

几何相位的历史与发展

石泽斌 夏省玘

北京大学物理学院

2025 年 11 月 4 日

目录

- ① Pancharatnam-Berry 相位
- ② 几何量子计算
- ③ 总结

目录

① Pancharatnam-Berry 相位

② 几何量子计算

③ 总结

Pancharatnam 的实验

1956 年，印度物理学家 S. Pancharatnam 设计了如下实验，他让一个左旋圆偏振光分束分别通过两个半波片，出射光均为圆偏振光，再让两束光干涉，发现当两个半波片的快轴夹角为 θ 时，干涉条纹会发生相位差 2θ 的移动。换句话说，光经过快轴（与实验室基轴的，例如 x 轴）夹角为 θ 的半波片后，获得了一个额外的相位 2θ 。

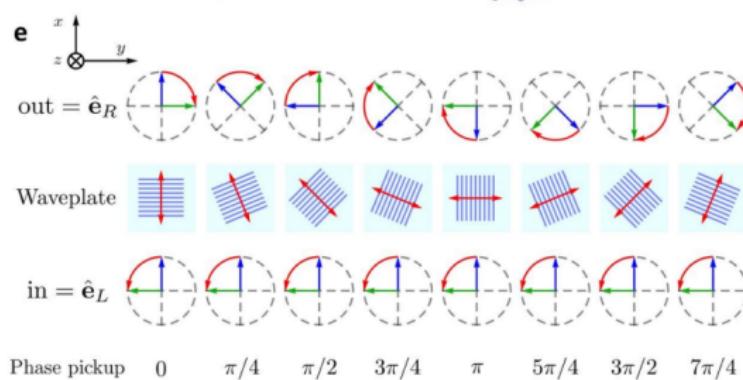


图 1: Pancharatnam 的实验示意图

复习：光的偏振状态

考虑一束完全偏振单色平面光波， $\mathbf{E} = \tilde{E}_x e^{ikx-i\omega t} \hat{\mathbf{e}}_x + \tilde{E}_y e^{iky-i\omega t} \hat{\mathbf{e}}_y$ ，其偏振状态可用琼斯矢量 $(\tilde{E}_x, \tilde{E}_y)^T = (E_x e^{i\phi_x}, E_y e^{i\phi_y})^T$ 表示。一般使用归一化的琼斯矢量，之后我们用量子力学里的右矢 $|\varphi\rangle$ 表示。

例如，水平和垂直方向的线偏振光可表示为 $(1, 0)^T$ 和 $(0, 1)^T$ ，对角和反对角方向的线偏振光可表示为 $(1, 1)/\sqrt{2}$ 和 $(1, -1)/\sqrt{2}$ ，圆偏振光可表示为 $(1, i)^T/\sqrt{2}$ （左旋）或 $(1, -i)^T/\sqrt{2}$ （右旋）。

波动光学的解释：来源于两次投影

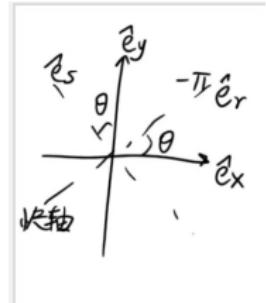


图 2: 坐标系示意

Pancharatnam 的实验可以用波动光学的方法解释。如图，设入射光为左旋圆偏振光，经过快轴与 x 轴夹角为 θ 的半波片

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x + i\hat{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} (\hat{e}_r + i\hat{e}_s)$$

$$|O\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \left(\hat{e}_r + i e^{i\delta} \hat{e}_s \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2i\theta} (\hat{e}_x - i\hat{e}_y) \quad (\delta = \pi \text{半波片})$$

Pancharatnam-Berry 相位的提出

Pancharatnam 提出，如果用庞加莱球表示光束偏振态，上述结果的表述会简单很多。当偏振态沿着庞加莱球上的一个闭合路径演化后，偏振态会获得一个额外的相位，这个相位等于闭合路径所包围的立体角的一半。后来，贝利（M.V. Berry）1987 年在量子力学发现 Berry 相位同时，发现 Pancharatnam 相位也是一种几何相位，它揭示了光的偏振态在参数空间中的几何性质，对理解光学现象具有重要意义。

为了理解庞加莱球，下面将首先介绍斯托克斯参量，椭圆度和取向角的概念。

斯托克斯参量

除了琼斯矢量外还可使用斯托克斯参量表示偏振状态（和光强），它是实验友好的，并且可以描述非完全偏振光（例如，自然光）。

斯托克斯参量

$$S_0 = I_0$$

$$S_1 = I_H - I_V$$

$$S_2 = I_D - I_A$$

$$S_3 = I_L - I_R$$

其中， I_0 为总强度， I_H 、 I_V 、 I_D 、 I_A 、 I_L 、 I_R 分别为水平、垂直、对角（45 度）、反对角（135 度）、左旋和右旋偏振光的强度分量。

