复平面的拓扑简介

聚点　给定 set E，若 $a\in\mathbb{C}$，对 $\forall\varepsilon>0$ 恒有 $z\in E$，使 $0<|z-a|<\varepsilon$，称 a 为 E 的一个聚点(极限点)。
即 a 的任意小的去心邻域内都有点 $z\in E$。

孤立点　若 $a\in E$ 但不是 E 的聚点，称 a 为 E 的一个孤立点。

内点　存在 a 的某个邻域完全包含在 E 内。

边界点　以 a 为圆心作任意半径 ε 圆，圆内总有点 $\in E$ 同时有点 $\notin E$。　孤立点也是边界点。

内部　E 的内部由其内点组成，记为 $\mathring{E}$。

边界　E 的边界由其边界点组成，记为 ∂E 或 C。

闭包　$\bar{E}=\mathring{E}\cup\partial E=E+\partial E$。

开集　如果 $E=\mathring{E}$。

闭集　如果 $E=\bar{E}$。

区域　① 开集　② 连通性：点集内任意两点可以用一条折线连接，且折线上点均属于点集。

闭区域　区域 G 的闭包 $\bar{G}$。

扩充的复数域/复平面　$\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}+\infty$

无穷远点的邻域　$|z|>M\ (M>0)$。

无穷远点的函数值　若函数在 ∞ 极限存在，定义 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 并称 $f(z)$ 在 ∞ 点连续。
$=\lim\limits_{w\to0}f(\frac{1}{w})$。

***

[定理]连续函数有界性　在有界闭区域 $\bar{G}$ 上连续的函数 $f(z)$，$|f(z)|$ 在 $\bar{G}$ 中有界，并达到它的上下限。

推广(更紧凑)　在扩充复平面内，闭区域 $\bar{G}$ 上连续的函数 $f(z)$，$|f(z)|$ 在 $\bar{G}$ 中有界，并达到它的上下限。

[定理](Cauchy-Riemann方程)　若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 z 点可导，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

C-R方程是 $f(z)$ 可导的必要不充分条件。

[定理]($f(z)$可导的充分不必要条件)　$f(z)$ 在 z 点满足 C-R方程，且 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 在 z 点连续，则 $f(z)$ 在 z 点可导。

可推出

解析函数　若$f(z)$在区域G内每一点可导$\overbrace{\text{且 } f'(z)\text{连续}}$，称$f(z)$为$G$内的解析函数。

[定理]　函数为区域G内解析函数 $\Longleftrightarrow$ 函数在区域G内满足C-R条件且四个偏导数连续。

解析性要求：① 实部和虚部不是独立的。② 实部和虚部均为调和函数，即 $\nabla^2 u=0$　$\nabla^2 v=0$

点解析性　$f(z)$在某点的某个邻域内解析，称$f(z)$在某点解析，该点是解析点，否则称为奇点。

奇点：在z_0无定义，或有定义但不可导，或虽可导但不解析

***

多值函数

对数函数　$w=\ln z \Leftrightarrow z=e^{w}=e^{\ln|z|+i\arg z}$　即 $w=\ln|z|+i\arg z$

若限制 $0\le\arg z<2\pi$，则$\ln z$只在 $\mathbb{C}\setminus$ 正实轴$[0,+\infty)$上解析。

不连续点的集合射线$[0,+\infty)$称为割线。割线的端点（这里是原点和∞点）无法通过规定割线位置消除，称为枝点。即枝点总是多值函数的奇点。

不解析性

根式函数　$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,(\cos\theta/n+i\sin\theta/n)$

幂函数　$w=z^{\alpha}\equiv e^{\alpha\ln z}$，其中$\alpha\in\mathbb{C}$

补充拓展　为什么书上P15 例2.1 可以那样操作？

可以形式地引入 Wirtinger 导数 $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}$　$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$　使$f(x,y)\to f(z,\bar z)$

注意：这只是形式上地，显然z与$\bar z$并不独立，只不过将$f(x,y)$ ~~改写为~~ 中的x,y换为$z,\bar z$

则Cauchy-Riemann方程可以写为 $\frac{\partial}{\partial \bar z}f(z,\bar z)=0$，因此可以只要含$z$那部分，丢掉$\bar z$部分。

注意区分：Re z 是z的函数，但在此形式化地它是z与z^*的函数

****

复变积分

定义　设C是分段光滑曲线（以后曲线都指分段光滑曲线），复变积分定义为

$$\int_C f(z)\,dz\equiv\int_C (u+iv)(dx+idy)=\int_C(u\,dx-v\,dy)+i\int_C(v\,dx+u\,dy)$$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C|f(z)|\,|dz|$$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le Ml,\quad M=\max_{z\in C}|f(z)|\quad l=\int_C|dz|$$

简单路径参数化　若C表示为 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$　$a\le t\le b$

且 $x(t)$与$y(t)$有连续导数，$\frac{f'(t)}{z'(t)}$ $=x'(t)+iy'(t)\neq0$. ~~$(a\le t\le b)$处处成立~~

简单光滑曲线

（保证简单光滑）

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv[x(t),y(t))]\,[x'(t)+iy'(t)]\,dt$$

$$= \int_a^b \cancel{f(z)}\ f(z(t))\ z'(t)\ dt.$$

分段光滑曲线的每一段都是简单光滑曲线，从而也可用积分路径参数化算积分.

***

定义(不定积分或原函数). 设 $f(z)$ 与 $\Phi(z)$ 是区域 G 内连续函数，若 G 内有 $\Phi'(z)=f(z)$，$\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个不定积分或原函数

注意：$\Phi(z)$ 显然是 G 内解析函数　后面将看到 $f(z)$ 也在 G 内解析，取定所有函数有原函数 $\Phi(z)$ 最多相差一个常数.

定理. 设 C 的端点 a,b；f 的某个原函数为 Φ，则 $\int_c f(z)\,dz = \Phi(b)-\Phi(a)$.

定理　若 f 连续，积分 $\int_c f dz$ 在区域 G 内仅与 C 的端点有关，则 f 在 G 内原函数 $F(z)$ 存在.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

定理　在区域 G 内 下列命题等价　①积分与路径无关　②原函数存在　③围道积分恒为 0.

定义　不与自身相交的围道称为简单闭合围道

定理(Jordan定理)　任何一条简单闭合围道把整个平面分为两个不相交区域

一个有界称为内区域　一个无界称为外区域.

定义(单连通或复连通区域) 若区域内任意简单闭合围道的内区域属于该区域，称为单连通区域

定理(Cauchy定理) 设 C 为简单闭合围道，G 为 C 内区域，若 $f(z)$ 在 $\bar{G}$ 上解析，则 $\oint_c f(z)\,dz=0$

等价表述：设 $f(z)$ 在 G 内解析，~~$C\in G$~~ 简单闭合围道 $C\in G$，则 $\oint_c f(z)\,dz=0$

条件可放宽：　. . ; . . . .　　$f(z)$ 在 G 内解析，C 上连续，. . .

***

定理(小圆弧定理) $f(z)$ 在 $z=a$ 空心邻域内连续，且当 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$，$|z-a|\to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k，则 $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\,dz = ik(\theta_2-\theta_1)$.

其中 C_δ 以 a 为圆心，δ 为半径，夹角 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧

注若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则可以用小圆弧引理.

定理(大圆弧定理) $f(z)$ 在 ∞ 点邻域内连续，$\theta_1\le\arg z\le\theta_2$ 时，$|z|\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K，则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = iK(\theta_2-\theta_1)$.

其中 C_R 是以原点为圆心，R 为半径，夹角 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧.

定理(Cauchy 积分公式)　设 C 为简单闭合围道，G 为其内区域，a 为 G 内一点. 若 $f(z)$ 在 $\bar{G}$ 内解析，则 $f(a)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c \dfrac{f(z)}{z-a}\,dz$

(无界区域)的Cauchy积分公式)　$f(z)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外解析，且 $z\to\infty$ 时 $f(z)\to 0$

则 $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_c \dfrac{f(z)}{z-a}\,dz$　此时 a 为 C 外一点，积分路线 C 为顺时针.

***

***.

由Cauchy积分公式，G内一点z，f(z)可用边界C上各点函数表示，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

则 $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$. 以此类推，

定理 f(z)在~~有界~~区域G中解析，则在G内f(z)任何阶导数 $f^{(n)}(z)$ 存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

其中C是简单闭合围道，f(z)在C内部与边界解析.

定理（Liouville 定理）若f(z)在全平面解析，且 |f(z)| 有界，则f(z)是一个常数.

证 $\forall z$，以z为圆心，R为半径作圆，则 $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$.

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|\xi-z|=R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2}|d\xi| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}\cdot 2\pi R = \frac{M}{R}. \quad (M为|f(z)|上界)$$

令 $R\to\infty$，得 $f'(z)=0$，即f(z)为常数.

定理（代数基本定理）任一n次多项式至少有一个复数根（$n\neq 0$）.

定理（Morera定理）设f(z)在区域G内连续，如果对G中任何闭合围道C，都有 $\oint_C f(z) = 0$ 则f(z)在G内解析.

证 $\oint_C f(z) = 0 \Rightarrow$ f(z)存在原函数 $\Phi(z)$，由 $\Phi(z)$ 解析知f(z)解析.

定理（含参量积分的解析性）设 1° $f(t,z)$ 是t和z的连续函数，$t\in[a,b]$，$z\in G$.

2° $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$ 在G内解析.

