
Rapport de ST5 Pollution Magnétique

ENSEIGNEMENT D'INTÉGRATION

Hugues OLDRA, Maxime NICAISE, Noah PARISSE
P2026

Contents

1	Introduction	2
2	Développement de la technologie	3
2.1	Domaine étudié	3
2.2	Équation de Helmholtz et conditions aux bords	4
2.3	Source électromagnétique	5
2.4	Définition du problème d'optimisation	6
2.5	Calcul de la dérivée de l'énergie	7
2.6	Minimisation de l'énergie	8
2.7	Résultats	9
2.7.1	Optimisation sur une seule fréquence	9
2.7.2	Optimisation sur de multiples fréquences	10
2.7.3	Optimisation avec mur pré-fractal	12
3	Conclusion	13

Introduction

On cherche à concevoir une chambre anéchoïque électromagnétique. Ces chambres sont des environnements hautement contrôlés, conçus pour absorber les ondes électromagnétiques et éliminer les réflexions. Elles permettent ainsi de tester des équipements électroniques et des dispositifs de communication dans des conditions idéales, en simulant un espace sans interférences. Que ce soit pour tester la compatibilité électromagnétique, la performance des antennes, ou la fiabilité des systèmes sans fil, ces chambres sont indispensables pour garantir la sécurité et la performance des technologies modernes.

Notre travail consiste en une première partie, axée sur l'étude des propriétés physiques des matériaux absorbants que nous avons envisagé d'utiliser. La deuxième partie utilise les résultats de la première, notamment les constantes propres au matériau retenu. Cette deuxième partie développe toute la théorie et le code qui nous ont permis de concevoir la chambre anéchoïque la plus efficace possible.

Développement de la technologie

Il a été nécessaire dans un premier temps de définir le modèle de la façon la plus précise possible, avant de pouvoir faire les calculs qui nous ont permis de choisir quelle technologie serait la plus efficace.

2.1 Domaine étudié

On définit ici la forme générale de la pièce qui deviendra notre chambre anéchoïque. Voici la géométrie choisie pour l'étude menée. Il s'agit d'une pièce carrée de 10m par 10m. La source est placée sur Γ_d , d pour condition de Dirichlet. Le matériau absorbant retenu après la partie 2 sera placé sur Γ_r , ce qui implique une condition de Robin sur cette interface. Des conditions de Neumann sont imposés aux autres bords.

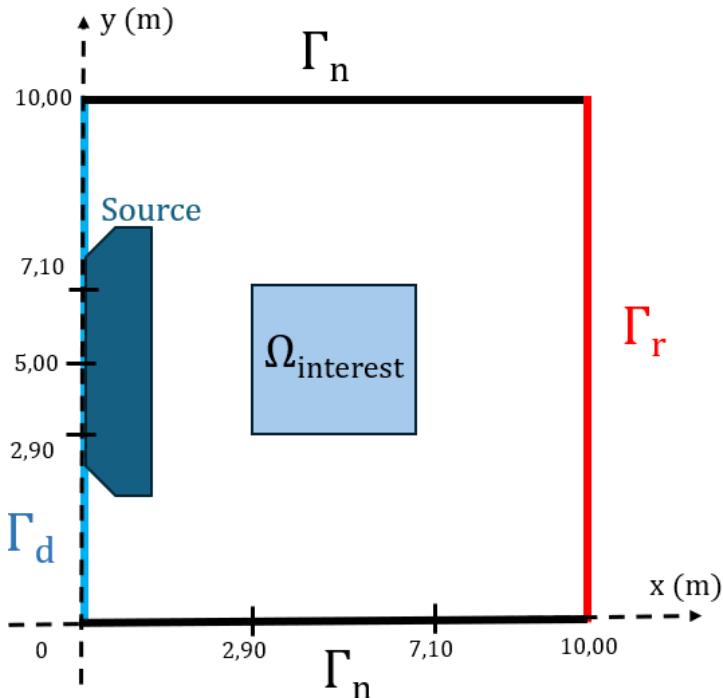


Figure 2.1: Domaine étudié.