如果仅仅想表示偏振态，可使用与光强无关的归一化的斯托克斯参量

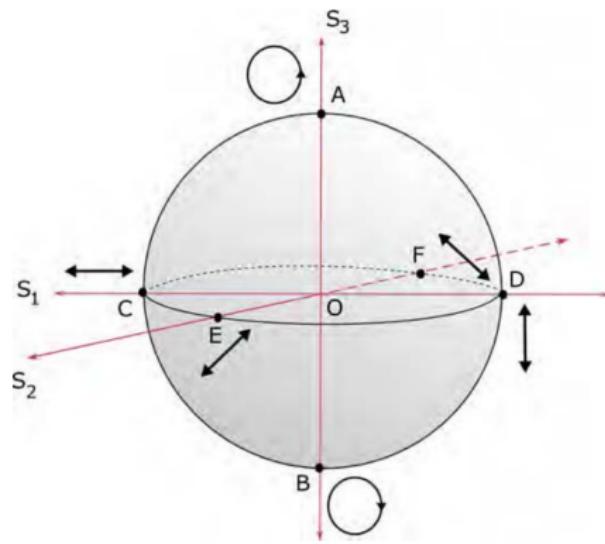
$$s_i = S_i / S_0 \quad i = 1, 2, 3,$$

对完全偏振光满足 $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ 。

对非完全偏振光， $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 < 1$ ，例如，自然光的归一化斯托克斯参量为 $(0, 0, 0)^T$ 。

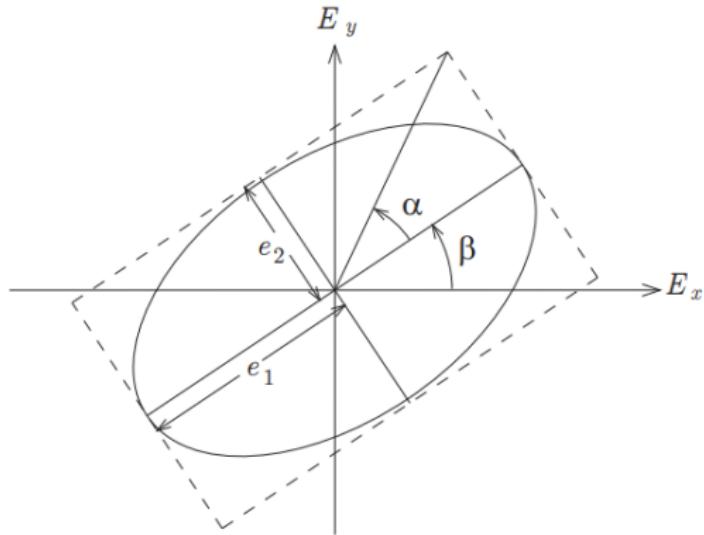
庞加莱球

使用归一化的斯托克斯参量 s_1, s_2, s_3 可将偏振态映射到庞加莱球表面上的一个点， (s_1, s_2, s_3) 即为该点的坐标。例如，北极点 $(0, 0, 1)$ 表示左旋圆偏振光，南极点 $(0, 0, -1)$ 表示右旋圆偏振光，赤道上的点表示线偏振光。非完全偏振光则映射到庞加莱球内部，例如，自然光映射到球心 $(0, 0, 0)$ 。



椭圆度和取向角

为了进一步认识庞加莱球上的点与偏振态之间的关系，引入椭圆度 α 和取向角 β 是有帮助的。椭圆度定义为 $\tan \alpha = \pm e_2/e_1$ ，其中 e_1 和 e_2 分别为偏振椭圆的长轴和短轴长度，取值 $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$ ，左旋偏振取正值，右旋偏振取负值。取向角 β 为偏振椭圆长轴与 x 轴的夹角，取值范围是 $0 \sim \pi$ 。



椭圆度和取向角与庞加莱球坐标的关系

可以证明：

椭圆度 α 和取向角 β 与庞加莱球坐标 (s_1, s_2, s_3) 的关系

$$s_1 = \cos 2\alpha \cos 2\beta$$

$$s_2 = \cos 2\alpha \sin 2\beta$$

$$s_3 = \sin 2\alpha$$

由此可见，庞加莱球的纬度角 2α 与椭圆度成正比，纬度角 0 度对应线偏振光，纬度角 $\pi/2$ 度对应左旋圆偏振光，纬度角 $-\pi/2$ 度对应右旋圆偏振光；经度角 2β 与取向角成正比，赤道上经度角 0 度对应 x 方向线偏振光，经度角 π 度对应 y 方向线偏振光。

