Universidad de Los Andes
Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas
Semestre 2020-20
Profesor: Raimundo Ballesteros
Ayudante Coordinadora: Priscilla Ortega
Ayudantes de Cátedra: Tomás Guzmán, Francisca Torres, Fernanda Ordoñez, Maite Delon, Santiago León

Prueba 1
Ecuaciones Diferenciales
Agosto 2020

P1. **Modelamiento**

- **Versión 1:** En modelos de poblaciones, si $P(t)$ es la población de alguna especie, se llama **fin del mundo** a la siguiente situación:

$$\lim_{t\to T} P(t) = \infty$$

dado que se tendría una sobre-población de la especie, la cual agotaría todos los recursos naturales. Además, T podría ser una constante real o bien infinito, pero en caso de ser constante se le conoce como **constante del fin del mundo**.

La población de una cierta especie de animales se puede modelar con el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP^{1+c}\,,\ t \geq 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

con P_0, k, c constantes estrictamente positivas. Resuelva el PVI para encontrar a $P(t)$. Luego, determine si se produce el fenómeno de **fin del mundo**. En caso de que suceda este fenómeno, determine la **constante del fin del mundo** o bien si esto sucede para $t \to \infty$.

Solución: La EDO es de variables separables, por lo que separando diferenciales e integrando:

$$P^{-1-c}dP = k\,dt \quad /\int \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{c}P^{-c} = kt + A \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

Despejando:

$$P^{-c} = B - ckt \quad \Rightarrow \quad P^c = \frac{1}{B - ckt} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \left(\frac{1}{B - ckt}\right)^{\frac{1}{c}} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

con $B = -cA$. Imponiendo la condición inicial $P(0) = P_0$, podemos ver que $B = P_0^{-c}$, así que entonces:

$$P(t) = \left(\frac{1}{P_0^{-c} - ckt}\right)^{\frac{1}{c}} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

Podemos ver que esta función explota a infinito cuando se anula el denominador, por lo que la **constante del fin del mundo** la podemos calcular y esta es:

$$P_0^{-c} - ckT = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{ckP_0^c} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

- **Versión 2:** En modelos de poblaciones, si $P(t)$ es la población de alguna especie, llamaremos a siguientes situaciones:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = 0$$

como **fin del mundo** y **extinción de la especie**, respectivamente, dado que en el primer caso se tendría una sobre-población de la especie, la cual agotaría todos los recursos naturales, mientras que en el segundo caso no quedan ejemplares de la especie.

La población de una cierta especie de animales se puede modelar con el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(bP - a)\,,\ t \geq 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

con P_0, a, b constantes estrictamente positivas. Resuelva el PVI para encontrar a $P(t)$. Luego, determine las condiciones que deben cumplir P_0, a, b, si es que existen, para que suceda el fenómeno de **fin del mundo**.
hint: recuerde que $\frac{1}{P(P-A)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{P-A} - \frac{1}{P}\right)$.

Solución: La EDO es de variables separables, por lo que separando diferenciales e integrando (usando el **hint**):

$$\frac{1}{P(P-\frac{a}{b})}dP = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{P-\frac{a}{b}} - \frac{1}{P}\right)dP = b\,dt \quad /\int \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}\ln\left(\frac{P-\frac{a}{b}}{P}\right) = t + A \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

Despejando:

$$\ln\left(1 - \frac{a}{bP}\right) = at + B \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{a}{bP} = Ce^{at} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{a}{b + ke^{at}} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

con $B = aA$, $C = e^B$ y $k = -bC$. Imponiendo la condición inicial $P(0) = P_0$, podemos ver que $k = \frac{a}{P_0} - b$, así que entonces:

$$P(t) = \frac{a}{b + (\frac{a}{P_0} - b)e^{at}} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

Podemos ver que esta función en ningún caso representa el fenómeno de **fin del mundo**, dado que al ser $a > 0$, se tiene que $e^{at} \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y por lo tanto $P(t) \to 0$ **(1.5 pto.)**. Solo en el caso $P_0 = \frac{a}{b}$ esto no es así, pero en dicho caso la población es constante e igual a P_0. Cabe destacar que para que el PVI represente un problema de población, debe cumplirse que $\frac{a}{b} > P_0$, sino la población puede tomar valores negativos, lo cual no es un caso real.

- **Versión 3:** En modelos de poblaciones, si $P(t)$ es la población de alguna especie, llamaremos a siguientes situaciones:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = 0$$

como **fin del mundo** y **extinción de la especie**, respectivamente, dado que en el primer caso se tendría una sobre-población de la especie, la cual agotaría todos los recursos naturales, mientras que en el segundo caso no quedan ejemplares de la especie.

La población de una cierta especie de animales se puede modelar con el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(bP - a)\,,\ t \geq 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

con P_0, a, b constantes estrictamente positivas. Resuelva el PVI para encontrar a $P(t)$. Luego, determine las condiciones que deben cumplir P_0, a, b, si es que existen, para que suceda el fenómeno de **extinción de la especie**.

hint: recuerde que $\frac{1}{P(P-A)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{P-A} - \frac{1}{P}\right)$.