La plage de fréquence d'étude des ondes électromagnétiques a son importance, pour déterminer le nombre de points du maillage. On se place ici dans le domaine de fréquence $f \in [300 \text{ MHz}, 2 \text{ GHz}]$. Ceci impose des longueurs d'ondes $\lambda \in [0.15 \text{ m}, 1 \text{ m}]$. Pour des raisons de temps du calcul numérique, on choisit un maillage de 150 par 300 points pour la suite. Comme le bord fait 10m, cela veut dire qu'il y a 15 points par mètre, donc à minima 2.25 à 4.5 points par longueur d'onde en fonction de la fréquence choisie dans la plage. Le critère de Shannon est donc respecté. Le sous domaine $\Omega_{interest}$ représenté correspond

à l'endroit de la pièce où on aimeraient placer les capteurs ; il sera donc particulièrement important de minimiser l'énergie dans cette partie du domaine.

2.2 Équation de Helmholtz et conditions aux bords

On considère l'approximation scalaire du champ électrique, en fréquentiel. L'onde se propage d'abord dans la pièce, puis elle pénètre le matériau poreux. On imagine qu'il y a une source près du mur gauche de la pièce, qui pourrait être l'antenne qu'on souhaite tester par exemple. On projette cette source en une condition de Dirichlet sur le mur de gauche, pour ne pas avoir à considérer d'obstacle dans le domaine. Les autres murs sont complètement réfléchissants.

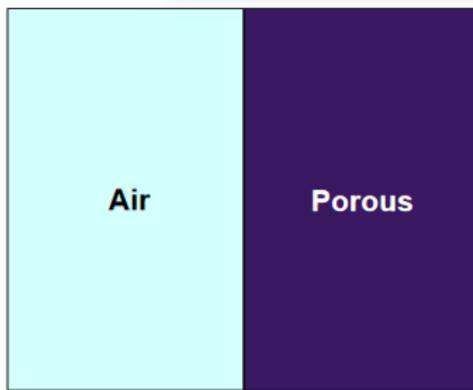


Figure 2.2: Domaine étudié.

Les équations obtenues sont les suivantes : on résout séparément l'équation de Helmholtz dans les 2 parties du domaine, et on impose sur la frontière entre les deux milieux une condition de continuité.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_{\text{air}} : \\ \nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_0) + \omega^2 \xi_0 u_0 = 0, \\ \text{Dans } \Omega_{\text{wall}} : \\ \nabla \cdot (\eta_1 \nabla u_1) + \omega^2 \xi_1 \left(1 + \frac{\alpha i}{\xi_1 \omega}\right) u_1 = 0, \\ \text{Sur } \Gamma : \\ u_0 = u_1 \quad \text{et} \quad \eta_0 \nabla u_0 \cdot \nu = \eta_1 \nabla u_1 \cdot \nu, \\ \text{Sur la frontière gauche :} \\ u_0(-L, y) = g(y). \end{array} \right.$$

Pour des simplifications dans les calculs numériques qui suivront, il est intéressant de se ramener à un problème sur un seul milieu. Cela est possible, en ne considérant que le milieu air, et en changeant la condition sur le bord Γ , d'après [2]. Le système obtenu devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + k^2) u = 0 \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{Neu}}; \\ u = g \text{ sur } \Gamma_{\text{Dir}}; \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(\omega)u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

La condition de Robin traduit le phénomène d'absorption qui a lieu sur la bordure Γ . Plus précisément, lorsque $\alpha(\omega)$ est à partie réelle strictement positive et à partie imaginaire

strictement négative, il y a absorption sur Γ . Le coefficient $\alpha(\omega)$ qui permet d'obtenir l'équivalence de ces 2 modèles est déterminé numériquement, d'après un résultat de [1], et dépend de la fréquence ω et de la source g . On mesure l'erreur commise en calculant la norme H^1 de la différence entre la solution de 2.1, et la solution u_0 de 2.1. On a calculé cette erreur en fonction de la fréquence sur la plage à laquelle on s'intéresse :

