)P_l'(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x)$ ⑧

例：$\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx$　由③，$xP_m(x) = \frac{1}{2m+1}\left[(m+1)P_{m+1}(x) + mP_{m-1}(x)\right]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} \frac{2n}{4n^2-1} & m=n-1 \\ \frac{2(n+1)}{(2n+3)(2n+1)} & m=n+1. \\ 0 & \text{else}. \end{cases}$$

$$\int_x^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{(1-x^2)\left[P_n'(x)P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right]}{n(n+1)-m(m+1)}$$

证明：勒让德方程 $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n = 0$ ①　$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right] + m(m+1)P_m = 0$. ②

$$\int_x^1 \left[P_m \times ① - P_n \times ②\right]dx = \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_x^1 P_m(x)P_n(x)dx = (1-x^2)\left[P_n'(x)P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right].$$

§9.8 应用

§9.9 连带勒让德函数

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0.\qquad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \mu = m^2.\ (\text{周期条件})$$

$\lambda = l(l+1)$　(自然边界条件 $\Theta(\theta=0)$ 有界)　令 $x = \cos\theta$，$\Theta(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}Y(x)$

$$\Rightarrow (1-x^2)Y'' - 2(m+1)xY' + \left[l(l+1) - m(m+1)\right]Y = 0.$$

勒让德方程 $(1-x^2)p'' - 2xp' + l(l+1)p = 0$.　对 x 求 m 阶微分，

$$(1-x^2)p^{(m)''} - 2(m+1)xp^{(m)'} + \left[l(l+1) - m(m+1)\right]p^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l(x)}{dx^m} \qquad m = 0,1,2,\cdots,l.$$

微分表示　$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$

$m \to -m$，方程不变，推广微分表示为 $P_l^{-m}(x) = (1-x^2)^{-m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l$.

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x).$$

正交性：$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_k^m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk}$.

$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_l^n(x)\, dx = \frac{1}{m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{mn} \qquad (m,n \geq 0)$

广义傅里叶展开 $f(\theta) = \sum_l^{\infty} f_l^m P_l^m(\cos\theta) \qquad l > m$.

注意：连带勒让德方程的本征值是 l，m 是固定好的.

§9.10. 球函数

$\nabla^2 u - k^2 u = 0$. $\quad u(r,\theta,\varphi) = R(r)\, Y(\theta,\varphi)$.

$Y_l^m(\theta,\varphi) \to P_l^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix}$. $\qquad l = 0, 1, \cdots \quad m = 0, 1, \cdots, l$.

又可取 $Y_l^m = P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \qquad l = 0, 1, \cdots \qquad m = 0, \pm 1, \cdots, \pm l$

正交性 $\underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{\int d\Omega} \cdot Y_l^m(\cos\theta)^* \, Y_k^n(\cos\theta) = 0$ 除非 $l \neq k,\ m \neq n$.

$\int d\Omega \ |S_{lm}(\theta,\varphi)|^2 = \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{4\pi}{2l+1} \qquad S_{lm} = P_l^{|m|} e^{im\varphi}$.

广义傅里叶展开 $f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_l^m P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$.

$C_l^m = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int d\Omega \ P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{-im\varphi} f(\theta,\varphi)$.

递推关系 $\quad (2l+1)\, x P_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x) \quad ①$.

$\frac{d^m ①}{dx^m} \Rightarrow (2l+1)\, x P_l^{(m)}(x) + m(2l+1) P_l^{(m-1)}(x) = (l+1) P_{l+1}^{(m)}(x) + l P_{l-1}^{(m)}(x)$.

$\times (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \Rightarrow (2l+1)\, x P_l^m(x) = (l+m) P_{l-1}^m + (l-m+1) P_{l+1}^m$

类似：$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_l^m(x) = P_{l+1}^{m+1} - P_{l-1}^{m+1}$

$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_l^m = (l+m)(l+m-1) P_{l-1}^{m-1} - (l-m+2)(l-m+1) P_{l+1}^{m-1}$

$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l^m}{dx} = (l+1)(l+m) P_{l-1}^m - l(l-m+1) P_{l+1}^m$

正交归一表达式 $Y_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{N_l^m}Y_l^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$

也有 $Y_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{N_l^m}(-1)^m Y_l^m(\theta,\varphi)$

应用：$\hat{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$　　$\hat{L}^2Y_{lm}=l(l+1)\hbar^2Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

$\hat{L}_z=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.　　$\hat{L}_zY_{lm}=m\hbar\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

§9.12. 球谐函数加法公式.

(θ,φ) 与 (θ',φ') 方向夹角 γ.　　$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

$$\boxed{P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\Omega)\,Y_{lm}^*(\Omega')}$$

又可写成 $P_l(\cos\gamma)=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi')$

证明：$\delta(\Omega-\Omega')=\sum_{l,m}Y_{lm}^*(\Omega')Y_{lm}(\Omega)$.　$\delta(\Omega-\Omega')$只与夹角 γ 有关，取 Ω'沿 $\theta=0$ 方向.

$\delta(\Omega-\Omega')=\sum_l d_l P_l(\cos\gamma)$　　$d_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\delta(\Omega-\Omega')P_l(\cos\gamma)d(\cos\gamma)$

$$=\frac{2l+1}{4\pi}\int d\Omega\;\delta(\Omega-\Omega')P_l(\cos\gamma)$$

$$=\frac{2l+1}{4\pi}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\gamma)\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\\ \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\end{cases}$$

§10. 柱函数

§10.1 Bessel方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0$$

若 $k^2-\lambda\neq 0$，引入 $x=\sqrt{k^2-\lambda}\,r$ $\quad y(x)=R(r)$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (\mu=\nu^2=m^2).$$

或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$ 两奇点，$x=0$ 正则奇点，→ 展开.
$x=\infty$ 非正则奇点。

§10.2 Bessel函数与Neumann函数

$\nu\notin\mathbb{Z}$时，$J_{\pm\nu}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}$ 线性无关

（$\pm\nu$阶第一类Bessel函数）

$\nu\in\mathbb{Z}$时，$J_{\pm n}(x)$线性相关 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ 取第一个解为$J_n(x)$.

第二个解 $$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi\,J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}-(-)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

$$=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\overbrace{\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}^{n=0\text{时此项去掉}}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

（第二类Bessel函数，Neumann函数）

§10.3 Bessel函数基本性质

对$\nu^2=m^2$的整数阶Bessel函数

1. $J_{-n}(x)$与$J_n(x)$线性相关 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$.

证：$J_{-n}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$ $\quad k<n$时 $\Gamma(k-n+1)\to\infty$.

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\xlongequal{l=k-n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+l}}{(n+l)!\,l!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}$$

$$=(-)^nJ_n(x).$$

2. $J_n(x)$具有奇偶性 $J_n(-x)=(-)^n J_n(x)$

3. $J_n(x)$的生成函数 $\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \quad 0<|t|<\infty$

加法公式 $J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)$

4. $J_n(x)$的积分表示.