Solución: La EDO es de variables separables, por lo que separando diferenciales e integrando (usando el **hint**):

$$\frac{1}{P(P-\frac{a}{b})}dP = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{P-\frac{a}{b}} - \frac{1}{P}\right)dP = b\,dt \quad / \int \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}\ln\left(\frac{P-\frac{a}{b}}{P}\right) = t + A \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

Despejando:

$$\ln\left(1-\frac{a}{bP}\right) = at + B \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{a}{bP} = Ce^{at} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{a}{b+ke^{at}} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

con $B = aA$, $C = e^B$ y $k = -bC$. Imponiendo la condición inicial $P(0) = P_0$, podemos ver que $k = \frac{a}{P_0} - b$, así que entonces:

$$P(t) = \frac{a}{b + (\frac{a}{P_0} - b)e^{at}} \quad \textbf{(1.5 pto.)}$$

Podemos ver que esta función siempre representa el fenómeno de **extinción de la especie**, dado que al ser $a > 0$, se tiene que $e^{at} \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y por lo tanto $P(t) \to 0$ **(1.5 pto.)**. Solo en el caso $P_0 = \frac{a}{b}$ esto no es así, pero en dicho caso la población es constante e igual a P_0. Cabe destacar que para que el PVI represente un problema de población, debe cumplirse que $\frac{a}{b} > P_0$, sino la población puede tomar valores negativos, lo cual no es un caso real.

P2. **Resolución por cambio de variable**

- **Versión 1:** Mediante el cambio de variable $z = y^3$, resuelva la EDO

$$xy' + y = \frac{1}{y^2}$$

Solución: Derivando el cambio de variable tenemos que $z' = 3y^2y'$ **(1.0 pto.)**. Multiplicando la EDO por $3y^2$ y reemplazando el cambio de variable:

$$xz' + 3z = 3 \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{3}{x}z = \frac{3}{x} \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

La cual es una EDO lineal no homogénea para z, con $p(x) = \frac{3}{x}$, por lo que el factor integrante es $\mu = e^{\int p} = x^3$ **(1.0 pto.)**. Luego, multiplicando la EDO por μ e integrando:

$$(x^3z)' = 3x^2 \quad / \int dx \quad \Rightarrow \quad x^3z = x^3 + c \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x^3 + c}{x^3} \quad \textbf{(2.0 ptos.)}$$

Volviendo en el cambio de variable, tenemos que:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3 + c}{x^3}} = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x^3 + c} \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

- **Versión 2:** Mediante el cambio de variable $z = \frac{1}{y}$, resuelva la EDO

$$y' - y = e^x y^2$$

Solución: Derivando el cambio de variable tenemos que $z' = -\frac{1}{y^2}y'$ **(1.0 pto.)**. Multiplicando la EDO por $-\frac{1}{y^2}$ y reemplazando el cambio de variable:

$$z' + z = -e^x \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

La cual es una EDO lineal no homogénea para z, con $p(x) = 1$, por lo que el factor integrante es $\mu = e^{\int p} = e^x$ **(1.0 pto.)**. Luego, multiplicando la EDO por μ e integrando:

$$(e^x z)' = -e^{2x} \quad / \int dx \quad \Rightarrow \quad e^x z = -\frac{1}{2}e^{2x} + A \quad \Rightarrow \quad z = \frac{c - e^{2x}}{2e^x} \quad \textbf{(2.0 ptos.)}$$

con $c = 2A$. Volviendo en el cambio de variable, tenemos que:

$$y(x) = \frac{2e^x}{c - e^{2x}} \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

- **Versión 3:** Mediante el cambio de variable $z = \frac{1}{y^3}$, resuelva la EDO

$$y' + y = xy^4$$

Solución: Derivando el cambio de variable tenemos que $z' = -3\frac{1}{y^4}y'$ **(1.0 pto.)**. Multiplicando la EDO por $-3\frac{1}{y^4}$ y reemplazando el cambio de variable:

$$z' - 3z = -3x \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

La cual es una EDO lineal no homogénea para z, con $p(x) = -3$, por lo que el factor integrante es $\mu = e^{\int p} = e^{-3x}$ **(1.0 pto.)**. Luego, multiplicando la EDO por μ e integrando:

$$(e^{-3x}z)' = -3xe^{-3x} \quad / \int dx \quad \Rightarrow \quad e^{-3x}z = xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c \quad \Rightarrow \quad z = x + \frac{1}{3} + ce^{3x} \quad \textbf{(2.0 ptos.)}$$

Volviendo en el cambio de variable, tenemos que:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \frac{1}{3} + ce^{3x}}} \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

- **Versión 4:** Mediante el cambio de variable $z = \frac{1}{y^2}$, resuelva la EDO

$$xy' + y = x^4 y^3$$

Solución: Derivando el cambio de variable tenemos que $z' = -2\frac{1}{y^3}y'$ **(1.0 pto.)**. Multiplicando la EDO por $-2\frac{1}{y^3}$ y reemplazando el cambio de variable:

$$xz' - 2z = -2x^4 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{2}{x}z = -2x^3 \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