Pancharatnam 的解释

回到 Pancharatnam 的实验，入射光为左旋圆偏振光，对应庞加莱球的北极点 $(0, 0, 1)$ 。经过快轴与 x 轴夹角为 θ 的半波片后，偏振态变为右旋圆偏振光，对应庞加莱球的南极点 $(0, 0, -1)$ 。在庞加莱球上，这一过程对应从北极点到南极点沿经度线移动了 π 弧度。中间状态为

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \left(\hat{e}_r + i e^{i\delta} \hat{e}_s \right) \quad 0 \leq \delta \leq \pi$$

椭圆度 $\alpha = \pi/4 - \delta/2$ 与 θ 无关，取向角 $\beta = \theta - \pi/4$ 与 δ 无关，对应庞加莱球上经度角为 $2\theta - \pi/2$ 的点。

根据几何相位的定义，偏振态沿闭合路径演化后获得的几何相位等于闭合路径所包围的立体角的一半。对两个快轴夹角 $\Delta\theta$ 的半波片，闭合路径由北极点、南极点和两条经度线构成，所包围的立体角为 $4\Delta\theta$ ，几何相位为 $2\Delta\theta$ ，与之前结果一致。

Pancharatnam 相位就是几何相

1987 年，Berry 发现 Berry 相位的同时意识到 Pancharatnam 相位也是一种几何相位，并且可以用量子力学语言解释。在他的原始论文中，Berry 设置归一化琼斯矢量为 $\mathbf{d} = (d_x, d_y)^T$ ，引入归一化二分量旋量 $|\varphi\rangle = (\varphi_+, \varphi_-)^T$ ，其中 $\varphi_{\pm} = (d_x \pm id_y)/\sqrt{2}$ 。他使用一个厄米矩阵 $H(r)$ 来表示庞加莱球上的点 r （球坐标 θ, ϕ ）。

$$H(r) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$H(r_A)$ 的本征值是 $\pm 1/2$ ，正本征值对应的归一化本征态就是庞加莱球上点 r_A 对应的偏振态的旋量表示，记为 $|A\rangle$ 。

$$H(r_A) |A\rangle = \frac{1}{2} |A\rangle$$

我们可以类比成一个自旋 $1/2$ 粒子， $|A\rangle$ 表示自旋沿 r_A 方向的自旋本征态。

Aharanov-Anandan 相位

Berry 相可以去掉绝热假设，推广到更普适的情形：A-A 相位。

The states of a quantum system are usually described as being represented by vectors of norm 1 ($|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1$) in a complex Hilbert space \mathcal{H} . However, there is redundancy in this description since the state $|\psi\rangle$ is physically indistinguishable from the state $e^{i\phi}|\psi\rangle$. It is therefore convenient to consider instead the projective space \mathcal{P} , in which vectors are grouped into equivalence classes under the relation $|\psi\rangle \sim re^{i\phi}|\psi\rangle$ for any $r > 0$ and real ϕ , thereby eliminating the ambiguity. The associated projection map is

$$\begin{aligned}\Pi : \quad \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{P} \\ |\psi\rangle &\mapsto [|\psi\rangle] = \{|\psi'\rangle : |\psi'\rangle = re^{i\phi}|\psi\rangle\}.\end{aligned}\tag{5}$$

If a system undergoes a cyclic evolution, the ket representing the system state traces out a path, $\mathcal{C} : [0, \tau] \longrightarrow \mathcal{H}$, where $\Pi(\mathcal{C})$ is a closed curve in \mathcal{P} , as illustrated in Figure 1. In other words, the initial and final states should be on the same ray in \mathcal{H} , but may be related by a phase, $e^{i\phi}$. We will measure this phase with respect to a reference curve in \mathcal{H} : for each point $|\psi(t)\rangle$ on \mathcal{C} , we can choose a smoothly varying representative $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ from $\Pi(\psi(t))$ in such a way that $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |\tilde{\psi}(\tau)\rangle$. We can then write

$$|\psi(t)\rangle = e^{if(t)} |\tilde{\psi}(t)\rangle\tag{6}$$

so that the phase change of $|\psi(0)\rangle$ associated with the cyclic evolution is given by $\phi = f(\tau) - f(0)$.

