答疑 线下 南431　　成绩 作业30% 期中30% 期末40%.

最小作用量原理　真实路径是使作用量取极小值的路径.　$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt.$

规定 t_1 时刻A点、和 t_2 时刻B点，所有可能路径中，真实路径S极小。

量子渊源：费曼路径积分　$P=\sum_{路径}\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$　真实路径即相干路径.

变分法　一般的泛函　$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}dx\,F(y,y',x).$

$$\delta y'=\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\delta y$$

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}dx\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)=\int_{x_0}^{x_1}dx\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\,dx.$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx.$$

$$\delta J=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\quad(E\text{-}L方程).$$

***.

完整约束　形如 $f(\vec{r},t)=0$ 形式，与速度无关。（如 几何约束）.

半完整约束　可以转化为完整约束

运动约束　涉及系统运动情况.

引入新的代数方法（外代数）　$dxdy$ 改为外积(wedge) $dx\wedge dy$. 外积满足反交换 ~~dx∧dy = -dy~~

$dx\wedge dy=-dy\wedge dx.$　$dx\wedge dx=0$

坐标变换 $x,y\to x',y'.$

$$dx\wedge dy=\left(\frac{\partial x}{\partial x'}dx'+\frac{\partial x}{\partial y'}dy'\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial x'}dx'+\frac{\partial y}{\partial y'}dy'\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}-\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}\right)dx'\wedge dy'$$

即雅可比行列式. 推广到 n 元函数，积分元 $dx^1dx^2\cdots dx^n$

改写为 $dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$.

将被积函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 与 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 乘在一起，称为n重微分形式（n-形式）

记为 ω.

$$\omega=f(x^1,\cdots,x^n)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

n元函数的n重积分　$A=\int\omega.$

对于n个变量情形，将n-形式的概念推广到k-形式 $(0\le k\le n)$，记为 α.

k-形式 $\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ （使用求和约定）.

以2-形式为例，$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$. 要求 α_{ij} 关于 i, j 反对称.（外积反对称要求）.
对 k-形式，要求 $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 关于 k个指标两两反对称.（全反对称）.

对于3维空间，有 0,1,2,3 四种微分形式.

0-形式 → 3元标量函数　1-形式 → $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ 构成三维矢量.

2-形式 → $a = a_{12} dx \wedge dy + a_{23} dy \wedge dz + a_{31} dz \wedge dx$.

定义映射 $dx \wedge dy \to dz$　$dy \wedge dz \to dx$　$dz \wedge dx \to dy$，可建立 2-形式与 1-形式间一一映射关系，即 2-形式类似于3维空间矢量微元（面积矢量 $d\vec{S}$）

3-形式　只有1个独立非0分量　$f(x,y,z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

对于微分形式，引入微分运算，称为外微分

考察 2维空间中1-形式 $a = a_x dx + a_y dy$，对 a 进行外微分 da

$$da = da_x \wedge dx + da_y dy$$
$$= (\partial_x a_x dx + \partial_y a_x dy) \wedge dx + (\partial_x a_y dx + \partial_y a_y dy) \wedge dy$$
$$= (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\, dx \wedge dy$$

得到 1个 2-形式，且分量为 2维矢量 a 的旋度.

对 3维空间中 1-形式 $a = \vec{a} \cdot d\vec{x}$ 外微分 da 的3个分量为 $\vec{a}$ 的旋度 $\nabla \times \vec{a}$，da 是 2-形式

即 $da = (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$.

即可写出 3维斯托克斯公式　$\cancel{\oint_{\partial D} \vec{a} \cdot d\vec{x}}$ $\oint_{\partial D} a = \int_D da$.

对3维空间中2-形式 $a = a_{12} dx \wedge dy + a_{23} dy \wedge dz + a_{31} dz \wedge dx$，

$da = (\nabla \cdot \vec{b})\, dx \wedge dy \wedge dz$，　$\vec{b} = (a_{23}, a_{31}, a_{12})$.

即写出高斯定理 $\oint_{\partial V} \vec{b} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{b}) dV \to \oint_{\partial V} a = \int_D da$.

推广到n维空间 k-1 微分形式 α，$d\alpha$ 是一个 k-形式，可以证明，~~对于~~
仍然有　$\oint_{\partial D} a = \int_D da$.　（广义的斯托克斯公式）

定理 1.　1-形式 $\omega = A(x,y,t)\, dx + B(x,y,t)\, dy + C(x,y,t)\, dt$.　不等价于 ω 可取为全微分.

约束 $\omega = 0$ 可积的充要条件（~~即 ω 可取为全微分~~）为 $\omega \wedge d\omega = 0$.

定理 2.　若力学系统同时存在 n个可以化为1-形式的约束，记为 ω_i $(i = 1, \cdots, n)$.

约束方程可以化为完整约束充要条件为 $\Omega\wedge d\omega_i=0$ $i=1,\cdots,n$.

其中 $\Omega=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$

性质 $d^2=0$ 即对 $\forall$ k-1 阶形式 α，有 $d^2\alpha=d(d\alpha)=0$ （系数指标对称，外积指标反对称）

$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2-\omega_1\wedge d\omega_2$. （原因：外积的反对称性）

定理1 等价于 $\vec{x}\cdot(\nabla\times\vec{x})=0$ 其中 $\vec{x}=(A,B,C)$. 形如 $f(x,y,t)dx+g(x,y,t)dy=0$ 一定可积.

***

定常约束（稳定约束）：若约束方程不显含时间.

约束方程取等号，称为不可解约束或双侧约束，取不等号 ⇒ 可解约束，单侧约束.

自由度 系统由 N 个坐标描述，存在 m 个完整约束，只剩下 $s=N-m$ 个独立坐标，称 s 为自由度。

称一组互相独立且能~~完~~唯一确定系统位形的参数 q 为广义坐标.

在完整约束下，有经典拉格朗日关系. $u_i=u_i(q_1,\cdots q_s,t)$ $\dot{u}_i=\dot{u}_i(q;\dot{q};t)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\dot{u}_i}{\partial\dot{q}_k}=\dfrac{\partial u_i}{\partial q_k}.\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial q_k}\right)=\dfrac{\partial\dot{u}_i}{\partial q_k}.\end{cases}$$

若除了 m 个完整约束，还有 K 个非完整约束（不能减少独立坐标个数），但减少独立速度分量个数，称剩独立速度分量个数为力学系统在无穷小运动中的自由度。

***

虚位移 在给定固定时刻所允许的符合约束的假想的无限小位移，记为 δr_i.

$$\delta r_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\delta q_k.$$

注意，一般情况下实位移不是虚位移中的一个，除非约束都是稳定的。

虚位移数学上对应变分。~~函数变~~

函数变化分2种情形：① 由自变量变化引起，记为 $d\varphi$. ② 由函数形式变化引起，记为 $\delta\varphi$.

两种同时存在，记为全变化。 $\Delta\varphi=d\varphi+\delta\varphi=\delta\varphi+\dfrac{d\varphi}{dx}\Delta x$.

约束对虚位移限制

完整约束 $f_j(\vec{r},t)=0$ $\dfrac{\partial f_j}{\partial r_i}\delta r_i=0$ （采用求和约定）. $\dfrac{\partial f_j}{\partial q_i}\delta q_i=0$.

线性非完整约束 $B_{jk}\dot{q}_k + B_{j0} = 0 \Rightarrow B_{jk}\delta q_k = 0$.

定理 (Hertz - Hölder原则) 变分 δq_k 满足的关系，可以由微分约束中去掉 dt 项，并用 δq_k 代替 dq_k 得到。适用于完整约束和线性非完整约束。(不能推广到一般非完整)

***

理想约束　如果约束施加在系统各点中的约束反力所做虚功之和为0.

虚功原理　理想约束下力学系统处于平衡状态的必要条件为作用在系统上的主动力在约束允许的虚位移下虚功之和为0. 即 $\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$.

若约束为完整定常约束，则该条件也是充分的。

充分性证明：假设第i个质点受力不平衡，$\vec{F}_i + \vec{R}_i \neq 0$. dt 内位移 $d\vec{r}_i$，且初始体系静止，则有 $(\vec{F}_i+\vec{R}_i)\cdot d\vec{r}_i > 0$. 对所有质点 $\sum_i(\vec{F}_i+\vec{R}_i)\cdot d\vec{r}_i > 0$.

由约束完整定常 $\Rightarrow d\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i$　则有 $\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i > 0$ 与前提矛盾.

~~平衡位置稳定性~~　$\delta^2 W < 0$ 稳定　$\delta^2 W > 0$ 不稳定

达朗贝尔原理　~~综合~~在理想约束下所有时刻主动力和惯性力在系统任何虚位移下所做虚功之和为0　即 $\sum_i(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$.　不要求完整定常约束。

~~平衡是假想的，因此条件是必要的，不要求稳定约束~~。

*** ~~势系统受力~~

系统受完整约束时，$\delta\vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$　$\sum_{i,k}\left(\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} - m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0$.

引入广义力 $Q_{k,i} = \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$.　第二项 $\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}\right) - \dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i^2}{\partial\dot{q}_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_k}$$

结合得到 $\sum_k\left\{Q_k - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\right\}\delta q_k = 0$.　　$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2$.

$Q_k = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$.

考虑 q_k 独立性得 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$ (拉格朗日方程)　　可看出 $T = T(q,\dot{q},t)$.

有势系统的拉格朗日方程，$V = V(\vec{r},t) = V(q,t)$

理想完整约束下　$Q_k = \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$ (重复指标求和).

引入 $L = T - V$，得到 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$.　因为 $\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_k} = 0$.

假如系统受到有势力以外的力：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k$ → 非有势广义力

关于L ① A,B系统封闭独立，总系统 $L=L_A+L_B$ （L的可加性）

② 对L乘上一个系数不影响 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$. 结合①，L可以乘上一个公共的系数，代表物理度量单位的自然任意性.

③ L形式上有任意性，例如可以加一个常数.

一般地，作 $L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$

从最小作用量原理出发，$S'=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L'$ $S'-S=f(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2}$ 是一个常数.

***.

拉格朗日乘子法 适合于有约束系统下选取坐标不相互独立。~~例如非完整约束下~~。

引入 在约束 $g(x,y)=0$ 下寻找 $f(x,y)$ 极值点，要求 ∇f 与 ∇g 方向相同，即 $\nabla(f+\lambda g)=0$. λ是待定常数. 可见引入拉格朗日乘子相当于解除约束，在全平面寻找极值点.

~~问题：~~ 加一个约束 $g(q,t)=0$ （先考虑完整约束），

~~加入单~~ 最小作用量原理要求 $\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k=0$. 约束要求 $\frac{\partial g}{\partial q_k}\delta q_k=0$.

类比函数情形，这里要求 $\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)+\lambda\frac{\partial g}{\partial q_k}\right]=0$.

（即相当于s维空间中函数）

①若引入 l 个约束 $g_i(q,t)=0$ $i=1,\cdots,l$. $\frac{\partial g_i}{\partial q_k}\delta q_k=0$. 设自由度为N 约束把自由度限制在 $N-l$ 维空间中，与 $N-l$ 维空间正交的是个 l 维子空间，由矢量基 $\sum\lambda_i\left(\frac{\partial g_i}{\partial q_1},\frac{\partial g_i}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial g_i}{\partial q_N}\right)$ 给出。希望 $\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ 构成的矢量位于 l 维子空间中，即存在一组 $\{\lambda_i\}$ 使 $\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)+\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial q_k}=0$. 对 $\forall k$ 成立.

② 物理上分析，$\frac{d}{dt}p_k=\frac{\partial L}{\partial q_k}+\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial q_k}$ $R_k=\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial q_k}$ 为约束力.

③ E-L方程N个，约束方程l个，待解变量 q_k 与 λ_i 有 $N+l$ 个，即问题可解

④ 对静力学问题 令 $F_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$. $\Rightarrow$ $F_k+R_k=0$ $\left(R_k=\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial q_k}\right)$ 可解出约束力.

⑤ 注意：λ_i 是t的函数，~~不是~~一般情况不是常量！

问题：其他非完整约束是否可以用乘子法。

① 线性非完整约束 $A_{jk}\dot{q}_k+A_{j0}=0$ $\Rightarrow$ $A_{jk}\delta q_k=0$.

② 若非完整约束虚位移满足切塔耶夫条件 $\frac{\partial g_i}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k=0$. （①为②特例）.

$g(q,\dot{q},t)=0$.

其中 g_i 是 $q,\dot{q},t$ 函数

从泛函出发理解 l个约束条件 $g_i(q,t)=0$ 下最小作用量原理.

引入 l个参数 λ_i, 将拉氏量改写为 $L' = L + \lambda_i g_i$.

将 λ_i 视为广义坐标 $\Rightarrow$ $L'(q,\dot q,\lambda,t)$ 共有 N个 q坐标与 l个 λ坐标。

将 q和 λ 视为独立变量. $S \to S' = \int dt (L+\lambda_i g_i)$.

对 λ_i 做变分, $\dfrac{\partial(L+\lambda_i g_i)}{\partial \lambda_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(L+\lambda_i g_i)}{\partial \dot\lambda_i} = 0 \Rightarrow g_i = 0$.

对 q 做变分. $\dfrac{\partial L'}{\partial q_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot q_k} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \underbrace{\lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial q_k}}_{R_k} = 0$.

即约束条件和乘子法可以自然成立了。因此上述改写是~~合理~~有用的。

非完整约束? 线性非完整约束? 约束条件形如积分形式(等周约束)? ($\int_{t_1}^{t_2} dt\ g(q,t) = C$)

一般不能这样做!

等周约束 形如 $\int_{t_1}^{t_2} dt\ g(q,\dot q,t) = const.$ 型约束

约束条件可转化为 $\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\dfrac{\partial g}{\partial q_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g}{\partial \dot q_k}\right]\delta q_k = 0$. 的约束.

可以使用乘子法, $\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\left[\dfrac{\partial L}{\partial q_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right] + \lambda_i \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial q_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g_i}{\partial \dot q_k}\right]\right\}\delta q_k = 0$.

来解除约束

注意 λ_i 不是 t 的函数, 上式可等价于 $L \to L' = L + \lambda_i g_i$ 的改写.

***

广义势函数. $V(q,\dot q,t)$. 设 E-L方程仍成立, 即要求 $Q_k = -\dfrac{\partial V}{\partial q_k} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial \dot q_k}$

为保证广义力表达式不显含加速度, $V = V_k(q,t)\dot q_k + V_0(q,t)$ 只能包含 $\dot q_k$ 线性项.

则广义力也只能包含广义速度线性项 $Q_k(q,\dot q,t) = Q_{kl}(q,t)\dot q_l + Q_{k0}(q,t)$ (下面可看到原因)

得 $Q_k = \dfrac{dV_k}{dt} - \dfrac{\partial V_l}{\partial q_k}\dot q_l - \dfrac{\partial V_0}{\partial q_k} = \dfrac{\partial V_k}{\partial q_l}\dot q_l - \dfrac{\partial V_l}{\partial q_k}\dot q_l - \dfrac{\partial V_0}{\partial q_k} + \dfrac{\partial V_k}{\partial t}$

即 $Q_{kl} = \dfrac{\partial V_k}{\partial q_l} - \dfrac{\partial V_l}{\partial q_k} \quad Q_{k0} = \dfrac{\partial V_k}{\partial t} - \dfrac{\partial V_0}{\partial q_k}$.

能否找出 Q_{kl} 之间关系? (为了保证 V 存在)

把 V 改写成 1-形式 $\omega = \sum_{k=1}^{f} V_k dq_k + V_0 dt$. 有 ω 外微分

$$d\omega = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial V_k}{\partial q_l} - \frac{\partial V_l}{\partial q_k}\right) dq_l \wedge dq_k + \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial V_k}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_k}\right) dt \wedge dq_k.$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{f}\sum_{l=0}^{f} Q_{kl}\, dq_k \wedge dq_l.$$ 其中 $Q_{0k} = -Q_{k0}$ 以及 $q_0 = t$.

利用 $d^2\omega=0$，得出

定理（广义力有势条件）对形如 $a_k(q,\dot{q},t)=a_{kl}(q,t)\dot{q}_l+a_{k0}(q,t)$ 的广义力，存在广义势的必要条件，$\forall k,l,m=0,1,2,\cdots,f$ 均有

$$a_{kl}=-a_{lk} \quad 和 \quad \frac{\partial a_{km}}{\partial q_l}-\frac{\partial a_{lm}}{\partial q_k}=\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_m}$$

（或改写为轮换指标求和为0形式 $\varepsilon_{klm}\partial_k a_{lm}=0$.）

经典电磁学中，电荷为 e 电荷受力 $\vec{F}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$. 引入 $\vec{A}(\vec{r},t)$ $\vec{B}(\vec{r},t)$.

则 $\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ $\quad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$. $\quad \vec{F}=e[-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]$.

利用 $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$，得到

$\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$ 从而

$\vec{F}=e[-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}]$ 利用 $\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$，有

$\vec{F}=e[-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})]=-\nabla(e\phi-e\vec{v}\cdot\vec{A})+\frac{d}{dt}(-e\vec{A})$.

$=-\nabla U+\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{v}}U$ $\quad$ 其中 $U=U(q,\dot{q},t)=e\phi-e\vec{v}\cdot\vec{A}$.

****

变换：将两种情况通过确定规则对应起来.

对称性：如果一种现象或系统在某变换下不改变，称该现象或系统具有该变换所对应的对称性.

时间平移不变性 对应 能量守恒 →（运动方程）

考察力学系统，时间平移不变性意味着 L 不显含时间 t，运动方程在任意时刻相同.

考察孤立质点系 $L=\sum_i\frac{1}{2}m\vec{v}_i^2-V(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_i)$.

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i=\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}+\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)$$

定义 $E=\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-L$. 则 $\frac{dE}{dt}=0$ 即 E 是一个守恒量（此构造法可追踪至变分法 $F(x,y,y')$ 不含 x 情形下有守恒量）

广义动量 $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$ $\quad E=p_i\dot{q}_i-L=T+V$. 称为系统的能量积分 ~~广义能量~~

封闭系统+外场不显含时间的力学系统也适用上述推导，两种系统统称为保守系统.

空间平移不变性 对应 动量守恒

L 中不显含的广义坐标称为循环坐标（可遗坐标），其对应的广义动量守恒.

空间转动不变性 对应 角动量守恒

诺特定理 一个对称性对应一个守恒量.

