

# Modélisation de la croissance d'un réseau d'espionnage

Maxime Nicaise

March 4, 2024

Ce compte-rendu résulte d'un travail de bibliographie conjointement mené avec une activité de recherche personnelle, alimentée par des discussions avec M. Bouafia, M. Velho et M. Goudenège, que je souhaite remercier pour leur aide. Les parties dans lesquelles je présente des résultats personnels seront annotées d'une étoile  $\star$ .

## 1 Le sujet

On imagine que des espions infiltrent un pays pour tenter de voler des informations.

## 2 Le modèle

### 2.1 L'équation

On représentera le pays par le pavé  $\Omega = ]0, 1[^2$ . On supposera connue une fonction  $v$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , qui quantifie l'information contenue en un point de l'espace. L'inconnue du problème est la *fonction densité d'espions* définie par :

$$u : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow [0, 1] \\ (t, x) & \mapsto u(t, x) \end{array} \right.$$

où  $t$  est la variable temporelle et  $x$  la variable spatiale. Elle obéit à l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \alpha u(1 - u) - \beta uv \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $D, \alpha, \beta$  sont des coefficients positifs et  $u_0$  est la répartition initiale d'espions.

## 2.2 Interprétation de l'équation

Cette équation, qui décrit l'évolution de  $u$  en fonction du temps (terme de gauche), s'obtient en raisonnant sur le phénomène qu'on désire modéliser.

On suppose que les espions se propageront lentement de proche en proche, ce qui correspond au terme de diffusion,  $D\Delta u$  avec  $D$  la diffusivité. Le temps caractéristique de diffusion est alors  $\tau = \frac{L^2}{D}$ , avec  $L$  la longueur caractéristique de diffusion. On choisira donc une faible diffusivité pour avoir un grand temps et une faible longueur de diffusion.

On suppose également que de nouveaux espions sont envoyés, ce qui correspond au terme de reproduction  $\alpha u(1-u)$ . La présence du facteur  $u$  s'explique par le fait que les nouveaux agents espions ne seront envoyés que là où on trouvait déjà des agents auparavant. Le facteur  $(1-u)$ , quant à lui, traduit le fait que lorsque la concentration d'agents est élevée en un endroit, on n'en envoie pas de nouveaux.

Enfin, le terme  $-\beta uv$  traduit l'élimination des espions repérés. Plus  $v$  prend de grandes valeurs en un endroit, plus d'espions  $y$  seront détectés et évincés. D'autre part,  $u$  est également en facteur car un grand nombre d'espions en un même endroit mène logiquement à une plus grande facilité de les détecter.

## 3 Étude théorique

A partir de maintenant, on supposera que la donnée initiale  $u_0$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , et nulle sur  $\partial\Omega$ . Cette hypothèse permettra, en utilisant les résultats de [1], de démontrer qu'il existe une unique solution au problème (1). Du point de vue du modèle, il est raisonnable de supposer que le pays espion n'envoie pas d'espions précisément sur les frontières du pays espionné, ce qui justifie  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

### 3.1 Existence et unicité d'une solution locale

Le caractère non linéaire de ce problème rend les méthodes vues en cours d'EDP caduques. Pour montrer qu'il est bien posé, il est nécessaire de faire appel à une autre théorie. Pour cela on réécrit l'équation en prenant un point de vue différent : au lieu de considérer l'inconnue  $u$  comme une fonction de 3 variables, on la considère comme une fonction du temps à valeur dans un espace de fonctions définies sur  $\Omega$ .

$$u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

L'équation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = D\Delta u(t) + F(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2)$$

où

$$F : \begin{cases} X & \longrightarrow \\ u & \mapsto \end{cases} \begin{matrix} X \\ \alpha u(1-u) - \beta uv \end{matrix}$$

On cherchera les solutions qui prennent leurs valeurs dans  $X = C_0(\Omega)$ , qui est un espace de Banach pour la norme infinie. On ne choisit pas  $X = L^2(\Omega)$  car  $F$  ne satisfait alors pas aux propriétés dont on va avoir besoin.