图 5: 射影空间

The time evolution of a quantum system is governed by the Schrödinger equation,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (7)$$

where $H(t)$ is the Hamiltonian. Substituting Eq. (6) into the above, rearranging and multiplying by $\langle\psi(t)|$ gives the following [25],

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle + i \left\langle \tilde{\psi}(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \tilde{\psi}(t) \right\rangle, \quad (8)$$

or, when integrated,

$$\phi = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle dt + i \int_0^\tau \left\langle \tilde{\psi}(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \tilde{\psi}(t) \right\rangle dt. \quad (9)$$

图 6: AA 相位推导

射影空间 \mathcal{P} 的闭合曲线 $\Pi(\mathcal{C})$ 积累的相位可分为动力学相位和几何相位, 前者与哈密顿量有关, 后者与哈密顿量无关。

$$\phi = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle dt$$

$$\gamma = i \oint_C \langle\tilde{\psi}|d|\tilde{\psi}\rangle$$

时间无关哈密顿量的几何相位

- 代入之前计算 A-A 相位的表达式，可得

$$\gamma = -\pi(1 - \cos \theta) \quad (80)$$

- 巧合的是，这个结果正好是我们构建的态矢随时间演化在球面上走过一圈立体角的-1/2 倍.
- 由此我们从几何角度解释了二能级系统中量子力学几何相的产生.

图 7: 球面上的几何相

GENERALIZED THEORY OF INTERFERENCE, AND ITS APPLICATIONS

Part I. Coherent Pencils

BY S. PANCHARATNAM

(*Memoir No. 88 of the Raman Research Institute, Bangalore-6*)

Received October 30, 1956

(Communicated by Sir C V. Raman)

§ 1. INTRODUCTION

THE investigations of which the results are presented in this paper arose during the study of certain specific problems in crystal optics. As investigators in this field are well aware, the simplest procedures for studying the optical properties of anisotropic media (e.g., examination under the polarising microscope) generally involve the use and study of polarised light. The complexity of the peculiar interference phenomena exhibited and also of their customary theoretical analysis (by algebraic methods) become quite considerable even in the case of transparent optically active crystals like quartz—as may be seen by a reference to the treatises of Mascart (1891) and Walker (1904); this is because the two waves propagated along any direction in such a medium are no longer linearly polarised at right angles to one another, but are elliptically polarised. Nevertheless, the types of ‘oppositely’ polarised waves propagated in such media must be termed simple compared to the elliptically polarised waves propagated in *absorbing biaxial crystals*.

The remarkable interference phenomena exhibited by absorbing biaxial

基于几何相位超表面的光波前调制

设计一个由快轴取向 $\theta(x, y)$ 随空间变化的半波片组成的超表面，左旋和右旋偏振光通过该超表面后分别获得 $+2\theta(x, y)$ 和 $-2\theta(x, y)$ 的相位调制，从而实现对波前的调节。三种典型的相关现象如下：第一种是线性梯度几何相位超表面，可以使电磁波发生自旋依赖的奇异偏折，即光子自旋霍尔效应；第二种是抛物线梯度几何相位超表面，可使电磁波发生聚焦，用来设计平面超透镜；第三种是螺旋线梯度几何相位超表面，能使电磁波的自旋角动量转换为轨道角动量，即产生涡旋光。

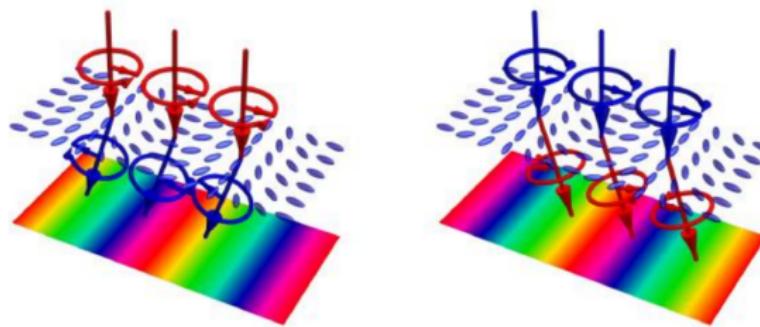
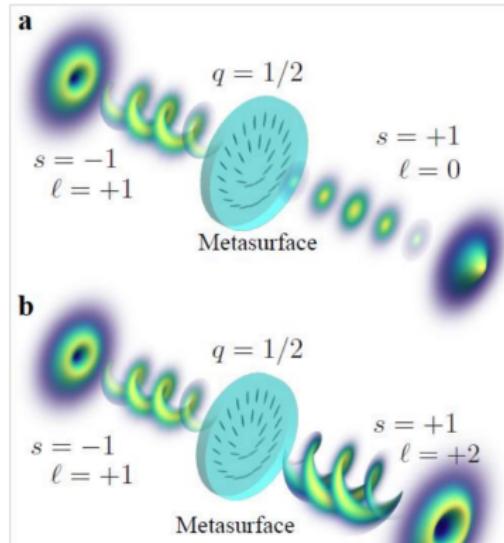