考虑系统有 f 个自由度，广义坐标 $q_1,\cdots,q_f$. 变换有 r 个参量 $a_1,\cdots,a_r$. 一般地，变换后

广义坐标 $q_k'=U_k(q;a)=U_k(q_1,\cdots,q_f,a_1,\cdots a_r)$

显然有 $U_k(q;0)=q_k$ 考虑无穷小变换 $q_k'=q_k+\delta q_k$. 则 $\delta q_k=X_k^s\delta a_s$. $X_k^s=\left.\frac{\partial U_k}{\partial a_s}\right|_{a=0}$

存在逆变换 $q_k=\bar{U}_k(q',a)$. $\quad \delta L=\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i$

$\Rightarrow\delta L=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}X_i^j\delta a_j\right)=\delta a_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}X_i^j\right)$ 上面取等时变分，对称性有 $\delta L=0$.

据此得 $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}X_i^j$ 共 j 个守恒量.

推广1. 把时间考虑进来 $t'=V_0(t,q,a)$ $q_k'=V_k(t,q,a)$.

推广2. $\delta L=0$ 条件放宽，只要求 S 不变，δL 可以 $\neq 0$. $\Rightarrow \delta L=\frac{d}{dt}\delta\lambda$.

一般性的诺特定理

定义时间区间 $[t_0,t_1]$ 上的作用量. $t\to t'$ $q\to q'$. 考虑一般的变换后 $S=\int_{t_0}^{t_1}dt\,L=\int_{t_0'}^{t_1'}dt'L'$.

$S=\int_{t_0}^{t_1}L'\frac{dt'}{dt}dt$. ~~原则上~~则要求 $L(q,\dot q,t)=\frac{dt'}{dt}L'(q',\dot q',t')$ (对一般变换适用)

然后考虑对称性，要求变换前后 L 具有相同形式，按照两种方式指定 L' 的形式.

一种是 $L'(q,\dot q,t)=L(q,\dot q,t)$. 另一种是 $L'(q,\dot q,t)=L(q,\dot q,t)+\frac{d}{dt}\delta\lambda(q,t)$.

称第一种为对称性具有形式不变性，第二种为对称性具有形式协变性.

注意 $\delta\lambda$ 不是 $\dot q$ 函数，~~一般地~~无穷小下有 $\delta\lambda=\lambda^s\delta a_s$. 则

$$\left[L(q',\dot q',t')+\frac{d}{dt'}\delta\lambda(q',t')\right]\frac{dt'}{dt}=L(q,\dot q,t).$$

无穷小下 $\frac{dt'}{dt}=1+\frac{d}{dt}\delta t$. 得 $[L(q',\dot q',t')-L(q,\dot q,t)]+L(q',\dot q',t')\frac{d}{dt}\delta t+\frac{d}{dt}\delta\lambda(q',t')=0$

无穷小下 $\dot q_k'=\frac{dq_k'}{dt'}=\frac{d(q_k+\delta q_k)}{dt}\left(1-\frac{d}{dt}\delta t\right)\approx\dot q_k+\frac{d}{dt}\delta q_k-\dot q_k\frac{d}{dt}\delta t$.

一阶下得 $\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\left(\frac{d}{dt}\delta q_k-\dot q_k\frac{d}{dt}\delta t\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+L(q,\dot q,t)\frac{d}{dt}\delta t=-\frac{d}{dt}\delta\lambda(q,t)$. (*)

(*)式可用于判定变换是否为对称变换. 若等式左端可表示为时间全导项，则变换为对称变换.

代入E-L方程，$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta q_k-\dot q_k\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta t\right)+\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}\delta t}\ \frac{d}{dt}(L\delta t)=-\frac{d}{dt}\delta\lambda$.

因此 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta q_k-\dot q_k\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta t+L\delta t+\delta\lambda\right)=0$. 或写为 $p_k\delta q_k-E\delta t+\delta\lambda=const$.

下面写为分量形式，有 $p_kX_k^s-EX_0^s+\lambda^s$ 为守恒量

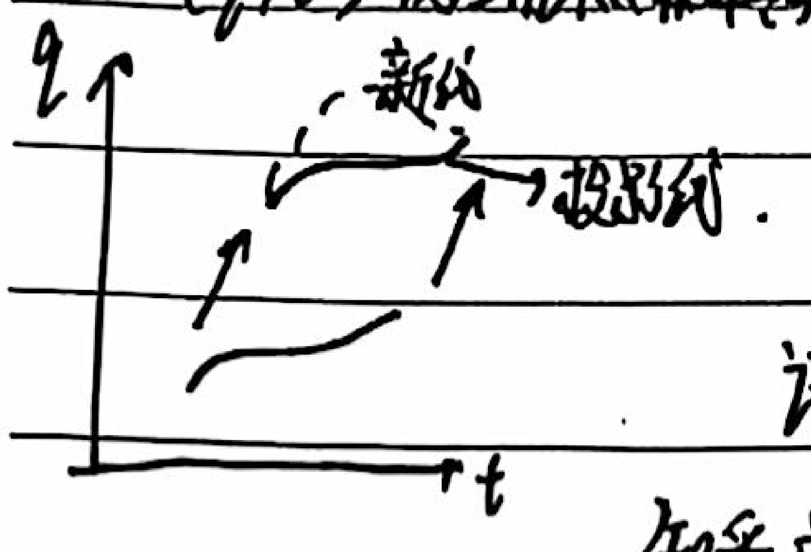
定理(诺特定理) 设有无穷小变换 $t'=t+X_0^s\delta a_s$, $q_k'=q_k+X_k^s\delta a_s$. a_s 为变换的 r 个参数.

若系统变换为理想保守系统的对称变换，则系统存在 r 个线性独立的初积分(守恒量)

形如 $p_kX_k^s-EX_0^s+\lambda^s=const$. 拉氏量在变换下满足 $\delta L=\frac{d}{dt}[\lambda^s(q,t)\delta a_s]$

注意若 $\frac{\partial t'}{\partial q}\neq 0$，$L'$ 与路径有关.

备注：$t'=t'(q,t)$ $q'=q'(q,t)$ 变换后，原运动相应地被投影(称为投影线)若认为变换中 L 形式不变，(q',t') 两端点和真实运动线称为新线 (即认为 L 是常映射).



要保证投影线是真实路线，就要改写 $L\to L'$. 可证明若 $L'(q',t')=L\frac{dt}{dt'}$

则变换后在投影线上做变分仍有 $\delta'S'=0$ 即投影线是真实的，此时

诺特定理表述为 L' 形式协变 → 有守恒量.

知乎文章 103841536 指出，也可认为 L 是常映射，此时新线才是真实路径

相应诺特定理表述为作用量变换后沿着投影线不变，即 $\delta S=S[q'(t')]-S[q(t)]=0$.

非惯性参考系。惯性系K中，质点 $L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-U$　设有K'系相对K以 $V(t)$.

K'系中，拉格朗日函数值不变 $L'=L$.　$L'=\frac{1}{2}m\vec{v}'^2+m\vec{v}'\cdot\vec{V}(t)+\frac{1}{2}m\vec{V}(t)^2-U$

1. 参考系变换或坐标变换中，拉格朗日函数值不变，则形式通常改变.

2. 对称变换中，先通过作用量不变性 $L'\frac{dt'}{dt}=L$　若不考虑时间的变换，则有 $L'=L$.

对称性要求 L 形式不变或协变

上面的 L' 可写为 $L'=\frac{1}{2}m\vec{v}'^2-m\vec{x}'\cdot\dot{\vec{V}}(t)-U$.

更一般情况，两参考系间既有平动又有转动。改用 K' 表示非惯性系，K为惯性系.

$\vec{v}'(t)=\vec{v}(t)+\vec{V}(t)+\vec{\omega}(t)\times\vec{r}$　非惯性系中，

$L=\frac{1}{2}m(\vec{v}+\vec{V}+\vec{\omega}\times\vec{r})^2-U$

得到 $m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}-m\frac{d\vec{V}}{dt}+m\vec{r}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt}+2m\vec{v}\times\vec{\omega}+m\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega})-m\vec{\omega}\times\vec{V}$

请注意，平动惯性力项为 $-m\frac{d\vec{V}}{dt}-m\vec{\omega}\times\vec{V}$.　因为 $\frac{d\vec{V}}{dt}$ 项为K'系中 $\vec{V}$ 变化率

力学相似性与尺度变换　L乘上常数因子不改变运动方程 若势能是k次齐次的，即 $V(\alpha r_1,\cdots,\alpha r_n)=\alpha^kV(r_1,\cdots,r_n)$.

引入变换 $r_a\to r_a'=\alpha r_a$.　$t\to t'=\beta t$.　$\vec{v}_a'=\frac{\alpha}{\beta}\vec{v}_a$.　$T'=\frac{\alpha^2}{\beta^2}T$

$V'=\alpha^kV$　　$L'=\frac{\alpha^2}{\beta^2}T-\alpha^kV$.　如果 $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\alpha^k$ 即 $\beta=\alpha^{1-k/2}$,

则 $L'=\alpha^kL$　　若 $r_a'=f_a(t')$　则有 $r_a=f_a(t)$.

所有质点坐标改变相同倍数 ⇒ 变换前后运动轨迹具有几何相似性.

$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}$.

维里定理　力学系统在有限空间中，势能是坐标的k次齐次函数 则动能和势能的时间平均值之间存在简单关系.

$2T=\sum_a\vec{p}_a\cdot\vec{v}_a=\frac{d}{dt}\sum_a\vec{p}_a\cdot\vec{r}_a-\sum_a\dot{\vec{p}}_a\cdot\vec{r}_a$　在无穷长时间下求平均，考虑 $\sum_a\vec{p}_a\cdot\vec{r}_a$ 有界性，有

$2\langle T\rangle=\sum_a\langle\vec{r}_a\cdot\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_a}\rangle=k\langle V\rangle$.　从而 $\langle T\rangle=\frac{k}{k+2}E$

$\langle V\rangle=\frac{2}{k+2}E$.

狭义相对论时空观下最小作用量原理

逆变四矢量　x^μ　$\mu=0,1,2,3$.　$x^0=t$ $x^1=x$ $x^2=y$ $x^3=z$

协变四矢量　x_μ　　$x_0=x^0$　$x_i=-x^i$　$i=1,2,3$

逆变、协变关系由度规矩阵 $g^{\mu\nu}$ (或 $g_{\mu\nu}$) 表示.

$x^\mu=g^{\mu\nu}x_\nu$　　$x_\mu=g_{\mu\nu}x^\nu$.

$g^{00}=g_{00}=1$　$g^{ii}=g_{ii}=-1$ $(i=1,2,3)$　非对角元为0

洛仑兹变换：$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$　　$\Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta&&\\-\gamma\beta&\gamma&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

$\Lambda^\mu{}_\nu=\Lambda^{\mu\nu'}g_{\nu'\nu}=g^{\mu\mu'}\Lambda_{\mu'\nu}$.

洛仑兹变换下，$t^2-\vec{x}^2$ 是不变量. $t^2-\vec{x}^2 = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$

$x^\mu x_\mu$ 不变性等价于变换 Λ 满足 $\Lambda^T G \Lambda = G$ $\quad G=[g_{\mu\nu}]$.

不变量：$g_{\rho\alpha}x^\rho x^\alpha = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \Lambda^\nu{}_\alpha x^\alpha \Rightarrow g_{\rho\alpha} = \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\alpha$.

$\Rightarrow \Lambda^T G\Lambda = G$

推论：任意 $A^\mu B_\mu$ 都是洛仑兹不变的，其中 A,B是四矢量，即 $A'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ $\quad B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$.

推广：所有满足 $\Lambda^TG\Lambda=G$ 的 4×4 矩阵的集合为洛仑兹矩阵.

$\det\Lambda = \pm1$. $\quad |\Lambda^0{}_0|\geq 1$. 可将洛仑兹矩阵分为4类

$\Lambda^0{}_0\geq 1$	$\det\Lambda = 1$	⇐ 惯性变换 (正常洛仑兹变换)
$\Lambda^0{}_0\geq 1$	$\det\Lambda = -1$	⇐ 空间反演
$\Lambda^0{}_0\leq -1$	$\det\Lambda = 1$	⇐ 时间反演
$\Lambda^0{}_0\leq -1$	$\det\Lambda = -1$	⇐ 时空反演.

特别地，对正常洛仑兹变换，$\Lambda^0{}_0=1$ 表示空间转动

正常洛仑兹变换 转动 + boost (推进)

3维下 $R_x = \begin{pmatrix}1&&\\&c_\theta&s_\theta\\&-s_\theta&c_\theta\end{pmatrix}$ $\quad R_y = \begin{pmatrix}c_\theta&&-s_\theta\\&1&\\s_\theta&&c_\theta\end{pmatrix}$ $\quad R_z = \begin{pmatrix}c_\theta&s_\theta&\\-s_\theta&c_\theta&\\&&1\end{pmatrix}$ 分别表示绕 x,y,z 转动.

以 R_x 为例，~~将~~ $R_x(\theta) = \begin{pmatrix}1&&\\&\cos\frac{\theta}{N}&\sin\frac{\theta}{N}\\&-\sin\frac{\theta}{N}&\cos\frac{\theta}{N}\end{pmatrix}^N \xrightarrow{N\to+\infty} \begin{pmatrix}1&&\\&1&\theta/N\\&-\theta/N&1\end{pmatrix}^N$ = ~~$(I+i\frac{\theta}{N})$~~

$= \left(I + i\frac{\theta}{N}J_x\right)^N$. $\quad J_x = -i\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&-1&0\end{pmatrix}$

$= e^{i\theta J_x}$

同理，引入 $J_y = -i\begin{pmatrix}0&&-1\\&0&\\1&&0\end{pmatrix}$ $\quad J_z = -i\begin{pmatrix}0&1&\\-1&0&\\&&0\end{pmatrix}$

且有 $[J_i,J_j]=i\epsilon_{ijk}J_k$

4维下有 一般地 $\Lambda = \exp(\overset{转动}{i\theta_i J_i} + \overset{boost}{i\xi_i K_i})$ 其中 $J_i = \begin{pmatrix}1&\\&J_i^{(3)}\end{pmatrix}$ $\quad J_i^{(3)}$ 表示3维下矩阵~~生成元~~，见上

$K_1 = i\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$ $\quad K_2 = i\begin{pmatrix}0&0&1&\\&0&&\\1&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$ $\quad K_3 = i\begin{pmatrix}0&&&1\\&0&&\\&&0&\\1&&&0\end{pmatrix}$ $\quad \Lambda$ 为正常洛仑兹变换.

无穷小洛仑兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \overset{单位矩阵}{g^\mu{}_\nu} + \Delta\omega^\mu{}_\nu$.

$= g^\mu{}_\nu + i\Delta\theta_i (J_i)^\mu{}_\nu + i\Delta\xi_i(K_i)^\mu{}_\nu$.

物理定律在惯性系下不变，作用量在洛仑兹变换下不变。考虑粒子自由运动情形，可加性要求：

$$S=\alpha\int ds=\alpha\int\sqrt{(dt)^2-(d\vec{x})^2}=\alpha\int dt\sqrt{1-\vec{v}^2}.$$

确定 α：令 $v\to 0$ 则 $\alpha=-m$ $S=-m\int dt\sqrt{1-\vec{v}^2}$.

从而相对论性自由粒子的拉氏量 $L=-m\sqrt{1-\vec{v}^2}$. $p=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}=\gamma m\vec{v}$.

系统能量 $E=\vec{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}-L=\frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}=\gamma m$.

而 $E,\vec{p}$ 构成逆变四矢量 $p^\mu=(E,\vec{p})$ 协变 $p_\mu=(E,-\vec{p})$.

不变量 $p^\mu p_\mu=E^2-\vec{p}^2=m^2$.

洛仑兹变换对称性对应着角动量守恒。

由诺特定理，$p_\mu(X^\mu)^{\delta\theta}=0$. ~~$\delta t=A$~~ 无穷小变换：$\Delta x^\mu=\Delta\theta_i(iJ_i)^\mu{}_\nu x^\nu+\Delta\xi_i(iK_i)^\mu{}_\nu x^\nu$.

守恒量为 $p_\mu(iJ_i)^\mu{}_\nu x^\nu=-\epsilon_{ijk}p^j x_k=\vec{r}\times\vec{p}=const.$

$$p_\mu(iK_i)^\mu{}_\nu x^\nu=tp^i-x^iE=const \quad \text{动变质量矩}$$

引入世界线 $x^i(\lambda)$ $i=0,1,2,3$. 令 λ 是洛仑兹标量。

$$\delta S=-m\int\delta\sqrt{dx^\mu dx_\mu}=-m\int\frac{d\delta x^\mu dx_\mu}{ds}=-m\int d\lambda\frac{d\delta x^\mu}{d\lambda}\frac{dx_\mu}{ds}$$

$$=m\int d\lambda\left(\delta x^\mu\frac{d}{d\lambda}\frac{dx_\mu}{ds}\right)=m\int d\lambda\left(\delta x^\mu\frac{d}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}\right)\frac{ds}{d\lambda} \quad \text{只要} \frac{ds}{d\lambda}>0.$$

$\Rightarrow$ E-L 方程 $\frac{d^2x_\mu}{ds^2}=0$. 利用 $ds=\sqrt{1-\vec{v}^2}dt$，得 $\frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\mu}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\right)=0$.

即 $\frac{dp_\mu}{ds}=0$. 即 p_μ 守恒。

***.

带电粒子在电磁场中运动

引入四矢势 $A^\mu=(\phi,\vec{A})$. 由此因协变性猜测作用量为 $S=-m\int ds-e\int dx^\mu A_\mu$.

$L=-m\sqrt{1-\vec{v}^2}-e(\phi-\vec{v}\cdot\vec{A})$. $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\vec{p}+e\vec{A}$ $\left(\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\right)$

得运动方程 $\frac{d\vec{p}}{dt}=-e\nabla\phi-e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+e\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

注意广义动量（正则动量）不是机械动量（相对论性动量）. $\vec{P}=\vec{p}+e\vec{A}$

四维协变形式 ~~$\partial^\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}$~~ $\partial^\mu:=\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ $\partial_\mu:=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$\delta S=-m\int\frac{d\delta x^\mu dx_\mu}{ds}-e\int d\delta x^\mu A_\mu+dx^\mu\partial_\nu A_\mu\delta x^\nu$$

$$=-m\int d\lambda\frac{d\delta x^\mu}{d\lambda}\frac{dx_\mu}{d\lambda}-e\int d\lambda\left[\frac{d\delta x^\mu}{d\lambda}A_\mu+\frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\nu A_\mu\delta x^\nu\right].$$

$$\delta S = m\int d\lambda\left(\delta x^{\mu}\frac{d}{d\lambda}\frac{dx_{\mu}}{ds}\right) - e\int d\lambda\left[-\delta x^{\mu}\partial_{\nu}A_{\mu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} + \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\partial_{\mu}A_{\nu}\delta x^{\mu}\right] = 0.$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x_{\mu}}{ds^2} = eF_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{ds}. \qquad F_{\mu\nu} = \cancel{\partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\nu}}\ \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}.$$

$F_{\mu\nu}$ 为电磁场二阶场强张量，反对称，$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，对角元上为0 有6个独立量。

$$F_{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = E_i \quad (i=1,2,3)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = -\varepsilon_{ijk}B_k. \quad (i,j=1,2,3).\ (\text{不求和})$$

$$\begin{matrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ & 0 & -B_3 & B_2 \\ & & 0 & -B_1 \\ & & & 0 \end{matrix}$$

i分量 $(i=1,2,3)$ $(j=1,2,3)$.