On a maintenant un problème de Cauchy. L'idée de départ pour le résoudre est d'introduire une famille d'opérateurs linéaires  $(S(t))_{t \geq 0}$  qui vérifie des propriétés similaires relativement à l'opérateur  $\Delta$  à celles que la famille  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  vérifie relativement à une matrice  $A$ . La difficulté de ce procédé vient du fait que contrairement à une application linéaire en dimension finie, le laplacien n'est pas borné sur son domaine (qui est  $D(\Delta) = \{f \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta f \in L^2(\Omega)\}$ ).

L'étude du problème de Cauchy est faite dans [1], et on utilisera les résultats de la partie V de cet article. Une synthèse de ceux ci permet d'aboutir à la proposition suivante :

**Proposition 1** *Supposons :*

- (i)  $F$  est lipschitzienne sur les bornés de  $X$  ;
- (ii)  $F$  est de classe  $C^1$  ;
- (iii)  $u_0 \in D(\Delta)$ .

Alors on a l'existence d'une constante  $T > 0$  telle qu'il existe une unique solution  $u \in C^1([0, T], X) \cap C^0([0, T], D(\Delta))$  à (2).

On va l'utiliser pour démontrer qu'il existe une unique solution à (2) définie sur un intervalle de temps de la forme  $[0, T] : \star$

- (i) Soit  $r > 0$  et  $f, g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(0, r)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \|F(f) - F(g)\|_\infty &= \alpha \|f - f^2 - g - g^2\|_\infty \\ &\leq \alpha \|f - g\|_\infty + \alpha \|(f - g)(f + g)\|_\infty \\ &\leq \alpha(1 + 2r) \|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

en utilisant la sous-multiplicativité de  $\|\cdot\|_\infty$ . On en déduit que  $F$  est lipschitzienne sur les bornés de  $X$ .

- (ii) Soient  $f, h \in X$ .

$$\begin{aligned} F(f + h) - F(f) &= \alpha(-2hf + h - h^2) \\ \implies F(f + h) &= F(f) + \alpha(h - 2hf) + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi,  $F$  est différentiable en  $f$ , de différentielle

$$dF(f) : h \mapsto \alpha(h - 2hf),$$

dont il faut vérifier la continuité : en utilisant la sous-multiplicativité de  $\|\cdot\|_\infty$ , on obtient qu'il existe  $K \geq 0$  tel que

$$\|dF(f) \cdot h\|_\infty \leq K\|h\|_\infty,$$

ce qui conclut. Soient maintenant  $f, g \in X$  et  $h \in X \setminus \{0\}$ . On note  $|||\cdot|||$  la norme subordonnée à la norme infinie :

$$\begin{aligned} \|dF(f) \cdot h - dF(g) \cdot h\|_\infty &= 2\alpha\|(f - g)h\|_\infty \\ &\leq 2\alpha\|h\|_\infty\|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

donc on a

$$\frac{\|dF(f) \cdot h - dF(g) \cdot h\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq 2\alpha\|f - g\|_\infty.$$

Ceci étant vrai  $\forall h \in X \setminus \{0\}$ , en passant au sup on obtient :

$$|||dF(f) - dF(g)||| \leq 2\alpha\|f - g\|_\infty$$

donc  $dF$  est lipschitzienne, donc continue, et on a  $F$  de classe  $C^1$ .

(iii)  $u_0 \in C^\infty(\Omega)$  donc on a clairement  $u_0 \in D(\Delta)$ .

Toutes les propriétés sont vérifiées donc on en déduit l'existence de  $T > 0$  tel qu'on ait une unique solution  $u \in C^1([0, T], X) \cap C^0([0, T], D(\Delta))$ .

## 3.2 Bornes sur la solution

On aimerait montrer que la solution  $u$  dont on a prouvé l'existence reste constamment à valeurs entre 0 et 1. Cela permettrait de montrer que le modèle est cohérent avec ce qu'il est censé modéliser : l'évolution d'une concentration.