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta.$$

证: 令 $t=e^{i\theta}$, $e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta} \Rightarrow J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta}(e^{in\theta})^*\,d\theta.$

即 $$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(x\sin\theta-n\theta)+i\underbrace{\sin(x\sin\theta-n\theta)}_{奇,\ =0}\right]d\theta.$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\sin\theta}\,d\theta. \qquad \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x\sin\theta)d\theta=0\right)$$

5. 令 $t=ie^{i\theta}$. $e^{ix\cos\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)i^n e^{in\theta}=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[i^nJ_n(x)e^{in\theta}+J_{-n}(x)i^{-n}e^{-in\theta}\right]$

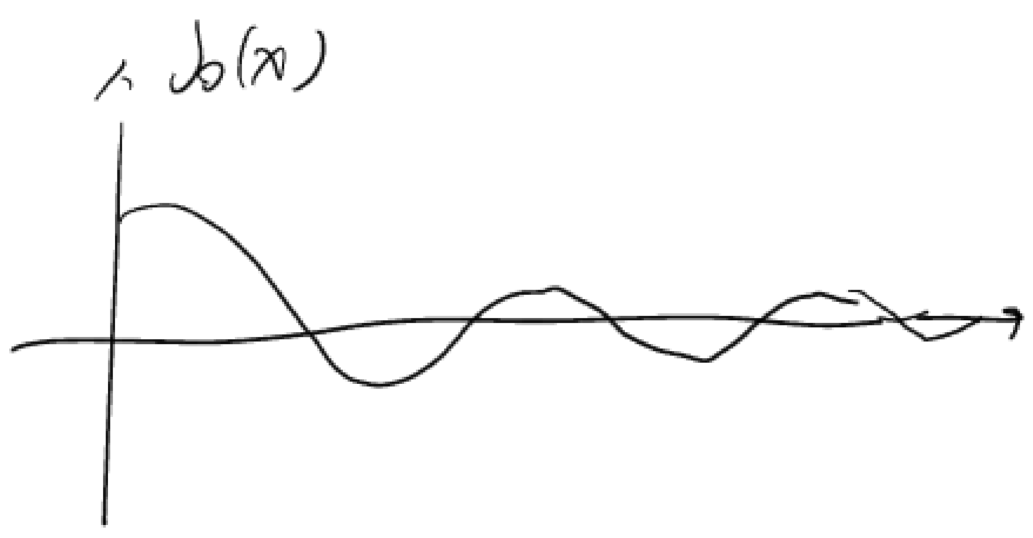
$=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(x)\cos n\theta.$ 令 $x=kr$,

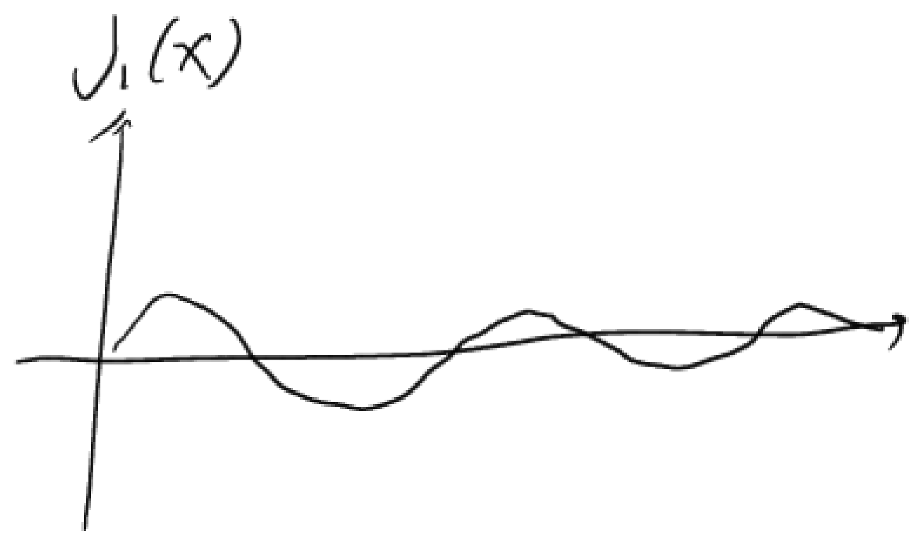
$$e^{ikr\cos\theta}=J_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(kr)\cos n\theta.$$ (平面波按柱面波展开)

两边对θ积分 $J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\theta}\,d\theta.$

6. 实数阶Bessel函数的零点.

$\nu\in Z$ 或为 $\nu>-1$ 的实数时, $J_\nu(x)$有∞个零点, 全部为实数, 对称地分布在实轴两侧.





Bessel函数为变形的正弦余弦函数, 其自身没有本征值问题.

§10.4 Bessel 函数的递推关系

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)}$$

证明：从级数展开出发。 从上面两式出发得到

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_{\nu}'(x) \qquad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x).$$

$J_0(x)$ 与 $J_1(x)$ 为基本的，其它整数阶 $J_n(x)$ 均可从 $J_0(x)$ 与 $J_1(x)$ 写出.

$\nu=0$ 时又有 $J_0'(x) = -J_1(x)$.

$N_{\nu}(x)$ 与 $J_{\nu}(x)$ 递推关系完全一致 只有上述递推关系的函数定义为柱函数

柱函数一定满足 Bessel 方程.

证：
$$\begin{cases} C_{\nu}'(x) + \frac{\nu}{x}C_{\nu}(x) = C_{\nu-1}(x) & ⑤ \\ C_{\nu}'(x) - \frac{\nu}{x}C_{\nu}(x) = -C_{\nu+1}(x) & ⑥ \end{cases}$$

⑤' $\quad C_{\nu}'' + \frac{\nu}{x}C_{\nu}' - \frac{\nu}{x^2}C_{\nu} = C_{\nu-1}' \qquad ⑦$.

⑥令 $\nu\to\nu-1$. 再代入⑤ $\quad C_{\nu-1}' = \frac{\nu-1}{x}C_{\nu-1} - C_{\nu} = \frac{\nu-1}{x}\left[C_{\nu}' + \frac{\nu}{x}C_{\nu}\right] - C_{\nu}$

⑦代入：$\quad C_{\nu}'' + \frac{\nu}{x}C_{\nu}' - \frac{\nu}{x^2}C_{\nu} = \frac{\nu-1}{x}C_{\nu}' + \left(\frac{\nu(\nu-1)}{x^2} - 1\right)C_{\nu}$.

$$\Rightarrow \quad C_{\nu}'' + \frac{1}{x}C_{\nu}' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)C_{\nu} = 0 \quad \text{即 Bessel 方程}$$

例：计算 $\int_0^1 (1-x^2)J_0(\mu x)\,x\,dx \qquad (J_0(\mu)=0)$

由第一个递推关系， 原式 $= \int_0^1 (1-x^2)\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[xJ_1(\mu x)\right]dx = \frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2 J_1(\mu x)\,dx$.

$$= \frac{2}{\mu^2}\left[x^2 J_2(\mu x)\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu^2}J_2(\mu).$$

$\nu=1$ 时有 $\begin{cases} J_0(\mu) - J_2(\mu) = 2J_1'(\mu) \\ J_0(\mu) + J_2(\mu) = \frac{2}{\mu}J_1(\mu). \end{cases}$ $\qquad$ 原式 $= \frac{4}{\mu^3}J_1(\mu)$

§10.5. Bessel 函数渐近展开

$x \to 0$ 时, $J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2})$. $\nu>0$ 时 $J_\nu(x) \to 0$ $(x \to 0)$.