则实积分 $F(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$ 在G内解析，且

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z} dt$$

Cauchy型积分 C为分段光滑（闭合和不闭合）曲线，$\phi(\xi)$ 为C上连续函数，积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$ 称为Cauchy型积分.

由上定理，~~Cauchy型积~~ f(z)为曲线外点z的解析函数，且

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}} d\xi.$$

****

复数~~极~~级数~~的~~收敛的Cauchy充要条件 $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*, \forall p\in\mathbb{N}^*, |u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

令 $p=1$, 得必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ~~收敛性质: 收敛级数之和/差仍收敛 收敛级数可任意加括号~~

收敛的~~充要~~充分条件: 绝对收敛.

绝对收敛判别法: 比较, 比值, d'Alembert法, Gauss, Cauchy(根式)

绝对收敛级数性质: (1) 改变次序 (2) 可以把级数拆成几个子级数, 每个子级数仍绝对收敛.

(3) 两个绝对收敛级数之积仍绝对收敛

~~两个绝对收敛级数之和/差仍绝对收敛~~

积分判别法: 设 $f(x)$ 为连续、单调下降正函数, $f(n)=a_n$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 同为收敛或发散.

二重级数 定义(部分和) $S_{mn} = \sum\limits_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le l\le n}} a_{kl}$ 是方阵前 m 行 n 列共 $m\times n$ 项和.

若 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = S$, 称二重级数收敛, 和为 S. 指 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*$, $m,n>N$ 时, $|S_{mn}-S|<\varepsilon$.

逐行求和: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right] = \lim\limits_{m\to\infty}\left[\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn}\right] = \lim\limits_{m\to\infty} S_{m\infty}$

逐列求和: $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\lim\limits_{m\to\infty} S_{mn}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\infty n}$.

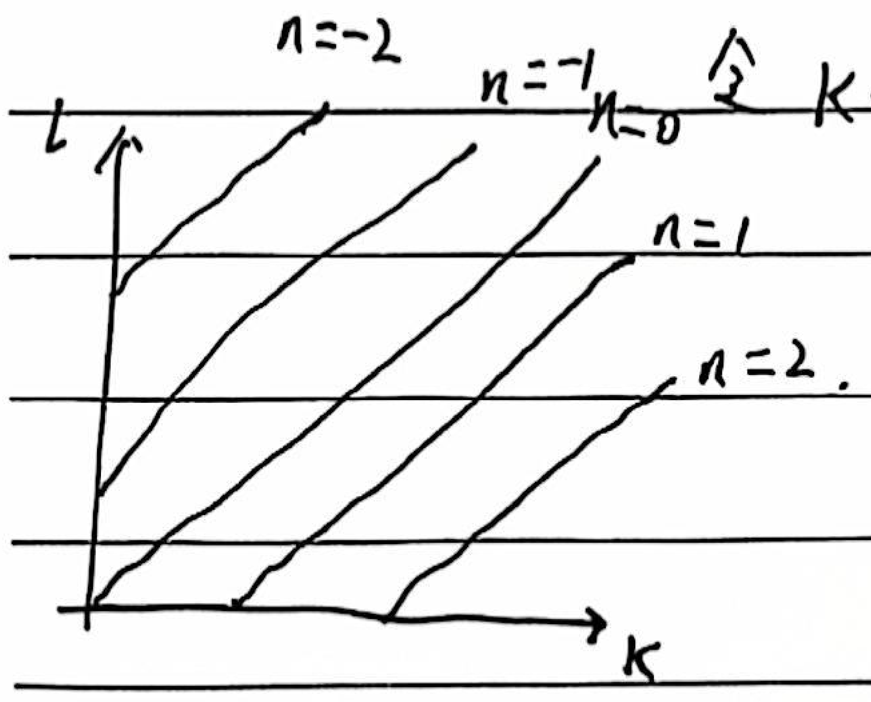
3种求和结果可能不一样。

(定理) 若二重级数为正项级数, 三个求和的任一个收敛, 其余两个也收敛, 且具有相同和。

~~由此~~ 该定理 若二重级数绝对收敛, 也成立. 事实上, 绝对收敛的二重级数有可交换性。

由此另一种求和法: 令 $k+l=n$. 则 $\sum\limits_{\substack{k=0\\ l=0}}^{\infty} a_{kl} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{n} a_{n-l,l}$. (按对角线求和).

令 $k-l=n$, $k=n+l$, $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{n+l,l} + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\sum\limits_{l=-n}^{\infty} a_{n+l,l}$.



***

每一项都为函数的级数称为函数级数, 引入点收敛性, 区域收敛性.

定义(一致收敛) $\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)$ 与 z 无关, 使当 $n>N$ 时, $\forall z\in G$, $|S(z)-\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(z)|<\varepsilon$

称函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 G 内一致收敛

(闭一致收敛) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在区域 G 内的任一闭圆盘中一致收敛, 则级数在 G 内 ~~一致~~ 闭一致 收敛

定理（一致收敛Cauchy充要条件）$\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$与z无关，当$n>N(\varepsilon)$时，$\forall p\in N^*$ 和$\forall z\in G$，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right| < \varepsilon .$$

定理（Weierstrass M判别法）若在区域G内 $|u_k(z)|<a_k$，a_k与z无关，而$\sum a_k$收敛，则 $\sum u_k(z)$在G内绝对且一致收敛.

定理. 1. 一致收敛级数，若各项连续，则和函数连续；若各项解析，则和函数解析

即"求极限"与求和可以交换顺序.

2. C为G内分段光滑曲线，$u_k(z)$是C上连续函数，则 $\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\,dz$.

3. （Weierstrass定理）设u_k在G中解析，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在G内闭一致收敛，则

① $S(z)$在G内解析

② $S(z)$的各阶导数可逐项求导，$S^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$.

③ 求导后级数在G内闭一致收敛.

***

定理（Abel第一定理）若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点z_0收敛，则在以a点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内 $|z-a|<|z_0-a|$ 绝对收敛，而在 $|z-a|\le r<|z_0-a|$ 的闭圆内一致收敛.

~~推论~~ 据此可引入收敛圆与收敛半径概念.

求收敛半径 (1) Cauchy-Hadamard公式. $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{c_n}\right|^{1/n}$.

由Cauchy判别法：

(2) 由d'Alembert判别法 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

收敛圆内，幂级数代表一个解析函数

定理（Abel第二定理）若~~果~~幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆内收敛到$f(z)$，且在收敛圆上某点z_0也收敛，和为$S(z_0)$，则当z由收敛圆内趋于z_0时，只要保持以z_0为顶点，张角为$2\phi<\pi$范围内，$f(z)$趋于$S(z_0)$

***

含参量的反常积分的解析性

定理 设 1. $f(t,z)$是t和z连续函数 $t\ge a$，$z\in G$. 2. $\forall t\ge a$，$f(t,z)$在G内解析

3. $\int_a^{\infty} f(t,z)\,dt$ 在G内闭一致收敛

则 $F(z)=\int_a^{\infty} f(t,z)\,dt$ 在G内解析，且 $F'(z)=\int_a^{\infty}\dfrac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt$.

~~了是指 $\forall\varepsilon>0$，$\exists T(\varepsilon)$，~~

对含参量的瑕积分也可类似处理，只要积分在瑕点一致收敛

定理（含参量无穷积分一致收敛的充分条件）若存在$\phi(t)$，使$|f(t,z)|<\phi(t)$. 且$\int_a^{\infty}\phi(t)\,dt$收敛，

则 $\int_a^{\infty} f(t,z)\,dt$ 在G中绝对且一致收敛.

无穷级数 一高数补充

1. 柯西收敛原理

定理1.(柯西收敛原理) 数$\{a_n\}$有极限 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N^*$, 使$\forall n,m\geq N$, $|a_n-a_m|<\varepsilon$

定理2.(函数极限形式) 设$y=f(x)$在$\mathring{U}(a)$有定义, $y=f(x)$在$x\to a$有极限 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,

使得$\forall x_1,x_2$, $0<|x_1-a|<\delta$, $0<|x_2-a|<\delta$, 有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

定理3(级数收敛的柯西充要条件) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*$, $\forall n\geq N, p\geq 1\,(n,p\in N^+)$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

定理4(收敛级数性质) ~~（1）~~(无穷和的结合律) 收敛级数 项任意加括号 后仍收敛到原级数.

2. 正项级数的判敛法

~~命题~~定理5 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 其部分和序列有上界.

定理6(比较判别法). 两正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$一般项满足 $u_n\leq v_n$ 则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

结论(p-级数敛散性) 形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 的p-级数, $p\leq1$时发散, $p>1$时收敛.

定理7(比较判别法的极限形式) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$, 则

(1) $0\leq h<+\infty$时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) $0<h\leq+\infty$时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

特别地, $0<h<+\infty$时 两级数有相同敛散性.

定理8(达朗贝尔判别法). 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n>0)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 则级数

(1) $l<1$ 时收敛 (2) $l>1$时发散 (3) $l=1$时敛散性不定.

也叫比值判别法.

定理9(柯西判别法). 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, 则级数

(1) $l<1$ 时收敛 (2) $l>1$时发散 (3) $l=1$时 敛散性不定.

d'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法只适用于判定 $u_n\leq cq^n$ 的级数的收敛性.

定理10.(拉阿伯判别法). 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n\neq0)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=R$ (R可以是∞).