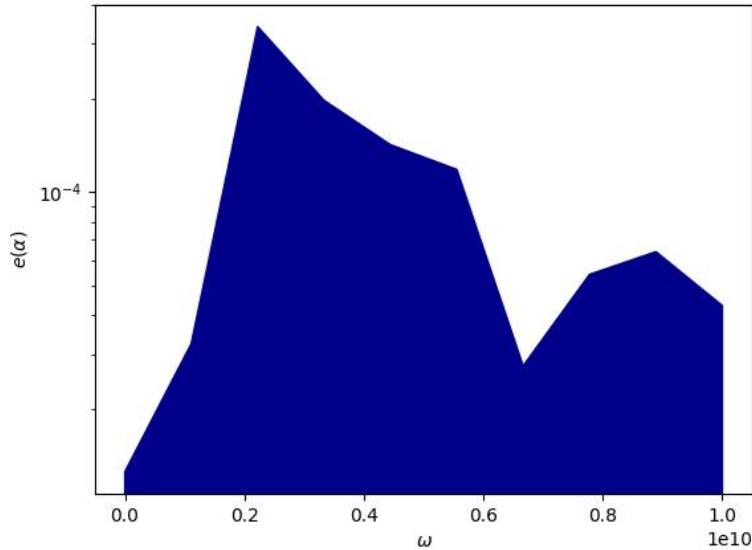


Figure 2.3: Erreur commise en changeant le modèle en fonction de la fréquence.

On constate que cette erreur est au plus de l'ordre de 10^{-4} , ce qui est entièrement satisfaisant. On peut donc considérer le modèle simplifié 2.1.

2.3 Source électromagnétique

La source électromagnétique considérée (la fonction g qui définit la condition de Dirichlet sur le mur de gauche) sera définie ainsi :

- Répartition en amplitude : gaussienne
- Largeur à mi-hauteur : 4,00 m

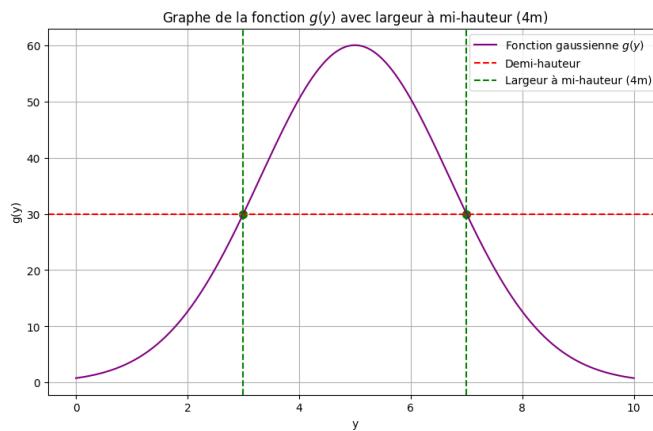


Figure 2.4: Représentation graphique de $g(y)$.

2.4 Définition du problème d'optimisation

On arrive ici à la partie cruciale de notre travail. L'objectif était de développer une technologie qui permette d'avoir une "énergie électromagnétique minimale" dans la pièce, mais ce concept doit être défini de façon formelle. Il faut choisir le levier sur lequel nous allons agir pour minimiser cette énergie. Premièrement, comme présenté dans le chapitre 5 de [2], laisser de la place à la réflexion des ondes peut permettre d'obtenir une absorption meilleure sur l'ensemble du domaine. D'où l'idée de ne pas placer du matériau absorbant partout sur Γ , mais de laisser un peu de place à la réflexion (qui est modélisée par une condition de bord de Neumann homogène). On modifie donc un peu le modèle 2.1 :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) u = 0 \text{ sur } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{Neu}; \\ u = g \text{ sur } \Gamma_{Dir}; \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \chi u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.2)$$