$x \to \infty$ 时, $J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ $|\arg x| < \pi$.

($J_\nu(kr)$ 可理解为柱面波)

$J_0(0) > 0$, 但 $J_n(0) = 0$ $(n \geq 1)$.

若 $x \to 0$, $\mathrm{Re}\,\nu > 0$, $N_\nu(x)$ 行为由 $J_{-\nu}(x)$ 决定. $N_\nu(x) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}$.

$N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln\frac{x}{2}$ 在 $x=0$ 是发散的.

若 $x \to \infty$, $N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ $|\arg x| < \pi$.

由 $x \to \infty$ 的渐近行为, 引入 Hankel 函数. (第三类 Bessel 函数

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{发散波}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{会聚波.}$$

§10.6 Bessel 方程的本征值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right] + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0 & (k^2 \text{为待定本征值}) \\ R(0) \text{有界} \quad R'(a)\sin\beta + R(a)\cos\beta = 0 \end{cases}$$

方程 $J_m'(k_i a)\sin\beta + J_m(k_i a)\cos\beta = 0$ 的第 i 个非负零点, k_i

上述本征值问题本征值为 k_i^2 本征函数为 $J_m(k_i r)$.

正交性: $$\int_0^a J_m(k_{mi} r) J_m(k_{mj} r)\, r\,dr = \delta_{ij} \frac{a^2}{2}\left[J_m'(k_{mi} a)\right]^2.$$

完备性: 若 $f(r)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且只有有限个极大极小, 则可按 $J_m(k_i r)$ 展开:

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_m(k_i r) \qquad b_i = \frac{\int_0^a f(r) J_m(k_i r)\, r\,dr}{\int_0^a J_m^2(k_i r)\, r\,dr}$$

10.10 变型 Bessel 函数

Bessel 方程 $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R(r)=0$ $k^2-\lambda<0$ 时 $x=i\sqrt{\lambda-k^2}\,r$ 令 $t=\sqrt{\lambda-k^2}\,r$

变型的 Bessel 方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}-\left(1+\frac{\nu^2}{t^2}\right)y(t)=0$.

解为 $J_\nu(x)=J_\nu(it)=i^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$

其中实数部分 $I_\nu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$ 称为虚宗量 Bessel 函数
变型 Bessel 函数

$x\in\mathbb{R}$ 第一类变型 Bessel 函数 $I_\nu(x)=e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(xe^{i\pi/2})$ $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$.

第二类变型 Bessel 函数 $K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$

$x\to0$ 时 $I_\nu(x)\sim\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ 有界

$$K_\nu(x)\sim\begin{cases}-\ln\frac{x}{2} & \nu=0\\ \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} & \nu\to0\end{cases}$$ 无界.

$x\to\infty$ 时 $I_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^x$ 发散

$K_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^{-x}$ 趋于0

$I_n(x)$ 单调递增，$K_n(x)$ 单调递减，且二者 $x>0$ 时均无零点.

§10.12. 半奇数阶 Bessel 函数

$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$ 由 $\Gamma(k+3/2)=\frac{\Gamma(2k+2)\,2^{-2k-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)}$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$.

$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

两个递推关系可以写成 $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)x^\nu J_\nu(x)=x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x)$. $\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)x^{-\nu}J_\nu(x)=x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(x)$

$\Rightarrow x^{-n+1/2}J_{-n+1/2}(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n x^{1/2}J_{1/2}(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$

$x^{-n-1/2}J_{n+1/2}(x)=\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n x^{-1/2}J_{1/2}(x)=\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}$.

任意一个半奇数阶 Bessel 函数都是幂函数与三角函数的复合函数.

$J_{n+1/2}$ 与 $J_{-(n+1/2)}$ 线性无关，$N_{n+1/2}$ 与 $J_{-(n+1/2)}$ 线性相关 $N_{n+1/2}=(-)^{n+1}J_{-(n+1/2)}$

§10.13. 球 Bessel 函数

球 Bessel 方程 $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$. 一般 $\lambda=l(l+1)$

$k=0$ 时解为 r^l 与 r^{-l-1} 若 $k\neq 0$，令 $x=kr$ $y(x)=R(r)$，有

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0.$$

令 $y=x^{-1/2}v(x)$, $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}+\left[1-\frac{(l+1/2)^2}{x^2}\right]v=0$ 是 $l+1/2$ 阶 Bessel 方程.

原方程解取为
$$\begin{cases} j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x) & \text{球 Bessel 函数} \\ n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x)=(-)^{l+1}J_{-l-1}(x) & \text{球 Neumann 函数.} \end{cases}$$

球 Hankel 函数
$$\begin{cases} h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+i\,n_l(x) \\ h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-i\,n_l(x) \end{cases}$$

$j_0(x)=\frac{\sin x}{x}$ $n_0(x)=-\frac{\cos x}{x}$ $j_1(x)=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x)$

$n_1(x)=-\frac{1}{x^2}(\cos x+x\sin x)$

$x\to 0$ 时 $j_0(x)=1$ $j_l(x)=0$ $(l\geq 1)$ $n_l(x)\to\infty$

$x\to\infty$ 时 $j_l(x)\sim\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right)$ $n_l(x)\sim\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right)$

$h_l^{(1)}(x)\sim\frac{1}{x}e^{ix}(-i)^{l+1}$ $h_l^{(2)}(x)\sim\frac{1}{x}e^{-ix}(+i)^{l+1}$

平面波按球面波展开

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

§10.15. 合流超几何函数与超几何函数

$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$ 合流超几何方程 $x=0$ 为正则奇点, $x=\infty$ 非正则奇点.

在 $x=0$ 处展开 当 γ 不为整数时 $y_1(x)=F(\alpha;\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}x^n$

$y_2(x)=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;x)$

$F(\alpha;\gamma;x)$ 全平面解析，称为合流超几何函数.

当 α 为负整数时，$F(\alpha;\gamma;x)$ 在 $n=|\alpha|$ 后被截断 变为 n 阶多项式.

Bessel 函数 $J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-ix} \left(\frac{x}{2}\right) F(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2ix)$

Bessel 方程 1 个正则奇点，1 个非正则奇点.

$I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-x} \left(\frac{x}{2}\right) F(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2x)$

超几何方程 $x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$. 正则奇点为 $0, 1, \infty$

$x \to \frac{x}{b}$ $\quad x(1-\frac{x}{b})y'' + [\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{x}{b}]y' - \frac{\alpha\beta}{b}y = 0$ 奇点 $0, b, \infty$.

令 $b=\beta\to\infty$，奇点 b 和 ∞ 合二为一，方程变为合流超几何方程.

超几何方程解 $\quad y_1(x) = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)} x^n$.

$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$.

Lengendre 方程有 3 个正则奇点，可由超几何方程推出.

$P_\nu(x) = F(-\nu;\nu+1;1;\frac{1-x}{2})$ $\qquad \nu=l$ 为整数时 $P_l(x)$ 为多项式.