则原级数 (1) $R>1$时收敛 (2) $R<1$时发散 (3) $R=1$ 时敛散性不定

拉阿伯判别法 可写成另一种形式: $\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{R}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ 其在复级数上推广为高斯判别法

~~若 $\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+o(\frac{1}{n})$. $\mu=a+ib$.~~

定理11.(积分判别法). 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 若存在一个单调下降的非负函数 $f(x)$ $(x\geq1)$ 使 $u_n=f(n)$,

则级数收敛 $\Longleftrightarrow\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛

3. 交错级数的判敛法

定理12(莱布尼茨判别法). 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n>0)$ 满足 (1) $u_n\geq u_{n+1}$, 即u_n单调下降.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 则级数收敛.

且 $S\leq u_1$, 余项 $r_n=S-S_n$ $|r_n|\leq u_{n+1}$.

4. 绝对收敛与条件收敛

定理13. 一个绝对收敛的级数 经过重排后仍收敛且其和不变.

定理14. 两个绝对收敛级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ ~~的绝对~~ 由它们的项相乘所得乘积 $u_i v_j$ 按任意次序相加所成的级数绝对收敛到两级数的和数之乘积.

5. 任意项级数的判敛法.

定理15(狄利克雷判别法). 对级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, 若 $\{a_k\}$ 单调且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 部分和序列有界,

即 $\exists M>0$ 使 $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le M$, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

莱布尼茨判别法是狄利克雷判别法的一个特例.

定理16(阿贝尔判别法). 若 $\{a_k\}$ 单调有界 而 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

6. 函数项级数一致收敛的判定

定理17(函数序列一致收敛)(i)设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间X上收敛到极限函数 $f(x)$ 若存在 $\{a_n\}$ 使

$|f_n(x)-f(x)| \le a_n$. $\forall x\in X$, $n\ge N\ (N\in\mathbb{N}^*)$

且 $a_n \to 0\ (n\to\infty)$ 则 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$

(ii). 若在 X 中存在点列 x_n, 使 $[f_n(x_n)-f(x_n)] \to k \ne 0\ (n\to\infty)$. 则 $\{f_n(x)\}$ 在X上不一致收敛.

(iii)(等价形式) $\exists l>0$ 与点列 $x_n\in X$, 使 $|f_n(x_n)-f(x_n)| \ge l$. 则 $\{f_n(x)\}$ 在X上不一致收敛

定理18(函数项级数一致收敛的必要条件). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在X上一致收敛, 则其一般项序列 $\{u_n(x)\}$ 在X上一致收敛于0. 即 $u_n(x) \rightrightarrows 0$, $x\in X\ (n\to\infty)$.

定理19(关于一致收敛的柯西准则). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在X上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$,

使 $\forall n>N$ 以及 $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$. 对 $\forall x\in X$ 成立.

定理20.(强级数判别法) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项满足: $|u_n(x)| \le a_n$ $\forall x\in X$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则该函数项级数在X上 ~~一致收敛~~ 绝对一致收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的强级数 此判别法也称为M判别法。

强级数判别法只能判定绝对一致收敛的级数, 引入一致有界的概念.

定理21(狄利克雷判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在X上有定义, 且 $u_n(x) = a_n(x)\cdot b_n(x)$, $\forall x\in X$.

若 (1) $\forall x\in X$, $\{a_n(x)\}$ 对 n 单调 $\{a_n(x)\}$ 在X上一致收敛于0.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在X上一致有界.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在X上一致收敛

定理22(阿贝尔判别法). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 满足: (1) $\forall x\in X$, $\{a_n(x)\}$ 单调(对n而言), 且在X上一致有界.

(2). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在X上一致收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在X上一致收敛.

备注: 对复数项级数, 将 Abel 和 Dirichlet 中 数列单调换为 数列有界变差即可.

有界而变差是指, $\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1}-a_k|$ 有界. 即 $\sum(a_{k+1}-a_k)$ 绝对收敛.

变差

7. 一致收敛的性质

定理23（和函数的连续性）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$\forall n$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

即 无穷求和与极限可交换次序

定理24（逐项求积）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且 $\forall n$ $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且可逐项积分，即 $\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$，~~且积分后级数仍一致收敛~~

定理25（逐项求导）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点点收敛；$u_n(x)$ 导函数 $u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且可逐项求导，即

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$. 且 $S'(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

8. 幂级数

先记录一个常用级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$ $(a>0,p>0)$，由d'Alembert判别法可知

$a<1$ 收敛，$a>1$ 发散. $a=1$ 且 $p\le1$ 时发散，$p>1$ 时收敛.

定理26（求收敛半径）(i) 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 相邻 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$. 则 $R=1/l$. （l 可为 $+\infty$）.

(ii) 若 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ （l 可为 $+\infty$） 则 $R=1/l$.

定理27（幂级数四则运算）. 在收敛域并集上 (i) $(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 也收敛.

其中 $c_n=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$

(ii) $b_0\neq0$ 且 $|x|$ 充分小时 $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. 其中 c_n 可由以下等式推出：

$b_0c_0=a_0$ $b_1c_0+b_0c_1=a_1$, $\cdots$, $\sum_{j=0}^{n}b_{n-j}c_j=a_n$, $\cdots$

定理28（幂级数内闭一致收敛性）. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 $R>0$，则

(1) ~~闭~~ $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛 内闭一致性

(2). 若级数在 $x=R$ 处收敛，则在 $[0,R]$ 上一致收敛. $x=-R$ 同理

定理29（幂级数连续性）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续，又若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$（或 $x=-R$）处收敛，则 $S(x)$ 在 $x=R$（或 $x=-R$）点处左（右）连续.

定理30 幂级数在收敛区间任一闭区间上可逐项积分，~~且收敛半径不小于原级数收敛半径~~

定理31 幂级数在其收敛区间内可逐项求导，

推论：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 具有相同的收敛半径.

推论：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和函数在收敛区间 $(-R,R)$ 内有任意阶导数，且收敛半径均为 R.

引进O和o　若 $z\to z_0$ 时 $\frac{f(z)}{\phi(z)}$ 有界，记为 $f(z)=O(\phi(z))$，当 $z\to z_0$　或 $f(z)\sim\phi(z)$ $z\to z_0$

若 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\phi(z)}=0$，记为 $f(z)=o(\phi(z))$，当 $z\to z_0$

渐近序列　设 $\{\phi_n(z)\}$ 在 z_0 点邻域内有定义，且 $\phi_n(z)\neq 0$（除 z_0 点）　若 $\forall n$，有

$\phi_{n+1}(z)=o(\phi_n(z))$　$z\to z_0$　称 $\{\phi_n(z)\}$ 是 $z\to z_0$ 的渐近序列。

渐近级数　若 $z\to z_0$ 时，$\forall m$，$f(z)-\sum\limits_{n=0}^{m}a_n\phi_n(z)=o(\phi_m(z))$。

称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(z)$ 是 $f(z)$ 相对于 $\{\phi_n(z)\}$ 的渐近级数，记为 $f(z)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(z)$。

渐近级数常常是发散的。固定项数，~~z→~~ z越趋于 z_0，部分和越精确于 $f(z)$。

对一定的z，并不能多取项数来无限制改善近似程度

渐近级数通常有一定幅角限制，arg z 一定范围内，渐近展开（若存在）唯一，且

$$a_m=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\phi_m(z)}\left[f(t)-\sum_{n=0}^{m-1}a_n\phi_n(z)\right].$$

****

定理（Taylor展开）设 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆内 $|z-a|<R$ 解析，则对圆内任一点 z，$f(z)$ 可展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\quad 其中\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

收敛半径由最近的奇点决定

Bernoulli数　考虑 $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$　定义 $f(0)=1$。其在 $|z|<2\pi$ 内解析，令 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$

$$z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}z^l\quad 即\ 1=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!(l+1)!}z^{k+l}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!}z^n$$

$B_0=1$	因为 $f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{e^{z+1}}{e^{z-1}}-1\right)=\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}-\frac{z}{2}$
$\frac{1}{2}B_0+B_1=0$	$f(z)+\frac{z}{2}$ 是偶的，即除了 $B_1=-\frac{1}{2}$ 外，其余 $B_{2n+1}=0$ $(n\geq1)$
$\frac{1}{6}B_0+\frac{1}{2}B_1+\frac{1}{2}B_2=0$	因此 $f(z)=1-\frac{1}{2}z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$
⋮	

由Cauchy判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{B_n}\right|^{\frac{1}{n}}=2\pi$（先默认极限确实存在）从而 $B_n\sim\frac{n!}{(2\pi)^n}$ 发散

利用Bernoulli数，$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}=\frac{iz}{2}\frac{e^{iz/2}+e^{-iz/2}}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}}=\frac{iz}{2}+\frac{iz}{e^{iz}-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^nB_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$.

而 $\frac{z}{2}\tan\frac{z}{2}=\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}-z\cot z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{2^{2n}-1}{(2n)!}B_{2n}z^{2n}$

（分部求和）$S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_n$　设 $B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k$　$n>0$ 时 $b_n=B_n-B_{n-1}$.

$$\begin{aligned}S_N&=a_0b_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cdot(B_n-B_{n-1})\\&=a_0b_0-a_1B_0+a_NB_N+\sum_{n=1}^{N-1}B_n(a_n-a_{n+1})\\&=a_NB_N-\sum_{k=0}^{N-1}B_n(a_{n+1}-a_n).\end{aligned}$$

$\int_a^b f(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]|_a^b-\int_a^c f'(x)g(x)dx$

收敛半径 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 半径 R_1 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 半径 R_2.

① $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$ $R_1 \neq R_2$ 时 $R = \min(R_1, R_2)$ $R_1 = R_2$ 时 $R \geq R_1$ $b_n = -a_n$ 时 $R = \infty$.

