Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики

ФКТиУ, кафедра Вычислительной техники

Лабораторная работа №3

по дисциплине
«Вычислительная математика»
Вариант: «Метод трапеций»

Выполнил: Студент группы P3233
Сабитов Д.Т.

Преподаватель:
Перл О. В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Метод трапеций

Описание метода

Метод трапеций заключается в том, что подынтегральная функция делится на n отрезков, и на каждом из них функция заменяется на линейную (на графике это выглядит как соединение точек – значений функций – на концах отрезка между собой). То есть, на каждом элементарном участке его площадь мы сводим к площади прямоугольной трапеции.

Также необходимо отметить, что чем больше количество разбиений, тем выше точность вычислений, потому что для маленьких промежутков мы забираем максимальную часть подынтегральной функции.

Расчетные формулы метода

$s_i \equiv \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} * \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина промежутка (шаг разбиения).

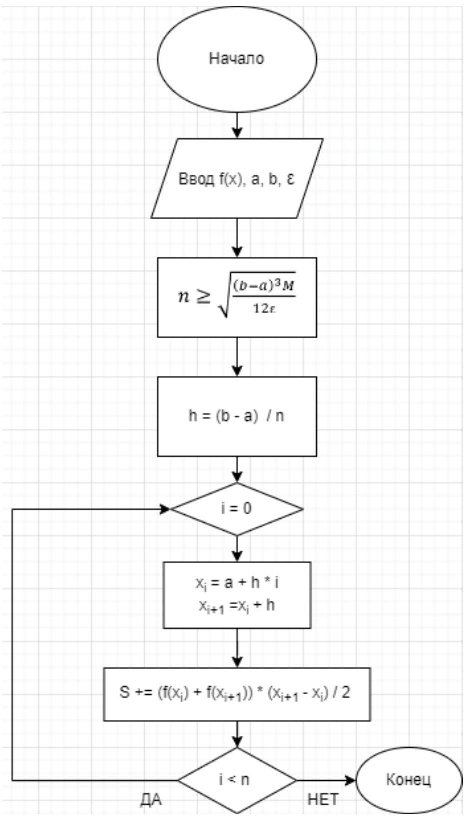
Шаг разбиения: $h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, где n – это количество желаемых разбиений.

Также длину шага можно вычислять, опираясь на желаемую точность, используя формулу погрешности: $\varepsilon \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$, где $M = \max\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$.

При заданной ε можно выразить и найти n,округлив значение в большую сторону:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}$$

Блок-схема



Листинг метода

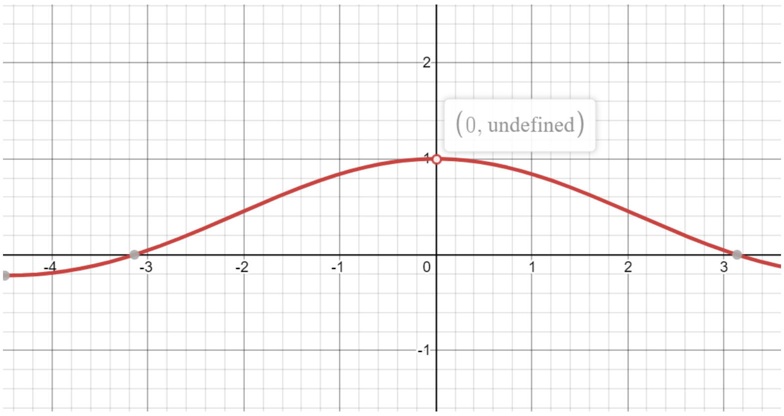
```
public static double[] trapezoidMethod(int number, double[] borders, double
eps) throws NotExistingIntegralException, IrremovableGapException,
NotDefinedFunctionException {
    double[] answer = new double[2];
    IntegralsInterface integral = IntegralsStorage.getIntegral(number);
    checkIsFunctionDefined(integral, borders[0]);
    double maxSegmentValue = getDerivativeSecondMax(borders, integral);
    int n = getSegmentsAmount(borders, eps, maxSegmentValue);
    double h = (borders[1] - borders[0]) / n;
    double x0 = borders[0];
    double x1;
    double y0, y1;
    double sum = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        x1 = x0 + h;
        y0 = integral.getFunction(x0);
        y1 = integral.getFunction(x1);

        if (Math.abs(x1) < 0.0001) {
            x0 = 0;
        }

        if (checkGaps(integral, x0)) {
            x0 += 0.001;
            continue;
        }

        sum += (y0 + y1) * (x1 - x0) / 2;
        x0 += h;
}
    answer[0] = sum;
    answer[1] = n;
    return answer;
}
```