§11. 积分变换法

PDE ⟶ ODE ⟶ 代数方程

Laplace变换常用于求解含时间的PDE定解问题.

Fourier变换常对空间变量进行，可选用(有限的)正弦、余弦变换.

条件：对$(-\infty,\infty)$上的$f(x)$，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 绝对收敛.

性质：$\mathcal{F}[f'(x)] = ikF(k)$

半无界空间：可选用正弦变换 $F(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin kx\,dx$ $\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(k)\sin kx\,dx$.

条件：仅出现未知函数及其二阶偏导数，且 $x=0$端给出第一类边界条件.

余弦变换：仅出现未知函数及其二阶偏导数，且 $x=0$端给出第二类边界条件.

一般可写为：$F(k)=\int_a^b \underbrace{K(k,x)}_{核} f(x)\,dx$.

Hankel变换：$K(k,x)=xJ_n(kx)$ $\quad 0\le x<\infty$

Mellin变换：$K(k,x)=x^{k-1}$ $\quad 0<x<\infty$

原则：① 自变量变化区间与该变换一致，积分变换存在

② $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 在变换下有简单代数关系.

③ 涉及的未知函数及其导数的值由定解条件给出.

设定方程 $\frac{1}{\rho(x)}\hat{L}(x)u(x,y)+\hat{M}(y)u(x,y)=f(x,y)$. $\quad \hat{L}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{-q(x)}$ → 可以去掉，不影响推导.

引入积分变换 $U(k,y)=\int_a^b \rho(x)K(k,x)u(x,y)\,dx$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b K(k,x)\hat{L}u(x,y)\,dx}_{分部积分} + \underbrace{\int_a^b \rho(x)K(k,x)Mu(x,y)\,dx}_{=MU(k,y)} = F(k,y).$$

$$\Rightarrow \left[p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}K - u\frac{\partial K}{\partial x}\right)\right]\Big|_a^b + \int_a^b uLK\,dx + MU = F.$$

引入方程 $LK=\lambda\rho(x)K \quad (a<x<b)$. $\quad (M+\lambda)U(k,y)=G(k,y)$

$$\Rightarrow G(k,y)=F(k,y)+\underbrace{\left[p(x)\left(u\frac{\partial K}{\partial x}-K\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Big|_a^b}$$

→ 根据边界条件不同，选取K的不同边界条件使这一项完全已知. ⇒ 构成本征值问题.

① x为时间变量t，$a=0$，$b=\infty$，初始给出$t=0$时u，$\frac{\partial u}{\partial t}$ 令边界条件 $K|_{t\to\infty}=\frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t\to\infty}=0$.

可采用Laplace变换 $K=e^{-pt}$.

② x为空间变量，如给定 $u|_{x=a}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b}$，令 $K|_{x=a}=\frac{\partial K}{\partial x}\Big|_{x=b}=0$ $\quad$ 一般是Fourier变换（无界空间）或正余弦变换（半无界空间）.

③ 无界空间本征值问题的本征值连续，有界空间本征值离散.

例：半无界空间 $r\ge 0$，$z\ge 0$ 轴对称 Laplace 方程 $\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

边界条件 $u|_{z=0}=h(r)$ $\quad u|_{z\to+\infty}=u|_{r\to\infty}=0$

解 以r为变量引入积分变换，$U(k,z)=\int_0^\infty \rho(r)K(k,r)u(r,z)dr$

$L=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ $\quad \rho(r)=r$ $\quad p(r)=r$ $\quad q(r)=0$

引入方程为 $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial K}{\partial r}\right)=\lambda rK$ $\quad \lambda$ 记为 $-k^2$. $\Rightarrow$ 零阶Bessel方程，有界解 $K=J_0(kr)$

$U(k,z)=\int_0^\infty rJ_0(kr)u(r,z)dr \quad (k>0)$

$G(k,z)=\left[r\left(u\frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}J_0(kr)\right)\right]\Big|_{r=0}^{r\to\infty}$

$J_0(kr)|_{r=0}=1$ $\quad J_0(kr)|_{r\to\infty}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(kr-\pi/4)}{\sqrt{kr}}$ $\quad$ 积分存在条件 $\sqrt{r}u|_{r\to\infty}\to 0$

设u及其导数在 $r=0$ 有界，且 $u|_{r\to\infty}\sim r^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ $(\epsilon>0)$ 则u及其导数的 Hankel变换存在 且 $G(k,z)=0$

原方程变为：$\frac{d^2U(k,z)}{dz^2}-k^2U(k,z)=0$ 边值 $U(k,z)|_{z=0}=\int_0^\infty rJ_0(kr)h(r)dr=H(k)$ $\quad U(k,z)|_{z\to\infty}=0$.

解为 $U(k,z)=H(k)e^{-kz}$. 取逆变换 $u(r,z)=\int_0^\infty kJ_0(kr)U(k,z)dk=\int_0^\infty kJ_0(kr)H(k)e^{-kz}dk$.

有界 Fourier变换 $\quad$ 正弦变换 $K_n(x)=\sin nx$ $\quad n=1,2,\cdots$ $\quad 0\le x\le\pi$

余弦 $K_n(x)=\cos nx$

Lengendre变换 $K_n(x)=P_n(x)$ $\quad -1\le x\le 1$

例：矩形区域的稳定值问题 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\quad 0<x<a$，$0<y<b$ $\quad u|_{x=0}=u|_{x=a}=u|_{y=0}=0$ $\quad u|_{y=b}=u_0$.

解：$L=\frac{d^2}{dx^2}$ $\quad p(x)=1$，$\rho(x)=1$，$q(x)=0$. $\quad$ 引入 $\frac{d^2K}{dx^2}=\lambda K$ $\quad K(0)=K(a)=0\Rightarrow K_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{a}$ $\quad \lambda_k=-\frac{k^2\pi^2}{a^2}$

正弦变换：$U_k=\int_0^a u(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}dx$ $\quad$ 原方程 $\Rightarrow \frac{d^2U_k(y)}{dy^2}-\frac{k^2\pi^2}{a^2}U_k(y)=0$ 边值 $U_k(0)=0$ $\quad U_k(b)=\begin{cases}0, & k\text{偶}\\ \frac{2u_0a}{k\pi}, & k\text{奇}\end{cases}$

$\Rightarrow U_k(y)=\frac{2u_0a}{k\pi}\frac{sh\frac{k\pi y}{a}}{sh\frac{k\pi b}{a}}$ $(k=2n+1)$ $\quad U_k(y)=0$ $(k=2n)$.

$\Rightarrow U(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{k=1}^\infty U_k(y)\sin\frac{k\pi x}{a}=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{sh\frac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)sh\frac{(2n+1)\pi b}{a}}\sin\frac{k\pi x}{a}$

Z变换与差分方程

$f(t)$ $\quad 0\le t<\infty$ $\quad f(t<0)=0$ $\quad$ 引入函数 $\varphi(t)=f(t)\sum_{n=0}^\infty\delta(t-nT)=\sum_{n=0}^\infty f(nT)\delta(t-nT)$. $\longrightarrow$ 离散信号

连续信号

作 $\varphi(t)$ 作 Laplace变换 $\quad \Phi(p)=\sum_{n=0}^\infty f(nT)e^{-npT}=\sum_{n=0}^\infty f(nT)z^{-n}=F(z)$ $\quad z=e^{pT}$ $\quad$ (Z变换)

记为 $F(z)=Z\{f(t)\}=\sum_{n=0}^\infty f(nT)z^{-n}$ $\quad |z|>R$ 收敛.