运动方程 左边 $= -\frac{dp_i}{dt}\frac{dt}{ds}$ 右边 $eF_{i0}\frac{dt}{ds} + eF_{ij}\frac{dx^j}{dt}\frac{dt}{ds} = (-eE_i - e\varepsilon_{ijk}B_k v_j)\frac{dt}{ds}$

$$= (-eE_i - e(\vec{v}\times\vec{B})_i)\frac{dt}{ds}.$$

联立 $\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. 对0分量，对应能量变化率

左边 $= +\frac{dE}{dt}\frac{dt}{ds}$. 右边 $eF_{0j}\frac{dx^j}{dt}\frac{dt}{ds} = eE_j v_j\frac{dt}{ds} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v}$ （能量，电场）

小结 A_{μ} 并不具备直接可测量的物理效果，带电粒子在电磁场中运动感受(测量)到的是场强张量。A_{μ} 具有一定任意性 $\Rightarrow$ 电磁相互作用的规范不变性。

另一方面 $A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\mu}}$ 则 $S = -e\int dx^{\mu}(A_{\mu} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\mu}})$ 不变. $\Lambda = \Lambda(x)$

$\Rightarrow$ 若 A_{μ} 存在如下变换 $A_{\mu}(x) \longrightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x)$. 粒子运动方程不变.

这种对称性称为电磁场的规范对称性

对称性又可从 $F_{\mu\nu}$ 的对称性中体现 $\Longrightarrow$ 也不改变电磁场自身方程

从对称性出发，考察电磁场作用量 $S_{EM} = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \int dt\int d^3x\,\mathcal{L}$

符合对称性还有 $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ 其中 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. 违反破坏CP对称性.

验证 S_{EM} 的正确性. $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu})$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}).$$

代入E-L方程： $\partial_{\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\mu})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = 0$. 规范对称性要求 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = 0$. 从而 $\partial^{\nu}F_{\mu\nu} = 0$.

$\partial_{\nu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = 0$. 即 $\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = 0$ 这就是麦克斯韦方程(无源).

有心力下的质点运动.

有心力 可写为 $\vec{F}(\vec{r})=f(r)\hat{r}$.

两体问题 $L=\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2-V(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|)$ 令 $\vec{R}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ ~~为质心坐标~~ $\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$.

$\rightarrow L=\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-V(r)$. $M=m_1+m_2$ $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$

考虑无穷小变换 $\begin{cases}x'=x-y\Delta\varphi\\ y'=y+x\Delta\varphi\end{cases}$ L形式不变，具有旋转对称性. ⇒ 守恒量 $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$

比奈方程 问题：如果利用 $M=mr^2\dot{\varphi}$ 改写 $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)$.

定理 设L依赖的s个广义坐标中，前n个是循环坐标. L 由以下方程改写：(对应于 $E'=E$).

$$L'(q_{n+1},\cdots q_s;\dot{q}_{n+1}\cdots\dot{q}_s,t)=L(q_1,\cdots q_s;\dot{q}_1,\cdots\dot{q}_s,t)-\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$$

得到的 L'，由此得到 ~~与原L~~ 相同的运动方程.

$$\frac{M^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right)=-f\left(\frac{1}{u}\right).\quad 代入\ f\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{k}{r^2}=-ku^2.\ \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{mk}{M^2}$$

(LRL矢量).

Laplace-Runge-Lenz 矢量 $\vec{A}=\vec{p}\times\vec{M}-mk\hat{r}=const.$ → 意味着 $1/r$ 势具有更高对称性

对称性由势能造成，称为动力学对称性.

对应对称性：引入无穷小变换 $\vec{r}'=\vec{r}+[\Delta\vec{a}\times(\vec{p}\times\vec{r})+\vec{r}\times(\vec{p}\times\Delta\vec{a})]$.

验证：只需验证 $\frac{\partial L}{\partial q_k}\Delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{d}{dt}\Delta q_k=-\frac{d}{dt}\Delta\lambda(q,t)$.

第一项：$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}\Delta\vec{r}=f(r)\hat{r}\cdot[\Delta\vec{a}\times(\vec{p}\times\vec{r})]=\frac{f(r)}{r}\Delta\vec{a}\cdot[(\vec{p}\times\vec{r})\times\vec{r}]$

$$=-\frac{k}{r^3}\Delta\vec{a}\left(-r^2\vec{p}+\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})\right)=-\frac{mk}{r^3}\Delta\vec{a}\cdot\left[-r^2\dot{\vec{r}}+\vec{r}(r\dot{r})\right]$$

$$=-mk\Delta\vec{a}\cdot\left[-\frac{\dot{\vec{r}}}{r}+\frac{\vec{r}}{r}\frac{\dot{r}}{r}\right]=\Delta\vec{a}\cdot mk\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r}.$$

第二项：$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}\Delta\dot{\vec{r}}=m\dot{\vec{r}}\cdot[\Delta\vec{a}\times(\dot{\vec{p}}\times\vec{r})+\vec{r}\times(\dot{\vec{p}}\times\Delta\vec{a})]$

$$=\Delta\vec{a}\cdot[(\dot{\vec{p}}\times\vec{r})\times\vec{p}]+(\dot{\vec{p}}\times\Delta\vec{a})(\vec{p}\times\vec{r}).$$

$$=\Delta\vec{a}\cdot[(\dot{\vec{p}}\times\vec{r})\times\vec{p}]+\Delta\vec{a}\cdot[(\vec{p}\times\vec{r})\times\dot{\vec{p}}].$$

$$=\Delta\vec{a}\cdot\frac{d}{dt}[(\vec{p}\times\vec{r})\times\vec{p}].$$

得到 $-\Delta\lambda=\Delta\vec{a}\cdot[mk\frac{\vec{r}}{r}+(\vec{p}\times\vec{r})\times\vec{p}]=\Delta\vec{a}\cdot[mk\frac{\vec{r}}{r}+\vec{p}\times\vec{M}]$.

L具有形式协变性，从而有守恒量 由 $\vec{p}\cdot\Delta\vec{r}+\Delta\lambda=$常量.

⇒ ~~$\Delta\vec{a}[(\vec{p}\times\vec{r})\times\vec{p}+(\vec{p}\cdot\vec{r})\times(\vec{p}\times\Delta\vec{a})]$~~ $\Delta\vec{a}\cdot[\vec{p}\times\vec{M}-mk\frac{\vec{r}}{r}]=$常数.

即 $\vec{A}=\vec{p}\times\vec{M}-mk\hat{r}$ 守恒.

定理（伯特兰定理） 有心力场下质点运动具有稳定闭合轨道 $\Longleftrightarrow$ 有心力为一次正比或平方反比力。

从比耐方程 $\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{m}{M^2u^2}f(\frac{1}{u})$ 出发。令 $J(u)=-\frac{m}{M^2u^2}f(\frac{1}{u})$.

考虑特殊情况：圆轨道：$u=u_0$. 得 $u_0=J(u_0)$. 考虑微扰 $\delta u=\xi$.

$J(u)=J(u_0)+J'(u_0)\xi+O(\xi^2)$. $\rightarrow \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}+\xi=J'(u_0)\xi$.

即 $\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}+\beta^2\xi=0$. $\beta^2=1-J'(u_0)$. 稳定性要求 $\beta^2>0$.

轨道闭合要求：$\beta\cdot n\cdot 2\pi=m\cdot 2\pi \Rightarrow \beta$ 为有理数.

$\beta^2=1-J'(u_0)=1+\frac{2m}{M^2u_0^3}f(\frac{1}{u_0})-\frac{m}{M^2u_0^2}\left.\frac{df(\frac{1}{u})}{du}\right|_{u_0}=1+J(u_0)\left[\frac{2}{u_0}-\frac{1}{f(\frac{1}{u_0})}\left.\frac{df(\frac{1}{u})}{du}\right|_{u_0}\right]$

$=3-\left.\frac{df(\frac{1}{u})}{du}\right|_{u=u_0}\cdot\frac{u_0}{f(\frac{1}{u_0})}$

稳定闭合条件对不同 u_0 成立 $\Rightarrow \beta$ 为常数. 则 $\frac{df}{dr}=(\beta^2-3)\frac{f}{r}$. $\Rightarrow f=-kr^{\beta^2-3}$.

即有心力幂次大于 -3.

考虑高阶修正（更一般轨道） $\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}+\beta^2\xi=\frac{1}{2}J''(u_0)\xi^2+\frac{1}{6}J'''(u_0)\xi^3+O(\xi^4)$.

代入 $\xi(\varphi)=\xi_0+\xi_1\cos\beta\varphi+\xi_2\cos2\beta\varphi+\xi_3\cos3\beta\varphi$ (*)

ξ_3 为三阶小量

$\rightarrow \xi_0=\xi_1^2\frac{J''(u_0)}{4\beta^2}$ $\xi_2=-\xi_1^2\frac{J''(u_0)}{12\beta^2}$. 将 ξ_1 视为小量，则 ξ_0,ξ_2 为二阶小量.

利用 $J(u)=\frac{mk}{M^2}u^{1-\beta^2}$. $\Rightarrow J'(u_0)=1-\beta^2$ $J''(u_0)=-\frac{\beta^2(1-\beta^2)}{u_0}$.

$J'''(u_0)=\frac{\beta^2(1-\beta^2)(1+\beta^2)}{u_0^2}$ $\Rightarrow \xi_0=-\frac{(1-\beta^2)\xi_1^2}{4u_0}$ $\xi_2=\frac{(1-\beta^2)\xi_1^2}{12u_0}$.

$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2)=0$ （因为 $(2\xi_1\xi_0+\xi_1\xi_2)\frac{J''(u_0)}{2}+\xi_1^3\frac{J'''(u_0)}{8}=0$）.

即 ~~$\beta=1$ 或 2~~ $\beta^2=1$ 或 4. 对应平方反比力与谐振子力.

注意：~~一般地~~

(*)式有问题：基频会有微小变化 设基频为 γ γ 与 β 只差高阶修正项

注意：若有高阶修正项，γ 可能不是有理数，从而要求基频不变

对 $\beta^2=1$，没有高阶项. 对 $\beta^2=4$. 周期与振幅无关，从而基频也不变.

实际上，可看出 $\beta^2=1$ 或 4 时基频确实不变.

***

散射问题 设 $f(r)$ 满足 $\lim_{r\to\infty}f(r)=0$. 引入微分散射截面

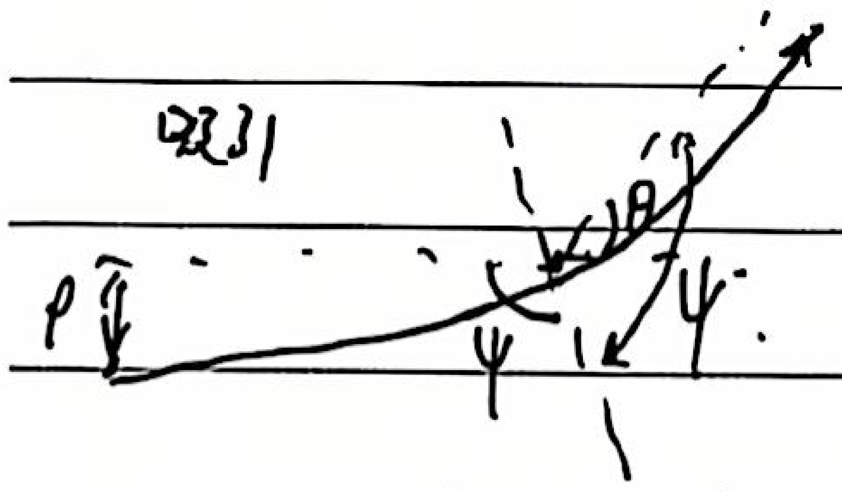
$\sigma(\Omega)\,d\Omega=$ 单位时间内散射至立体角 $d\Omega$ 的粒子数 / 粒子入射强度

量纲：面积.

轴对称散射：$d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta \quad \sigma(\Omega) \to \sigma(\theta)$

引入碰撞参数 ρ 　考虑 $\rho \to \rho + d\rho$ 粒子，散射到 $\theta \to \theta + d\theta$ 范围，$\sigma(\theta) \cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta = 2\pi \rho\, d\rho$

吸引

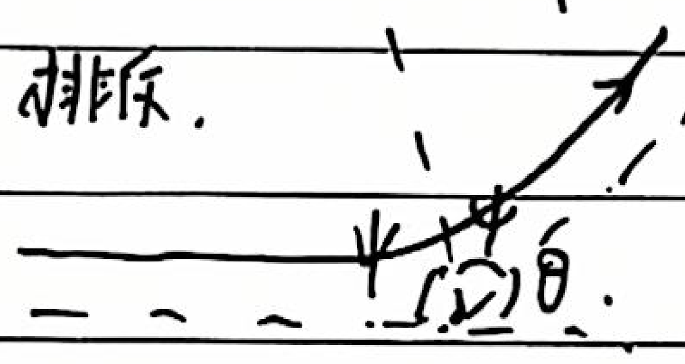


$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|. \quad \text{定义总散射截面}$$

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\theta)\, d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

排斥：$\theta = \pi - 2\psi$ 　吸引：$\theta = 2\psi - \pi$

排斥.



利用轨道方程 $\int d\varphi = \int dr \dfrac{M}{r^2\sqrt{2m(E-V) - M^2/r^2}} = -\int \dfrac{du}{\sqrt{\frac{2m}{M^2}(E-V) - u^2}}$

无穷远：$\varphi = 0$ $\varphi = \psi$，$u = 0$ 　近日点：$\varphi = 0$ 　$u = u_{max}$ 　$M = mv_0\rho = \sqrt{2mE}\,\rho$

$$\Rightarrow \underset{(\text{排斥})}{\theta(\rho)} = \pi - 2\int_0^{u_{max}} du \frac{\rho}{\sqrt{1 - V/E - \rho^2 u^2}} \Rightarrow \text{反解}\ \rho(\theta) \Rightarrow \sigma(\theta).$$

1. 开普勒问题 库仑力排斥散射. $e = \sqrt{1 + 2EM^2/mk^2}$ 　$\frac{1}{r} = \frac{mk}{M^2}(e\cos\varphi - 1)$. $r \to \infty$ $\varphi = \psi$

$\Rightarrow \cot^2\frac{\theta}{2} = e^2 - 1 = 2EM^2/mk^2 = 4E^2\rho^2/k^2$. 即 $\cancel{\tan\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} = 2E\rho/k$.

$\Rightarrow d\rho/d\theta = -\frac{k}{4E}\csc^2\frac{\theta}{2}$. 　$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2 \csc^4\frac{\theta}{2}$. (卢瑟福散射截面公式)

$\sigma_{tot} = 2\pi \int \rho\, d\rho = $ 无穷大

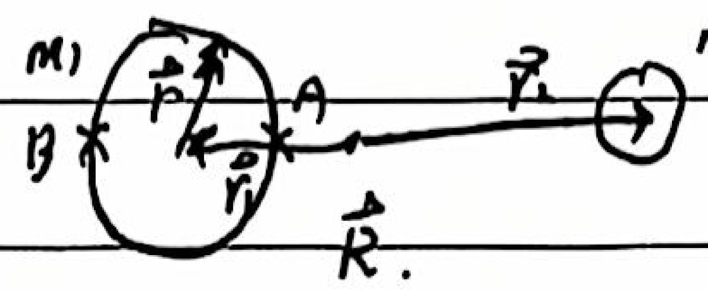
2. $V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$ (刚性球势) 　散射问题变为有大小的刚球的弹性碰撞.

$\rho < a$ 且 $u < 1/a$ 时 $\theta(\rho) = \pi - 2\int_0^{1/a} du \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2 u^2}} = \pi - 2\arcsin\frac{\rho}{a}$. $\Rightarrow \rho = a\cos\frac{\theta}{2}$. $(\rho < a)$

$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{a^2}{4}$. 　$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma \sin\theta\, d\theta = \pi a^2$.

***

潮汐现象. 在非惯性系下考虑. $\omega^2 = G(m_1 + m_2)/R^3$



$U(\vec{r}) = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{|\vec{R} - \vec{r}|} - \frac{1}{2}\omega^2(\vec{r}_1 + \vec{r})^2$. 　$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{R}$.

假设 $R \gg r$，从而

$$U(\vec{r}) \approx -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{R} - \frac{1}{2}\omega^2(r^2 + r_1^2) + \frac{Gm_2}{2R^3}r^2 - \frac{3Gm_2}{2R}\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R}\right)^2 + \cdots$$

A, B点为势能极小值点 潮的最强. 一天之中由于自转，潮汐现象有两次.

潮汐强度 $\propto \frac{m_2}{R^3}$.

***

近日点进动 　设 $V(r) = -\frac{k}{r} + \delta V(r) = V^{(0)} + \delta V(r)$. 质点从近日转一周又回到近日点，

$$\Delta\phi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(M/r^2)\, dr}{\sqrt{2m(E-V) - M^2/r^2}}. \qquad \Delta\phi = 2\pi + \delta\phi.$$

$$\delta\phi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} (M/r^2)\, dr \left[\frac{\partial}{\partial V} \frac{1}{\sqrt{2m(E-V) - M^2/r^2}}\right]_{V = V^{(0)}_{(r)}} \cdot \delta V.$$

$$= 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} (M/r^2)\,dr\ 2m\frac{\partial}{\partial(M^2/r^2)}\frac{1}{\sqrt{\quad}}\,\delta V.$$

$$= 2m\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\delta V(r)\,dr}{\sqrt{2m(E-V^{(0)})-M^2/r^2}}.$$

绝热不变量 $I_r = \oint p_r\,dr = \oint \sqrt{2m(E-V)-M^2/r^2}\,|dr|$. V形式变化引起. 轨道变化引起.