Вычисление количества необходимых разбиений:

```
private static int getSegmentsAmount(double[] borders, double eps, double
DerivativeSecondMax) {
    double result = Math.sqrt ((DerivativeSecondMax * Math.pow((borders[1] -
borders[0]), 3)) / (12 * eps));
    if (Math.abs(result - (int) result) < 0.000001){
        return (int) result;
    }
    else{
        return (int) result + 1;
    }
}
```

Результаты работы:

1) С устранимой точкой разрыва



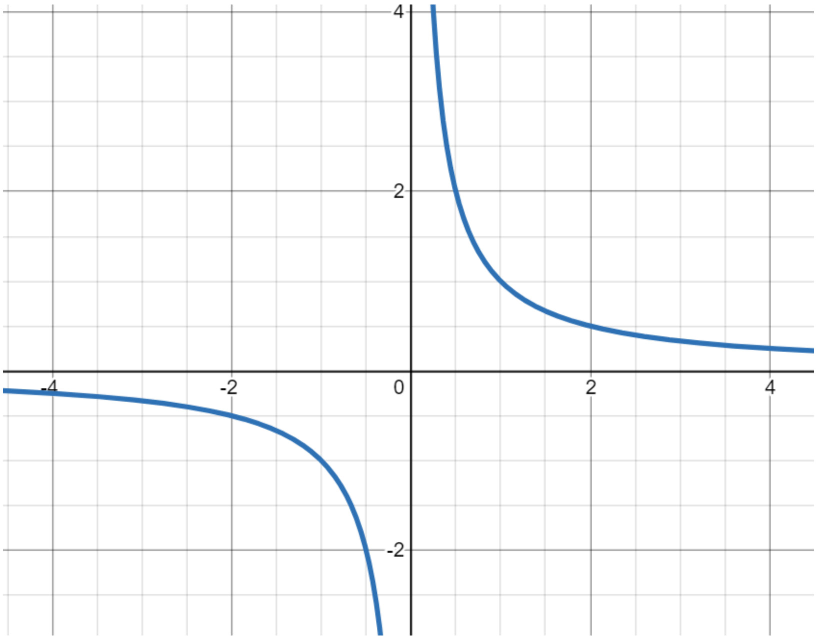
При попадании в промежуток, где есть точка разрыва:

```
Choose integral to calculate:
'1' - 1 / x
'2' - sin(x) / x
'3' - x * (x+1)^(1/2)
'4' - (x^4) / 12 + (x/3) - 1/60
'5' - x^2
Enter the value: 2
Enter integration borders:
Enter the value: -3
Enter the value: 3
Enter the accuracy:
Enter the value: 0,00001

Break point is 0.0
The limits converge.This is a disposable gap of the 1st kind.

Integral value = 3.6885965645638352
Amount of segments needed for this accuracy = 774

Process finished with exit code 0
```

При попадании в промежуток, где нет точки разрыва:

```
Choose integral to calculate:
'1' - 1 / x
'2' - sin(x) / x
'3' - x * (x+1)^(1/2)
'4' - (x^4) / 12 + (x/3) - 1/60
'5' - x^2
Enter the value: 2
Enter integration borders:
Enter the value: -9
Enter the value: -1
Enter the accuracy:
Enter the value: 0,0001

Integral value = 0.7189667835138973
Amount of segments needed for this accuracy = 326
```