On a rajouté ici sur la condition de Robin un terme χ . Cette fonction est une indicatrice, qui vaut 1 là où il y a du matériau absorbant et 0 ailleurs. Plus rigoureusement, on fixe la proportion β de matériau absorbant sur le bord, et on prend χ dans l'ensemble suivant :

$$\mathcal{U}_{ad}(\beta) := \{\chi \in L^\infty(\Gamma, \mu), \chi \in \{0, 1\}, \int_\Gamma \chi d\mu = \beta\}. \quad (2.3)$$

Où μ est une mesure de support Γ telle que $\mu(\Gamma) = 1$. χ devient donc le paramètre sur lequel on va essayer de jouer pour minimiser l'énergie dans la pièce. On note ensuite $u(\chi, \omega)$, la solution de 2.2 avec la pulsation ω , et on définit la fonctionnelle d'énergie qui répond aux attentes définies dans la partie 2.1 :

$$J(\chi) = \int_\Omega |u(\chi, \omega)|^2 dx + \int_{\Omega_{interest}} |u(\chi, \omega)|^2 dx. \quad (2.4)$$

Le premier terme donne une mesure de l'énergie associée à l'onde dans toute la pièce, et le deuxième mesure l'énergie particulièrement localisée dans le sous domaine $\Omega_{interest}$. On cherchera la fonction χ permettant de minimiser $J(\chi)$.

Cependant, cette énergie est associée à une seule fréquence, et on cherche à minimiser l'énergie pour une plage de fréquences. Il pourra donc être intéressant par la suite de plutôt considérer une fonctionnelle qui correspond à l'énergie associée à plusieurs fréquences :

$$J_2(\chi) = \sum_{p=1}^N \left(\int_\Omega |u(\chi, \omega_p)|^2 dx + \int_{\Omega_{interest}} |u(\chi, \omega_p)|^2 dx \right). \quad (2.5)$$

Malheureusement, pour assurer l'existence d'un χ minimisant l'énergie, on est forcés de considérer des χ dans un ensemble légèrement plus gros que $\mathcal{U}_{ad}(\beta)$. On doit considérer :

$$\mathcal{U}_{ad}^*(\beta) := \{\chi \in L^\infty(\Gamma, \mu), \chi \in [0, 1], \int_\Gamma \chi d\mu = \beta\}. \quad (2.6)$$

En fait on sait que $\mathcal{U}_{ad}^*(\beta)$ est fermé pour la convergence faible* (voir [2]), et que J et J_2 sont continues au sens de la convergence faible* sur $\mathcal{U}_{ad}^*(\beta)$, donc elles atteignent nécessairement un minimum sur cet ensemble.

2.5 Calcul de la dérivée de l'énergie

Ici on calcule la dérivée de Fréchet de la fonctionnelle J définie par 2.4. On notera u la solution de 2.2 ; le problème est que ce système contient une condition de Dirichlet non homogène, ce qui complique un peu le calcul de la dérivée. Pour se ramener à une condition de Dirichlet homogène, on introduit \hat{g} la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta \hat{g} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{Neu}} \cup \Gamma, \\ \hat{g} = g & \text{sur } \Gamma_{\text{Dir}}. \end{cases} \quad (2.7)$$

On pose $u = \hat{g} + \hat{u}$, et \hat{u} est la solution de :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{u} = -k^2 \hat{g} & \text{sur } \Omega; \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{Neu}}; \\ \hat{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{Dir}}; \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \alpha \chi (\hat{u} + \hat{g}) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.8)$$

On notera $f = -k^2 \hat{g}$. On sépare le système 2.8 en partie réelle et imaginaire et on obtient les formulations faibles suivantes :

$$\begin{aligned} & \forall v_R \in V(\Omega), \\ & - \int_{\Gamma} \chi (\alpha_R (\hat{u}_R + \hat{g}_R) - \alpha_I (\hat{u}_I + \hat{g}_I)) v_R d\mu - \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_R \nabla v_R dx + k^2 \int_{\Omega} \hat{u}_R v_R dx = \int_{\Omega} f_R v_R dx, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour la partie réelle et :