$\varphi(t)=Z^{-1}\{F(z)\}$. (只能得到离散信号)

例：已知 $F(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$ $(|z|>1)$ 求 $Z^{-1}\{F(z)\}$.

解：$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z(1+z^{-1})}=\sum_{k=0}^\infty(-)^kz^{-k-1}$ $\quad$ 两边求导 $\frac{z}{(z+1)^2}=\sum_{k=0}^\infty(-)^k(k+1)z^{-k-1}=\sum_{n=0}^\infty(-)^{n-1}nz^{-n}$

$\Rightarrow f(n)=(-)^{n-1}n$，$n=1,2,\cdots$ $(T=1)$

超前定义：设 $Z[f(t)] = F(z)$　$m \in N$，$Z[f(t+mT)] = z^m\left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT) z^{-k}\right]$　$|z| > R$

$y = f(t)$　$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$ 差分　$\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 差商　取 $\Delta t = T = 1$

第一阶差分　$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$

第二阶差分　$\Delta^2 y(n) = \Delta y(n+1) - \Delta y(n) = y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)$

形如 $\Phi[n, y(n), \Delta y(n), \Delta^2 y(n), \cdots, \Delta^k y(n)] = 0$ 的方程 称为差分方程

也可写成 $F[n, y(n), y(n+1), \cdots, y(n+k)] = 0$

$u = f(x,t)$　偏差分：$\Delta_x = u(x+1, t) - u(x,t)$　　$\Delta_t = u(x, t+1) - u(x,t)$

由Z变换求差分方程

例：求 $y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 0$　$(n \geq 0)$　初始 $y(0) = 0$　$y(1) = 1$

解：作Z变换，$z^2[F(z) - y(0) - y(1)z^{-1}] + 2z[F(z) - y(0)] + F(z) = 0 \Rightarrow F(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$

$\Rightarrow y(n) = (-)^{n-1} n$

输入 $x(n)$ $\Rightarrow$ 输出 $y(n)$　记为 $y(n) = T\{x(n)\}$ 若可表示为差分方程：$a_n x(n) + a_{n-1} x(n-1) + \cdots + a_0 x(n-n_0)$
$= b_n y(n) + b_{n-1} y(n-1) + \cdots + b_0 y(n-n_1)$

作Z变换 $a_n X(z) + a_{n-1} z^{-1} X(z) + \cdots + a_0 z^{-n_0} X(z) = b_n Y(z) + b_{n-1} z^{-1} Y(z) + \cdots + b_0 z^{-n_1} Y(z)$

$\Rightarrow$ 系统传递关系、$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n_0}}{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n_1}}$

应用：打 BoSS，施中毒魔法．　Boss　1s：$-3Hp$　2s：$-2Hp$　3s：$-1Hp$．

可写为 $h(t) = 3\delta(t-1) + 2\delta(t-2) + \delta(t-3)$．

$H(z) = Z\{h(t)\} = 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$

操作：A打Boss一次，1s之后 A与B各打一次．　$x(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$　　$X(z) = 1 + 2z^{-1}$．

实际效果 $Y(z) = H(z)X(z) = 3z^{-1} + 8z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-4}$

$y(t) = 3\delta(t-1) + 8\delta(t-2) + 5\delta(t-3) + 2\delta(t-4)$．

$\underset{\text{卷积}}{h(t) * x(t)} \xrightarrow{Z} H(z)X(z)$

§12. Green 函数法

Green 公式：设 $u(\vec r)$ 与 $v(\vec r)$ 在 V 及边界 Σ 上有连续一阶导数，在 V 中有连续二阶导数

$$\int_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \int_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right) dV \quad (\text{第二 Green 公式}).$$

$\nabla^2 u = -4\pi\rho$ 边界 $\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_\Sigma = f$ 引入 $G(\vec r,\vec r')$ 满足 $\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec r-\vec r')$

$$\Rightarrow u(\vec r) = \int_V G(\vec r,\vec r')\rho(\vec r')d\vec r' + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left[G(\vec r,\vec r')\frac{\partial u(\vec r')}{\partial n'} - u(\vec r')\frac{\partial G(\vec r,\vec r')}{\partial n'}\right]d\Sigma'.$$

第一边值问题 $\alpha=0,\ \beta=1$ 要求 $G|_\Sigma=0$

第三边值问题 $\alpha\neq0,\ \beta\neq0$ 设 $\left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right)\Big|_\Sigma=0$ 与 $\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_\Sigma=f$ 联立 $\Rightarrow \alpha\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = Gf$.

$$\Rightarrow u(\vec r) = \int_V G(\vec r,\vec r')\rho(\vec r')d\vec r' + \frac{1}{4\pi\alpha}\int_\Sigma G(\vec r,\vec r')f\, d\Sigma'.$$

第二边值问题 要求 $\int_\Sigma \frac{\partial G}{\partial n'}d\Sigma = -4\pi$

Green 函数对称性 空间 Helmholtz 方程 $\nabla^2 u+\lambda u = -f$. 设 $\nabla^2 G(\vec r,\vec r')+\lambda G = -\delta(\vec r-\vec r')$ $\left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right)\Big|_\Sigma=0$.

$$\int_V\left[G(\vec r,\vec r')\nabla^2 G(\vec r,\vec r'') - G(\vec r,\vec r'')\nabla^2 G(\vec r,\vec r')\right]dV = \int_S\left[G(\vec r,\vec r')\frac{\partial G(\vec r,\vec r'')}{\partial n} - G(\vec r,\vec r'')\frac{\partial G(\vec r,\vec r')}{\partial n}\right]dS = 0$$

$$= -G(\vec r'',\vec r') + G(\vec r',\vec r'') \Rightarrow G(\vec r',\vec r'') = G(\vec r'',\vec r') \quad (\alpha\neq0)$$

无界区域 Green 函数（基本解）

二维情形 $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right) = -4\pi\delta(\vec r)$ $\vec r\neq0$ 时 $G = C_1\ln r + C_2$ 取 $\vec r=0$ 附近半径 ϵ 小圆,

$$\int_S \nabla^2 G\, dS = -4\pi = \lim_{\epsilon\to0}\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=\epsilon}\cdot 2\pi\epsilon = 2\pi C_1 \Rightarrow C_1 = -2.$$ 规定电势零点 $\vec r=1$ 处, $C_2=0$

即 $G(\vec r,\vec r') = -2\ln|\vec r-\vec r'|$

用本征函数展开法求 Green 函数

$\nabla^2 G(p,p_0) + \lambda G(p,p_0) = -\delta(p-p_0)$ $G|_\Sigma=0$ 本征值问题 $\nabla^2\psi(p)+\lambda\psi(p)=0$ $\psi|_\Sigma=0 \Rightarrow \{\lambda_n,\psi_n\}$.