$\Rightarrow R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

② ~~设 $|z_1| < R_1 R_2$~~ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$. 设 $|z| < R_1 R_2$ 取 z_1, z_2 $|z_1| < R_1$ $|z_2| < R_2$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n b_n z_2^n$

因此 $R \geq R_1 R_2$.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} z^n$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{a_n} z^n$ 则 $1 \geq R_1 R$ $\Rightarrow R \leq \frac{1}{R_1}$.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} z^n$ $\sum b_n z^n = \sum a_n \cdot \frac{b_n}{a_n} z^n$. $R_2 \geq R_1 R$ $\Rightarrow R \leq \frac{R_2}{R_1}$.

***

零点：$f(z)$ 在 a 解析且 $f(a)=0$ 称 $z=a$ 为 $f(z)$ 零点.

在 $z=a$ 附近展开 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ 显然 $a_0 = 0$ 设 a_m 为不为0的最低阶系数，称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点. 这时 $f(z) = (z-a)^m \phi(z)$ 其中 $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-a)^n$.

$\phi(z)$ 在 a 点解析且 $\phi(a) \neq 0$.

~~特别地 $m=\infty$ 时有引理~~ $f(z)$ 在 G 内解析. 若 $f(z)$ 在 G 内某小圆盘内为0，则 $f(z)$ 在 G 内为0.

定理（零点的孤立性定理）设 ~~$f(z)$ 在区域 G 内解析且不恒等于0~~ 若 $z=a$ 是 $f(z)$ 零点. 且 $f(z)$ 在 $z=a$ 邻域内不恒等于0，则 $\exists \rho > 0$，使 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| < \rho$ 内无零点.

推论 设 $f(z)$ 在 G 内解析，若在 G 内存在 $f(z)$ 无穷多零点 $\{z_n\}$ 且 $\lim_{n\to\infty} z_n = a \in G$，则 $f(z)$ 在 G 内恒等于0.

定理（解析函数唯一性定理）设 G 内有2个解析函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 在 G 内存在无穷多个点 $\{z_n\}$，使 $f_1(z_n) = f_2(z_n)$ 且 $\lim_{n\to\infty} z_n = a \in G$ 则在 G 内 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

***

定理（Laurent展开）设 $f(z)$ 在以 b 为圆心环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 中单值解析，则环域内 $f(z)$ 可展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad \text{其中 } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta.$$

其中 C 是环域内绕内圆一周的任意一条闭合曲线.

注意 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ 实际是2个级数，也可理解为 $\lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to+\infty}} \sum_{-M}^{N}$ 正幂项 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 部分称为正则部分，在 $|z-b| < R_2$ 内绝对且内闭一致收敛. 负幂项部分称为主要部分，在 $|z-b| > R_1$ 内时绝对且内闭一致收敛

注意 $a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)$ 即使是正幂项系数

洛朗展开唯一性：两个洛朗级数在同一环域内处处相等，即可以比较系数.

条件放宽：可以将环域半径任意地伸缩（如果允许），得到的洛朗展开仍不变.

例 $\exp\{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\}$ 在 $0<|t|<\infty$ 内对 t 展开.

由 $e^{zt/2}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^k\frac{t^k}{k!}$ $|t|<\infty$. $e^{-\frac{z}{2t}}=\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^l\frac{(-)^l}{l!}(\frac{1}{t})^l$ $|t|>0$.

故 $\exp\{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{k!\,l!}(\frac{z}{2})^{k+l}t^{k-l}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}(\frac{z}{2})^{2l+n}\right]t^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}(\frac{z}{2})^{2l+n}\right]t^n$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n$

其中 $J_n(z)=\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}(\frac{z}{2})^{2l+n} & n=0,1,2,\cdots\\ \sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}(\frac{z}{2})^{2l+n} & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$ 称为 n 阶贝塞尔函数

***

孤立奇点 ~~b为~~ 存在某空心邻域,函数在其中解析

孤立奇点附近可洛朗展开 不含负幂项 → 可去奇点、 含有限个负幂项 → 极点、
含无穷多负幂项 → 本性奇点

定理 设 $f(z)$ 在 $0<|z-b|<R$ 解析, b 为函数可去奇点 $\Leftrightarrow$ 存在极限 $\lim_{z\to b}f(z)$ (且不为 ∞).

此定理证明过程中又有 ~~可去奇点~~ 亡 $\Leftrightarrow$ $\exists b$ 的空心邻域内 $f(z)$ 有界.

极点 让 a_{-m} 为最小的不为0负幂项,称 b 为 $f(z)$ 的 m 阶极点. 这时 $f(z)=(z-b)^{-m}\phi(z)$.

其中 $\phi(z)$ 是环域内解析函数 且 $\phi(b)\neq 0$.

定理 设 $f(z)$ 在 $0<|z-b|<R$ 解析, b 为 $f(z)$ 极点 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to b}f(z)=\infty$.

本性奇点 $\lim_{z\to a}f(z)$ 不存在.(既不为有限值,也不为 ∞).

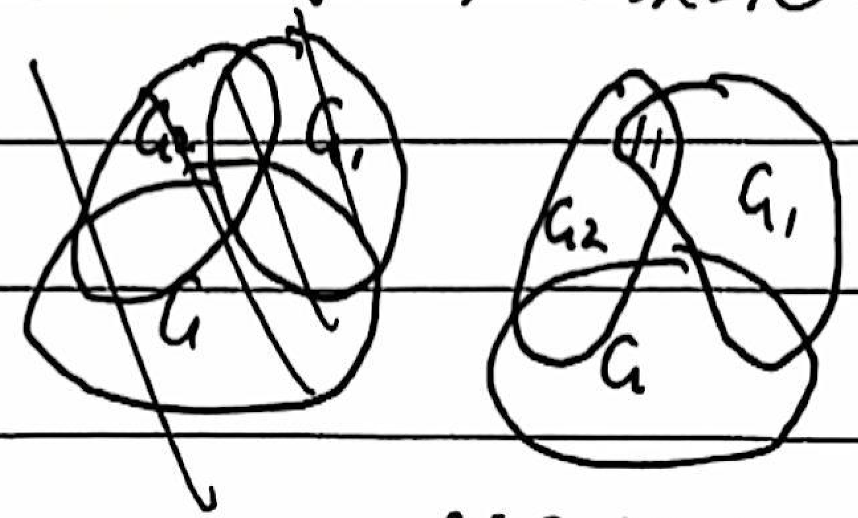
定理 设 $f(z)$ 在 $0<|z-b|<R$ 解析, b 为 $f(z)$ 本性奇点 $\Leftrightarrow$ $\forall A\in\mathbb{C}$, 可以找到一个序列 $z_n\to b$,
使 $f(z_n)\to A$.

定理(Picard定理) 若 $f(z)$ 只有一个本性奇点而再无其他奇点,则在本性奇点的任意一个小
邻域内, $f(z)$ 可以取(并无穷多次取)任意有限复数值,至多有一个例外(Picard例外值)

例: $\sin z$, $\cos z$, e^z, ∞点为本性奇点, ~~∞点邻~~ 值域为 $\mathbb{C}$, 至多一个例外.

***

若 z_0 为奇点,可以绕它一圈做解析延拓. 若绕一圈后函数值不复原 ⇒ 多值函数.



f 在 $G_1\cap G_2$ 上不一定相等.

全局解析函数 先定义解析函数在一个小区域,然后通过解析延拓到整个复平面
(Riemann面),如此定义的解析函数称为全局解析函数.

定义(留数)．若 b 为 $f(z)$ 孤立奇点，定义 $f(z)$ 在 b 处的留数为 $f(z)$ 在 b 的空心邻域内Laurent展开式中 $(z-b)^{-1}$ 幂系数 a_{-1}，记作 $\mathrm{res}f(b)=a_{-1}$

定理(留数定理) 设 C 为简单闭合围道，$\bar{G}$ 为 C 的内区域，若除 C 内有限个孤立奇点 b_k $(k=1,\cdots,n)$ 外函数在 $\bar{G}$ 解析，则 $\oint f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}f(b_k)$.

可去奇点：留数为0，不需要考虑。

m阶极点：$f(z)=(z-b)^{-m}\varphi(z)$ $\varphi(z)$ 在 b 邻域内解析且 $\varphi(b)\neq0$ a_{-1} 为 $\varphi(z)$ 泰勒展开的 $m-1$ 阶系数

$$\mathrm{res}f(b)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-b)^m f(z).$$

特别地，对一阶极点，$\mathrm{res}f(b)=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)$.

对本性奇点或高阶极点，直接求洛朗展开 负1次幂系数。

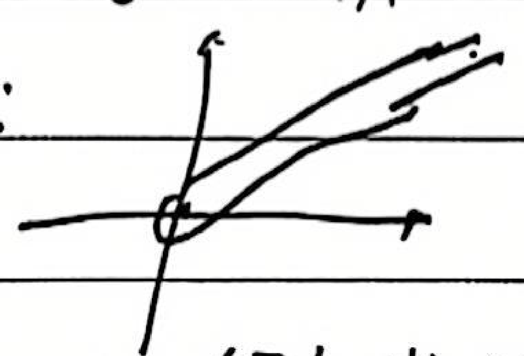
有理三角函数的积分 形如 $I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ 可化为复平面上单位圆上的~~路径~~围道积分。

~~从而~~

无穷积分 形如 $I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 定义为 $\lim_{\substack{R_1\to+\infty\\R_2\to+\infty}}\int_{-R_1}^{R_2}f(x)dx$.