### 3.2.1 Positivité

Le principe du maximum (lemme V.2) démontré dans [1], qui demande les mêmes hypothèses que celles qu'on a déjà vérifiées, assure que  $u$  restera positive, étant donné qu'on a  $u_0$  positive.

### 3.2.2 Borne sur l'énergie ★

On montre ici un résultat plus faible, qui est que  $u$  vérifie une certaine inégalité qui implique en particulier que la norme  $L^2$  de  $u(t)$  est bornée.

On multiplie l'équation (1) par  $u$ :

$$\begin{aligned} u\partial_t u - Du\Delta u &= \alpha u^2 - \alpha u^3 - \beta u^2 v \\ u\partial_t u - Du\Delta u &\leq \alpha u^2 \end{aligned}$$

Car on a vu que  $u \geq 0$ , donc  $-\alpha u^3 - \beta u^2 v \leq 0$ . On intègre maintenant sur  $\Omega$ , et on utilise la formule de Green, valide car  $\Omega$  est lipschitzien, pour calculer l'intégrale de  $u\Delta u$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u\partial_t u) - D \int_{\Omega} (u\Delta u) &\leq \alpha \int_{\Omega} (u^2) \\ \int_{\Omega} (u\partial_t u) + D \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) - D \int_{\partial\Omega} (u\nabla u \cdot n) &\leq \alpha \int_{\Omega} (u^2) \end{aligned}$$

Et puisque  $u(t) \in H_0^1(\Omega) \forall t$ , l'intégrale sur  $\partial\Omega$  est nulle. Il reste :

$$\int_{\Omega} (u\partial_t u) + D \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) \leq \alpha \int_{\Omega} (u^2)$$

On intègre maintenant sur  $[0, t]$  pour  $t \in [0, T]$ . On rappelle qu'on avait  $u \in C^1([0, T], X)$ , donc en particulier on a  $u \in L^2([0, T], \Omega)$  et  $\partial_t u \in L^2([0, T], \Omega)$ . On en déduit que  $\int_0^T \int_{\Omega} u\partial_t u < \infty$ . Par Fubini-Lebesgue, on peut alors intervertir les intégrales sur le temps et sur l'espace, d'où :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^t (u\partial_t u) + D \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) &\leq \alpha \int_0^t \int_{\Omega} (u^2) \\ \int_{\Omega} \frac{u^2(t)}{2} + D \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u) &\leq \alpha \int_0^t \int_{\Omega} (u^2) + \int_{\Omega} \frac{u_0^2(t)}{2} \\ \frac{\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} + D \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \alpha \int_0^t \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} \end{aligned}$$

Or on a  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  donc par l'inégalité de Poincaré, on obtient l'existence de  $C \geq 0$  telle que  $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} + D \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \alpha \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} \\ \frac{\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} + (D - C^2 \alpha) \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq + \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} \end{aligned}$$

Cette inégalité est réellement utile si  $(D - C^2 \alpha) \geq 0$ . D'après [3],  $\Omega$  étant lipschitzien et convexe de diamètre  $\sqrt{2}$ , on a  $C \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ . Donc pour pouvoir utiliser l'inégalité démontrée, une condition suffisante est que les paramètres de l'équation vérifient  $D \geq \frac{2\alpha}{\pi^2}$ .

Dans ce cas, cette inégalité indique que la quantité  $\frac{\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} + (D - C\alpha) \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ , qui représente une énergie associée à la solution  $u$ , est bornée. On peut aussi en déduire que  $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  est bornée.

### 3.2.3 Idées pour montrer que $u \leq 1$ \*

Une idée possible pour montrer que  $u$  est bornée en norme infinie serait de reprendre la méthode de 3.2.2, mais en multipliant au préalable  $u$  par une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . Ensuite en choisissant bien une suite de telles fonctions et en exploitant l'inégalité obtenue, peut-être arriverait-on à montrer que  $u$  est bornée en norme infinie.