La cual es una EDO lineal no homogénea para z, con $p(x) = -\frac{2}{x}$, por lo que el factor integrante es $\mu = e^{\int p} = \frac{1}{x^2}$ **(1.0 pto.)**. Luego, multiplicando la EDO por μ e integrando:

$$\left(\frac{1}{x^2}z\right)' = -2x \quad / \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}z = -x^2 + c \quad \Rightarrow \quad z = x^2(c - x^2) \quad \textbf{(2.0 ptos.)}$$

Volviendo en el cambio de variable, tenemos que:

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2(c - x^2)}} = \pm\frac{1}{|x|\sqrt{c - x^2}} \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

P3. **TEU y Resolución Numérica**

- **Versión 1:** Sea el PVI

$$(\star)\quad \begin{cases} y' = x\,\mathrm{sen}(2x)y\,,\ x \in [0, 1000000] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determine si $(\star)$ tiene o no solución única. Tomando en cuenta el intervalo de definición de la EDO, es razonable pensar que $h = 1$ es un buen largo de sub-intervalo para la discretización, por lo que realice las 3 primeras iteraciones del método de Euler Progresivo para $(\star)$ con este valor de h.

Solución: Como la EDO está escrita en la forma $y' = f(x, y)$, tenemos que $f(x, y) = x\,\mathrm{sen}(2x)y$, la cual es continua por álgebra de funciones continuas **(1.0 pto.)**. Veamos que también es Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = x|\,\mathrm{sen}(2x)|\,|y_1 - y_2| \leq 1000000|y_1 - y_2|$$

dado que $x \leq 1000000$ y $|\,\mathrm{sen}(2x)| \leq 1$. Con esto, $f(x, y)$ es Lipschitz con constante $L = 1000000$ **(1.0 pto.)**. Entonces, tenemos que $(\star)$ tiene solución única por el Teorema de Existencia y Unicidad **(1.0 pto.)**. Para el método de Euler Progresivo, notemos que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $x_n = x_0 + nh = n$ **(0.5 pto.)**. Entonces:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n(1 + n\,\mathrm{sen}(2n)) \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

Finalmente, las iteraciones pedidas son:

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad y_1 = y_0(1 + 0 \cdot \mathrm{sen}(2 \cdot 0)) = 1 \quad \textbf{(0.5 pto.)} \\ n = 1: &\quad y_2 = y_1(1 + 1 \cdot \mathrm{sen}(2 \cdot 1)) = 1 + \mathrm{sen}(2) \quad \textbf{(0.5 pto.)} \\ n = 2: &\quad y_3 = y_2(1 + 2 \cdot \mathrm{sen}(2 \cdot 2)) = (1 + \mathrm{sen}(2))(1 + 2\,\mathrm{sen}(4)) \quad \textbf{(0.5 pto.)} \end{aligned}$$

- **Versión 2:** Sea el PVI

$$(\star)\quad \begin{cases} y' = x^2\,\mathrm{sen}(4x)y\,,\ x \in [0, 1000] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determine si $(\star)$ tiene o no solución única. Tomando en cuenta el intervalo de definición de la EDO, es razonable pensar que $h = 1$ es un buen largo de sub-intervalo para la discretización, por lo que realice las 3 primeras iteraciones del método de Euler Progresivo para $(\star)$ con este valor de h.

Solución: Como la EDO está escrita en la forma $y' = f(x, y)$, tenemos que $f(x, y) = x^2\,\mathrm{sen}(4x)y$, la cual es continua por álgebra de funciones continuas **(1.0 pto.)**. Veamos que también es Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = x^2|\,\mathrm{sen}(4x)|\,|y_1 - y_2| \leq 1000^2|y_1 - y_2|$$

dado que $x \leq 1000$ y $|\,\mathrm{sen}(4x)| \leq 1$. Con esto, $f(x, y)$ es Lipschitz con constante $L = 1000000$ **(1.0 pto.)**. Entonces, tenemos que $(\star)$ tiene solución única por el Teorema de Existencia y Unicidad **(1.0 pto.)**. Para el método de Euler Progresivo, notemos que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $x_n = x_0 + nh = n$ **(0.5 pto.)**. Entonces:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n(1 + n^2\,\mathrm{sen}(4n)) \quad \textbf{(1.0 pto.)}$$

Finalmente, las iteraciones pedidas son:

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad y_1 = y_0(1 + 0^2 \cdot \mathrm{sen}(4 \cdot 0)) = 1 \quad \textbf{(0.5 pto.)} \\ n = 1: &\quad y_2 = y_1(1 + 1^2 \cdot \mathrm{sen}(4 \cdot 1)) = 1 + \mathrm{sen}(4) \quad \textbf{(0.5 pto.)} \\ n = 2: &\quad y_3 = y_2(1 + 2^2 \cdot \mathrm{sen}(4 \cdot 2)) = (1 + \mathrm{sen}(4))(1 + 4\,\mathrm{sen}(8)) \quad \textbf{(0.5 pto.)} \end{aligned}$$