设 $G(p,p_0) = \sum_n C_n(p_0)\psi_n(p)$ 代入方程 $\lambda\sum_n C_n\psi_n(p) - \sum_n\lambda_n C_n\psi_n(p) = -\delta(p-p_0)$.

设 $\lambda\neq\lambda_n$，上式乘 $\psi_m^*(p)$ 积分 $\Rightarrow C_n = \frac{1}{\lambda_n-\lambda}\psi_n^*(p_0) \Rightarrow G(p,p_0) = \sum_n\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\psi_n^*(p_0)\psi_n(p)$.

例：求 Possion 方程在矩形区域 $0<x<a$, $0<y<b$ 内第一边值问题的 Green 函数

解：本征值问题 $\nabla^2\psi(x,y)+\lambda\psi(x,y)=0$. $\psi|_{x=0}=\psi|_{x=a}=\psi|_{y=0}=\psi|_{y=b}=0 \Rightarrow \lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$

$\psi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ Green 函数为 $G(p,p_0) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\frac{4}{ab}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$.

电像法求 Green 函数

有界区域 $G = G_0+G_1$ G_0：基本解 $\nabla^2 G_0 = -4\pi\delta(\vec r-\vec r_0)$ G_1：边界影响 $\nabla^2 G_1 = 0$

若 $G|_\Sigma=0$，要求 $G_1|_\Sigma = -G_0|_\Sigma$.

二维情形 圆环半径为 a 类似于3维，取镜像点 $\vec r_1$， $G_1 = -2\ln\frac{a}{r_0|\vec r-\vec r_1|} = -2\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_1|} - 2\ln C$ $C = a/r_0$.

$G = G_0+G_1 = 2\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|} - 2\ln\frac{a}{r_0|\vec r-\vec r_1|}$ （构造：阿氏圆） $\vec r_1 = \frac{a^2}{r_0^2}\vec r_0$

$= 2\ln\left[\left|\vec r\frac{r'}{a} - \vec r'\frac{a}{r'}\right| / |\vec r-\vec r'|\right]$

例：在半径为 a 的圆内求解 Laplace 方程第一边值问题

$$\nabla^2 u=0\quad (r<a)\qquad u|_{r=a}=f(\theta)$$

解 $u(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\oint_l f(\vec r')\frac{\partial G(\vec r,\vec r')}{\partial n'}dl'$ $\qquad \left.\frac{\partial G(\vec r,\vec r')}{\partial n'}\right|_{r'=a} = \frac{\partial}{\partial r'}\left[2\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} - 2\ln\frac{1}{|\vec r\frac{r'}{a}-\vec r'\frac{a}{r'}|}\right]\Bigg|_{r'=a} = \frac{2(r^2-a^2)}{a(r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\theta'))}$

$$\Rightarrow u(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\frac{2(r^2-a^2)\,d\theta'}{(r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\theta'))}$$

含时 Green 函数 以有界空间三维波动方程为例 $u_{tt}-a^2\nabla^2 u = f(\vec r,t)$ $\quad (\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u)|_\Sigma = \mu(\Sigma,t)$ $\quad u|_{t=0}=\phi(\vec r)$ $\quad u_t|_{t=0}=\psi(\vec r)$

$$G_{tt}-a^2\nabla^2 G = \delta(\vec r-\vec r')\delta(t-t')\qquad (\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G)|_\Sigma=0\qquad G|_{t<t'}=0\qquad G_t|_{t<t'}=0$$

① $G(\vec r,t,\vec r',t')$ 对易性 $\quad G(\vec r,t,\vec r',t') = G(\vec r',-t',\vec r,-t)$

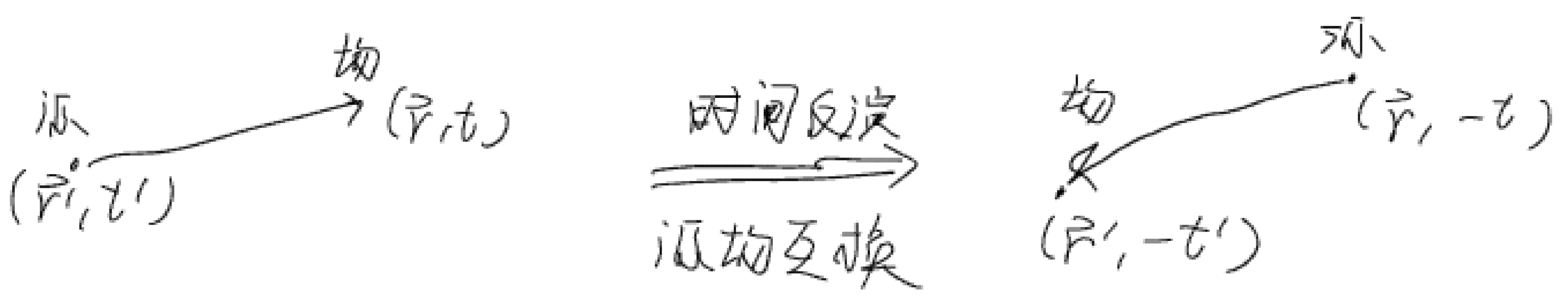
证明：$(t,\vec r',t')\to(-t,\vec r'',-t'')$ $\quad G_{tt}(\vec r,-t,\vec r'',-t'')-a^2\nabla^2G(\vec r,-t,\vec r'',-t'') = \delta(\vec r-\vec r'')\delta(t-t'')$

$$G(\vec r,-t,\vec r'',-t'')|_{t>t''}=0\qquad G_t(\vec r,-t,\vec r'',-t'')|_{t>t''}=0$$

$$\Rightarrow \int_V d\vec r\int_{-\infty}^{\infty}dt\Big[G_{tt}(\vec r,t,\vec r',t')G(\vec r,-t,\vec r'',-t'')-G_{tt}(\vec r,-t,\vec r'',-t'')G(\vec r,t,\vec r',t')$$
$$-a^2\nabla^2G(\vec r,t,\vec r',t')G(\vec r,-t,\vec r'',-t'')+a^2\nabla^2G(\vec r,-t,\vec r'',-t'')G(\vec r,t,\vec r',t')$$
$$= G(\vec r',-t',\vec r'',-t'') - G(\vec r'',t'',\vec r',t')$$

左式可分部积分 $=0$. 即证.