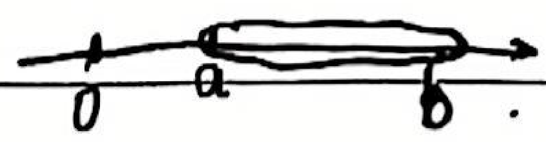
有时这一极限不存在，但 $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$ 存在，称为积分主值，~~定义为~~记为 $\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$.

关于多值函数单值化，有2种观点。一是代数角度，如 $\sqrt{z-a}$，规定 z 的辐角在 $[-\pi,\pi]$ 或规定 z 割线：



可以将 z 换成 z_1、z_2、$z-a$ 等，$f(z)$ 等，相应地对 z_1、z_2、$z-a$、$f(z)$ 辐角或在复平面上位置做限制。二是宗量角度 划取割线是限制宗量幅角取值，此时在做了割线后 即对 z 在复平面上位置做限制，从而在函数内部可做任意等价变换，函数仍解析，且由解析函数唯一性可方便证明一些公式。

如证 $\sqrt{(z-a)(z-b)}=\sqrt{z-a}\cdot\sqrt{z-b}$．$a,b\overset{>0}{\in}R$．规定 $z=0$ 时 $\sqrt{(z-a)(z-b)}=\sqrt{ab}$ 作如图割线后，



$\arg(z-a)(z-b)|_{z=0}=4k\pi$. 在 ~~$z<a$~~ 实轴 $z<a$ 上 显然处处成立 从而由唯一性在 $\mathbb{C}$/割线上成立.

第一种角度是初学者(如我)易犯的错误，题目应按书中，即第二种角度理解.

~~一般地~~，$\sqrt{(z-a)(z-b)}=\sqrt{z-a}\sqrt{z-b}$ 在做了割线后成立.

更复杂：$\sqrt{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}=\sqrt{z-a_1}\cdots\sqrt{z-a_n}$.

$\ln(z-a_1)\cdots(z-a_n)=\ln(z-a_1)+\cdots+\ln(z-a_n)$ 只要做了割线.

一般要保证各宗量作为不变形量，否则

非~~独立~~宗量项可自由提出，如 $\sqrt{\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}}=\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{z}$．只要做了 a,b 间割线.

需讨论新的宗量的幅角即可 如：$\sqrt{(a-z)(z-b)}=\sqrt{-(z-a)(z-b)}=i\sqrt{z-a}\sqrt{z-b}$．若做 a,b 间割线，只需处理好 $z-a$ 宗量的幅角值即可.

事实上，多值量的幅角不是"可观测量"，函数在某处的值才是"可观测"，即多值量幅角不唯一，有协变性。变换宗量时也要按照某处的函数值来规定变换后新宗量的幅角。

~~对常数，理解为一个宗元(非宗量)从而可任意提出，但必须规定其幅角，注意此时相当于变换宗量.~~

常数理解为和一个宗量是一起的，若提出常数相当于进行宗量变换，从而规定常数幅角并提出后，可能要重新依据函数值来规定新宗量的幅角（尽管宗量形式上可能不变）如 $\sqrt{2z}=\sqrt{2}\sqrt{z}$. 原宗量：$2z$　新宗量：z.

若规定2的幅角为2π，则要对z的幅角(在某点)重新规定.

***

含三角函数的无穷积分

引理(Jordan引理) 设在 $0\le\arg z\le\pi$ 内，$|z|\to\infty$ 时 $Q(z)$ 一致地趋于0，则 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}Q(z)e^{ipz}dz=0$.

其中 $p>0$，C_R 为以原点为圆心，R 为半径的上半圆弧.

实积分的狄利克雷判别法：设 $\int_a^{\alpha}f(x)dx$ 在 $\alpha\in[a,+\infty)$ 有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

阿贝尔判别法：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 也收敛.

若被积函数在实轴上有奇点，则 $\int_a^b f(x)dx$ 为瑕积分，定义为 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta_1\to0}\int_a^{c-\delta_1}f(x)dx+\lim\limits_{\delta_2\to0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$.

若这两个极限不存在，但是 $\lim\limits_{\delta\to0}\left[\int_a^{c-\delta}f(x)dx+\int_{c+\delta}^b f(x)dx\right]$ 存在，

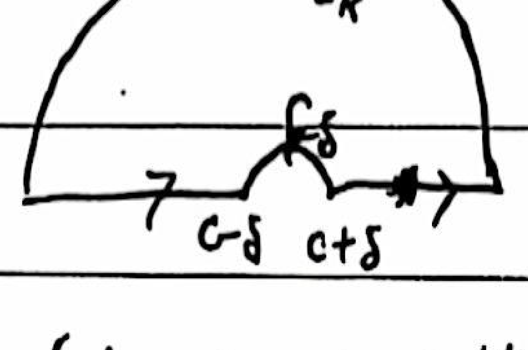
定义瑕积分的主值为 $\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to0}\left[\int_a^{c-\delta}f(x)dx+\int_{c+\delta}^b f(x)dx\right]$.

主值存在要求 ~~⟺ 瑕点是奇数次幂奇点，偶~~

⟺ 瑕点负偶数次幂均为0.

洛朗展开

计算方式：



由小圆弧引理(只适于一阶极点)得到 $\lim C_\delta$ 上积分值。

补充引理(Jordan引理推广). 设$Q(z)$只有有限个奇点，且在下半平面范围内当$|z|\to\infty$时一致趋于0，

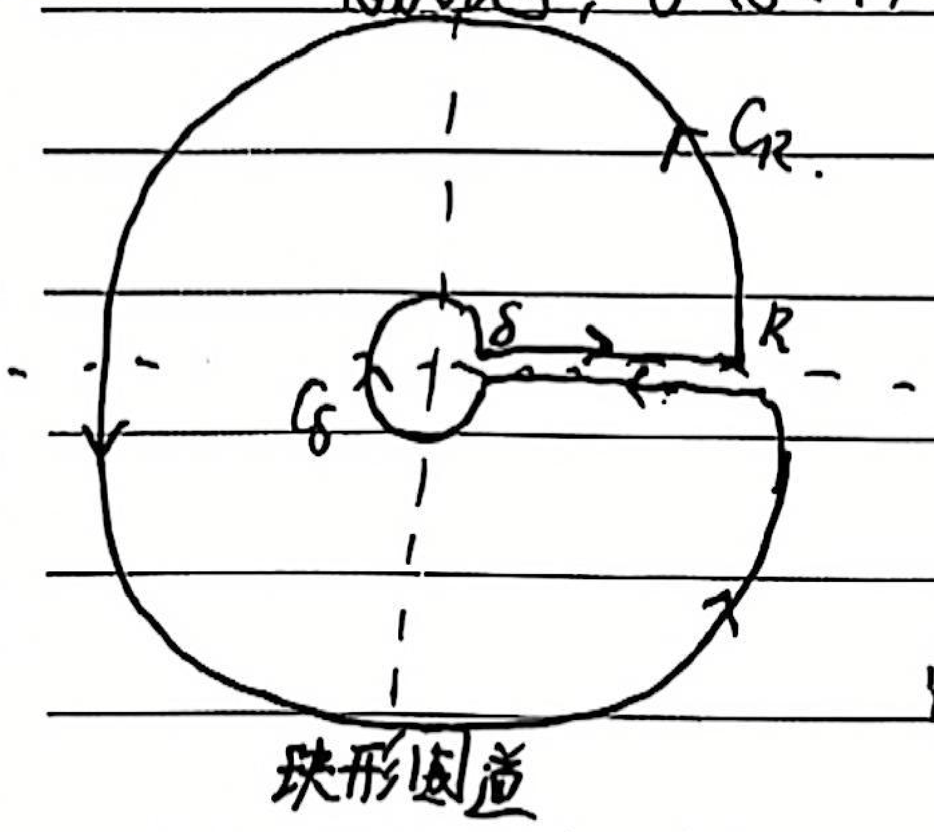
则 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}Q(z)e^{-ipz}dz=-2\pi i\times\sum\limits_{全平面}\text{res}\{Q(z)e^{-ipz}\}=-2\pi i\times\text{res}\{Q(z)e^{-ipz}\}_{z=\infty}$.

涉及多值函数的复变积分.

一种常见类型：$I=\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)dx$. $(s\in\mathbb{R})$.

特别地，$0<s<1$，$Q(x)=R(x)$ 是有理函数，则积分收敛要求：① $R(x)$ 分母次数比分子次数≥1.

② $x=0$ 不是 $R(x)$ 的极点.



环形围道

形如 $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+x+1}dx$ 可先算 $\int_0^\infty x^{s-1}\frac{x}{x^2+x+1}dx=I(s)$. $(0<s<1)$

利用 $\left.\frac{dI(s)}{ds}\right|_{s=0}=\int_0^\infty \left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{x^s}{x^2+x+1}\right|_{s=0}dx=\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+x+1}dx$.

需证明 $I(s)$ 一致收敛性 分开考虑：$\int_0^1\frac{x^s}{x^2+x+1}dx+\int_1^\infty\frac{x^s dx}{x^2+x+1}$

然后由 $-1<-A\le s\le B<1$ 则 $(0,1]$ 时 $|x^s|\le x^{-A}$ $[1,+\infty)$ 时 $|x^s|\le x^B$.

而 $\int_0^1\frac{x^{-A}}{x^2+x+1}dx$ 与 $\int_1^\infty\frac{x^B}{x^2+x+1}dx$ 均收敛，从而两段积分均在闭一致收敛，可交换积分和求导.

Γ函数.

