Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики

ФКТиУ, кафедра Вычислительной техники

Лабораторная работа №5

по дисциплине
«Вычислительная математика»
Вариант: «Метод Рунге-Кутта 4 го порядка»

Выполнил: Студент группы P3233
Сабитов Д.Т.

Преподаватель:
Перл О. В.

Санкт-Петербург
2022 г.

Описание метода

Метод Рунге-Кутты находит приближенное значение y для заданного x. С помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка можно решить только обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

По формуле (указана в расчетных формулах метода) высчитываются значения на каждом шаге. Меньший размер шага означает большую точность.

Формула в основном вычисляет следующее значение y_{n+1}, используя текущее y_n плюс средневзвешенное значение четырех приращений.

k_1 — это приращение, основанное на наклоне в начале интервала, используя y

k_2 — это приращение, основанное на наклоне в середине интервала, используя $y + hk_{1/2}$.

k_3 — это снова приращение, основанное на наклоне в средней точке, используя использование $y + hk_{2/2}$.

k_4 — это приращение, основанное на наклоне в конце интервала, используя $y + hk_3$.

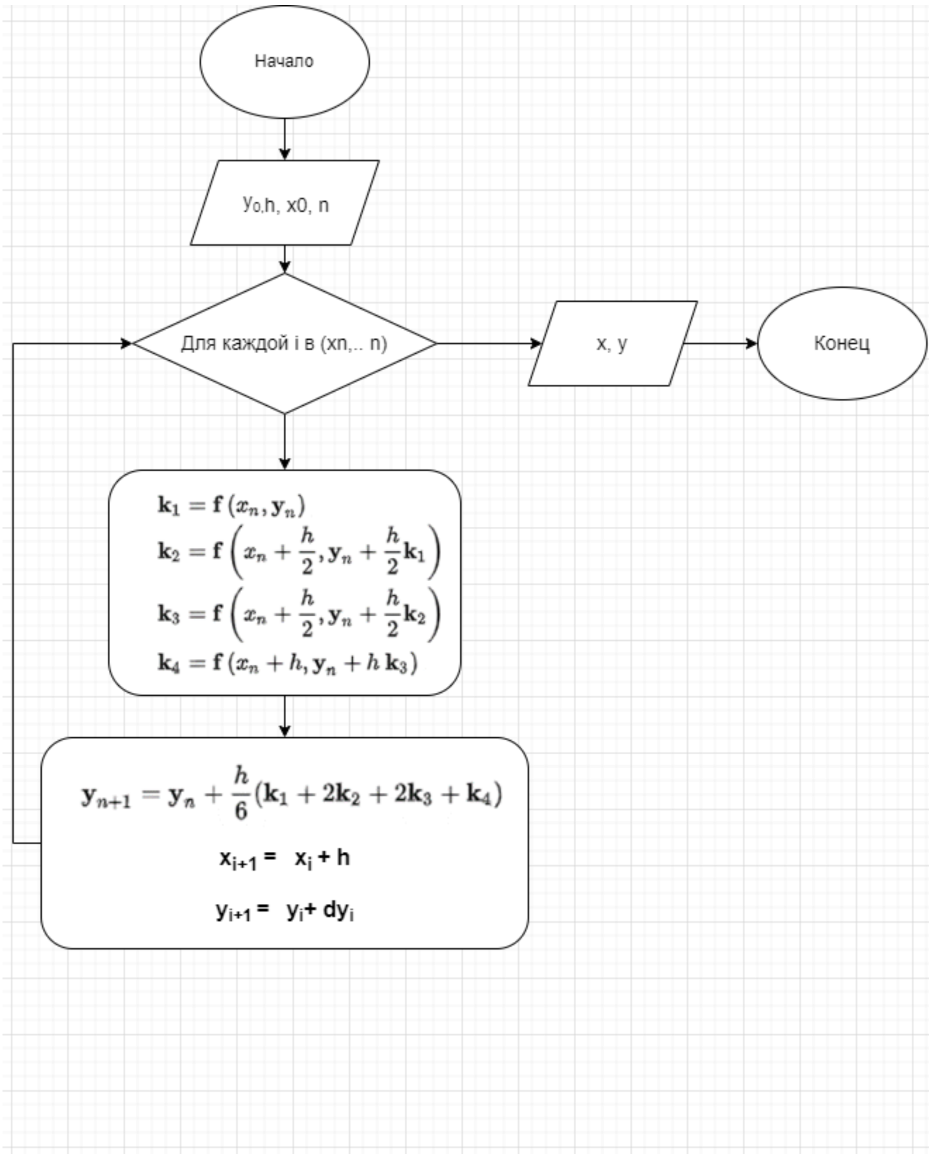
Расчетные формулы метода