2) С неустранимой точкой разрыва



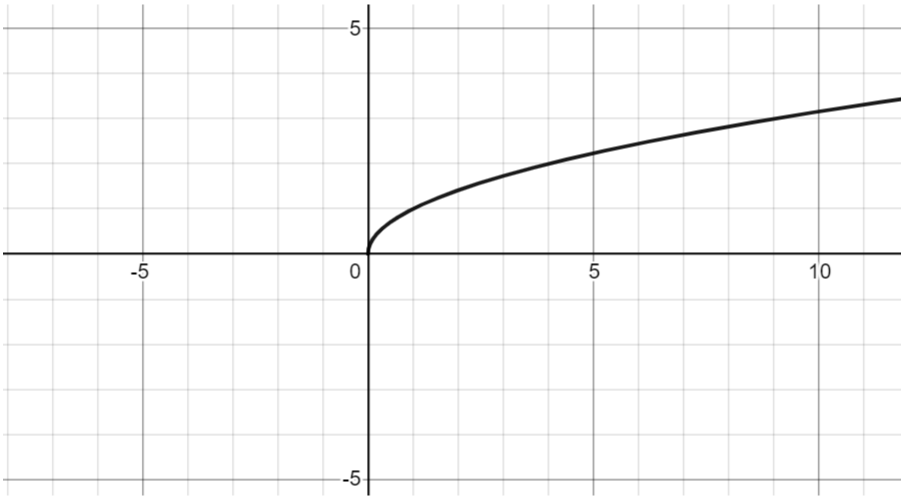
При попадании в промежуток, где есть неустранимая точка разрыва:

```
Choose integral to calculate:
'1' - 1 / x
'2' - sin(x) / x
'3' - x * (x+1)^(1/2)
'4' - (x^4) / 12 + (x/3) - 1/60
'5' - x^2
Enter the value: 1
Enter integration borders:
Enter the value: -1
Enter the value: 1
Enter the accuracy:
Enter the value: 0,0001
Error! Irremovable 2 kind gap in point 0.0

Process finished with exit code 0
```

При попадании в промежуток, где нет неустранимой точки разрыва:

```
Choose integral to calculate:
'1' - 1 / x
'2' - sin(x) / x
'3' - x * (x+1)^(1/2)
'4' - (x^4) / 12 + (x/3) - 1/60
'5' - x^2
Enter the value: 1
Enter integration borders:
Enter the value: -10
Enter the value: -2
Enter the accuracy:
Enter the value: 0,0001

Integral value = -1.6094498828077242
Amount of segments needed for this accuracy = 327
```

3) Без точек разрыва, но с ОДЗ:



На промежутке, где функция не определена:

```
Choose integral to calculate:
'1' - 1 / x
'2' - sin(x) / x
'3' - x * (x+1)^(1/2)
'4' - sqrt(x)
'5' - x^2
Enter the value: 4
Enter integration borders:
Enter the value: -4
Enter the value: -1
Enter the accuracy:
Enter the value: 0,001
Error! This function is not defined!
```

При попадании в ОДЗ:

```
Choose integral to calculate:
'1' - 1 / x
'2' - sin(x) / x
'3' - x * (x+1)^(1/2)
'4' - sqrt(x)
'5' - x^2
Enter the value: 4
Enter integration borders:
Enter the value: 1
Enter the value: 5
Enter the accuracy:
Enter the value: 0,001

Integral value = 6.786624135723046
Amount of segments needed for this accuracy = 37

Process finished with exit code 0
```

Вывод

В результате проделанной лабораторной работы я реализовал метод численного интегрирования – метод трапеций.

На входе программы пользователь указывает желаемую точность вычислений, от которой зависит количество разбиений n. Формула погрешности для метода трапеций показывает обратную зависимость погрешности от количества разбиений, и это подтверждается практическими вычислениями – чем меньшую ε вводит пользователь, тем более точен результат вычислений. Так как интеграл — это предел суммы бесконечно малых разбиений, то при ε, приближающей к минус бесконечности, погрешность минимальна. Однако, стоит заметить, что при повышении количества разбиений накапливается вычислительная погрешность, так как она возникает при вычислении площади каждой прямоугольной трапеции

К плюсам метода трапеций (относительно метода прямоугольников) является то, что для его использования достаточно табличного задания функции. Однако метод трапеций уступает методу прямоугольников тем, что даёт вдвое большую погрешность при тех же вводных данных. Также, по оценке абсолютной погрешности метод трапеций уступает методу Симпсона.