$\mathrm{Re}\,z>0$ 时，定义 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$. $z\notin\mathbb{Z}$ 时 t^{z-1} 是多值函数，应理解为 $\arg t=0$

定理：$\Gamma(z)$ 在右半平面 $(\mathrm{Re}\,z>0)$ 是一个解析函数. (拆成两部分，考虑闭一致收敛性)

为了解析延拓到全平面，由于 $\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ 在全平面闭一致收敛，而

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}.\qquad(\mathrm{Re}\,z>0)$$

右级数在 $z\ne 0,-1,-2,\cdots$ 的全平面收敛，且闭一致收敛. 重新定义Γ函数为

$$\Gamma(z)=\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt+\sum_{n=0}^\infty\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}.$$

除 $z=0,-1,-2,\cdots$ 为一阶极点外全平面解析.

性质 (1) $\Gamma(1)=1$.

(2) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. 则 $\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$ 可按此将 $\Gamma(z)$ 延拓到全平面. $\mathrm{res}\,\Gamma(-n)=\frac{(-1)^n}{n!}$.

推论：$\Gamma(n+1)=n!$ $(n=0,1,2,\cdots)$

(3) 互余宗量定理：$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$.

推论：$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

推论：$\Gamma(z)$ 在全平面无零点. 推论：$1/\Gamma(z)$ 全平面只有可去奇点，即全平面解析.

(4) 倍乘公式. $\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$.

考虑 $n\in\mathbb{N}^+$，$\Gamma(2n)=(2n-1)!=(2n-1)!!(2n-2)!!=2^{n-1}\Gamma(n)(2n-1)!!$.

$=2^{2n-1}\pi^{-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2})$

(5) Stirling公式. 当 $|z|\to\infty$，$|\arg z|<\pi$ 时 $\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi}$. (渐近展开)

$\ln\Gamma(z)\sim(z-\frac{1}{2})\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

倍乘公式推广：$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{1/2-nz}\Gamma(nz)$.

ψ函数．定义是Γ(z)的对数导数：$\psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$.

性质：(1) $z=0,-1,\cdots$ 均为$\psi(z)$一阶极点，留数均为-1，除这些点外，$\psi(z)$在全平面解析.

与Γ(z)留数无关

(2) $\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$.

$\psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}$ $\quad n=2,3,4,\cdots$

(3) $\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z$.

(4) $\psi(z)-\psi(-z)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z$. (2,3推论)

(5) $\psi(2z)=\frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2}\psi(z+\frac{1}{2})+\ln 2$.

(6) $\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\cdots$ $\quad z\to\infty \quad |\arg z|<\pi$ (渐近展开).

(7) $\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0$.

由(2)和(7)，$\psi(1)=\lim_{n\to\infty}[\ln n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})]=-\gamma$.

其中 $\gamma=-\psi(1)=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n]$ 称为Euler常数，$\gamma\approx0.577$.

由(2)和(6)，$\psi(z)-\psi(1)=\psi(z+N+1)-\psi(N+2)-\sum_{k=0}^{N}(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{1+k})=-\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{1+k})$

设 $z=p/q$，$p,q\in\mathbb{N}^*$．$0<p<q$，则

$$\psi(p/q)-\psi(1)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{q}{p+nq})$$

由Abel第二定理，$\psi(p/q)-\psi(1)=\lim_{t\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{q}{p+nq})t^{p+nq}=\lim_{t\to1^-}s(t)$.

s(t)可由Simpson's dissection(解剖)定理求出.

设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn+m}x^{kn+m}=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\omega^{-mj}f(\omega^jx)$.

其中 $\omega=e^{2\pi i/k}$ $\quad 0\le m<k$.

利用 $-\ln(1-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$ $\quad(|\arg(1-t)|<\pi)$. 令 $\omega=e^{2\pi i/q}$

$$s(t)=-t^{p-q}\ln(1-t^q)+\sum_{n=0}^{q-1}\omega^{-pn}\ln(1-\omega^nt).$$

$$=-t^{p-q}\ln\frac{1-t^q}{1-t}-(t^{p-q}-1)\ln(1-t)+\sum_{n=1}^{q-1}\omega^{-np}\ln(1-\omega^nt).$$

从而 $\lim_{t\to1^-}s(t)=-\ln q+\sum_{n=1}^{q-1}\omega^{-np}\ln(1-\omega^n)$. $\Rightarrow$ $\psi(p/q)=-\gamma-\ln q+\sum_{n=1}^{q-1}\omega^{-np}\ln(1-\omega^n)$

将p换成q-p，两式相加，

$$\psi(\frac{p}{q})+\psi(\frac{q-p}{q})=-2\gamma-2\ln q+2\sum_{n=1}^{q-1}\cos\frac{2\pi np}{q}\ln(1-\omega^n).$$

取实部，$\psi(\frac{p}{q})+\psi(\frac{q-p}{q})=-2\gamma-2\ln q+\sum_{n=1}^{q-1}\cos\frac{2\pi np}{q}\ln(2-2\cos\frac{2\pi n}{q})$.

由性质4，$\psi(p/q)-\psi(1-p/q) = -\pi\cot\frac{\pi p}{q}$. 相加得

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q} - \ln q + \sum_{n=1}^{q-1}\cos\frac{2\pi n p}{q}\ \ln\left(2\sin\frac{\pi n}{q}\right)$$

从而对有理数的ψ函数可据此算出。

例如，$\psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2\ln 2$　　$\psi(\frac{1}{4}) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$　　$\psi(\frac{3}{4}) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$.

ψ函数的导数．由性质2．$\psi'(z+1) = \psi'(z) - \frac{1}{z^2}$．则

$$\psi'(z+n) = \psi'(z) - \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z+n-1)^2}\right] \quad n=2,3,\cdots$$

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z+n-1)^2}.$$

注意：渐近展开式不能求导得到导数的渐近展开式

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\psi'(z+n) = 0$.

ψ函数性质3对z求导，令$z=\frac{1}{2}$，得 $\psi'(\frac{1}{2}) = \pi^2/2$

再由性质5，$\psi'(1) = \frac{1}{3}\psi'(\frac{1}{2}) = \pi^2/6$.

利用ψ函数，可以方便地求出许多无穷级数的和

例：$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{n+1/3} - \frac{1}{3(n+2/3)} + \frac{1}{6(n+1)}\right]$$

求前N项有限和 $= \frac{1}{6}[\psi(N+1+\frac{1}{3}) - \psi(\frac{1}{3})] - \frac{1}{3}[\psi(N+1+\frac{2}{3}) - \psi(\frac{2}{3})] + \frac{1}{6}[\psi(N+1+1) - \psi(1)]$

令 $n\to\infty$，则原式 $= \frac{1}{6}[2\psi(\frac{2}{3}) - \psi(\frac{1}{3}) - \psi(1)] = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3)$.

B函数　$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$时定义 $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$　（注意被积函数有两个支点）. 其中 $\arg t = \arg(1-t) = 0$.

令$t=\sin^2\theta$，还可得到 $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\, d\theta$.

积分在$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$时内闭一致收敛，从而解析.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

证：令$t=x^2$，则 $\Gamma(p) = \int_0^{\infty}e^{-t}t^{p-1}dt = 2\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^{2p-1}dx$.

则 $\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$.

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\, d\theta$$

$$= \Gamma(p+q)\,B(p,q).$$

利用这一关系式，可以把B函数延拓到p,q的全复平面.

显然有 $B(p,q) = B(q,p)$.

证明互余宗量定理：令 $p=z$, $q=1-z$，则

$$B(z,1-z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}=\Gamma(z)\Gamma(1-z).$$

当 $\mathrm{Re}\,z>0$, $\mathrm{Re}(1-z)>0$，即 $0<\mathrm{Re}\,z<1$ 时，由 B函数积分定义式，

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt.$$

令 $x=\frac{t}{1-t}$，则 $(1+x)(1-t)=1$. $\frac{dx}{1+x}=\frac{dt}{1-t}$. 故

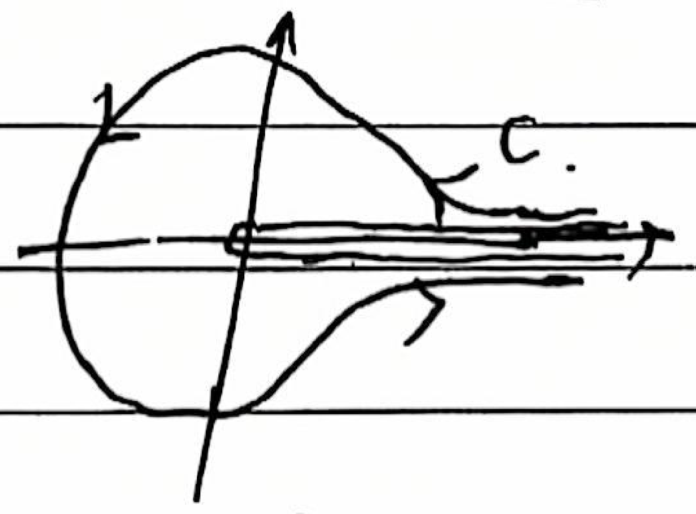
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{dt}{1-t}=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

再把这一公式解析延拓到 $z\neq$整数情形，即证.

~~而~~证明倍乘公式省略.