物理意义：



② 解的积分公式 $\quad u_{t't'}(\vec r',t') - a^2\nabla'^2 u(\vec r',t') = f(\vec r',t')\qquad$ (i)

再写出 $G(\vec r',-t',\vec r,-t)$ 满足方程，并利用对易关系 $\quad G_{t't'}(\vec r,t,\vec r',t')-a^2\nabla'^2G(\vec r,t,\vec r',t') = \delta(\vec r-\vec r')\delta(t-t')\qquad$ (ii)

$G(\vec r,t,\vec r',t')\times$(i) $- u(\vec r',t')\times$(ii)，对 $\vec r'$ 在 V 上积分，对 t' 在 $[0,\ t+\epsilon]$ 上积分 $\epsilon>0$

$$\Rightarrow \boxed{u(\vec r,t) = \int_V\int_0^t G(\vec r,t,\vec r',t')f(\vec r',t')dV'dt' + \int_V\left[\psi(\vec r')G(\vec r,t,\vec r',t')|_{t'=0} - \phi(\vec r')G_{t'}(\vec r,t,\vec r',t')|_{t'=0}\right]dV' + a^2\int_\Sigma\int_0^t\frac{\mu(\vec r',t')}{\alpha}G(\vec r,t,\vec r',t')dS'dt'}$$

③ 三维无界空间的含时 Green 函数

$$g_{tt}-a^2\nabla^2 g = \delta(\vec r-\vec r')\delta(t-t')\qquad g=g(R,t-t')\quad R=|\vec r-\vec r'|\qquad g|_{t=t'}=0\quad g_t|_{t=t'}=0$$

$R\neq0$ 时，$g(R,t-t') = \frac1R\{f_1(t-t'-\frac Ra)+f_2(t-t'+\frac Ra)\}$. $\qquad g(R,t-t')\sim\frac{1}{4\pi a^2R}\delta(t-t')\quad (R\to0)$

$\Rightarrow f_1(x)=\frac{1}{4\pi a^2}\delta(x)\quad f_2=0$ (因果律) $\Rightarrow G(\vec r,t,\vec r',t')=g(R,t-t')=\frac{1}{4\pi a^2R}\delta(t-t'-\frac Ra)$

或从方程引入 Laplace 变换，$\tilde g=\int_0^\infty g e^{-pt}dt$ $\qquad p^2\tilde g - a^2\nabla^2\tilde g = \delta(\vec r-\vec r')e^{-pt'}\qquad (\mathrm{Re}\,p>0)$.

$R\neq0$ 时 $\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\tilde g)-\frac{p^2}{a^2}(R\tilde g)=0\ \Rightarrow\ \tilde g=\frac AR e^{\pm p\frac Ra}$ $\quad$ 令 $p\to\infty$ 有界 $\Rightarrow \tilde g=\frac AR e^{-p\frac Ra}$ $\quad R\to0\quad \tilde g\sim\frac{e^{-pt'}}{4\pi a^2}\frac1R$

$\Rightarrow \tilde g = \frac{1}{4\pi a^2R}e^{-p(t'+\frac Ra)}\quad \Rightarrow g=\frac{\delta(t-t'-\frac Ra)}{4\pi a^2R}\qquad$ 推迟 Green 函数

另一个解 $G=\frac{\delta(t'-t+\frac Ra)}{4\pi a^2R}$ 为超前 Green 函数，是非物理的.

例：求解 $u_{tt}-a^2\nabla^2 u = f(\vec r,t)$ $\quad u|_{t=0}=\phi(\vec r)$ $\quad u_t|_{t=0}=\psi(\vec r)$. 三维无穷空间

$$u(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\vec r-\vec r'|<at}\frac{f(\vec r',t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{a})}{|\vec r-\vec r'|}d^3r' + \frac{1}{4\pi a}\left[\int_{\Sigma'}\frac{\psi(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}d\Sigma' + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma'}\frac{\phi(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}d\Sigma'\right]$$

其中 Σ' 为以 $\vec r$ 为中心，半径为 at 的球面 $|\vec r-\vec r'|=at$.

若 $u|_{t=0}=0$ $\quad u_t|_{t=0}=0$ $\Rightarrow$ $u(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\vec r-\vec r'|<at}\frac{f(\vec r',t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{a})}{|\vec r-\vec r'|}d^3r'$

④ 二维无界空间的含时 Green 函数. 加上 z 轴变为 3 维. $R^2=|\vec r-\vec r'|^2+(z-z')^2$.

$$G(\vec r,t,\vec r',t') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi a^2 R}\delta(t-t'-\frac{R}{a})\,dz' = 2\int_z^{\infty}\frac{1}{4\pi a^2R}\delta(t-t'-\frac{R}{a})\,dz' \qquad dz'=\frac{R\,dR}{\sqrt{R^2-|\vec r-\vec r'|^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi a^2}\int_{|\vec r-\vec r'|}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{R^2-|\vec r-\vec r'|^2}}\delta(\frac{R}{a}-t-t')\,dR$$

$$=\frac{1}{2\pi a\sqrt{a^2(t-t')^2-|\vec r-\vec r'|^2}}H(a(t-t')-|\vec r-\vec r'|) \qquad H(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

保角变换法简介（适用于二阶 PDE）

设解析函数 $w=f(z)=\xi+i\eta$. $\quad z=x+iy$ $\quad$ 坐标变换 $(x,y)\to(\xi,\eta)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\eta}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}$$

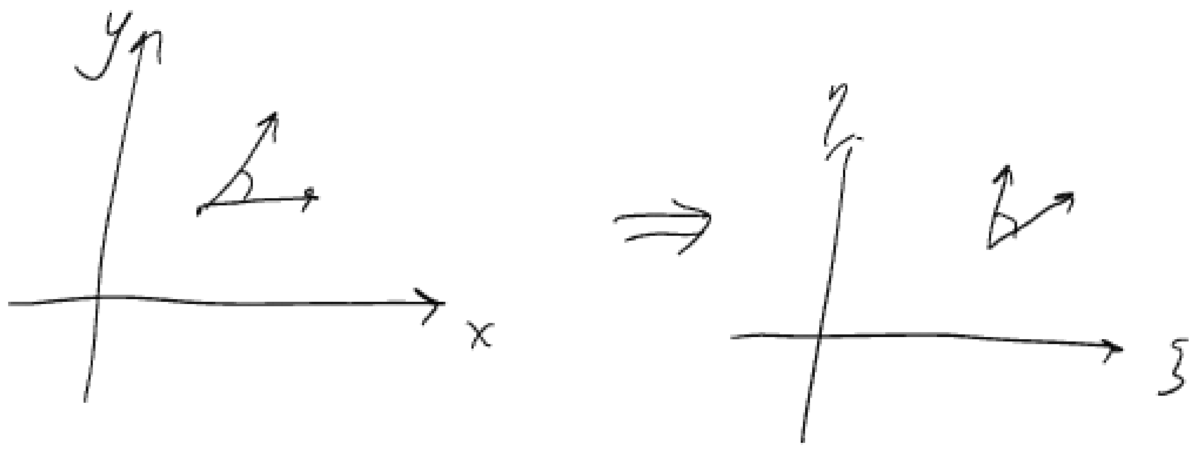
利用柯西-黎曼条件 $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}$.

$\Rightarrow$ $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$ $\qquad$ 只要 $f'(z)$ 不处处为 0

即有 原 Laplace 方程 $\nabla^2u(x,y)=0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$.

对 Possion 方程，$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-4\pi\rho(x,y)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=-4\pi\rho^*(\xi,\eta)$ $\quad \rho^*(\xi,\eta)=|f'(z)|^{-2}\rho(x,y)$.

对 Helmholtz 方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+k^2u=0$. $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+k^2|f'(z)|^{-2}u=0$.