图 9: Pancharatnam-Berry 相位超表面示意图

携带轨道角动量（OAM）的光束

一类特殊的波前整形技术，携带轨道角动量（OAM）的光束，其具有 $\exp(il\phi)$ 形式的螺旋相位， l 是整数， ϕ 是方位角，表示该光束每个光子携带 $l\hbar$ 的轨道角动量。设计一个快轴取向 $\theta(\phi) = l\phi/2$ 的超表面，入射的左旋圆偏振光经过该超表面后获得 $+l\phi$ 的相位调制，变为携带轨道角动量 l 的右旋圆偏振光。上述过程可以视为发生了光子的自旋轨道耦合，实现了自旋和轨道角动量的转换。



实现量子随机游走

上述自旋轨道耦合可以应用在量子模拟中实现量子随机游走，这里的硬币是自旋，位置是轨道角动量态。设计一个快轴取向 $\theta(\phi) = -\phi/2$ 的超表面，入射的左旋圆偏振光经过该超表面后变为轨道角动量 -1 的右旋圆偏振光，入射的右旋圆偏振光经过该超表面后变为轨道角动量 $+1$ 的左旋圆偏振光。如果入射一个线偏振光（自旋量子叠加态），通过反复使用该超表面和波片，在每次出射后加一个 $1/4$ 波片，可以实现量子随机游走。

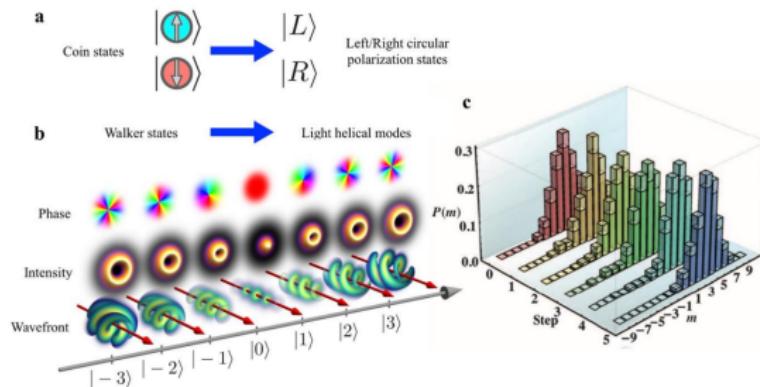


图 11: 量子随机游走示意图

目录

① Pancharatnam-Berry 相位

② 几何量子计算

③ 总结

几何量子计算

量子计算的优越性体现在它利用了量子系统与经典体系的两个本质差别：量子态的叠加及纠缠，但是这两个人性都很脆弱，很容易被称为消相干的过程破坏掉。几何量子计算是一种利用几何相位实现量子逻辑门操作的量子计算策略，由于几何相位仅依赖于系统参数空间中的路径拓扑性质，而与演化的具体时间无关，因此具有较强的鲁棒性，能够有效抵抗某些类型的噪声和误差。

可容错的普适量子门已被证明可用几何相位来实现，量子门可表示为一个幺正算符 $U(\{\beta\})$ ，其中 $\{\beta\}$ 是一组在实现量子门操作中积累的相位，通常每一个相位 β 都包含一个动力学部分和一个几何部分。如果只包含几何部分，则该量子门称为几何量子门。

几乎所有的量子计算模型，如核磁共振，腔 QED，离子阱和超导量子比特等，都在被研究用来做几何量子计算。

量子计算基本概念 I

一个比特是一个量子系统，由 2 个正交归一量子态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 张成，一个量子逻辑门是一个对选定的量子比特执行幺正变换的设备。阿达马门 (Hadamard gate)，相移门 ϕ 定义为

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

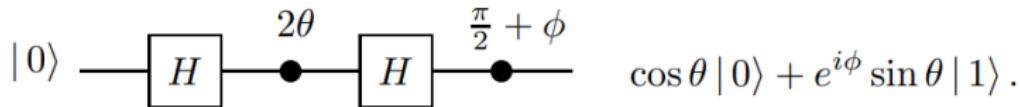


图 12: 阿达马门和相移门足够构建完备的单比特量子逻辑门

量子计算基本概念 II

矩阵基底为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, 这两个门足以构建完备的单比特量子逻辑门。拓展到多比特系统, 还需要 1 个受控相移门 $B(\phi)$

$$B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

其中矩阵基底为 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 。

量子计算理论的 1 个重要定理是, 借助上述阿达马门和受控相移门, 足以构建任意的 n 比特量子逻辑门, 需要的门数量 $\sim O(4^n n)$

下面我们将尝试构建比特和双比特的几何受控相移门。

单比特演化

现在考虑一个单比特系统在一个平凡的哈密顿量下的演化，考虑到密度算符 ρ 的厄米性和迹为 1，可将其一般地表示为

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_z & s_x - i s_y \\ s_x + i s_y & 1 - s_z \end{pmatrix}$$