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}\left(x_n, \mathbf{y}_n\right) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}\left(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{k}_3\right)
\end{aligned}$$

Блок-схема



Листинг метода

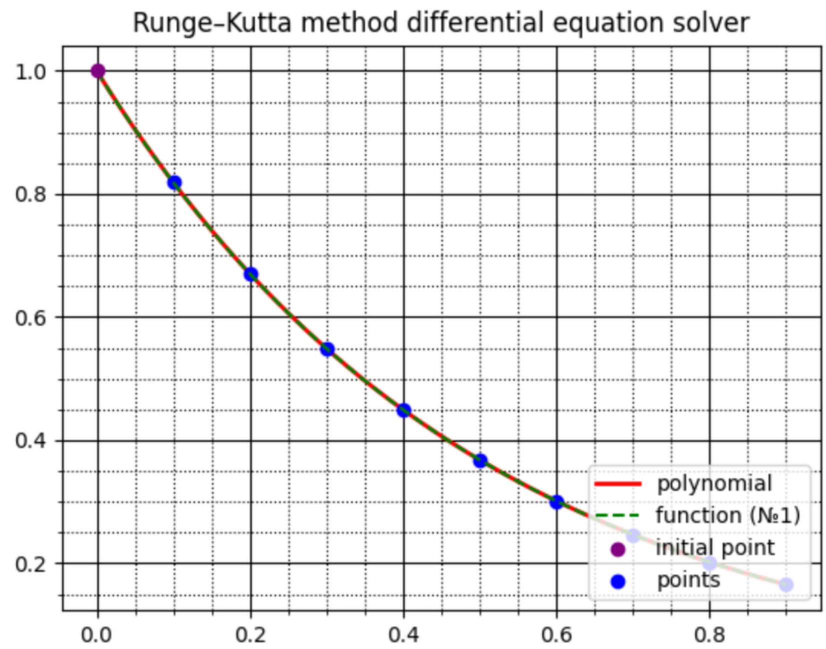
```python
def runge_kutta_solve(initial_point, function_id, h, n):
    x_current = initial_point[0]
    y_current = initial_point[1]
    points = [[x_current, y_current]]
    for i in range(1, n):
        k1 = functions.get_function(function_id, x_current, y_current)
        k2 = functions.get_function(function_id, x_current + h / 2, y_current
+ h * k1 / 2)
        k3 = functions.get_function(function_id, x_current + h / 2, y_current
+ h * k2 / 2)
        k4 = functions.get_function(function_id, x_current + h, y_current + h
* k3)

        dyi = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) * h / 6
        x_current += h
        y_current += dyi
        points.append([x_current, y_current])

    return points
```

Результаты работы:

1)

```
Choose function to compare:
1) y' = -2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = sin(x) + y
1
Enter n:
10
Enter h (step):
0.1
Enter the initial value of x:
0
Enter the initial value of y:
1
```