Le seul vrai résultat obtenu est partiel : on montre que  $u$  ne peut pas admettre de maximum local strictement supérieur à 1, et il faut pour cela admettre la continuité de l'application suivante :

$$\tilde{u} : \begin{cases} [0, T] \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, y) & \longmapsto & u(t)(x, y) \end{cases}$$

La continuité de cette application est prouvée dans [2] pour la même équation sans le terme  $F(u)$ . Vu la forme de  $F$ , il paraît raisonnable de supposer que l'ajout de ce terme ne va pas causer l'apparition d'irrégularités dans les solutions.

Supposons qu'en  $(t_0, x_0, y_0) \in ]0, T[ \times \Omega$ ,  $\tilde{u}$  admette un maximum local  $M > 1$ . Ici, on va à nouveau utiliser un résultat admis et potentiellement faux : grâce à la continuité de  $\tilde{u}$ , on peut trouver un voisinage  $[t_1, t_2] \times \mathcal{V}$  de  $(t_0, x_0, y_0)$  avec  $\mathcal{V}$  à bord lipschitzien et tel qu'il existe  $1 < m < M$  et qu'on ait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{u}|_{\overset{\circ}{[t_1, t_2] \times \mathcal{V}}} > m \\ \tilde{u}|_{\partial([t_1, t_2] \times \mathcal{V})} = m \\ \tilde{u} \leq m \text{ à l'extérieur de } [t_1, t_2] \times \mathcal{V} \end{cases} \quad (3)$$

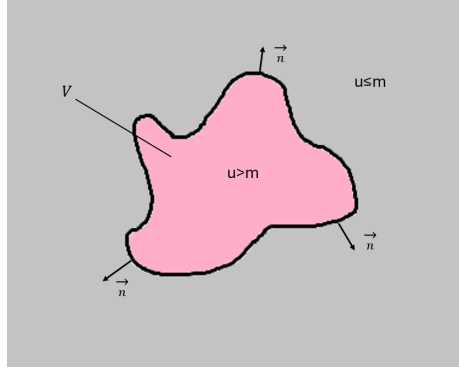


Figure 1: une représentation à  $t$  fixé

On va maintenant reprendre les calculs faits en 3.2.2, mais en intégrant sur  $[t_1, t_2] \times \mathcal{V}$  :

$$\int_{\mathcal{V}} \int_{t_1}^{t_2} (u \partial_t u) - D \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{V}} (u \Delta u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{V}} (\alpha u^2 (1 - u) - \beta u^2 v)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (u^2(t_2) - u^2(t_1)) - D \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{V}} (u \nabla u \cdot n) + D \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{V}} (\nabla u \cdot \nabla u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{V}} (\alpha u^2 (1 - u) - \beta u^2 v)$$

Or vu les hypothèses de (3), on a  $u^2(t_2) - u^2(t_1) = 0$  en tout point de  $\mathcal{V}$ . De plus on peut faire une remarque concernant l'intégrale sur  $\partial \mathcal{V}$ .

Puisque  $\forall t \in ]t_1, t_2[$ , on a  $u(t) > m$  dans  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  et  $u(t) \leq m$  à l'extérieur, le gradient de  $u$  en un point de  $\partial \mathcal{V}$  pointera nécessairement vers l'intérieur de  $\mathcal{V}$ . En revanche le vecteur normal  $n$  pointe toujours vers l'extérieur, donc le produit scalaire  $\nabla u \cdot n$  sera toujours négatif.