其中实向量 $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ 被称为布洛赫矢量，类似地 1 个平凡的哈密顿量可表示为

$$H = \frac{\hbar}{2} (\Omega_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

其中实向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 被称为拉比矢量，借助密度算符演化方程

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]$$

和公式

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{1} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

可得布洛赫矢量的演化方程

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}$$

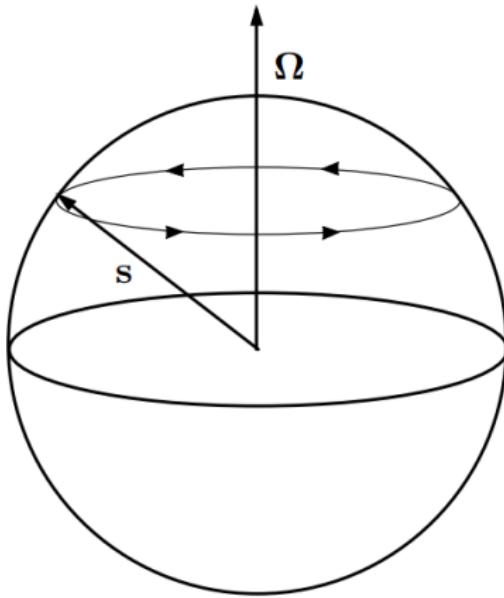


图 13: 单比特系统演化

在量子计算中，哈密顿量常常是周期性的（一个恒定的强场叠加一个振荡的微扰场），借助旋转波近似（RWA），可以将哈密顿量写为

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i(\omega t + \phi)} \\ \omega_1 e^{i(\omega t + \phi)} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

其中 ω_0 是系统跃迁角频率（由强场决定）， ω 和 $\hbar\omega_1$ 是旋转场的角频率和耦合强度，这给出拉比矢量具体形式

$$\Omega_x = \omega_1 \cos(\omega t + \phi), \quad \Omega_y = \omega_1 \sin(\omega t + \phi), \quad \Omega_z = \omega_0$$

在绕 z 轴旋转 ω 的参考系下求解是方便的

In order to solve Eq. (17) it is convenient to consider the evolution of \mathbf{s} in a frame which rotates with frequency ω around the z -axis. More precisely, we write

$$\mathbf{s}(t) = R_z(\omega t)\mathbf{s}'(t), \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = R_z(\omega t)\boldsymbol{\Omega}'(t), \quad (20)$$

where $R_z(\omega t)$ is the rotation matrix

$$R_z(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\omega t M_z), \quad (21)$$

for

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Substituting Eq. (20) into Eq. (17) and taking into account that

$$\frac{d}{dt} R_z(\omega t) = R_z(\omega t)(\omega M_z), \quad M_z \mathbf{s}' = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{s}', \quad (23)$$

where $\hat{\mathbf{z}}$ is a unit vector in the z -direction, we obtain

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}' = \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{s}' \quad (24)$$

with the time-independent vector $\boldsymbol{\Omega}'$,

$$\Omega'_x = \omega_1 \cos(\phi), \quad \Omega'_y = \omega_1 \sin(\phi), \quad \Omega'_z = \omega_0 - \omega. \quad (25)$$

图 14:

最终我们得到在旋转参考系下布洛赫矢量的演化方程为

$$\frac{d\mathbf{s}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{s}'$$

其中拉比矢量不含时

$$\Omega'_x = \omega_1 \cos \phi, \quad \Omega'_y = -\omega_1 \sin \phi, \quad \Omega'_z = \omega_0 - \omega$$

控制耦合强度 ω_1 , 频率 ω 和相位 ϕ , 即可制备任意的 $\boldsymbol{\Omega}'$, 控制单比特系统在布洛赫球上的运动轨迹, 从而实现量子逻辑门操作。

绝热演化积累几何相位

从 0 开始绝热地增加外场, ω_1 从 0 开始逐渐增加, 如果初始 s' 沿着 z 方向, 之后将跟随 Ω' 绝热地在布洛赫球上运动。

$$\cos \theta = \frac{\Omega'_z}{|\Omega'|} = \frac{\omega_0 - \omega}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}}$$