保角变换：$z\to w$

(1) $w=z+b$. 图形平移

(2) $w=e^{i\alpha}z$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$ $\quad$ 图形转动

(3) $w=rz$ $\quad r>0$ $\quad$ 图形的放大缩小

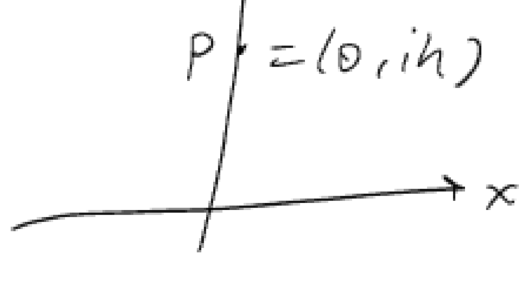
(4) $w=\frac{1}{z}$ $\quad$ 单位圆内 $\longleftrightarrow$ 圆外

更一般情况变换可用分式 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $\quad ab-bc\neq 0$ 即 $z_1=cz+d$ $\quad z_2=\frac{1}{z_1}$ $\quad w=\frac{a}{c}+(b-\frac{ad}{c})z_2$

变换前后圆仍为圆，且反演点对称性不变（反演关系不变）

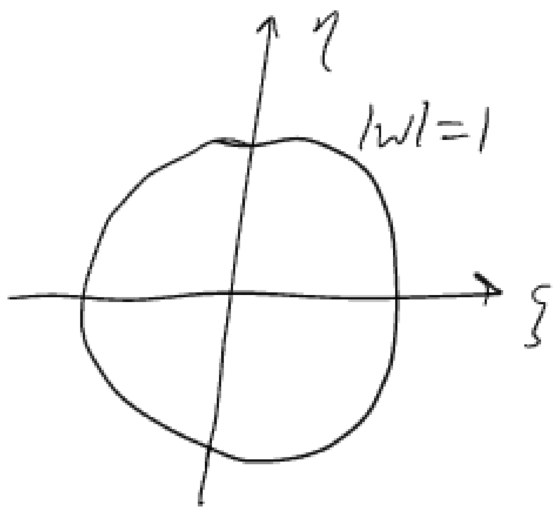
任意一个单连通区域，原则上都可变为一个单位圆.

应用举例：与地面平行的无穷长导线高度为 h，单位长度电荷为 q，求空间电势分布



$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-4\pi q\,\delta(x)\,\delta(y-h)$. $\quad u|_{y=0}=0$. $\quad$ 引入 $w=\frac{z-ih}{z+ih}=\xi+i\eta$.

$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=-4\pi q\,\delta(\xi)\,\delta(\eta)$ $\quad u|_{|w|=1}=0$



$\Rightarrow u(\xi,\eta) = 2q\ln\frac{1}{r} = 2q\ln\frac{1}{|w|}$

$\Rightarrow u(x,y) = 2q\ln\left|\frac{z+ih}{z-ih}\right| = q\ln\frac{x^2+(y+h)^2}{x^2+(y-h)^2}$

等势面 $x^2+(y-\frac{c+1}{c-1}h)^2 = \frac{4c}{(c-1)^2}h^2$

变分法 求泛函极值近似方法——里兹(Ritz)方法

$\delta J[y(x)]=0$ 取完备基为 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ 前 n 项，设 $y(x) = f(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n; c_1, c_2, \cdots, c_n)$

有 $J[y(x)] = \Phi(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 取极值 $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i}=0$ $(i=1,\cdots,n)$ 确定系数

微分方程的变分形式 例：$S=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx$ $\delta S=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 波动方程

例：常微分方程 $\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y(x) = f(x)$ $x_0<x<x_1$ $y(x_0)=y_0$ $y(x_1)=y_1$ 的泛函形式

$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y(x) - f(x)\right\}\delta y(x)dx=0$ 而 $\int_{x_0}^{x_1}q(x)y(x)\,\delta y\,dx = \frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1}q(x)y^2(x)dx.$

$\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]\delta y\,dx = \left[p(x)\frac{dy}{dx}\delta y\right]\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}p(x)\frac{dy}{dx}\delta y'\,dx = -\frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1}p(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx.$

$\Rightarrow -\delta\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}\left[p(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - q(x)y^2(x)\right] + f(x)y(x)\right\}dx=0.$

即 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - qy^2\right] + fy\right\}dx.$

例：偏微分方程定解问题 $\nabla^2u(\vec r) + k^2u(\vec r) = -\rho(\vec r)$ $\vec r\in V$ $u(\vec r)|_\Sigma = f(\Sigma)$

$\int_V\left[\nabla^2u + k^2u + \rho\right]\delta u\,d^3r=0.$ $\int_V\nabla\cdot(\nabla u\,\delta u)\,dV = \int_\Sigma\delta u\,\nabla u\cdot d\vec\Sigma = 0 = \int_V\left[\nabla^2u\,\delta u + \nabla u\cdot\delta(\nabla u)\right]dV$

$\Rightarrow \int_V\nabla^2u\,\delta u\,d^3r = -\frac{1}{2}\delta\int_V(\nabla u)^2d^3r=0$ 泛函为 $J[u] = \int_V\left\{\frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 - k^2u^2\right] - \rho u\right\}d^3r$

如例：$\rho(\vec r)=0$，$f(\Sigma)=0$，$k^2=\lambda$ $J[u] = \frac{1}{2}\int_V\left[(\nabla u)^2 - \lambda u^2\right]d^3r$ 即 $\int_V(\nabla u)^2d^3r$ 在约束 $\int_V u^2d^3r = \text{Const}$ 下的条件极值

应用：圆膜横振动的本征频率 $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$ $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

分离变量 $u = v(r,\varphi)e^{i\omega t}$ $\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2} + \lambda v=0.$ $\lambda=\frac{\omega^2}{a^2}$. 边界 $v|_{r=b}=0$ b为膜半径

若 v 与 φ 无关 $v(r,\varphi)=R(r)$ $\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda R=0$ $0\le r\le b$ $R(b)=0.$

引入 $x=r/b$，$R(r)=y(x)$ $\lambda b^2=K$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + Kxy=0$ $y(1)=0$

等价泛函 $J[y] = \int_0^1x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx$. 在条件 $J_1[y]=\int_0^1xy^2dx=1$（归一化）下的极值

$x=0 \Rightarrow y'(x)=0$ 即 $y(x)$ 具有偶函数特征 边界 $y(1)=0$ 取试探解 $y_n(x) = \alpha_1(1-x^2) + \alpha_2(1-x^2)^2 + \cdots$

只取前2项，$J[y_2] = \alpha_1^2 + \frac{4}{3}\alpha_1\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_2^2$ $J_1[y_2] = \frac{1}{6}\alpha_1^2 + \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{12}\alpha_2^2=1$ 设 K' 为拉格朗日因子，

即 $\frac{\partial[J-K'J_1]}{\partial\alpha_1}=0$ $\frac{\partial[J-K'J_1]}{\partial\alpha_2}=0$ $\Rightarrow K'=\begin{cases}5.7841\\36.883\end{cases}$ $\alpha_1=1.650$ $\alpha_2=1.054$

$\Delta = \int_0^1[y_2(x)-y(x)]^2dx = 1.66\times10^{-5}.$