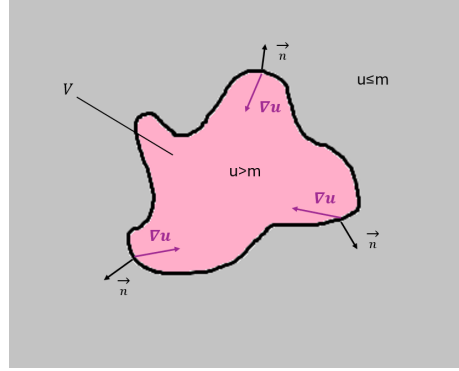


Figure 2: une représentation à  $t$  fixé

On reprend l'équation, il reste :

$$-D \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{V}} (u \nabla u \cdot n) + D \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{V}} (\nabla u \cdot \nabla u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{V}} (\alpha u^2 (1 - u) - \beta u^2 v)$$

Et on aboutit à une contradiction, car le membre gauche de l'égalité est positif, et le membre de droite est négatif, puisque sur  $\mathcal{V}$ , on a  $1 - u \leq 1 - m \leq 0$  par hypothèse. On devrait donc avoir  $u = 1$  ou  $u = 0$  sur  $[t_1, t_2] \times \mathcal{V}$ . Dans tous les cas cela contredit l'hypothèse  $u > m$ , donc on en conclut que  $u$  ne peut pas atteindre de maximum local strictement au dessus de 1.

### 3.3 Temps d'existence de la solution ★

La norme  $L^2$  est dominée par la norme infinie sur  $\Omega$ . Ainsi, le fait que  $u$  appartienne à  $C^1([0, T], X)$  implique qu'on a également  $u \in C^1([0, T], L^2(\Omega))$ .

Or, dans [4], on trouve un équivalent du lemme des bouts pour les EDOs, qui s'énonce ainsi : si  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty$  (où  $\|\cdot\|$  est la norme de l'espace d'arrivée), alors la solution  $u$  est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Or on a démontré en 3.2.2 que sous une certaine hypothèse sur les paramètres, on a  $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$  bornée.

On en conclut donc que  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ . Ce résultat permet de donner du sens à une tentative de résolution numérique de l'équation.

## 4 Résolution numérique ★

### 4.1 Définition des paramètres

Avant d'implémenter des méthodes de résolution numérique du problème, il faut déterminer les paramètres utilisés. Souvenons-nous que l'étude théorique a utilisé certaines hypothèses sur ces paramètres, qu'on veillera à respecter :

$$\begin{cases} v \in C^\infty(\Omega, [0, 1]) \\ u_0 \in C^\infty(\Omega, [0, 1]), u_0|_{\partial\Omega} = 0 \\ D \geq \frac{2\alpha}{\pi^2} \end{cases}$$

On définit d'abord la fonction  $v$ . L'idée est de représenter la répartition d'informations intéressantes pour des espions au sein d'un pays ; pour cela on va sommer des courbes gaussiennes. Les courbes avec un grand écart type, et par conséquent une faible valeur maximale permettront de représenter la différence d'information contenue d'une région du pays à une autre. On introduira également des courbes d'écart type très faibles, pour représenter les villes qui concentrent énormément d'informations ; enfin, on normalisera de sorte à ce que  $v$  reste à valeurs entre 0 et 1. En notant  $g_{\mu,\sigma}$  la fonction définie ainsi :

$$g_{\mu,\sigma} : (x, y) \mapsto e^{-\frac{(x-\mu_1)^2 + (y-\mu_2)^2}{2\sigma^2}},$$

On définit

$$v = \frac{1}{4}(3g_{(0.85,0.75),0.2} + 2g_{(0.1,0.25),0.35} + g_{(0.85,0.8),0.02} + g_{(0.9,0.62),0.02} + 2g_{(0.4,0.8),0.02} + g_{(0.08,0.25),0.025})$$

. Voir la figure 3 pour le graphe de  $v$ .