随后绝热地改变 Ω' 的相位 ϕ , s' 将在布洛赫球沿着经线转圈, 每圈积累的几何相位就是扫出的立体角的一半

$$\gamma = -\pi(1 - \cos \theta)$$

自旋回波

但是这里是有动力学相位的影响，无法实现完全几何受控相移门
自旋回波技术通过反向转圈的方式消除了动力学相位的影响：

$$|\tilde{\uparrow}\rangle \xrightarrow{C_{\uparrow}} e^{i(\delta_{\uparrow}-\gamma)} |\tilde{\uparrow}\rangle \xrightarrow{\pi} e^{i(\delta_{\uparrow}-\gamma)} |\tilde{\downarrow}\rangle \xrightarrow{\bar{C}_{\downarrow}} e^{i(\delta_{\uparrow}+\delta_{\downarrow}-2\gamma)} |\tilde{\downarrow}\rangle \xrightarrow{\pi} e^{i(\delta_{\uparrow}+\delta_{\downarrow}-2\gamma)} |\tilde{\uparrow}\rangle$$

$$|\tilde{\downarrow}\rangle \xrightarrow{C_{\downarrow}} e^{i(\delta_{\downarrow}+\gamma)} |\tilde{\downarrow}\rangle \xrightarrow{\pi} e^{i(\delta_{\downarrow}+\gamma)} |\tilde{\uparrow}\rangle \xrightarrow{\bar{C}_{\uparrow}} e^{i(\delta_{\downarrow}+\delta_{\uparrow}+2\gamma)} |\tilde{\uparrow}\rangle \xrightarrow{\pi} e^{i(\delta_{\uparrow}+\delta_{\downarrow}+2\gamma)} |\tilde{\uparrow}\rangle$$

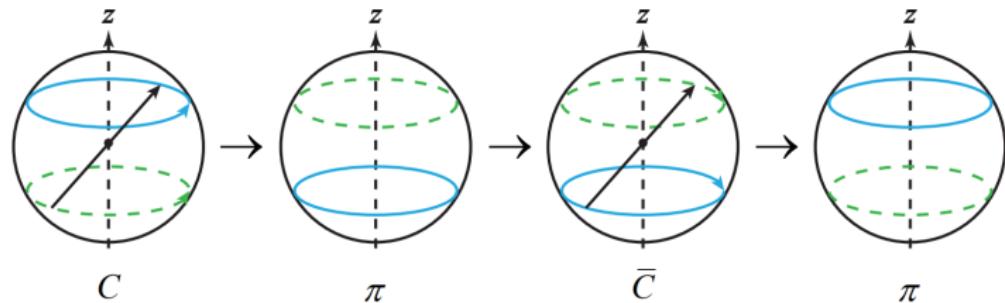


图 15：自旋回波示意，其中蓝色实线表示初态是 $|\uparrow\rangle$ ，绿色虚线表示初态是 $|\downarrow\rangle$

2 粒子系统-忽略相互作用

考虑一个外场中的由 2 个无相互作用 $1/2$ 自旋粒子组成的系统，哈密顿量为

$$H_0 = \hbar\omega_a S_{az} \otimes \mathbf{1}_b + \hbar\omega_b \mathbf{1}_a \otimes S_{bz}, \quad (29)$$

在 $\{|S_{az}, S_{bz}\}_{S_{az}, S_{bz}} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ 下矩阵形式

$$H_0 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_a + \omega_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_a - \omega_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_a + \omega_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_a - \omega_b \end{pmatrix}, \quad (30)$$

其中 ω_a 和 ω_b 是 2 粒子在外场中的跃迁角频率， $S_i = \sigma_i/2$ ，假设 $\omega_a > \omega_b$

2 粒子系统-考虑相互作用

如果 2 个粒子足够接近，需要考虑它们的自旋产生的相互作用，自旋平行会相互排斥，反平行会相互吸引。哈密顿量可写为（引入耦合强度 J ）

$$H = H_0 + 2\pi\hbar JS_{az} \otimes S_{bz}$$

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_a + \omega_b + \pi J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_a - \omega_b - \pi J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_a + \omega_b - \pi J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_a - \omega_b + \pi J \end{pmatrix}$$