近日点: $2m(E-V)-M^2/r^2\big|_{r=r_{min},r_{max}} = 0.$ $\Rightarrow$ $-2m\delta V - 2m\frac{dV_{eff}}{dr}\delta r = 0.$

$\Rightarrow \delta r = -\left(\frac{dV_{eff}}{dr}\right)^{-1}\delta V.$

轨道修正: $\int_{r+\delta r}^{r}\sqrt{2m(E-V)-M^2/r^2}\,dr \approx \sqrt{2m(E-V)-M^2/r^2}\,\delta r = 0.$ V形式改变

$\Rightarrow$ 轨道改变 引起的I_r修正一阶项为0. $\delta I_r = \delta I_r^{(1)} + \delta I_r^{(2)}.$ 轨道改变 $\delta I_r^{(2)} = 0.$

$\Delta\phi$可写成 $\Delta\phi = -\frac{\partial I_r}{\partial M} = 2\pi - \frac{\partial \delta I_r^{(1)}}{\partial M} = 2\pi + \delta\phi.$

$$\delta\phi = -\frac{\partial \delta I_r^{(1)}}{\partial M} = 2m\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\delta V(r)\,dr}{\sqrt{2m(E-V^{(0)})-M^2/r^2}}.$$

例: 水外行星造成的水星近日点近动

假设: 水外行星质量均匀分布在环带上 (一般有 $T_水 \ll T_{水外}$, 且需长时间才观测水星明显进动)

$$\delta V(r) = -\frac{GM_i m}{2\pi a_i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_i\,d\theta}{\sqrt{a_i^2+r^2-2a_i r\cos\theta}}$$ $a_i \gg r$ ~~展开到二阶~~,

$\Rightarrow \delta V(r) = -\frac{GM_i m}{4a_i^3}r^2.$ $\delta\phi = 2m\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\delta V(r)\,dr}{\sqrt{2m(E+\frac{k}{r})-M^2/r^2}}$

$$\delta\phi = -\frac{GM_i m}{4a_i^3}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{r^3\,dr}{\sqrt{(r-r_{min})(r-r_{max})}}$$

积分可换元为: $\int_{-c}^{c}\frac{(r+a)^3\,dr}{\sqrt{c^2-r^2}}$ $\left(a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2},\ c = \frac{r_{max}-r_{min}}{2}\right)$

积分为: $I = \frac{\pi}{2}a^3(2+3e^2).$ $a = -\frac{k}{2E}$ 与M无关. $e^2 = 1+\frac{2M^2E}{mk^2}.$ $\frac{de^2}{dM} = \frac{4ME}{mk^2}.$

其中 $k = GM_0 m$. 从而 $\delta\phi = -\frac{GM_i m}{4a_i^3}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}\frac{3\pi a^3}{2}\left(-\frac{2\sqrt{2|E|}}{GM_0 m\sqrt{m}}\sqrt{1-e^2}\right).$

$\delta\phi = \frac{3\pi}{2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{a_i}\right)^3\left(\frac{M_i}{M_0}\right).$ a_i: 水外行星轨道半径. M_i: 水外行星质量.

a: 水星轨道半长轴 M_0: 太阳质量.

例2. 相对论效应造成的近日点进动

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}\approx -mc^2+\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{v^2}{4c^2}+\cdots\right)+\frac{k}{r}\qquad v^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2.$$

E和M仍为守恒量. $M=p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial L}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial\dot\varphi}=\cancel{mr^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)\dot\varphi+o(v}$

$mr^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\cdots\right)\dot\varphi$.

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot r}=\frac{\partial L}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial\dot r}=m\dot r\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\cdots\right)$$

$$E=\dot r p_r+\dot\varphi p_\varphi-L=\cancel{\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{3v^2}{4c^2}\right)-\frac{k}{r}}\ \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{3v^2}{4c^2}+\cdots\right)-\frac{k}{r}.\ +\cdots$$

利用 $\dot r=\frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi$. $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]\dot\varphi^2.=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]\left[\frac{M}{mr^2}\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\right]^2.$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]\frac{M^2}{2m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right)\quad \left(u=\frac{1}{r}\right).$$

$$=\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]\frac{M^2}{2m}-\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\cdots$$ 把 $\frac{1}{2}mv^2$ 代入E, 有

$$E=\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]\frac{M^2}{2m}-\frac{1}{8}mv^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)-ku+\cdots$$ 代入0级近似 $\frac{1}{2}mv^2=E+ku+\cdots$

$$-\frac{1}{8}mv^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{(E+ku)^2}{mc^2}+\cdots$$ 代入上式得

$$E\left(1+\frac{E}{2mc^2}\right)+ku\left(1+\frac{E}{mc^2}\right)=\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\left(1-\frac{k^2}{M^2c^2}\right)u^2\right]\frac{M^2}{2m}.$$

定义 $E'=E\left(1+\frac{E}{2mc^2}\right)$. $k'=k\left(1+\frac{E}{mc^2}\right)$. 从而对进动产生影响项为 $1-\frac{k^2}{M^2c^2}$

$$d\varphi=\frac{M\,du}{\sqrt{2m(E'+k'u)-(M^2u^2-\frac{k^2u^2}{c^2})}}\qquad A=2m(E'+k'u)-M^2u^2.\ 则$$

$$d\varphi=\frac{M\,du}{\sqrt A}-\frac{M}{2A^{3/2}}\cdot\frac{k^2u^2}{c^2}du.=\frac{M\,du}{\sqrt A}-\frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial M}\frac{1}{\sqrt A}du.$$

$$\int\frac{M\,du}{\sqrt A}=2\pi\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt A}=\frac{2\pi}{M}.\qquad \int\frac{\partial}{\partial M}\frac{1}{\sqrt A}du=\frac{\partial}{\partial M}\int\frac{du}{\sqrt A}=-\frac{2\pi}{M^2}.$$

$\Rightarrow$ 第二项 $-\frac{k^2}{2c^2}\frac{\partial}{\partial M}\frac{2\pi}{M}=\frac{\pi k^2}{M^2c^2}$. 从而进动角为 $\frac{\pi k^2}{M^2c^2}$.

两个不同例子 $\begin{cases}\delta V\text{改变}\\ \delta T\text{改变}\Rightarrow\frac{du}{d\varphi}\text{轨道方程改变}\end{cases}\Rightarrow$ 进动.

$V=\frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j$ $i=1,\cdots,f$

多自由度体系振动：在平衡位置 q_{i0} 处展开 ~~$V=\frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j$~~ $k_{ij}=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{x=0}$ $(x_i=q_i-q_{i0})$.

k_{ij} 构成一对称正定矩阵。动能 $T=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ m_{ij} 也是正定对称的。

$L=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j-\frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j$. $\Rightarrow m_{ij}\ddot{x}_j+k_{ij}x_j=0$. f个线性齐次方程组成的方程组

代入 $x_j=A_je^{i\omega t}$. 得到 $(-m_{ij}\omega^2+k_{ij})A_j=0$. $\Rightarrow (K-\omega^2M)A=0$ $A=(A_1\cdots A_f)^T$.

要求A是非零解 $\Rightarrow \det(K-\omega^2M)=0$ 这是关于 ω^2 的f次方程

稳定性要求：这f个根 ω_α 均为正实根（来源于K与M的正定性）.

又 $M^{-1}KA=\omega^2A$. $\Rightarrow \omega_\alpha^2$ 也是 $M^{-1}K$ 的本征值.

$(K-\omega_\alpha^2M)A^{(\alpha)}=0$ 的解 $A^{(\alpha)}$ 可用 $|K-\omega_\alpha^2M|$ 的代数余子式 $\Delta_{ij}^{(\alpha)}$ 表出 $A^{(\alpha)}=(\Delta_{i'1}^{(\alpha)}\cdots\Delta_{i'f}^{(\alpha)})$

其中 i' 可任取一个.

若破坏 m_{ij}，k_{ij} 的对称性，如对特定的 m,n 令 $k_{mn}\neq k_{nm}$ 但 $k_{mn}+k_{nm}$ 仍为原来值，则 L不变 但 $(k_{ij}-m_{ij}\omega^2)A_j=0$ 不再成立，为何？

原因是推导 $(k_{ij}-m_{ij}\omega^2)A_j=0$ 时用到了 $\frac{\partial}{\partial x_p}k_{ij}x_ix_j=2k_{pj}x_j$. 只在K对称时成立.

$\frac{\partial}{\partial x_p}x_ix_j=k_{ij}[\delta_{ip}x_j+\delta_{jp}x_i]=k_{pj}x_j+k_{ip}x_i$. 仅在 $k_{pj}=k_{jp}$ 时 其等于 $2k_{pj}x_j$.

即 $(k_{ij}-m_{ij}\omega^2)A_j=0$ 仅当K,M对称时成立 [包括 $(K-\omega^2M)A=0$，下面证明即用到K,M对称性]

一般解 引入 $\xi^{(\alpha)}=e^{i\omega_\alpha t}$. 则 $X=\sum_\alpha A^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}=\bar{A}\xi$. $\bar{A}=(A^{(1)}\ A^{(2)}\cdots A^{(f)})$.

$\xi^{(\alpha)}=(\xi^{(1)}\ \xi^{(2)}\cdots\xi^{(f)})^T$

$\bar{A}$ 具有特殊性质 ~~$\Rightarrow L(X)=L'(\xi)$ L'形式可~~

$\bar{A}$ 可将M和K同时对角化，即 $\tilde{M}=\bar{A}^TM\bar{A}=\begin{pmatrix}m_1&&\\&\ddots&\\&&m_f\end{pmatrix}$. $\tilde{K}=\bar{A}^TM\bar{A}=\begin{pmatrix}k_1&&\\&\ddots&\\&&k_f\end{pmatrix}$.

$\tilde{M}_{\alpha\beta}=[A^{(\alpha)}]^TMA^{(\beta)}$ 要证明 $\tilde{M}_{\alpha\beta}$ 是对角的，只需证 $\alpha\neq\beta$ 时 $\tilde{M}_{\alpha\beta}=0$.

由 $(K-\omega_\beta^2M)A^{(\beta)}=0$. $\Rightarrow \omega_\beta^2[A^{(\alpha)}]^TMA^{(\beta)}=[A^{(\alpha)}]^TKA^{(\beta)}$

互换 α,β 有 $\omega_\alpha^2[A^{(\beta)}]^TMA^{(\alpha)}=[A^{(\beta)}]^TKA^{(\alpha)}$ 对其转置，注意 $M^T=M$, $K^T=K$, 从而

$\omega_\alpha^2[A^{(\alpha)}]^TM[A^{(\beta)}]^T=[A^{(\alpha)}]^TKA^{(\beta)}$. 相减得到 $(\omega_\alpha^2-\omega_\beta^2)[A^{(\alpha)}]^TMA^{(\beta)}=0$.

若 $\omega_\alpha^2\neq\omega_\beta^2$，则 ~~$[A^{(\alpha)}]$~~ $[A^{(\alpha)}]^TMA^{(\beta)}=0$ 称 $A^{(\alpha)},A^{(\beta)}$ 关于矩阵M共轭正交.

若 $\omega_\alpha^2=\omega_\beta^2$（有重根），使用格拉姆施密特方法 可将 $A^{(\alpha)},A^{(\beta)}$ 关于M共轭正交.

同理 $\alpha\neq\beta$ 时 $A^{(\alpha)},A^{(\beta)}$ 关于K共轭正交，从而 $\tilde{M}$ 与 $\tilde{K}$ 均为对角的。当然，要求 $\bar{A}$ 已被正交化方法进行正交（当 ω^2 有重根时）.

从而用 ξ 表示 L, ~~$L=\frac{1}{2}x^TMx$~~ $L=\frac{1}{2}\dot{x}^TM\dot{x}-\frac{1}{2}x^TKx$. $X=\bar{A}\xi$. 则

$L=\frac{1}{2}\dot{\xi}^T\bar{A}^TM\bar{A}\dot{\xi}-\frac{1}{2}\xi^T\bar{A}^TK\bar{A}\xi=\frac{1}{2}\dot{\xi}^T\tilde{M}\dot{\xi}-\frac{1}{2}\xi^T\tilde{K}\xi$. → 去耦合化.

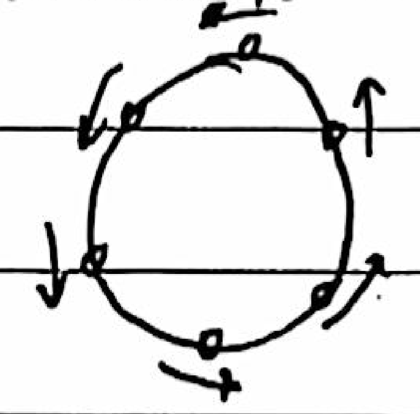
即 ξ 各分量独立，称为简正坐标.

定义 $Q_\alpha=\sqrt{m_\alpha}\xi^{(\alpha)}$. 则 $L=\frac{1}{2}\sum_\alpha\dot{Q}_\alpha^2-\frac{1}{2}\sum_\alpha\omega_\alpha^2Q_\alpha^2$. 归一化. 将 Q_α 用X表出？

由 $X=\bar{A}\xi$，$\xi=\tilde{M}^{-\frac{1}{2}}Q$，从而 $\bar{A}^TMX=\bar{A}^TM\bar{A}\xi=\tilde{M}\xi=\tilde{M}^{\frac{1}{2}}Q$

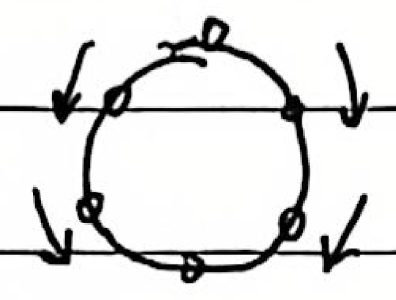
则 $Q_\alpha=m_\alpha^{-\frac{1}{2}}A_i^{(\alpha)}m_{ij}x_j$. 即 $Q=\tilde{M}^{-\frac{1}{2}}\bar{A}^TMX$.（利用 $\bar{A}$ 性质起到避求逆）

苯环的振动



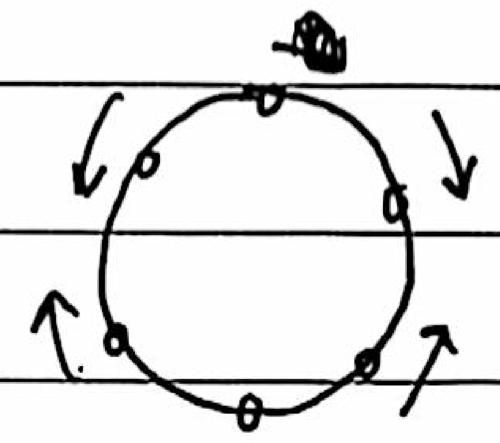
$\omega=0$.

$A_1=(1,1,1,1,1,1)$



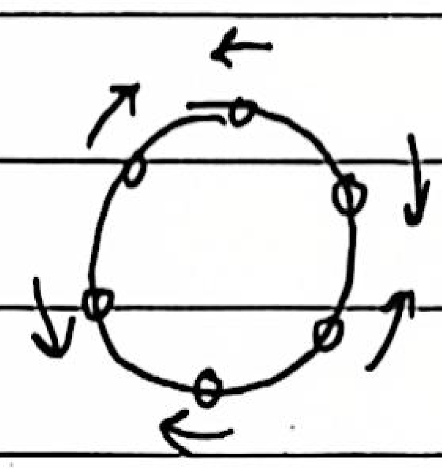
$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$A_3=(0,-1,-1,0,1,1)$.



$\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}$

$A_2=(0,-1,1,0,-1,1)$.

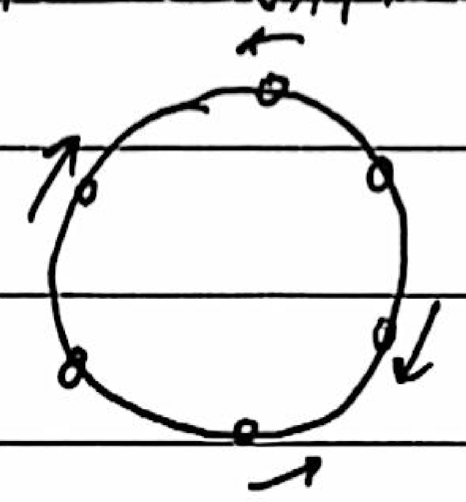


$\omega=2\sqrt{\frac{k}{m}}$

$A_4=(1,-1,1,-1,1,-1)$.

运动模式只有4种，其中两种存在简并.

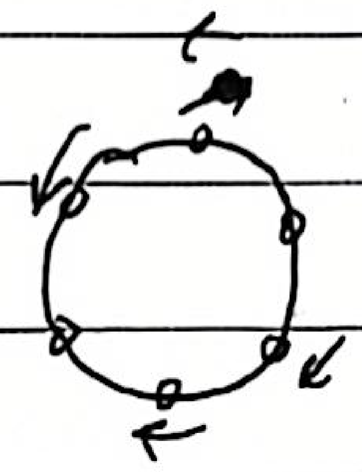
2号转 $\pi/3$:



$\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}$

$A_5=(1,0,-1,1,0,-1)$.

3号转 $\pi/3$:



$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$A_6=(1,0,-1,-1,0,1)$

推广: N个原子在环上振动，质量均为 m

运动方程: $\ddot{x}_k=+\omega_0^2(x_{k+1}+x_{k-1}-2x_k)$. $\omega_0^2=k/m$ $x_{N+1}=x_1$.

设 $x_k=A_k e^{-i\omega t}$. $\Rightarrow$ $-\omega^2 A_k=\omega_0^2(A_{k+1}+A_{k-1}-2A_k)$ $\Rightarrow A_k=\alpha r_1^k+\beta r_2^k$.

满足特征方程: $\omega_0^2 r^2+(\omega^2-2\omega_0^2)r+\omega_0^2=0$. 要满足周期性边界条件 $r_1^N=1, r_2^N=1$.

设 $r_1=e^{i\frac{2\pi}{N}l}$ $l\in\mathbb{Z}$ 则由 $r_1\cdot r_2=1$ $\Rightarrow r_2=e^{-i\frac{2\pi}{N}l}$

由 $r_1+r_2=\frac{2\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0^2}=2\cos\frac{2\pi}{N}l$. $\Rightarrow$ $\omega^2=2\omega_0^2\left[1-\cos\frac{2\pi}{N}l\right]$ $l\in\mathbb{Z}$.

***

受迫振动. $m\ddot{x}+kx=F(t)$. $\cancel{\ddot{x}+\omega^2}$ $\ddot{x}+\omega^2 x=F(t)/m$ $x(t)$=通解+特解.