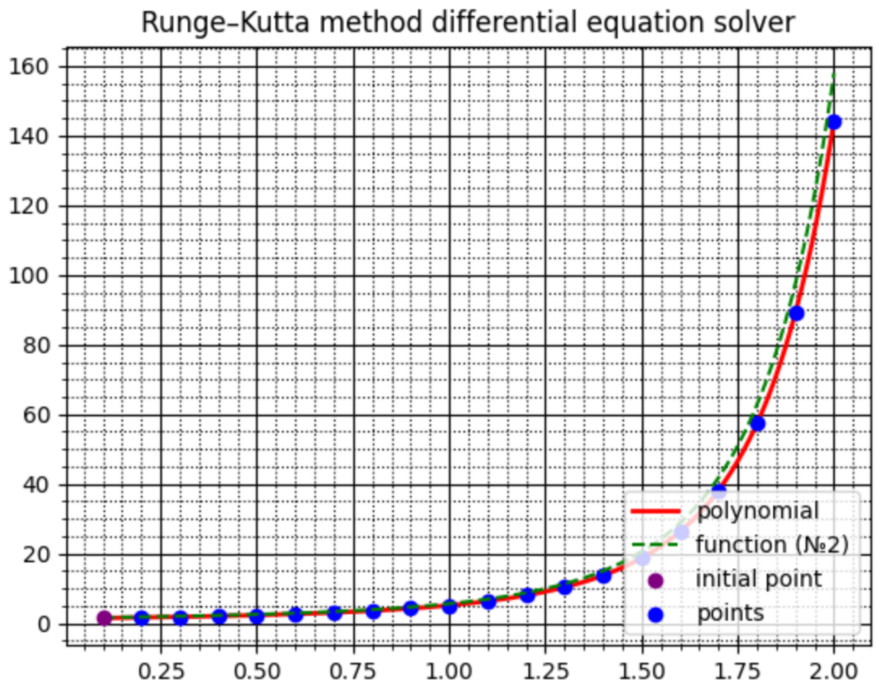
```
x = 0.00000 | y = 1.000000
x = 0.10000 | y = 0.818733
x = 0.20000 | y = 0.670324
x = 0.30000 | y = 0.548817
x = 0.40000 | y = 0.449335
x = 0.50000 | y = 0.367885
x = 0.60000 | y = 0.301200
x = 0.70000 | y = 0.246602
x = 0.80000 | y = 0.201902
x = 0.90000 | y = 0.165304
```



2)

```
Choose function to compare:
1) y' = -2 * y
2) y' = y * (x^2 + 1)
3) y' = sin(x) + y
2
Enter n:
20
Enter h (step):
0.1
Enter the initial value of x:
0.1
Enter the initial value of y:
1.5
```

```
x = 0.10000 | y = 1.500000
x = 0.20000 | y = 1.661629
x = 0.30000 | y = 1.848051
x = 0.40000 | y = 2.067758
x = 0.50000 | y = 2.332167
x = 0.60000 | y = 2.656823
x = 0.70000 | y = 3.063211
x = 0.80000 | y = 3.581553
x = 0.90000 | y = 4.255144
x = 1.00000 | y = 5.147237
x = 1.10000 | y = 6.352132
x = 1.20000 | y = 8.013431
x = 1.30000 | y = 10.354742
x = 1.40000 | y = 13.732507
x = 1.50000 | y = 18.729131
x = 1.60000 | y = 26.321448
x = 1.70000 | y = 38.193786
x = 1.80000 | y = 57.336600
x = 1.90000 | y = 89.226072
x = 2.00000 | y = 144.223142
```



Вывод

В результате проделанной лабораторной работы я реализовал метод Рунге-Кутты 4-го порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Сравним методы Эйлера и Рунге-Кутты 4-ого порядка. Локальная погрешность метода Рунге-Кутты O (h^5) – это бесконечно малая величина относительно h^5, а глобальная O (h^4) – бесконечно малая от h^4 . У метода Эйлера локальная ошибка O(h^2) – это бесконечно малая величина от h^2, а глобальная O(h) – бесконечно малая от h. Таким образом, метод Рунге-Кутты является более точным по сравнению с методом Эйлера.