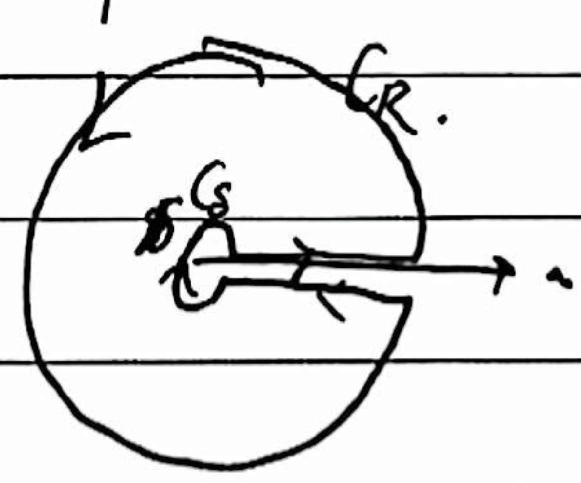
Γ函数的积分表达式

考虑围道积分 $I=\oint_{\infty C}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\,dt.$ $(\mathrm{Re}\,z>0)$ 只要积分路径从上岸∞处绕一圈到下岸∞处.



考虑环形围道. 由小圆弧引理，C_δ上积分$\to 0$.

从而 $I=(e^{i2\pi z}-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt=2ie^{i\pi z}\sin\pi z\,\Gamma(z).$



因此，$\Gamma(z)=\frac{e^{-i\pi z}}{2i\sin\pi z}\oint_{\infty C}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\,dt.$ (z不为整数).

解析延拓，这一积分表达式可推广到 $\mathrm{Re}\,z<0$. 从而适用于全体 $z\neq$整数的 z.

ψ函数的积分表达式

设 $\mathrm{Re}\,z>0$，由 $\psi(z)=\lim_{m\to+\infty}\left(\ln m-\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{z+n}\right)$.

若 $\mathrm{Re}\,p>0$，有 $\frac{1}{p}=\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$. 对 p 从 $p=1$到$p=m$ 积分，得

$$\ln m=\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-mt}\right)\frac{dt}{t}.$$

代入，有

$$\psi(z)=\lim_{m\to+\infty}\left\{\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-mt}\right)\frac{dt}{t}-\sum_{n=0}^{m}\int_0^\infty e^{-(z+n)t}\,dt\right\}$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\left\{\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-mt}\right)\frac{dt}{t}-\int_0^\infty\frac{e^{-zt}\left[1-e^{-(m+1)t}\right]}{1-e^{-t}}\,dt\right\}$$

$t=0$是被积函数可去奇点. 再改写：

$$\psi(z)=\lim_{m\to+\infty}\int_0^\infty\left\{\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)-e^{-mt}\left[\frac{1}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}+e^{-zt}\right]\right\}dt.$$

$m\to+\infty$时，由 $\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}+e^{-zt}\right)$ 在$(0,+\infty)$有界，则含e^{-mt}因子积分为0. 故

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}dt.$$ 即$\psi(z)$的积分表达式.

令 $z=1$，由 $\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) e^{-t} dt$. 则 $\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}} dt$.

可由积分表达式得到 $\psi(z)$ 渐近展开式.

Laplace 变换：如果 $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$. $t\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{C}$. $F(p)$ 称为 $f(t)$ 的 Laplace 变换.

$f(t)$ 与 $F(p)$ 称为 Laplace 变换的原函数和像函数，记为 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$.

本章约定：$f(t)$ 理解为 $f(t)\eta(t)$，其中 $\eta(t)$ 是 Heaviside 函数（单位阶梯函数） $\boxed{F(p) \doteqdot f(t) \quad f(t) \doteqdot F(p)}$

$\eta(t) = 1, t>0$ or $0, t<0$.

Laplace 变换存在的充分条件：1° $f(t)$ 和 $f'(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上分段连续，在任何有限区间内不连续点的数目有限 2° $f(t)$ 有有限的增长指数，即 $\exists M>0$，和 $B\in\mathbb{R}$，使 $\forall t\geq 0$，$|f(t)| < Me^{Bt}$.

注意，若存在不满足~~1~~第2条的瑕点，但积分在瑕点附近的瑕积分存在，仍存在 Laplace 变换

则 $f(t)$ 的 Laplace 变换在半平面 $\mathrm{Re}\,p > B$ 上存在，且在此半平面内 $F(p)$ 是解析的。

B 的下确界称为~~收敛~~绝对收敛横标

引理 若 Laplace 积分 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 在 $p=p_0$ 处收敛，则它在开的半平面 $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,p_0$ 上亦收敛，且在此半平面上等于绝对收敛积分 $(p-p_0)\int_0^\infty g(t;p_0)e^{-(p-p_0)t}dt$.（但原积分不一定绝对收敛）

其中 $g(t;p_0) = \int_0^t f(\tau)e^{-p_0\tau}d\tau$.

证明：$\frac{dg(t;p_0)}{dt} = f(t)e^{-p_0 t}$. 则 $\int_0^T f(t)e^{-pt}dt = \int_0^T \frac{dg(t;p_0)}{dt} e^{-(p-p_0)t}dt$.

$= g(T;p_0)e^{-(p-p_0)T} + (p-p_0)\int_0^T g(t;p_0)e^{-(p-p_0)t}dt$.

由 $\int_0^\infty f(t)e^{-p_0 t}$ 收敛，则 $\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-p_0 t}dt = \lim_{T\to\infty} g(T;p_0) \Rightarrow g(t;p_0)$ 有界，故可取 $T\to\infty$，

则 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = (p-p_0)\int_0^\infty g(t;p_0)e^{-(p-p_0)t}dt$ $(\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,p_0)$.

定理 设 $f(t)$ 满足 Laplace 变换充分条件，$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ 则存在 $-\infty \leq s_0 < \infty$，使得 $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ 在 $\mathrm{Re}\,p > s_0$ 时收敛，在 $\mathrm{Re}\,p < s_0$ 时发散。其中 s_0 称为收敛横标.

并且 $F(p)$ 在区域 $p > s_0$ 解析，且 $F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt}t f(t)dt$ $p > s_0$.

例：$1 \doteqdot \frac{1}{p}$ $(s_0 = 0)$ $e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}$ $(s_0 = \mathrm{Re}\,\alpha)$.

定义（正则横标）. 设 $F(p)$（解析延拓后）在区域 $\mathrm{Re}\,p > \gamma$ 解析，在 $\mathrm{Re}\,p = \gamma$ 上有奇点，γ 称为该 Laplace 变换的正则横标。

例：$f(t) = \frac{d}{dt}\cos(\pi e^t) = -\pi e^t \sin(\pi e^t)$. 绝对收敛横标为 1. 收敛横标为 0.

但 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \cos(\pi e^t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty \cos(\pi e^t)e^{-pt}dt = 1 + \frac{p}{\pi}\int_0^\infty \pi e^t\cos(\pi e^t)e^{-(p+1)t}dt$

$= 1 + \frac{p}{\pi}\sin(\pi e^t)e^{-(p+1)t}\Big|_0^\infty + \frac{p(p+1)}{\pi}\int_0^\infty e^{-(p+1)t}\sin(\pi e^t)dt$.

$= 1 + \frac{p(p+1)}{\pi^2}\int_0^\infty \pi e^t \sin(\pi e^t)e^{-(p+2)t}dt$

$\Rightarrow F(p) = 1 - \frac{p(p+1)}{\pi^2}F(p+2)$. 利用这一关系可将 $F(p)$ 延拓到全平面 即正则横标为 $-\infty$.

定理：若 $f(t)$ 满足Laplace变换存在的充分条件，则 $\lim\limits_{Re\,p\to+\infty} F(p)=0$.

证：设 $s=Re\,p$. 因为 $|F(p)|\le\int_0^\infty|e^{-pt}f(t)|dt\le M\int_0^\infty e^{-(s-B)t}dt=\frac{M}{s-B}$.

当 $s\to+\infty$ 时 $F(p)\to0$.

Laplace变换的基本性质

性质1. 线性变换. $\alpha_1f_1(t)+\alpha_2f_2(t)\doteq\alpha_1F_1(p)+\alpha_2F_2(p)$.

从而 $\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\doteq\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\doteq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right]=\frac{p}{p^2+\omega^2}$

性质2. 设 $f(t)\doteq F(p)$，则 延迟定理：$f(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}F(p)$ $(\tau\ge0)$.

$\eta(t-\tau)$.

相似性：$f(at)\doteq\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$ $(a>0)$.

位移定理：$e^{p_0t}f(t)\doteq F(p-p_0)$.

性质3. 原函数的导数的Laplace变换. 设 $f(t)$ 与 $f'(t)$ 满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t)\doteq F(p)$，则

$f'(t)\doteq pF(p)-f(0)$.

推广：只要 $f(t),\cdots,f^{(n)}(t)$ 都满足充分条件，$f(t)\doteq F(p)$，则 $f^{(n)}(t)\doteq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)\cdots-f^{(n-1)}(0)$.

性质4. 原函数的积分的Laplace变换. 设 $f(t)$ 满足Laplace变换存在的充分条件，则 $\int_0^t f(\tau)d\tau$ 的Laplace变换也存在，且 $\int_0^t f(\tau)d\tau\doteq\frac{F(p)}{p}$.

$\mathcal{L}\{\ln t\}=?$（$\ln t$ 不满足Laplace变换存在的充分条件）. 由 $Re\,p>0$，$Re\,z>0$ 时，

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-pt}dt=\frac{\Gamma(z)}{p^z}.$$

两端对 z 求导，$\int_0^\infty t^{z-1}\ln t\,e^{-pt}dt=\frac{\Gamma(z)}{p^z}[\psi(z)-\ln p]$. 取 $z=1$ 得

$\ln t\doteq-\frac{1}{p}(\gamma+\ln p)$.