实现条件相移

由于自旋间相互作用，自旋 S_a 的跃迁频率 ω 取决于自旋 S_b 的状态

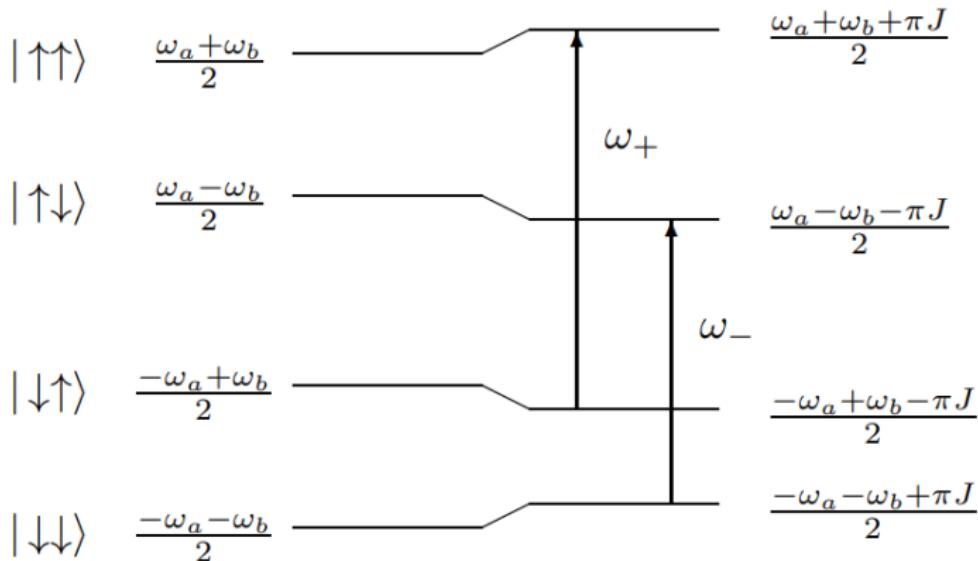


图 16: 第 1 个粒子的跃迁频率取决于第 2 个粒子

$$\omega_+ = \omega_a + \pi J, \quad \omega_- = \omega_a - \pi J$$

实现条件相移门

视第 2 个粒子自旋不同, 第 1 个粒子通过之前的环绕过程获得的几何相位也会不同, 规定下面的 4 次环绕消去动力学相位影响

$$\mathcal{C} \longrightarrow \pi_a \longrightarrow \bar{\mathcal{C}} \longrightarrow \pi_b \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \pi_a \longrightarrow \bar{\mathcal{C}} \longrightarrow \pi_b,$$

转移矩阵, 至多相差 1 个全局相因子, 可写为

$$\begin{pmatrix} e^{2i\Delta\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\Delta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\Delta\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i\Delta\gamma} \end{pmatrix}$$

其中 $\Delta\gamma = \gamma_+ - \gamma_-$, 该受控相移门可证明与一开始引入的形式等价

几何相位 γ 天然就具有高的鲁棒性，它只跟环绕的路径几何形状相关，此外它取决于失谐量 $\omega_a - \omega$ 和振荡场的幅值 ω_1 ，在许多情况下，例如核磁共振（NMR），失谐量比较容易控制，幅值比较难控制。下图给出了不同的失谐量和幅值下的差分几何相位 $\Delta\gamma$

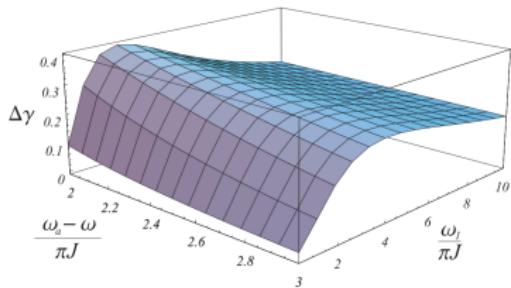


图 17：几何相位差分 $\Delta\gamma$ 作为 $(\omega_a - \omega)/\pi J$ 和 $\omega_1/\pi J$ 的函数

对固定的失谐量 $\omega_a - \omega$ ，选取峰值位置处的幅值 ω_1 ，可以使相位差关于 ω_1 的误差二阶敏感，具有更强的鲁棒性。

目录

- ① Pancharatnam-Berry 相位
- ② 几何量子计算
- ③ 总结

总结

- ① Pancharatnam 发现，光束偏振态在庞加莱球上沿一个闭合环路一圈，会改变 1 个相位，相位等于闭合环路包围的立体角的一半，Berry 证明了 Pancharatnam 就是他刚刚发现的几何相。Pancharatnam-Berry 相位可用于超表面改变波前相位，实现各种光学功能。
- ② 几何量子计算是一种利用几何相位实现量子逻辑门操作的量子计算策略，其已被证明可应用于各种常见的量子计算实现环境，由于几何相位仅依赖于系统参数空间中的路径拓扑性质，它天生就具有比较好的鲁棒性。

参考文献

- ① Cohen, E., Larocque, H., Bouchard, F., Nejadsattari, F., Gefen, Y., & Karimi, E. (2019). Geometric phase from Aharonov-Bohm to Pancharatnam-Berry and beyond. *Nature Reviews Physics*, 1(7), 437–449.
- ② 冯娟, 王波, & 陈险峰. (2023). 微纳光学中的光子自旋霍尔效应. *光学学报*, 43(16), 1623003.
- ③ Ekert, A., Ericsson, M., Hayden, P., Inamori, H., Jones, J. A., Oi, D. K. L., & Vedral, V. (2000). Geometric quantum computation. *Journal of Modern Optics*, 47(14-15), 2501–2513.
- ④ Zhang, J., Kyaw, T. H., Philipp, S., Kwek, L.-C., Sjöqvist, E., & Tong, D. (2023). Geometric and holonomic quantum computation. *Physics Reports*, 1027, 1–53.

谢谢!