特别地, $F(t)=f\cos(\gamma t+\beta)$ 设 $x=b\cos(\gamma t+\beta)$ 为特解 $\Rightarrow b=\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}$.

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta).$$

若察共振形式为，将x改写为 $x(t)=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}[\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta)]$.

在 $\omega\to\gamma$ 时 $x(t)\to a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t+\beta)$.

对一般的力 $F(t)$ 令 $\xi=\dot{x}+ax$, $\ddot{x}=\dot{\xi}-a\dot{x}=\dot{\xi}-a(\xi-ax)$. 原方程为

$\ddot{x}+\omega^2 x=\dot{\xi}-a\xi+(a^2+\omega^2)x=\frac{F(t)}{m}$. 令 $a=i\omega$, 则 $\cancel{\dot{\xi}-a\xi=F(t)/m}$

则 $\dot{\xi}-i\omega\xi=F(t)/m$. 若 $F(t)=0$, $\xi=Ae^{i\omega t}$ 一般地 $F(t)\neq 0$, 设 $\xi=A(t)e^{i\omega t}$.

$\Rightarrow \dot{A}(t)=\frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}$ $A(t)=A(0)+\int_0^t d\tau\,\frac{1}{m}F(\tau)e^{-i\omega\tau}$ $\xi(t)=A(t)e^{i\omega t}$.

$\dot{x}+i\omega x=\xi(t)$. 令 $x(t)=B(t)e^{-i\omega t}$, 得 $\dot{B}=\xi(t)e^{i\omega t}=e^{2i\omega t}A(t)$

故 $x(t) = e^{-i\omega t}\{\int_0^t d\tau_1 [\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \frac{1}{m}F(\tau_2)e^{-i\omega\tau_2} + A(0)] e^{i2\omega\tau_1} + x_0\}$. 有2个待定参量从而是一般解.

下面考虑能量变化 $E(t) = \frac{m}{2}(\dot x^2+\omega^2x^2) = \frac{m}{2}(\dot x + i\omega x)(\dot x - i\omega x) = \frac{m}{2}\xi\xi^* = \frac{m}{2}|\xi|^2$.

假设初始($t=-\infty$)能量为0, $|\xi(t)| = |\int_{-\infty}^t d\tau \frac{1}{m} F(\tau)e^{-i\omega\tau} + A(-\infty)| = |\int_{-\infty}^t d\tau \frac{1}{m} F(\tau) e^{-i\omega\tau}|$.

则t从$-\infty$到$+\infty$, 总能量转移 $E = \frac{1}{2m}|\int_{-\infty}^{\infty} d\tau F(\tau)e^{-i\omega\tau}|^2$.

*多自由度受迫振动. $L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k$. 代入简正坐标, $x_k = A_k^{(\alpha)} m_\alpha^{-\frac{1}{2}} a_\alpha$ 得

$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot a_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 a_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t) a_\alpha$. 其中 $f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t)[\bar A(\bar A^T M \bar A)^{-\frac{1}{2}}]_{k\alpha}$.

$\ddot a_\alpha + \omega_\alpha^2 a_\alpha = f_\alpha(t)$ 去耦合化.

阻尼振动 一般复杂(介质运动、物体与介质内部热状态). 质点速度较小时, 近似为黏滞阻力 $f = -\alpha\dot x$.

运动方程: $m\ddot x = -kx - \alpha\dot x$. 记 $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. $\frac{\alpha}{m} = 2\lambda$. $\ddot x + 2\lambda\dot x + \omega_0^2 x = 0$.

特征方程: $r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$. 通解为 $x = c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ $r_{1,2} = -\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$.

$\lambda<\omega_0$时, $x = \mathrm{Re}\{A\exp(-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t)\}$ $A\in\mathbb{C}$ 或 $x = ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t+\alpha)$.

记 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$, $\lambda\ll\omega_0$时在一个周期$2\pi/\omega$内, 振幅几乎不变. 则 $E\approx e^{-2\lambda t}(\frac{1}{2}m\dot x_0^2+\frac{1}{2}k x_0^2)$

$x_0 = a\cos(\omega t+\alpha)$ 一个周期内 $\bar E \approx e^{-2\lambda t}E_0$ E_0是$t=0$时能量.

$\lambda>\omega_0$时, $x = c_1\exp[(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t] + c_2\exp[(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t]$ (非周期阻尼, 过阻尼).

$\lambda=\omega_0$时 $x=(a_1+a_2t)e^{-\lambda t}$. 临界阻尼.

受迫阻尼振动. $\ddot x + 2\lambda\dot x + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}$. 特解令 $x = Be^{i\gamma t}$ $B = \frac{f}{m(\omega_0^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma)} = be^{i\delta}$

其中 $b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$ $\tan\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-\omega_0^2}$. 则方程解 = 齐次通解 + 特解.

参变共振. $\ddot x + \omega^2(t)x = 0$

参数$\omega(t)$随时间周期变化 $\omega(t+T)=\omega(t)$. 参数振子, 希尔方程.

记方程两个独立解为$x_1(t)$ $x_2(t)$ 由参数周期性条件 $x_1(t+T)$和$x_2(t+T)$也是方程的解. 从而

$$\begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$ 假设V可对角化, $P^{-1}VP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$

考虑新的解 $P^{-1}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ 作为 $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$ ~~对新的解~~ 有 $x_1'(t+T)=\mu_1 x_1'(t)$ $x_2'(t+T)=\mu_2 x_2'(t)$.

注:下面略去上角标'!

也可改写为 $x_1(t) = \mu_1^{t/T}\Pi_1(t)$, $x_2(t) = \mu_2^{t/T}\Pi_2(t)$. 其中$\Pi_1(t)$与$\Pi_2(t)$是周期为T的函数.

讨论μ_1与μ_2性质: $\ddot x_1+\omega^2(t)x_1=0$ $\ddot x_2+\omega^2(t)x_2=0$ $\Rightarrow x_2\ddot x_1 - x_1\ddot x_2 = 0$

$\Rightarrow \dot x_1x_2-\dot x_2x_1 = const$. ~~$\Rightarrow \mu_1\mu_2=1$~~ 由$x_1, x_2$线性无关, 常数不为0.

则 $\dot x_1(t)x_2(t)-\dot x_2(t)x_1(t) = \mu_1\mu_2[\dot x_1(t)x_2(t)-\dot x_2(t)x_1(t)]$ $\Rightarrow \underline{\mu_1\mu_2=1}$

例 $\ddot{x}+\omega^2(t)x=0$. 设 $\omega(t)$ 偏离 ω_0 很小，$\omega^2(t)=\omega_0^2(1+f(t))$. 其中 $f(t)=4h\cos 2\gamma t$ $0<h\ll 1$.

当 $\gamma\sim\omega_0$ 时参变共振最强烈 设 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$ $\varepsilon\ll\omega_0$.

$h=0$ 时 $x=a\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t$. $h\neq 0$, $h\ll 1$ 时 设 $x=a(t)\cos\omega_0 t+b(t)\sin\omega_0(t)$.

其中 $a(t)$ 与 $b(t)$ 随时间缓变。把试探解换为 $x=a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t$.

$\ddot{x}\approx(-\gamma^2 a+2\dot{b}\gamma)\cos\gamma t+(-\gamma^2 b-2\dot{a}\gamma)\sin\gamma t$. (略去 $\ddot{a}$ 和 $\ddot{b}$)

代回原方程，并略去三倍频 (3γ) 项，得

$$[a(\omega_0^2-\gamma^2)+2\dot{b}\gamma+2a\omega_0^2h]\cos\gamma t+[b(\omega_0^2-\gamma^2)-2\dot{a}\gamma-2b\omega_0^2h]\sin\gamma t=0.$$

由 a 与 b 缓变，要求系数为 0，即 $a(\omega_0^2-\gamma^2)+2\dot{b}\gamma+2a\omega_0^2h=0$. $b(\omega_0^2-\gamma^2)-2\dot{a}\gamma-2b\omega_0^2h=0$.

令 $a(t)=a_0e^{st}$ $b(t)=b_0e^{st}$. 得 $\begin{cases}(\omega_0^2-\gamma^2+2\omega_0^2h)a_0+2s\gamma b_0=0\\(\omega_0^2-\gamma^2-2\omega_0^2h)b_0-2s\gamma a_0=0\end{cases}$. 系数行列式为 0，

则 $s^2=\dfrac{\omega_0^4h^2}{\gamma^2}-\dfrac{(\omega_0^2-\gamma^2)^2}{4\gamma^2}\approx\omega_0^2h^2-\varepsilon^2$. 即 s 是个 $O(\omega_0 h)$ 的小量，与假设一致

发生参变共振需要 s 为实数 $\Rightarrow |\varepsilon|<\omega_0 h$. 其中 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$.

即参变共振以 $\gamma=\omega_0$ 为中心，频率宽度范围 $\Delta\gamma=2\omega_0 h$ 内都会发生.

3γ 项远离固有频率，因此可忽略其效应

在以 $\gamma=\omega_0/n$ $(n=2,3,\cdots)$ 为中心的一定频率宽度内也会发生参变共振，但频率宽度更小.

如果存在阻尼，是否参变共振由 $e^{(s-\lambda)t}$ 决定，λ 是阻尼系数。能参变共振需要 $|\varepsilon|<\sqrt{\omega_0^2h^2-\lambda^2}$

参数 h 需满足 $h>\lambda/\omega_0$

$y=\eta\cos\omega t$. ~~丢~~ 当

$h\ll 1$ $h=\frac{\omega^2\eta}{4g}$ $\omega_0^2=g/l$ $\eta\ll l$ $\theta(t)=A_0\cos\Lambda t$

又: $\ddot{\theta}+\omega_0^2(1+4h\cos\omega t)\theta=0$. 考察 $\omega\gg\omega_0$ 的情形 设低频模式频率为 Λ.

考虑 Λ 模式与 $\cos\omega t$ 耦合，设 $\theta(t)=A_0\cos\Lambda t+A_{1m}\cos(\omega-\Lambda)t+A_{1p}\cos(\omega+\Lambda)t$.

再进一步耦合，会有 $\cos(n\omega\pm\Lambda)t$ 项，只保留最低频项. 代入运动方程： $(A_{1m}, A_{1p}\ll A_0)$

悬点高频振动的单摆

$$[(\omega_0^2-\Lambda^2)A_0+2h\omega_0^2(A_{1m}+A_{1p})]\cos\Lambda t+\{[\omega_0^2-(\omega-\Lambda)^2]A_{1m}+2h\omega_0^2A_0\}\cos(\omega-\Lambda)t$$
$$+\{[\omega_0^2-(\omega+\Lambda)^2]A_{1p}+2h\omega_0^2A_0\}\cos(\omega+\Lambda)t=0$$

要求各项的系数为 0，要求 A_0, A_{1m}, A_{1p} 有非零解，得到

$$\omega^4\omega_0^2+(8h^2-2)\omega^2\omega_0^4+(1-8h^2)\omega_0^6-[\omega^4+(3-8h^2)\omega_0^4]\Lambda^2+(2\omega^2+3\omega_0^2)\Lambda^4-\Lambda^6=0$$

记 $\chi=\eta/l\ll 1$，则 $h=\frac{1}{4}\chi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$. 代入得

$$\tfrac{1}{2}\chi^2\omega^6+(1-\tfrac{1}{2}\chi^2)\omega^4\omega_0^2-2\omega^2\omega_0^4+\omega_0^6-[(1-\tfrac{1}{2}\chi^2)\omega^4+3\omega_0^4]\Lambda^2+(2\omega^2+3\omega_0^2)\Lambda^4-\Lambda^6=0.$$

考虑 $\chi\ll 1$，$\omega\gg\omega_0,\Lambda$. 仅保留 ω^6 项与 ω^4 项. 得到

$\Lambda^2\approx\omega_0^2+\frac{\chi^2}{2}\omega^2$.   表明：低频发生变化.

若平衡位置在悬点正上方，只需将运动方程中 $\omega_0^2\to-\omega_0^2$，h 是正是负对 Λ 无影响.

则 $\Lambda^2=-\omega_0^2+\frac{\chi^2}{2}\omega^2$. 表明：若 $\chi>\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}$，系统可以在上平衡位置做单摆振动.

~~$f \ll \left|\frac{dV}{dq}\right|$ 从而高频振动是微弱的。~~

快速交变场中质点的运动．在不变场 $V(q)$（不随 t 改变）中做一维运动的粒子受高频变化力的影响．

$f(q,t) = h(q)\cos(\omega t+\varphi)$．　高频：粒子在 $V(q)$ 作用下运动，其位置在 $2\pi/\omega$ 的多个周期内无显著变化．

$m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq} + f$．　设 $q(t) = X(t) + x(t)$．其中 $x(t)$ 对应高频微振动，$X(t)$ 对应~~低频~~平均掉高频微振动得到的平稳振动。（$X(t) = \overline{q(t)}$，平均是在 $2\pi/\omega$ 的多个周期内求平均）

得 $m\ddot{X} + m\ddot{x} = -\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=X} - x\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=X} + f(X,t) + x\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{q=X}$.

（摘出高频变化项）．

$x(t)$ 需满足：$m\ddot{x} = -x\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=X} + f(X,t) + x\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{q=X}$.　其中 $x\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{q=X}$ 是小量，略去．

记 $m\omega_0^2 = \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=X}$．则 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(X,t)}{m} = \frac{h(X)}{m}\cos(\omega t+\varphi)$．得 $x(t) = -\frac{f(X,t)}{m(\omega^2-\omega_0^2)}$.

（对上述方程取平均）．

$X(t)$ 需满足：$m\ddot{X} = -\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=X} + \overline{x\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{q=X}} = -\frac{dV(X)}{dX} - \frac{1}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dV_{eff}}{dX}$.

其中 $V_{eff} = V(X) + \frac{1}{2m(\omega^2-\omega_0^2)}\overline{f^2(X,t)}$.

三维情形下 $-\frac{1}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\overline{\vec{f}\cdot\nabla\vec{f}} = -\frac{1}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\left[\frac{1}{2}\overline{(\nabla f)^2} - \overline{f\times(\nabla\times f)}\right]$.

若 $\nabla\times\vec{f}=0$，比如 f 是有势力，则 $V_{eff} = V(\vec{r}) + \frac{1}{2m(\omega^2-\omega_0^2)}\overline{(\nabla f)^2}$.

拉氏力学 / 哈氏力学 本质：从所有可能运动中找出实际运动。 拉氏力学是给定两端的 q, t. $\dot q$ 任意，

L函数中 q 与 $\dot q$ 互相独立，对广义坐标变分寻求 $q(t)$ 规律 $\dot q$ 与 q 有先天关联，$\dot q = \frac{dq(t)}{dt}$ （在 $s+1$ 维空间变分）

哈密顿力学 $H(q,p,t)$ q,p 独立. 对 q,p 变分，$\delta q, \delta p$ 依然独立.（在 $2s+1$ 维相空间中）.

H 不是任意的，是由 L 通过勒让德变换得来. 勒让德变换是利用微分形式对函数变量进行替换，$dL(q,\dot q,t) = A\,dq + B\,d\dot q + C\,dt$. 令 $L(q,\dot q,t) - p\dot q = H$. 其中 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$.

则 $dH = dL - \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q - \dot q\,dp = A\,dq - \dot q\,dp + C\,dt = dH(q,p,t)$.

其中利用一阶微分形式不变性.

泊松括号 用来描述力学量的时间变化率. $\frac{df(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial t}$.

定义力学系统两个力学量 $f(q,p,t)$ 与 $g(q,p,t)$ 间的泊松括号为

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}$$

因此，$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f,H]$. 又有 $[q_k, q_l] = 0$ $[p_k, p_l] = 0$ $[q_k, p_l] = \delta_{kl}$.

如果 $[f,g]=0$，称 f 和 g 是相容的（或对易的）

性质：$[f,C] = 0$.（C 为常数）

$[f,g] = -[g,f]$ （反对称性）

$[f,f] = 0$.

$[f, \sum_i c_i g_i] = \sum_i c_i [f, g_i]$.（分配律）

$[f, g_1 g_2] = g_1[f,g_2] + [f,g_1]g_2$ （结合律）

$\frac{\partial}{\partial t}[f,g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$ （微商法则）

$[q_k, f] = \frac{\partial f}{\partial p_k}$ $[p_k, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$

雅可比恒等式：$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$

证明：记 $[g,h] = D_g h$，其中 $D_g = \frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}$.

$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] = D_f D_g h - D_g D_f h = (D_f D_g - D_g D_f)h$

而 $(D_f D_g - D_g D_f)h$ 结果中不含 h 的二阶偏导。

同理，所有的二阶偏导项为0，从而为0. #.

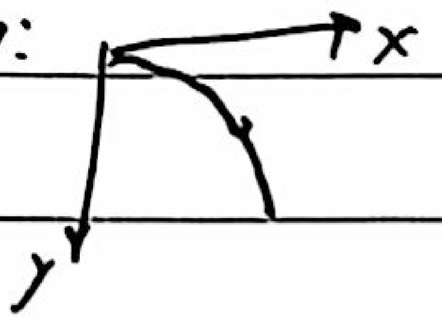
泊松定理 对两个守恒量 f, g. 它们的泊松括号 $[f,g]$ 也是守恒量

证：由 $[[f,g],H] + [[g,H],f] + [[H,f],g] = 0$. 而 $[g,H] = -\frac{\partial g}{\partial t}$

$[f,H] = -\frac{\partial f}{\partial t}$. 因此 $[[f,g],H] = +[\frac{\partial g}{\partial t}, f] - [\frac{\partial f}{\partial t}, g] = -\frac{\partial}{\partial t}[f,g]$. #.

例如，$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k$. M 是角动量.

注意，上面提到的守恒量，不依赖于系统的初始状态。与之对应地，有可能出现偶然守恒，即在特定初始条件下才守恒，不适用泊松定理。

例如:  对平抛 $H=\frac{p^2}{2m}-mgy$. $M_x = yp_z - zp_y = 0$ $M_y = zp_x - xp_z = 0$.
但 M_z 不守恒。原因：M_x是偶然守恒，仅在初始条件中 $z=0$，$p_z=0$ 时才守恒。

开普勒问题 LRL矢量 $A_i = \epsilon_{ijk} p_j M_k - mk\frac{x_i}{r}$ 定义 $\vec{D} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{2m|E|}}$.

则 $[D_i, M_j] = \epsilon_{ijk} D_k$. $[D_i, D_j] = -\frac{H}{|E|}\epsilon_{ijk}M_k$.