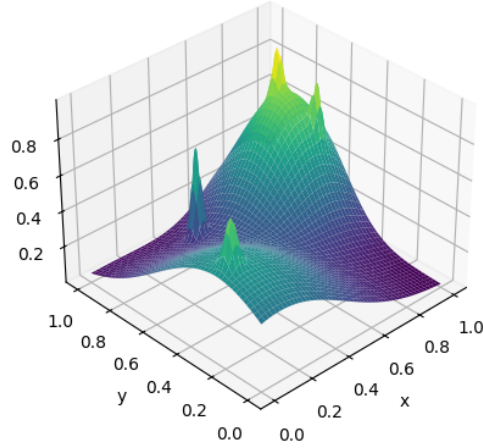


Figure 3: graphe de  $v$

Conformément à l'interprétation de  $D$  vue en 2.1, on choisit  $D = 0.15$ . Pour respecter l'inégalité  $D \geq \frac{2\alpha}{\pi^2}$ , on choisit alors  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Enfin, pour ne pas accorder trop de poids au terme de contre-espionnage en comparaison avec le terme de reproduction, on choisit également  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Reste maintenant à voir comment on va représenter  $u_0$ , pour qu'elle soit  $C^\infty$  et nulle sur  $\partial\Omega$ . La brique élémentaire pour construire  $u_0$  sera la fonction  $\psi$  définie ainsi :

$$\psi : (x, y) \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(x^2+y^2)}} & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases},$$

dont on sait qu'elle est  $C^\infty$  et de support inclus dans  $[-1, 1]^2$  par [6]. On imagine que le pays espion enverra plus d'agents aux endroits où il pense pouvoir trouver plus d'informations ; on fera donc en sorte que les pics de  $u_0$  soient atteints à peu près aux mêmes endroits que ceux de  $v$ . On notera  $\Psi_{(x_0, y_0), r}$  la fonction définie pour  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$  par :

$$\Psi_{(x_0, y_0), r} : (x, y) \mapsto \psi\left(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - y_0}{r}\right).$$

$\Psi_{(x_0, y_0), r}$  est une "bosse"  $C^\infty$  de support la boule de rayon  $r$  autour de  $(x_0, y_0)$ . On définit alors  $u_0$  :

$$u_0 = 1.5\Psi_{(0.8, 0.8), \frac{1}{5}} + 0.75\Psi_{(0.3, 0.2), \frac{1}{5}} + \Psi_{(0.5, 0.5), \frac{1}{2}} + 0.5\Psi_{(0.4, 0.8), \frac{1}{5}}.$$

Le graphe de  $u_0$  est sur la figure 4.

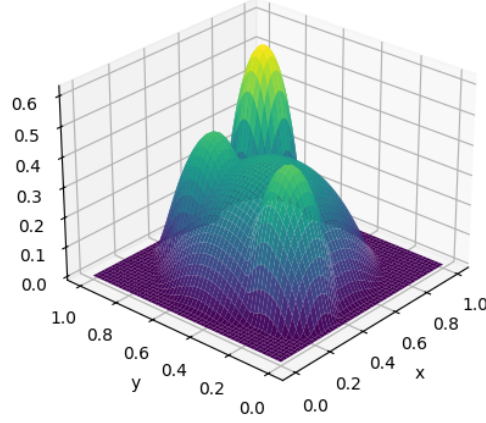


Figure 4: graphe de  $u_0$

## 4.2 Différences explicites

### 4.2.1 Description

L'objectif ici est d'approcher la solution sur un domaine temporel de la forme  $[0, T]$ . On discrétise le domaine spatial de façon uniforme  $(x_i, y_j)_{(i,j) \in \{1, \dots, J\}^2}$ , et on note  $\Delta x = \frac{1}{J+1}$  le pas. On discrétise également le domaine temporel  $(t_k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$  et on note  $\Delta t$  le pas. On définit alors le schéma suivant, centré spatial aux différences explicites :

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} &= D \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta x^2} + \alpha u_{i,j}^k (1 - u_{i,j}^k) - \beta u_{i,j}^k v(x_i, x_j) \\ u_{i,j}^0 &= u_0(x_i, x_j) \end{cases}$$

En prenant la convention que  $u_{i-1,j}^k = 0$  si  $i = 1$ , vu  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ .

On peut montrer que ce schéma est consistant si on admet que  $u$  est  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times \Omega$ . On note  $\epsilon_{i,j}^k$  l'erreur de consistance :

$$\epsilon_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k) - \Delta t \left( D \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta x^2} + \alpha u_{i,j}^k (1 - u_{i,j}^k) - \beta u_{i,j}^k v(x_i, x_j) \right)$$

Or on a  $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t \partial_t u(x_i, y_j, t_k) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ , et

$$\partial_t u(x_i, y_j, t_k) = D \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta x^2} + \alpha u_{i,j}^k (1 - u_{i,j}^k) - \beta u_{i,j}^k v(x_i, x_j).$$

Si on injecte cela dans l'expression de  $\epsilon_{i,j}^k$ , il reste :

$$\epsilon_{i,j}^k = \Delta t(D\Delta u(x_i, y_j, t_k) - D(\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta x^2})) + \mathcal{O}(\Delta t).$$

Puis en écrivant les développements limités de  $u(x_{i+1}, y_j, t_k)$ ,  $u(x_{i-1}, y_j, t_k)$ ,  $u(x_i, y_{j+1}, t_k)$  et  $u(x_i, y_{j-1}, t_k)$ , on obtient :

$$\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta x^2} = \Delta u(x_i, y_j, t_k) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

D'où  $\epsilon_{i,j}^k = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t)$ .

On aurait aimé étudier la convergence du schéma, mais les méthodes vues en cours d'EDP ne s'appliquent pas dans ce cas, à cause de l'impossibilité d'écrire le schéma sous forme matricielle (non linéarité).

En revanche, en s'inspirant des résultats vus dans le cours, on s'assurera à tout moment dans la résolution numérique du problème que la condition CFL  $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  est vérifiée. C'est une condition suffisante pour la convergence de ce schéma quand il est appliqué à l'équation sans le terme réactif, d'après [2].

#### 4.2.2 Résultats

Les simulations effectuées en utilisant cette méthode ont donné des résultats très décevants. On constate en jouant sur les paramètres qu'on est assez limité sur les arguments qui aboutissent à un calcul réussi par l'ordinateur. De plus, même quand le calcul termine, les courbes obtenues contredisent les résultats théoriques, et il est assez clair que le schéma utilisé est en réalité instable. Voilà le type de courbe qu'on peut obtenir :

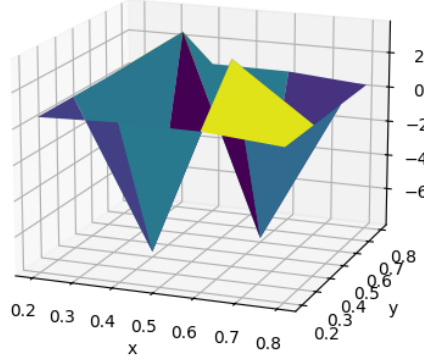


Figure 5: graphe d'une solution sur  $[0, 100]$  à  $t = 50$  environ

On ne peut pas interpréter ces résultats faux.

### 4.3 Différences implicites

En utilisant la même discrétisation spatiale et temporelle, on aurait pu tenter d'implémenter une méthode aux différences implicites pour la comparer avec les différences explicites :

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = D \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \alpha u_{i,j}^{k+1} (1 - u_{i,j}^{k+1}) - \beta u_{i,j}^{k+1} v(x_i, x_j) \\ u_{i,j}^0 = u_0(x_i, x_j) \end{cases}$$

La difficulté de l'implémentation de cette méthode vient de la non linéarité ; résoudre le système non linéaire qu'on obtient n'est pas une tâche facile.

## 5 Bibliographie

- [1] T. Gallay, équations aux dérivées partielles, 2014
- [2] CIP and PDE, Centrale-Supélec
- [3] Inégalité de Poincaré, Wikipedia
- [4] Fanny Dardalhon, Federico Verga, le théorème de Hille Yosida et ses applications aux équations de réaction diffusion, 2006
- [5] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations, 1993
- [6] Fonctions  $C^\infty$  à support compact, Wikipedia