Laplace变换的反演

定理（唯一性）设 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 连续，若 $\mathcal{L}\{f_1(t)\}=\mathcal{L}\{f_2(t)\}$，则 $f_1(t)=f_2(t)$.

若存在有限个第一类间断点，仅在间断点处函数取值不唯一。

像函数的导数的反演：设 $f(t)$ 满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t)\doteq F(p)$，则 $F^{(n)}(p)\doteq(-t)^nf(t)$.

像函数的积分的反演：设 $f(t)\doteq F(p)$ 且当 $t\to0$ 时 $|f(t)/t|$ 有界，则 $\int_p^\infty F(q)dq\doteq\frac{f(t)}{t}$.

其中积分上限理解为 $Re\,p\to+\infty$. 沿 $F(p)$ 收敛横标右侧半平面的任意 $Re\,p\to+\infty$ 的路径

卷积定理：设 $F_1(p)\doteq f_1(t)$ $F_2(p)\doteq f_2(t)$. 则 $F_1(p)F_2(p)\doteq\int_0^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$.

普遍反演公式　若 $F(p)=F(s+i\sigma)$ $(s,\sigma\in\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{Re}\,p>s_0$ 时满足

(i) $F(p)$ 解析　(ii) $|p|\to+\infty$ 时，$F(p)$ ~~→0~~ 一致地趋于0.　(iii) $\forall\,\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，沿直线 $L:\mathrm{Re}\,p=s$ 的无穷积分 $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}|F(p)|\,dp$ $(s>s_0)$ 收敛 ~~(F(p)绝对收敛)~~.

则 $F(p)$ 的原函数为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp\quad(s>s_0).$$

注：上述条件是公式成立的充分不必要条件.

定理（普遍反演公式Ⅱ）. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任意有限区间上只有有限个极大极小和有限个第一类间断点，~~Laplace 积分~~ $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 在直线 $\mathrm{Re}\,p=s$ 上绝对收敛，~~(即 $s>$ 绝对收敛横标 s_0)~~，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\begin{cases}0 & t<0\\ f(0+)/2 & t=0\\ [f(t+)+f(t-)]/2 & t>0.\end{cases}$$

更一般地，积分应理解为主值：$\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{s-iR}^{s+iR}F(p)e^{pt}dp.$

定理. 若 $F(p)$ 满足普遍反演公式的条件，且 $F(p)$ 在全平面仅有有限个孤立奇点，且 $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$

则　$f(t)=\sum\mathrm{res}\{F(p)e^{pt}\}.$　$(t>0)$.

二阶线性常微分方程的幂级数解法

定义　对 $\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$，若 $p(z)$，$q(z)$ 在 z_0 点解析，称 z_0 是方程的常点，否则称为奇点。

例：超几何方程　$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0$.

有3个奇点：$z=0,1,\infty$ 点、　若一个方程有3个奇点(包括∞点)，则可以通过分式变换化为超几何方程。

定理　设 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0\quad w(z_0)=c_0\quad w'(z_0)=c_1.$$

有唯一解 $w(z)$，且 $w(z)$ 在这个圆内单值解析

解的线性相关的充要条件是它们的 Wronski 行列式 $W[w_1,w_2]=\begin{vmatrix}w_1 & w_2\\ w_1' & w_2'\end{vmatrix}$ 在 G 内恒等于0.

进一步，G 内某点 z_0 处 $W=0$，则线性相关　某点 z_0 处 $W\neq0$，则线性无关

因此，若　$w_1(z_0)=0$，$w_1'(z_0)=1$.　$w_2(z_0)=1$　$w_2'(z_0)=0$，则 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 线性无关.

定理　方程 $w''+pw'+qw=0$ 的解 ~~的解~~ 的解析延拓也是方程的解.

定理　若 z_0 是方程的孤立奇点，$p(z)$ 和 $q(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，则在此环形区域内，方程有两个线性无关解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k.\qquad w_2(z)=g\,w_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k.$$

其中 ρ_1, ρ_2, g 为复常数

定理. z_0 是方程的正则奇点，当方程在 z_0 的空心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内有两个正则解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad w_2(z)=g\,w_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k .$$

其中 $c_0\neq 0$，g 或 $d_0\neq 0$。 ρ_1 与 ρ_2 是正则解的指标。

这当且仅当：$(z-z_0)p(z)$ 与 $(z-z_0)^2 q(z)$ 在 z_0 解析.

不含对数项的正则解：指标方程 $\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$. 其中 $a_0=\lim\limits_{z\to 0} z p(z)$ $b_0=\lim\limits_{z\to 0} z^2 q(z)$.

规定 $\mathrm{Re}\,\rho_1 \geq \mathrm{Re}\,\rho_2$. 只要 $n+2\rho+a_0-1\neq 0$，可以递推求出各系数 c_n.

由 $\rho_1+\rho_2=-a_0+1$ 则 $n+2\rho+a_0-1=\begin{cases} n+\rho_1-\rho_2 & \rho=\rho_1 \\ n+\rho_2-\rho_1 & \rho=\rho_2 \end{cases}$ ~~若 $\rho_1-\rho_2\neq$ 整数~~

故 $\rho_1-\rho_2\neq$ 整数时，可以递推求出两个线性无关解，w_2 不含对数项.

$\rho_1-\rho_2=$ 整数 $\neq 0$ 时，由 $\mathrm{Re}\,\rho_1\geq \mathrm{Re}\,\rho_2$，$n+\rho_1-\rho_2>0$，可以求出方程不含对数项的第一解.

此时方程第二解可能含对数项.

$\rho_1-\rho_2=0$ 时，第二解一定含对数项

含对数项的第二解求解：利用 Wronski 行列式，$W[w_1,w_2]=w_1\frac{dw_2}{dz}-w_2\frac{dw_1}{dz}=A\exp\left[-\int^z p(\xi)d\xi\right]$

即 $\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)d\xi\right]$. 积分得 $\frac{w_2}{w_1}=A\int^z\left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)d\xi\right]\right\}dz+B$

令 $A=1, B=0$. 有 $w_2(z)=w_1(z)\int^z\left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)d\xi\right]\right\}dz$.

Bessel 方程的解. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$. $\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$. $x=0$ 是正则奇点.

设 $y(x)=x^\rho\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k$. ($c_0\neq 0$) ~~代入方程 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$~~ 指标方程：$\rho(\rho-1)+\rho-\nu^2=0 \Rightarrow \rho=\pm\nu$.

设 $\rho_1=\nu$，$\rho_2=-\nu$. 先由 ρ_1 求解有 $c_n=-\frac{1}{n(n+2\nu)}c_{n-2}$.

有 $w_1(z)=c_0 z^\nu\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$ 取 $c_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$ 有 $J_\nu(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$.

求第二解 $\rho_2=-\nu$. 则 $n(n-2\nu)c_n+c_{n-2}=0$.

$\rho_1-\rho_2=2\nu\neq$ 整数时，取 $y_2(x)=J_{-\nu}(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$

$\rho_1-\rho_2=2\nu=1$ 时，有 $c_1\cdot 0=0$. c_1 任意，取 $c_1=0$. 则有 $c_{2n+1}=0$，有 $y_2(x)=J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

$\rho_1-\rho_2=2\nu=2m$ 时，即 $\nu=m$ ($m=1,2,3,\cdots$) 对 c_{2m}. $0\cdot c_{2m}+c_{2m-2}=0$. 矛盾.

此时 J_m 与 J_{-m} 线性相关.

$p_1 - p_2 = 2\nu = 2m+1$，即 $\nu = m+\frac{1}{2}$ $(m=1,2,3,\cdots)$ 取 $y_2 = J_{-m-\frac{1}{2}}(x)$.

δ函数性质

$x\delta(x) = 0$.	$\delta(ax) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(x)$.
$\delta(x) = \delta(-x)$	$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$
$\delta'(-x) = -\delta'(x)$	

以上等式应从积分意义上理解 $\int f(x)\cdot 左\, dx = \int f(x)\cdot 右\, dx$.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\,dx = -f'(0)$.

由于 $\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx = \eta(x)$， $\delta(x) = \frac{d\eta(x)}{dx}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\eta(x)$.

$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-pt}\,dt = e^{-pt_0}$ $(t_0>0)$.

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$.

二维时 $\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y') = \frac{1}{r}\delta(r-r')\,\delta(\phi-\phi')$

三维时 $\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\phi-\phi')$

考虑非齐次线性微分方程的初值问题：$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y(x) = f(x)$. $(x>0)$ $y(0)=0$ $y'(0)=0$. 可以用Green函数方程求解. 非齐次项 $f(x)$ 称为源，满足源的叠加原理. 任意 $f(x)$ 可视为 $\delta(x)$ 的叠加：

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx'$$

考虑求解 $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y(x) = \delta(x-x')$. 解为 $g(x;x')$ 则原方程解为 $y(x) = \int_0^{\infty} f(x')g(x;x')\,dx'$.

齐次初值问题下 $g(x,x')=0$ $(x<x')$.

对 $y(0)=A$ $y'(0)=B$ 的一般初值问题，考虑 $y(x)=u(x)+v(x)$.

其中 $u(x)$ 满足齐次初值条件与非齐次项方程 $v(x)$ 满足非齐次初值条件与齐次方程

另一种方法是先满足初值条件，另一个解满足齐次初值条件和改变了的非齐次项方程.

边值问题 $\frac{d^2g(x,t)}{dx^2} + k^2g(x,t) = \delta(x-t)$ $a<x,t<b$. $g(a,t)=g(b,t)=0$.