$E<0$时得 $[D_i, D_j] = \epsilon_{ijk}M_k$.

正则量子化 在海森堡绘景中，$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{H}]$. [,]类似经典力学的泊松括号：

$[A, B]_c \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]_q$. 下标c,q区分经典和量子，其中$[\hat{A},\hat{B}]_q = \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$

$[\hat{q}_i, \hat{q}_j]=0$ $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]=0$ $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ ⇒ 不确定性关系.

正则变换 原因①坐标变换(直角/球/柱) ②广义坐标选取方式不同⇒循环坐标个数不同

哈密顿力学中对称性、自由度更高，可进行更广范围变换操作

$\begin{cases} P_k = P_k(q,p,t) \\ Q_k = Q_k(q,p,t) \end{cases}$ 若变换后的动力学方程仍是哈密顿正则方程，称这类变换为正则变换。要得到以P_k, Q_k描述的真实运动(故导运动，见诺特定理)。

一般变换后新的哈密顿量 ~~K(Q,P,Q)~~ $K(Q,P,t) \neq H(q,p,t)$ 由相空间哈密顿原理

$\delta\int_{t_1}^{t_2}[p_k\dot{q}_k - H(q,p,t)]dt = 0$ $\delta\int_{t_1}^{t_2}[P_k\dot{Q}_k - K(Q,P,t)]dt = 0$

⇒ $p_k dq_k - P_k dQ_k + (K-H)dt = dU$. 其中U是关于$q,p,t$(或$Q,P,t$)的任意函数.

满足上式的变换($q\to Q$, $p\to P$, $H\to K$)称为正则变换。U决定正则变换，称为正则变换的母函数。$U(q_k, Q_k, t)$称为第一类母函数，记为$U_1(q_k, Q_k, t)$.

则：$p_k = \frac{\partial U(q_k, Q_k, t)}{\partial q_k}$ $P_k = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial Q_k}\right)_{q_k,t}$. $K-H = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{q_k, Q_k}$.

仅当U不显含时间时 $K=H$.

对U_1作勒让德变换得到其他母函数. 如 $U_2 = U_1 - p_k q_k = U_2(p_k, Q_k, t)$

$dU_2 = -q_k dp_k - P_k dQ_k + (K-H)dt$. 即 $q_k = -\left(\frac{\partial U_2}{\partial p_k}\right)_{Q_k,t}$ $P_k = -\left(\frac{\partial U_2}{\partial Q_k}\right)_{p_k,t}$ etc.

$U_3(q_k, P_k, t) = U_1(q_k, Q_k, t) + P_k Q_k$. $U_4(p_k, P_k, t) = U_1(q_k, Q_k, t) - p_k q_k + P_k Q_k$.

U_1, U_2, U_3, U_4描述了同一种正则变换

例：恒等变换 $U_3(q,P,t) = q_k P_k$. $p_k = \frac{\partial U_3}{\partial q_k} = P_k$. $Q_k = \frac{\partial U_3}{\partial P_k} = q_k$

单位变换 $U_3(q,P,t) = \alpha q_k P_k$. $p_k = \alpha P_k$. $Q_k = \alpha q_k$. 即广义坐标变为原来的α倍，广义动量变为原来的$\frac{1}{\alpha}$.

因为 $K=H$，哈密顿函数量纲不变、长度单位变为原来 $1/\alpha$，要求时间单位变为原来的 $1/\alpha^2$

或质量单位变为原来 α^2 倍

点变换 $U_3 = f_k(q_1,\cdots q_s,t)P_k$ $\quad Q_k = \frac{\partial U_3}{\partial P_k} = f_k(q_1,\cdots q_s,t)$ $\quad p_k = \frac{\partial f_k}{\partial q_i}P_i$.

即位形空间的坐标变换 不能用 $U_1(q,Q,t)$ 来给出，因为 $U_1(q,Q,t)=0$.

即并非所有变换 均有4种类型的母函数

满足 $U_1\equiv 0$ 的变换，称为马丢变换

坐标-动量~~变换~~互换 $U_1(q,Q,t) = q_k Q_k$ $\quad p_k = \frac{\partial U_1}{\partial q_k} = Q_k$ $\quad P_k = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_k} = -q_k$

相似变换 (i) $Q=\alpha q$ $\quad P=\beta p$. $K=\alpha\beta H$. $\qquad$ (ii) $Q=\mu p$ $\quad P=\nu q$ $\quad K=-\mu\nu H$

验证：$\dot{Q} = \alpha\dot{q} = \alpha\frac{\partial H}{\partial p} = \alpha\beta\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial K}{\partial P}$ $\quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$ 满足正则方程，是正则变换

但若 $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ 则 $K=H$，与 $K=\alpha\beta H$ 在 $\alpha\beta\neq 1$ 时矛盾。原因是相空间哈密顿原理等价性一般

刻画为：$\lambda[p_k\dot{q}_k - H(q,p,t)] - [P_k\dot{Q}_k - K(Q,P,t)] = \frac{dU}{dt}$.

称 λ 是变换的价。$\lambda=1$ 称为单价变换。$\lambda\neq 1$ 看成单价变换与相似变换的合成。

默认变换是单价的。

泊松括号在正则变换下的不变性 $\qquad$ 即 $[f,g]_{p,q} = [f,g]_{P,Q}$.

引入 $y_i = \begin{cases} q_i, & i=1,\cdots,s. \\ p_i, & i=s+1,\cdots,2s. \end{cases}$ $\quad$ 则 $\dot{y}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial y_j}$. $\quad J = \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & 1_{s\times s} \\ -1_{s\times s} & 0_{s\times s} \end{pmatrix}$ 且 J 是正交的。$(JJ^T=1)$.

对新坐标，$\dot{Y}_i = J_{ij}\frac{\partial K}{\partial Y_j}$ $\quad K = H + \frac{\partial U}{\partial t}$. $\quad \dot{Y}_i = \frac{\partial Y_i}{\partial y_j}\dot{y}_j + \frac{\partial Y_i}{\partial t}$.

定义~~Jacob~~雅可比矩阵 $I_{ij} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_j}$. $\quad \tilde{I}_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial Y_j}$. 对任意力学量

$f(Q,P,t) = f(Q(q,p,t), P(q,p,t), t)$. $\quad \frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial Y_i} I_{ij}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial Y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_i}\tilde{I}_{ij}$.

$\rightarrow \tilde{I}_{ki} I_{ij} = \delta_{kj}$. 即 $\tilde{I} = I^{-1}$. 回到正则方程 $\dot{Y}_i = J_{ij}\left(\frac{\partial H}{\partial Y_j} + \frac{\partial}{\partial Y_j}\frac{\partial U}{\partial t}\right) = J_{ij}\left[\frac{\partial H}{\partial y_k}\tilde{I}_{kj} + \frac{\partial}{\partial Y_j}\frac{\partial U}{\partial t}\right]$

$\dot{Y}_i = J_{ij}\left[(J^{-1})_{kl}\dot{y}_l\tilde{I}_{kj} + \frac{\partial}{\partial Y_j}\frac{\partial U}{\partial t}\right] = J_{ij}[\tilde{I}^T]_{jk}[J^T]_{kl}\dot{y}_l + J_{ij}\frac{\partial}{\partial Y_j}\frac{\partial U}{\partial t}$.

又 $\dot{Y}_i = \frac{\partial Y_i}{\partial y_l}\dot{y}_l + \frac{\partial Y_i}{\partial t}$. $\quad$ 因此 $[J\tilde{I}^T J^T]_{il} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_l} = I_{il}$. $\Rightarrow J\tilde{I}^T J^T = I$.

或 $J[I^{-1}]^T J^T = I$. 或 $J = IJI^T$. ~~即J在I作用~~ 或是 $IJI^TJ^T=1$

IJ 与 I^TJ^T 互逆，称为偶对性质，这也是正则变换的充要条件

$[f,g]_{p,q} = \frac{\partial f}{\partial y_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial Y_k} I_{ki} J_{ij} I_{lj} \frac{\partial g}{\partial Y_l} = \frac{\partial f}{\partial Y_k}[IJI^T]_{kl}\frac{\partial g}{\partial Y_l} = \frac{\partial f}{\partial Y_k} J_{kl}\frac{\partial g}{\partial Y_l}$

$= [f,g]_{P,Q}$. $\qquad$ 因此，泊松括号在正则变换下具有不变性

因此，$[Q_i,Q_k]_{pq}=0$ $\quad [P_i,P_k]_{pq}=0$ $\quad [Q_i,P_k]_{pq}=\delta_{ik}$ 也可用来判断变换是否是正则变换

(如非单价变换 $\lambda=-1$)

由偶对性质 $I J I^T = J \Rightarrow \det(I I^T) = 1 \Rightarrow \det I = \pm 1$.　　特别对称变换 $\det I = -1$ 存在

若变换可以通过一系列无穷小变换叠加得到 $\det I = 1$. $\Rightarrow$ 导出相空间体积在正则变换下不变.

$$\int dq_1 \cdots dq_f \, dp_1 \cdots dp_f = \int dQ_1 \cdots dQ_f \, dP_1 \cdots dP_f$$

无穷小正则变换. 选取母函数 $U_3 = q_k P_k + \Delta a_s G_s(q,p,t)$. 其中 $G_s(q,p,t)$ 是生成元, Δa_s 是无穷小参数.

$$\Rightarrow p_k = \frac{\partial U_3}{\partial q_k} = P_k + \Delta a_s \frac{\partial G_s}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial U_3}{\partial P_k} = q_k + \Delta a_s \frac{\partial G_s}{\partial P_k}.$$

保留一阶项, 有 $\frac{\partial G}{\partial P_k} \approx \frac{\partial G}{\partial p_k} + O(\Delta a_s)$　　$U_3 \approx q_k P_k + \Delta a_s G_s(q,p,t)$.

相空间新旧坐标变换意味着相空间坐标点的无穷小位移: $\Delta q_k = Q_k - q_k$　$\Delta p_k = P_k - p_k$.

$$\Rightarrow \Delta q_k = \Delta a_s \frac{\partial G_s}{\partial p_k} = \Delta a_s [q_k, G_s]. \qquad \Delta p_k = -\Delta a_s \frac{\partial G_s}{\partial q_k} = +\Delta a_s [p_k, G_s].$$

例一. $G(q,p,t) = p_k$.　$\Delta p_i = 0$　$\Delta q_i = \Delta a \delta_{ik}$. (对应位形空间平移操作).　　$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$

例二. $G(q,p,t) = H(q,p,t)$.　$\Delta a = \Delta t$.　　则 $\Delta q_k = \Delta t \frac{\partial H}{\partial p_k}$　$\Delta p_k = -\Delta t \frac{\partial H}{\partial q_k}$ $\Rightarrow$ $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

即正则方程. (这里不应该看成正则方程的推导, 而是后验的. 举例: 取 Δa 为其他参数).

讨论: 以 H 构造母函数, 以 Δt 为参数, 这样的无穷小正则变换描述力学系统在 Δt 时间内演化.

如果将有限时间内的变换视为无穷小变换的叠加 $\Rightarrow$ 力学系统正则变量在 t 的值可以由 $t=t_0$ 的

初始值通过正则变换 (t 的函数) 得到　　$t=t_0$ p, q. $\Rightarrow$ $t=t$, $p(t)$ $q(t)$.

又, 力学系统的正则变量在时刻 t 的值, 也可以通过正则变换变成其初始值, 其初始值为常数.

即: 若找到这样的正则变换, 就解决了系统的动力学问题. (见梭扼).

设力学量 $u(q,p)$ 不显含时间. $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial u}{\partial p_k}\Delta p_k = \Delta a_s \left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial G_s}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial G_s}{\partial q_k}\right) = \Delta a_s [u, G_s]$.

取 $u = H(q,p)$.　$\Delta H = \Delta a_s [H, G_s]$.　$\Rightarrow$ 哈密顿力学下的诺特定理!

在无穷小正则变换操作下, $H(q,p)$ (不显含 t) 保持不变 (指将 H 视为函数是映射时, $H(q+\Delta q, p+\Delta p) = H(q,p)$).

$\Longleftrightarrow$ G_s 为守恒量 (假设 G_s 不显含 t). 其中 G_s 是无穷小变换生成元.

~~另一方面, 每个 G_s 给出一种无穷小正则变换~~

例: LRL 矢量 A_i. 定义 ~~U_3~~ $U_3 = q_k P_k + \Delta a_i A_i$　　$\Delta q_i = \Delta a_j [q_i, A_j]$　$\Delta p_i = \Delta a_j [p_i, A_j]$.

其中 $[q_i, A_j] = \frac{\partial A_j}{\partial p_i} = 2 p_i q_j - q_i p_j - (\vec{p} \cdot \vec{q}) \delta_{ij}$.

$$[p_i, A_j] = -\frac{\partial A_j}{\partial q_i} = -\left[p^2 \delta_{ij} - p_i p_j - mk \frac{\delta_{ij}}{q} + mk \frac{q_i q_j}{q^3}\right]$$

注意　由 G_s 不显含时间推出 $K = H$ 只说明了变换前后 H ~~是同一函数形式不变~~ 在同一值 (q,p,Q,P) 相等, 与 $\Delta H = 0$ 不同.　　附带 H 形式不变, 即函数形式不变.

~~哈密顿主函数~~: 希望找到一种正则变换, 使得新的哈密顿函数 $K(Q,P,t) = \text{Const}$ 不妨令 $K=0$.

则 $\dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k} = 0$　$\dot{Q}_k = 0$　即前面所述的正则变换。

对应母函数满足 $K-H=\frac{\partial U_3}{\partial t}$ ⇒ $H(q,p)+\frac{\partial U_3(q,P,t)}{\partial t}=0$. 利用 $p_k=\frac{\partial U_3(q,P,t)}{\partial q_k}$.

⇒ 哈密顿-雅可比方程 $H(q_k,\frac{\partial U_3}{\partial q_k},t)+\frac{\partial U_3}{\partial t}=0$. (HJE) 它是一阶非线性偏微分方程.

满足HJE的解称为哈密顿主函数，记为 $S(q,P,t)$ 其中 $\alpha_k=\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_k}$ 同时 α_k 为常数.

由系统初始条件得到 反解出 q_k 关于 P,α 和 t 的表达式.

~~对于一阶~~ HJE 有 $s+1$ 个导数 ⇒ HJE 有 $s+1$ 个积分常数. 考虑到若 S 是HJE的解，则 $S+A$ 也是HJE的解.

省去这一平凡的常数，称 $S(q,P,t)$ 依赖于 s 个积分常数 $C_1,\cdots,C_s$. 则可以把 P_k 取为 C_k. 于是 S 的形式写为

$S(q_1,\cdots q_s;C_1,\cdots,C_s;t)+A$.

$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial S}{\partial t}=p_k\dot{q}_k-H=L$. ⇒ $S=\int L\,dt$ 正好是作用量.

总结 1. 求出 H 写 HJE.
2. 求 HJE的解 S，包含 $s+1$ 个积分常数 C_k 和 A.
3. 以 C_k 为新广义动量，利用 $\alpha_k=\frac{\partial S}{\partial C_k}$ 得到新的广义坐标 (为常数).
4. 反解出 旧的广义坐标 q_k 作为 $2s$ 个任意常数和时间 t 的函数.

若 H 不显含时间，$H(q,p)=E$. 可以把HJE分离变量：$S(q,P,t)=W(q,P)+f(t)$ 代入HJE.

⇒ $H(q,\frac{\partial W}{\partial q})=-f'(t)$ = 与 q 和 t 无关的常数 $=E$.

⇒ HJE化为 $H(q_1,\cdots,q_s,\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_s})=E$ $f(t)=-Et$. 其中 W 称为哈密顿特征函数.

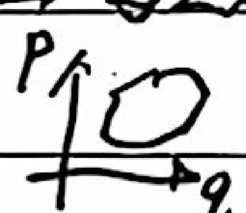
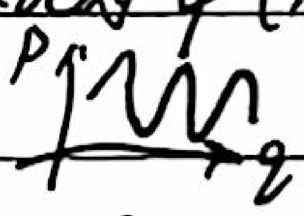
若 q_1 和 $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ 在HJE中以某种组合 $\varphi(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1})$ 方式出现 ⇒ 分离变量 $S=S'(q_i,t)+S_1(q_1)$.

⇒ $\varphi(q,\frac{dS_1}{dq_1})=C_1$.

周期性运动

绝热不变量 若系统参数缓慢变化. 定义 $J=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$. J 称为绝热不变量/作用变量

若把作用变量 J 视为广义动量，与之对应的广义坐标记为 ψ (角变量).

周期性运动分为：摆动模式  转动模式 

保守系统(H不显含t). $p=p(q,E)$. 把 E 替换为 J (例：谐振子 $J=E/\omega$). $p=p(q,J)$.

J 可视为新的广义动量，⇒ $K(\psi,J)=H(p,q)=H(p(q,J),q)=E(J)$.

即 ψ 为循环坐标. 旧的 $\{q,p\}$ 和新的 $\{\psi,J\}$ 之间可以用哈密顿特征函数 $W(q,J)$ 连出

$\psi=\frac{\partial W}{\partial J}$ $p=\frac{\partial W}{\partial q}$. 哈密顿正则方程：$\dot{\psi}=\frac{\partial K(J)}{\partial J}=\alpha(J)=const.$ ⇒ $\psi=\alpha t+\beta$

系统运动一周期，ψ 变化：$\Delta\psi=\oint\frac{\partial\psi}{\partial q}dq=\oint\frac{\partial^2 W}{\partial J\partial q}dq=\frac{\partial}{\partial J}\oint\frac{\partial W}{\partial q}dq=2\pi\frac{\partial}{\partial J}J=2\pi$.

因此称 ψ 为角变量. $\alpha=2\pi/T=\omega$.

更一般：多自由度体系，每个自由度作周期运动（每一对正则变量各自作周期变化）。

$W(q_1, \cdots q_s, E, c_2, \cdots c_s)$ 可分离变量。$W = \sum_k W_k(q_k; E, c_2, \cdots, c_s)$。

将 J_k 作为新的广义动量 $J_k = \frac{1}{2\pi}\oint p_k\, dq_k$。$p_k = \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_j W_j = \frac{\partial}{\partial q_k} W_k(q_k; E, \cdots)$。

J_k 也是常数。反过来，$E, \cdots, c_s$ 也可用 $J_1, \cdots, J_s$ 表达。

$W = \sum_k W_k(q_k; J_1, J_2, \cdots, J_s)$。对应 $\Psi_k = \frac{\partial}{\partial J_k}\sum_j W_j(q_j, J_1, \cdots, J_s)$ 无穷小

讨论：每个 q_j 有微小变化，贡献到 Ψ_k 中，有 $\delta\Psi_k = \sum_j \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \frac{\partial^2 W}{\partial J_k \partial q_j} dq_j$。
（而 $J_1, \cdots, J_s$ 不变）。

经过一定周期后，$\Delta\Psi_k = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_k}\oint_{m_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_k}(2\pi m_j J_j) = 2\pi m_k$。

其中假设可以取一定时间，使各个坐标 q_j 都运动了周期的 m_j（整数）倍。

考察作用变量的绝热不变性　H 哈密顿量 $H = H(q, p, \lambda)$。暂假设 λ 为常数

$\Rightarrow W(q, J, \lambda) = \sum_k W_k(q_k, J, \lambda)$。正则变换后新的哈密顿函数记为 $K_0(J, \lambda) = H(p(q, J), q, \lambda)$。

只显式依赖于 J（和 λ）此时 Ψ 为循环坐标。

1. 采用 $U_1(q, \Psi, \lambda) = W(q, J, \lambda) - J_k\Psi_k$ 利用 U_1 构建新哈密顿量的关系

$K_0(J, \lambda) = H(q, p, \lambda) + \frac{\partial}{\partial t}U_1(q, \Psi, \lambda) = H(q, p, \lambda)$

2. 论证 U_1 为周期性函数。$dU_1 = p_k\, dq_k - J_k\, d\Psi_k$。假设可以分离变量，考察对 U_1 各自由度

可以单独分开处理。第 k 个自由度：$\oint dU_1 = \oint p_k dq_k - \oint J_k d\Psi_k = 2\pi J_k - 2\pi J_k = 0$

即 $U_1(q_k, \Psi_k + 2\pi) = U_1(q_k, \Psi_k)$

3. 考虑 λ 随 t 变化，$\Rightarrow H \neq K$，J 不再是常数，Ψ 也不再是循环坐标。

$K(\Psi, J, \lambda) = \cancel{H(p, q, \lambda)}\ H(q, p, \lambda) + \frac{\partial}{\partial t}U_1(q, \Psi, \lambda) = K_0(J, \lambda) + \frac{\partial}{\partial t}U_1(q, \Psi, \lambda)$。

由正则方程，$\dot{J}_k = -\frac{\partial K}{\partial \Psi_k} = -\frac{\partial^2 U_1}{\partial \Psi_k \partial \lambda}\dot{\lambda}$。对 $\dot{J}_k$ 在一个周期内平均，可以用

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{J}_k\, d\Psi_k$ 表示。Ψ_k 近似随 t 线性增长。$\Psi_k \simeq \frac{2\pi}{T_k}t + \beta$。

$\langle \dot{J}_k \rangle \cancel{T_k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{J}_k d\Psi_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \Psi_k \partial \lambda}\dot{\lambda}\, d\Psi_k \overset{?}{=} -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}\dot{\lambda}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}\ddot{\lambda}\frac{T_k}{2\pi}d\Psi_k$。

$(\ddot{\lambda}T_k = o(\dot{\lambda}))$。

☆ 假设 $\ddot{\lambda}T_k$ 为高阶小量（即 $\dot{\lambda}$ 几乎不随时间变化）。对第一项，$\dot{\lambda}$ 不随时间变化，改写为 $\dot{\lambda}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}\Big|_0^{2\pi}\right)$。

在 λ 缓慢下，则 U_1（与 $\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}$）周期性近似成立，$\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}\Big|_0^{2\pi} = \cancel{o(\dot{\lambda})}\ O(\dot{\lambda})$

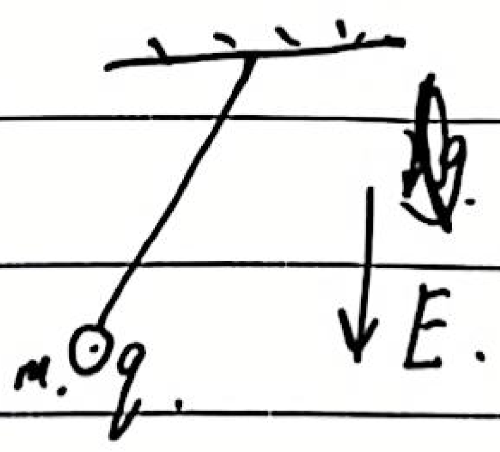
综上，$\langle \dot{J}_k \rangle$ ~~$=O$~~ $= o(\dot{\lambda})$　即 $\dot{\lambda}$ 一阶近似下，$\langle \dot{J}_k \rangle = 0$，$J_k$ 几乎不变。

例. 磁矩. 带电粒子在近均匀磁场中运动　$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}(p_\theta - \frac{1}{2}eBr^2)^2 + \frac{p_z^2}{2m}$。

$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\theta\, d\theta = p_\theta$。不考虑磁场变时 $J_\theta = p_\theta = -\frac{eB}{2}r^2$。横向

现考虑磁场沿 z 方向缓慢变化。$J_\theta = -\frac{eB}{2}r^2$ 为绝热不变量。粒子动能 $T_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2 = -\frac{eBJ_\theta}{m}$。

补充：减质量振子。现在考虑质量为m的冰振子，但冰在融化（融化速度很慢且保持不变），且融化部分与冰无相对速度，则由 $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}$，其中相对速度 $\vec{u}=0$。故微动力学方程仍为 ~~mgl~~ $\cancel{ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0}$ 或是



$$\cancel{mg}\ ml^2\ddot{\theta} + qEl\theta = 0.$$

此时 $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}qEl\theta^2$ 不再适用了，因为 $p_\theta = ml^2\dot{\theta}$，由 $\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ 得到

$$\dot{m}l^2\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = -qEl\theta$$ 与动力学方程不符。

但可选取 $L = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\frac{qE}{ml}\theta^2$，仍有：$\ddot{\theta} = -\frac{qE}{ml}\theta$.

此时得到振幅满足：$\frac{A^2}{\sqrt{m}} = const$.

刚体转动　K系为平动系，K'为转动系（固连在刚体上），K系与K'系下矢量 $\vec{A}$ 的坐标为 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$ 与 $A'=\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\\A_3'\end{pmatrix}$.

则
$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1'\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2'\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_3'\cdot\vec{e}_1\\ \vec{e}_1'\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2'\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_3'\cdot\vec{e}_2\\ \vec{e}_1'\cdot\vec{e}_3 & \vec{e}_2'\cdot\vec{e}_3 & \vec{e}_3'\cdot\vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\\A_3'\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\\A_3'\end{pmatrix}.$$
其中 $\cancel{U = \begin{pmatrix}\vec{e}_1'\\\vec{e}_2'\\\vec{e}_3'\end{pmatrix}\cdot(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)}$.

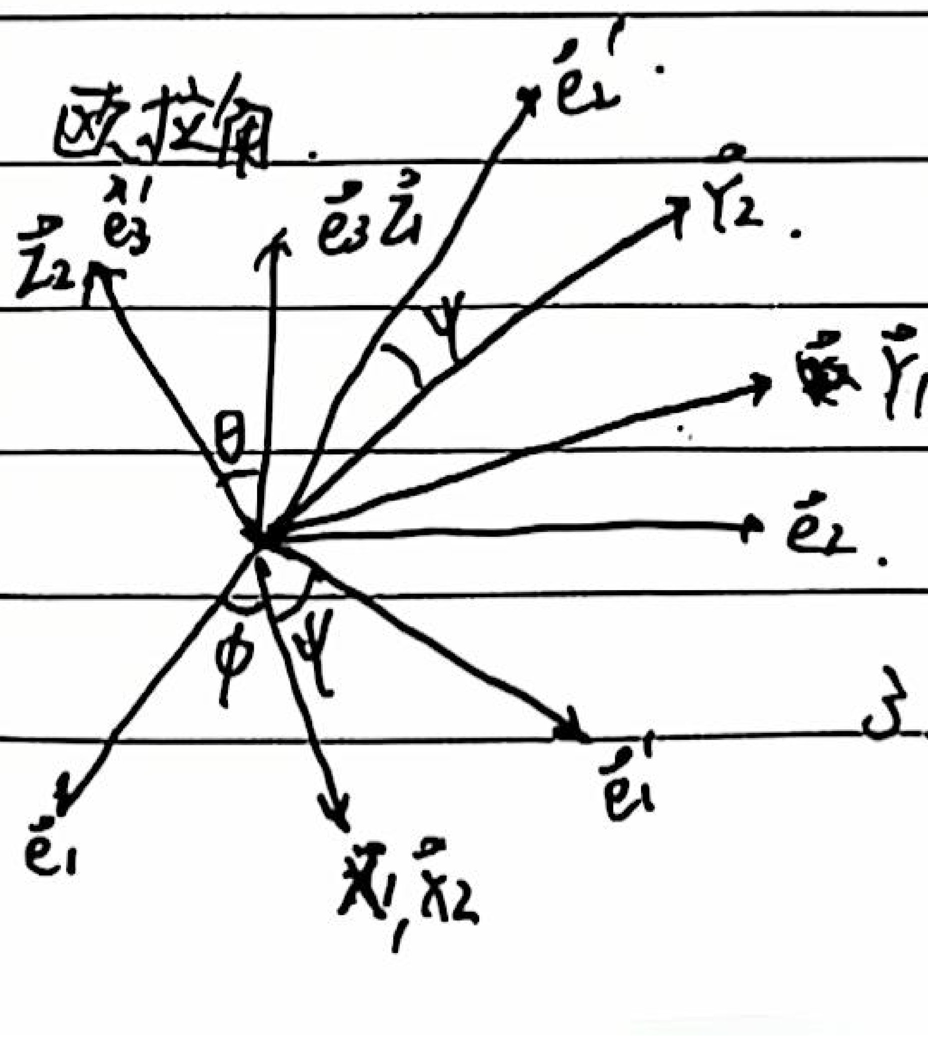
$$U = \begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}(\vec{e}_1'^T\ \vec{e}_2'^T\ \vec{e}_3'^T) \qquad A = UA' \Rightarrow A' = U^TA. \Rightarrow UU^T = U^TU = 1. \quad \det U = \pm 1.$$

（考虑 $(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix} = (\vec{e}_1'^T\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\\A_3'\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1^T\\\vec{e}_2^T\\\vec{e}_3^T\end{pmatrix}(\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\begin{pmatrix}A_1'\\A_2'\\A_3'\end{pmatrix}$，

其中用到了 $(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}\vec{e}_1^T\\\vec{e}_2^T\\\vec{e}_3^T\end{pmatrix} = I$.）

由转动的连续性，$\det U = 1$. 结论：矩阵U有3个本征值，其中有个本征值必为1（代表转轴）。
原因：三次实系数方程，若其中有一个根为复根，其共轭也是方程的根。则另一个根是实根。
由于转动操作不改变矢量大小，实根只能是1.（特殊地，3个本征值也可为1，−1，−1）.
设存在本征矢X，使 $UX = X$，$A' = X$，$A = UA' = A'$. ⇒ 实验室系下观察，刚体上的点没有动 ⇒ A点位矢方向即转动轴方向.

欧拉角.



1. 绕 $\vec{e}_3$ 轴转 ϕ.
$$(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) = (\vec{x}_1\ \vec{y}_1\ \vec{z}_1)U_1^T. \qquad U_1 = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. 绕 $\vec{x}_1$ 轴转 θ 角
$$(\vec{x}_1\ \vec{y}_1\ \vec{z}_1) = (\vec{x}_2\ \vec{y}_2\ \vec{z}_2)U_2^T \qquad U_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

3. 绕新的 z_2 轴转 ψ 角 为 $\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3'$.
$$(\vec{x}_2\ \vec{y}_2\ \vec{z}_2) = (\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')U_3^T \qquad U_3 = \begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

综合三步， $(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) = (\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\,U_3^T U_2^T U_1^T = (\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\,U^T$ 其

$$U = U_1 U_2 U_3 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

又可记为 $\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

物理上 ψ 表示自转角，$0\sim 2\pi$.

ϕ 表示进动角，$0\sim 2\pi$

θ 表示章动角，$0\sim\pi$.

作为定点转动，$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A}$. $\vec{A} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ $\vec{\omega} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\frac{dU}{dt}\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix} = (\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\,U^T\frac{dU}{dt}\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\omega}\times\vec{A} = \epsilon_{ijk}\,\omega_j' A_k'\,\vec{e}_i' = (\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3' & \omega_2' \\ \omega_3' & 0 & -\omega_2' \\ -\omega_2' & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix}.$$

得到 $\vec{\omega}$ 在体坐标系下展开（用 λ 表示）. $K = U^T\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$. $K_{ij} = \epsilon_{ikj}\lambda_k$.

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = \sin\theta\sin\psi\,\dot\phi + \cos\psi\,\dot\theta$. $\lambda_2 = \sin\theta\cos\psi\,\dot\phi - \sin\psi\,\dot\theta$ $\lambda_3 = \cos\theta\,\dot\phi + \dot\psi$

刚体动力学. 实验室系 K 下，刚体质心 $\vec{r}_c$，选质心为体坐标系 K' 原点. 刚体转动角速度为 $\vec{\omega}$.

则 $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{R}$. $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega}\times\vec{R}$.

刚体动能 $T = \frac{1}{2}\int dm\, \vec{v}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int dm\left[v_c^2 + 2\vec{v}_c\cdot(\vec{\omega}\times\vec{R}) + (\vec{\omega}\times\vec{R})^2\right]$

$= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\int dm\left[\omega^2R^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{R})^2\right]$

定义惯量张量 $\overleftrightarrow{I} = \int dm\,(R^2\mathbb{1} - \vec{R}\vec{R})$ 则 转动动能 $T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\omega}$.

其中 $I_{ij} = \int dm\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$ 为了让转动过程中 $\overleftrightarrow{I}$ 不变，在体坐标系内展开 $\overleftrightarrow{I}$.

角动量 $\vec{M} = \int dm\,\vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) = \int dm\left[R^2\vec{\omega} - \vec{R}(\vec{R}\cdot\vec{\omega})\right] = \overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\omega}$. $T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{M}$.

由于惯量张量是实对称矩阵，总可以旋转坐标架使惯量张量矩阵对角化，定义惯量主轴.

惯量主轴下有 $M_1 = I_1\lambda_1$ $M_2 = I_2\lambda_2$ $M_3 = I_3\lambda_3$

$T_{rot} = \frac{I_1}{2}(s_\theta s_\psi\dot\phi + c_\psi\dot\theta)^2 + \frac{I_2}{2}(s_\theta c_\psi\dot\phi - s_\psi\dot\theta)^2 + \frac{I_3}{2}(c_\theta\dot\phi + \dot\psi)^2$.

若刚体为对称陀螺 $(I_1 = I_2 \neq I_3)$. $T_{rot} = \frac{I_1}{2}(\sin^2\theta\,\dot\phi^2 + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\cos\theta\,\dot\phi + \dot\psi)^2$.

设参考点相对质心的位矢为 $\vec{a}$. 则有移轴定理：

绕任意点的转动惯量张量满足 $\overleftrightarrow{I}_a = \overleftrightarrow{I}_{cm} + m(\vec{a}^2\overleftrightarrow{I} - \vec{a}\vec{a})$.

动能 $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}_a\cdot\vec{\omega} - \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{a})^2$. 表明：不同参考点下转动动能可以不同。

~~$L = T - V$~~ 只研究转动（定点转动）：

$L = T - V = \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j - V$. E-L方程：$\frac{d}{dt}\vec{M} = -\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \vec{K}$. $\vec{M} = \frac{\partial L}{\partial\vec{\omega}}$.

把物理量在体坐标系下展开 $(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{pmatrix} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{pmatrix}$.

即 $\frac{dU}{dt}\begin{pmatrix}M_1'\\M_2'\\M_3'\end{pmatrix} + U\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}M_1'\\M_2'\\M_3'\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}K_1'\\K_2'\\K_3'\end{pmatrix}$ $U^T\frac{dU}{dt}\begin{pmatrix}M_1'\\M_2'\\M_3'\end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}M_1'\\M_2'\\M_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}K_1'\\K_2'\\K_3'\end{pmatrix}$.

其中 $U^T\frac{dU}{dt} = \sum_i \Omega_i K_i$ $(K_i)_{kl} = \epsilon_{kil}$. 有 $\vec{\omega}\times\vec{M} + \frac{d'}{dt}\vec{M} = \vec{K}$. $\frac{d'}{dt}\vec{M} = (\vec{e}_1'\ \vec{e}_2'\ \vec{e}_3')\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}M_1'\\M_2'\\M_3'\end{pmatrix}$

选取3个惯量主轴为刚体转动的欧拉方程 $M_i' = I_i\Omega_i$.

$$\begin{cases} I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1' \\ I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2' \\ I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3' \end{cases}$$

连续系统的分析力学.

从离散系统出发： k m k m k m k . 设第i个振子偏移 ϕ_i.

$$L = \frac{1}{2}\sum_i[m\dot{\phi}_i^2 - k(\phi_{i+1} - \phi_i)^2]$$

连续系统引入格距 a. $L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\phi}_i^2 - ka\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a}\right)^2\right]$.

$a \to 0$. $\sum_i a \to \int dx$

$$L = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}dx\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]$$ 其中 $Y = \lim_{a\to 0} ka$ 为杨氏模量

作用量 $S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt$.

对S变分：$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]dx\,dt$.

$$= \left[\int_{x_0}^{x_1}\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta\phi\,dx\right]\Big|_{t_0}^{t_1} - \left[\int_{t_0}^{t_1}Y\frac{\partial\phi}{\partial x}\delta\phi\,dt\right]\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - Y\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\delta\phi\,dx\,dt.$$

由时间上 $\delta\phi|_{t_0} = \delta\phi|_{t_1} = 0$ 空间上两端点固定，$\delta\phi|_{x_0} = \delta\phi|_{x_1} = 0$.

$\delta S = 0$. $\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{Y}{\mu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$. (一维波动方程)

小结 对连续系统，x 变为与 t 类似的一个参数 ϕ 为广义坐标. $q_i \to \phi(x,t)$ $i \to x$

推广到三维情形 $\phi = \phi(x,y,z,t)$. $L = \int dx\,dy\,dz\,\mathcal{L}(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}, t, x, y, z)$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x)$ 称为拉氏量密度.

注：对x^μ求完偏导了

作用量 $S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial\phi,x)$ 变分得到

$$\delta S=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\partial_\mu\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi\right]$$

$$=\int d^4x\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)-\int d^4x\left[\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right]\delta\phi.$$

备注 $\frac{d}{dx^\mu}$ 实为偏导，~~注意~~ 目的是与 ∂_μ 区分。~~∂_μ 将 x^μ 与 $\partial_\mu x^\mu$~~

$\frac{d}{dx^\mu}\mathcal{L}$ 将 $\mathcal{L}$ 视为 x^μ 的函数

$\partial_\mu\mathcal{L}$ 将 $\mathcal{L}$ 视为 $\phi,\partial_\mu\phi$ 与 x_μ 的函数。

取特定的初态，末态和边界条件，使第一项为0，得到E-L方程。

$$\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0.$$

连续系统，$\mathcal{L}$ 具有"四维散度"的不确定性，可以$\mathcal{L}$中添加 $\frac{d}{dx^\mu}\Lambda^\mu(\phi,x)$ 而不改变运动方程。

能量动量张量与守恒流。$t\to x^\mu$　$\frac{d\mathcal{L}}{dt}\to\frac{d}{dx^\mu}\mathcal{L}$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\mu\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\frac{d(\partial_\nu\phi)}{dx_\mu}+\partial^\mu\mathcal{L}.$$

$$\stackrel{E\text{-}L}{=}\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi}\right)\partial^\mu\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi}\frac{d\partial_\nu\phi}{dx_\mu}+\partial^\mu\mathcal{L}$$

$$=\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi}\partial^\mu\phi\right)+\partial^\mu\mathcal{L}.$$

因此 $\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi}\partial^\mu\phi-\mathcal{L}g^{\nu\mu}\right)=-\partial^\mu\mathcal{L}$. 若$\mathcal{L}$中不显含时空坐标 x_μ，则 $\frac{dT^{\nu\mu}}{dx^\nu}=0$.

其中 $T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi}\partial^\mu\phi-\mathcal{L}g^{\nu\mu}$ 是一个四维张量，称为能量动量张量。~~又可记为 $\partial_\nu T^{\nu\mu}=0$.~~ 简

特别地，对$\mu=0$时 $\mathcal{H}=T^{00}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\phi}\partial^0\phi-\mathcal{L}$ 为哈密顿量密度，即为系统的广义能量密度

定义 $\vec{J}^0=(T^{10},T^{20},T^{30})$ 为能流密度。如果$\mathcal{L}$中不显含时间，得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^0=0.\qquad \vec{\nabla}\equiv\left(\frac{d}{dx^1},\frac{d}{dx^2},\frac{d}{dx^3}\right)$$

积分得到 $\frac{d}{dt}\int d^3x\,\mathcal{H}+\int_\Sigma\vec{J}^0\cdot d\vec{\Sigma}=0.$

推广到能量动量张量的任意分量。假设$\mathcal{L}$不显含x_μ，则有

$$\frac{d}{dt}T^{0\mu}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}^\mu=0.\qquad \vec{J}^\mu=(T^{1\mu},T^{2\mu},T^{3\mu})$$

这组方程称为守恒流方程。若系统不显含某个时空坐标，则具有相应的守恒流。

特别地，当$\vec{J}^\mu$在边界上为0时，则有 $a^\mu=\int d^3x\,T^{0\mu}$ 守恒

a^0 是能量　a^μ $(\mu=1,2,3)$ 是动量

例：薛定谔方程的拉氏量密度 $\mathcal{L}=\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*)-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}\psi^*)\cdot(\vec{\nabla}\psi)-V(\vec{r},t)\psi^*\psi.$

将ψ和ψ^*视为独立的广义坐标。

对ψ^*变分：$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [-\frac{\hbar^2}{2m}\vec\nabla^2 + V(\vec r,t)]\psi$　　对ψ变分：$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = [-\frac{\hbar^2}{2m}\vec\nabla^2 + V(\vec r,t)]\psi^*$.

如果$V=V(\vec r)$不显含时间 $\Rightarrow$ 存在与时间分量对应的守恒流.

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_0\psi}\partial^0\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\psi^*}\partial^0\psi^* - \mathcal{L} = +\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\nabla\psi^*)\cdot(\vec\nabla\psi) + V(\vec r)\psi^*\psi.$$

$$\vec J \to T^{\nu 0} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\psi}\partial^0\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\psi^*}\partial^0\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t})$$

设能流在无穷远分界处为0，则有

$$E = \int d^3r\,\mathcal{H} = \int d^3r\,\psi^*(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec r))\psi = const.$$

连续系统分析力学的正则形式

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \int d^3x(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\dot\phi - \mathcal{L}).$$ 引入动量密度 $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}$ 则 $\mathcal{H} = \pi\dot\phi - \mathcal{L}$.

若$\mathcal{L}$中不显含ϕ，则ϕ为循环坐标 $\Rightarrow$ 系统中存在守恒流.

$$\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} = 0. \Rightarrow \frac{d\pi}{dt} + \frac{d}{dx^i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi} = 0.$$ 系统存在守恒量(前提边界环流为0),

$$\Pi = \int d^3x\,\pi = const.$$ 与~~常数~~ϕ对应的广义动量守恒

若记$\mathcal{H}$以π和ϕ为独立变量. $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \dot\phi + \pi\frac{\partial\dot\phi}{\partial\pi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\frac{\partial\dot\phi}{\partial\pi} = \dot\phi.$

另一个正则方程：$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = \pi\frac{\partial\dot\phi}{\partial\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\frac{\partial\dot\phi}{\partial\phi} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{d}{dx^\mu}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}) = -\dot\pi - \frac{d}{dx^i}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi})$

利用 $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi} = \pi\frac{\partial\dot\phi}{\partial\partial_i\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\frac{\partial\dot\phi}{\partial\partial_i\phi}$ ~~$(i=1,2,3)$~~ $= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi}$ $(i=1,2,3)$.

因此，$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = -\dot\pi + \frac{d}{dx^i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi}$.　$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \dot\phi$.　(正则方程).

(备注：$\mathcal{H}$以π和ϕ为独立变量，指的变量依赖从$\phi, \dot\phi, \partial_i\phi, x_\mu$换为$\phi, \pi, \partial_i\phi, x_\mu$.)

定义函数导数 $\frac{\delta}{\delta\psi} = \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{d}{dx^i}\frac{\partial}{\partial\partial_i\psi}$.　正则方程化为简单整洁的形式.

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} = \dot\phi \quad -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi} = \dot\pi.$$

运动方程改写为：$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = 0.$

$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \neq \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$.　$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\dot\pi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\dot\phi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi}\partial_i\dot\phi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}.$

$$= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}[-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} + \frac{d}{dx_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi}] + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi}\partial_i\dot\phi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}.$$

$$= \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi}\dot\phi) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

但只要边界上$\frac{d}{dx_i}$项为0，则 $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$　$H = \int d^3x\,\mathcal{H}$.

例. 一维波动系统. $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2$. $\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}=\mu\dot\phi$ $\mathcal{H}=\frac{\pi^2}{2\mu}+\frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2$.

则 $\dot\phi=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}=\frac{\pi}{\mu}$. $\dot\pi=-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}-\frac{d}{dx_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\phi}\right)=Y\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$.

例. 薛定谔方程 $\mathcal{L}=\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\nabla\psi^*)\cdot(\vec\nabla\psi)-V(\vec r,t)\psi^*\psi$.

$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}=\frac{i\hbar}{2}\psi^*$ $\pi^*=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi^*}=-\frac{i\hbar}{2}\psi$.

$\mathcal{H}=\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\nabla\psi^*)\cdot(\vec\nabla\psi)+V(\vec r,t)\psi^*\psi$ 不含 π,π^*. 是退化的.

可以将 $\mathcal{H}$ 改写为: $\mathcal{H}=\frac{1}{2}\left[\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\nabla\psi^*)\cdot(\vec\nabla\psi)+V(\vec r,t)\psi^*\psi\right]+\frac{2}{\hbar^2}\left[\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\nabla\pi^*)\cdot(\vec\nabla\pi)+V(\vec r,t)\pi^*\pi\right]$

则 $\dot\psi=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}-\frac{d}{dx_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\partial_i\pi}=\frac{2}{\hbar^2}\left[V(\vec r,t)\pi^*-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\pi^*\right]$.

即 $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[V(\vec r,t)+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right]\psi$.

四维时空自由标量场.

$\dot x^2\to\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$.

$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$. 与谐振子 $L=\frac{1}{2}\dot x^2-\frac{\omega^2}{2}x^2$ 相似. $x(t)\to\phi(x)$ $t\to x^\mu$

代入 E-L 方程得 $(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi=0$ (Klein-Gordon 方程).

在动量空间: $(-E^2+\vec p^2+m^2)\tilde\phi(p)=0$

四维时空电磁场.

$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$.

E-L 方程 即 $\partial^\mu F_{\mu\nu}=0$.

动量密度 $\pi^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0A_\mu}=-\frac{1}{2}(\partial^0A^\mu-\partial^\mu A^0)+\frac{1}{2}(\partial^\mu A^0-\partial^0A^\mu)=F^{\mu0}$.

哈密顿量密度 $\mathcal{H}=\pi^\mu(\partial_0A_\mu)-\mathcal{L}=F^{\mu0}(F_{0\mu}+\partial_\mu A_0)-\mathcal{L}=\vec E^2+F^{i0}\partial_iA_0+\frac{1}{2}(-\vec E^2+\vec B^2)$

$=\frac{1}{2}(\vec E^2+\vec B^2)+\vec E\cdot\vec\nabla A_0$. $\vec E\cdot\vec\nabla A_0$ 项分部积分在全空间积分为 0.

连续系统的泊松括号

某个力学量密度 $u=u(\phi,\pi,\partial_i\phi,\partial_i\pi,x)$. 全局力学量 $U=\int d^3x\,u$

$\frac{dU}{dt}=\int d^3x\left[\frac{\partial u}{\partial\phi}\dot\phi+\frac{\partial u}{\partial\partial_i\phi}\partial_i\dot\phi+\frac{\partial u}{\partial\pi}\dot\pi+\frac{\partial u}{\partial\partial_i\pi}\partial_i\dot\pi+\frac{\partial u}{\partial t}\right]$

$=\int d^3x\left[\frac{\partial u}{\partial\phi}\dot\phi-\dot\phi\frac{d}{dx_i}\frac{\partial u}{\partial\partial_i\phi}+\frac{\partial u}{\partial\pi}\dot\pi-\dot\pi\frac{d}{dx_i}\frac{\partial u}{\partial\partial_i\pi}+\frac{\partial u}{\partial t}\right]$

$=\int d^3x\left[\frac{\delta u}{\delta\phi}\dot\phi+\frac{\delta u}{\delta\pi}\dot\pi+\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\int d^3x\left[\frac{\delta u}{\delta\phi}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi}-\frac{\delta u}{\delta\pi}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\phi}+\frac{\partial u}{\partial t}\right]$

定义 $[U,W]=\int d^3x\left[\frac{\delta u}{\delta\phi}\frac{\delta w}{\delta\pi}-\frac{\delta u}{\delta\pi}\frac{\delta w}{\delta\phi}\right]$. 则有 $\frac{dU}{dt}=[U,H]+\frac{\partial V}{\partial t}$.

希望得到关于密度函数本身的信息　傅立叶变换 ⇒ 场的正则量子化所采用的方法.

以ϕ为例，$\phi(\vec{r},t)=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}q(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$　$q(\vec{k},t)=\int d^3r\,\phi(\vec{r},t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\int d^3\vec{r}\,e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$　$\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}=\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$.

动量密度 $\pi(\vec{r},t)=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}p(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$　$p(\vec{k},t)=\int d^3\vec{r}\,\pi(\vec{r},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

计算 $[q(\vec{k},t),p(\vec{k}',t)]=\int d^3\vec{r}\left(\frac{\delta\phi}{\delta\phi}\frac{\delta\pi}{\delta\pi}-\frac{\delta\phi}{\delta\pi}\frac{\delta\pi}{\delta\phi}\right)e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}$

$$=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

可以验证 $[q(\vec{k},t),q(\vec{k}',t)]=[p(\vec{k},t),p(\vec{k}',t)]=0$. 因此$q(\vec{k},t)$与$p(\vec{k},t)$构成一组基本泊松括号，可以视为正则坐标。

连续系统诺特定理.

作无穷小变换：$x^\nu\to x'^\nu=x^\nu+\Delta x^\nu$　$\phi^\kappa(x^\nu)\to\phi'^\kappa(x'^\nu)=\phi^\kappa(x^\nu)+\Delta\phi^\kappa(x^\nu)$

仍有S相等：$\int_{\Omega'}d^4x'\,\mathcal{L}'[\phi'(x'),\partial\phi'(x'),x']=\int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}[\phi(x),\partial\phi(x),x]$.

积分变量x'换为x，左$=\int_{\Omega'}d^4x\,\mathcal{L}'[\phi'(x),\partial\phi'(x),x]$　时空坐标变换主要体现在Ω与Ω'的不同.

若变换具有协变性，要求 $\mathcal{L}'[\phi(x),\partial\phi(x),x]=\mathcal{L}[\phi(x),\partial\phi(x),x]+\frac{d}{dx^\nu}\Delta\lambda^\nu(\phi,x)$.

于是 $0=\int_{\Omega'}d^4x\{\mathcal{L}'[\phi'(x),\partial\phi'(x),x]-\mathcal{L}[\phi(x),\partial\phi(x),x]\}+\left(\int_{\Omega'}-\int_\Omega\right)d^4x\,\mathcal{L}[\phi(x),\partial\phi(x),x]$

而 $\mathcal{L}'[\phi'(x),\partial\phi'(x),x]=\mathcal{L}[\phi'(x),\partial\phi'(x),x]+\frac{d}{dx^\nu}\Delta\lambda^\nu(\phi',x)$

$$=\mathcal{L}[\phi(x),\partial\phi(x),x]+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\kappa}\Delta\phi^\kappa+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}\partial_\nu(\Delta\phi^\kappa)+\frac{d}{dx^\nu}\Delta\lambda^\nu(\phi,x).$$

$\int_\Sigma d\Sigma_\nu\,\mathcal{L}\Delta x^\nu=\int_\Omega d^4x\frac{d}{dx^\nu}(\mathcal{L}\Delta x^\nu)$.

于是 $0=\int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\kappa}\Delta\phi^\kappa+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}\partial_\nu(\Delta\phi^\kappa)+\frac{d}{dx^\nu}\Delta\lambda^\nu(\phi,x)+\frac{d}{dx^\nu}(\mathcal{L}\Delta x^\nu)\right)$.

利用E-L方程，$0=\int_\Omega d^4x\left[\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}\Delta\phi^\kappa\right)+\frac{d}{dx^\nu}\Delta\lambda^\nu(\phi,x)+\frac{d}{dx^\nu}(\mathcal{L}\Delta x^\nu)\right]$.

假定变换依赖r个连续变化参数a^s $(s=1,\cdots,r)$. $\Delta x^\nu=X_s^\nu\Delta a^s$　$\Delta\phi^\kappa=\psi_s^\kappa\Delta a^s$　$\Delta\lambda^\nu=\Lambda_s^\nu\Delta a^s$.

代入，$0=\int_\Omega d^4x\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}\psi_s^\kappa\Delta a^s+\Lambda_s^\nu\Delta a^s+\mathcal{L}X_s^\nu\Delta a^s\right)$

引入 $\phi'^\kappa(x')=\phi^\kappa(x)+\Phi_s^\kappa\Delta a^s$.（上文中$\Delta\phi^\kappa=\phi'^\kappa(x)-\phi^\kappa(x)$），则有

$$\Phi_s^\kappa\Delta a^s=\phi'^\kappa(x')-\phi^\kappa(x)=\phi'^\kappa(x')-\phi'^\kappa(x)+\phi'^\kappa(x)-\phi^\kappa(x)=\partial_\mu\phi^\kappa X_s^\mu\Delta a^s+\psi_s^\kappa\Delta a^s$$

代入上述方程得 $0=\int_\Omega d^4x\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}(\Phi_s^\kappa-\partial_\mu\phi^\kappa X_s^\mu)\Delta a^s+\Lambda_s^\nu\Delta a^s+\mathcal{L}X_s^\nu\Delta a^s\right)$

$$=\int_\Omega d^4x\frac{d}{dx^\nu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}\Phi_s^\kappa+\Lambda_s^\nu+\left(\mathcal{L}\delta_\mu^\nu-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^\kappa}\partial_\mu\phi^\kappa\right)X_s^\mu\right]\Delta a^s.$$

由Δa^s任意性，得到 r 个独立的守恒流.

[定理]（诺特定理）：若无穷小变换 $x'^\nu = x^\nu + X_s^\nu \Delta a^s$，$\phi'^k(x') = \phi^k(x) + \Phi_s^k \Delta a^s$ 为对称变换，即 L 满足协变性：$L'[\phi(x), \partial\phi(x), x] = L[\phi(x), \partial\phi(x), x] + \frac{d}{dx^\nu}\Delta\lambda^\nu(\phi, x)$，则系统存在 r 个线性独立的守恒流，形如

$$\frac{d}{dx^\nu}\left[\overbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_\nu\phi^k}\partial_\mu\phi^k - L\delta_\mu^\nu\right)}^{T_\mu^\nu} X_s^\mu - \frac{\partial L}{\partial\partial_\nu\phi^k}\Phi_s^k - \Lambda_s^\nu\right] = 0.$$

其中 $\Delta L = \frac{d}{dx^\nu}\Lambda_s^\nu \Delta a^s$. 即 $\Delta\lambda^\nu(\phi, x) = \Lambda_s^\nu \Delta a^s$.

例1. 系统不显含 x^μ，有时空平移变换 $x'^\nu = x^\nu + \Delta a^\nu$. $\phi'^k(x') = \phi^k(x)$. 则

$$\frac{d}{dx^\nu}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_\nu\phi^k}\partial_\mu\phi^k - L\delta_\mu^\nu\right)\right] = 0.$$

例2. 时空坐标不变，仅仅是场本身变换 $\Delta x^\nu = 0$ $\Delta\phi^k = \Phi_s^k \Delta a^s$ 若系统具有对称性，则存在相应的守恒流 $j_s^\nu = \frac{\partial L}{\partial\partial_\nu\phi^k}\Phi_s^k$ 例如，对 Klein-Gordon 场，$L = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$. 在变换 $\phi' = e^{i\epsilon}\phi$，$\phi'^* = e^{-i\epsilon}\phi^*$ 下有守恒流

$$j^\nu = i(\phi\partial^\nu\phi^* - \phi^*\partial^\nu\phi).$$

例3. 薛定谔方程 $L = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi^*)\cdot(\nabla\psi) - V(\vec{r}, t)\psi^*\psi$. 存在守恒流

$\rho = \psi\psi^*$ $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$.