$$\begin{aligned} & \forall v_I \in V(\Omega) \\ & - \int_{\Gamma} \chi (\alpha_I (\hat{u}_R + \hat{g}_R) + \alpha_R (\hat{u}_I + \hat{g}_I)) v_I d\mu - \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_I \nabla v_I dx + k^2 \int_{\Omega} \hat{u}_I v_I dx = \int_{\Omega} f_I v_I dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pour la partie imaginaire. On soustrait 2.10 à 2.9 et on obtient la formulation variationnelle pour tout $(v_R, v_I) \in V(\Omega) \times V(\Omega)$:

$$\begin{aligned} FV(\chi, \hat{u}_R, \hat{u}_I, v_R, v_I) := & \int_{\Gamma} \chi \left[(\alpha_I (\hat{u}_R + \hat{g}_R) + \alpha_R (\hat{u}_I + \hat{g}_I)) v_I \right. \\ & \left. - (\alpha_R (\hat{u}_R + \hat{g}_R) - \alpha_I (\hat{u}_I + \hat{g}_I)) v_R \right] d\mu \\ & + \int_{\Omega} \left[\nabla \hat{u}_I \nabla v_I - \nabla \hat{u}_R \nabla v_R + k^2 (\hat{u}_R v_R - \hat{u}_I v_I) \right. \\ & \left. + f_I v_I - f_R v_R \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

On en déduit le lagrangien du problème :

$$\mathcal{L}(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) := FV(\chi, w_R, w_I, q_R, q_I) + \int_{\Omega} ((w_R + \hat{g}_R)^2 + (w_I + \hat{g}_I)^2)(1 + \mathbb{1}_{\Omega_{\text{interest}}}) dx. \quad (2.12)$$

On cherche maintenant le problème adjoint :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R} (\chi, \hat{u}_R, \hat{u}_I, q_R, q_I), \phi_R \right\rangle = \\ & \int_{\Omega} 2(1 + \mathbb{1}_{\Omega_{\text{interest}}}) u_R \phi_R + \int_{\Gamma} \chi [\alpha_I q_I \phi_R - \alpha_R q_R \phi_R] d\mu \\ & + \int_{\Omega} [-\nabla q_R \nabla \phi_R + k^2 q_R \phi_R] dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour la partie réelle, où $u_R = \hat{u}_R + \hat{g}_R$. Et pour la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_I} (\chi, \hat{u}_R, \hat{u}_I, q_R, q_I), \phi_I \right\rangle &= \\ \int_{\Omega} 2(1 + \mathbb{1}_{\Omega_{\text{interest}}}) u_I \phi_I + \int_{\Gamma} \chi [\alpha_R q_I \phi_I + \alpha_I q_R \phi_I] d\mu \\ &+ \int_{\Omega} [-\nabla q_I \nabla \phi_I - k^2 q_I \phi_I] dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où $u_I = \hat{u}_I + \hat{g}_I$. En utilisant le même procédé que dans la partie 7 de [2], on remonte au problème adjoint associé :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) p = -2(1 + \mathbb{1}_{\Omega_{\text{interest}}}) \bar{u} & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{Neu}}, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{Dir}}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \alpha \chi p = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.15)$$

En notant p la solution de ce problème, on en déduit la dérivée de J :

$$\begin{aligned} \langle J'(\chi), \chi_0 \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} (\chi, \hat{u}_R, \hat{u}_I, p_R, p_I), \chi_0 \right\rangle \\ &= - \int_{\Gamma} \chi_0 \operatorname{Re}(\alpha u p) d\mu. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Et donc le gradient de J au point χ est $-\operatorname{Re}(\alpha u p)$. On peut en déduire directement par linéarité le gradient de J_2 au point χ :

$$\operatorname{grad} J_2(\chi) = - \sum_{n=1}^N \operatorname{Re}(\alpha u_n p_n).$$

Où u_n est la solution de 2.2 avec $\omega = \omega_n$ et p_n la solution de 2.15 avec $\omega = \omega_n$.

2.6 Minimisation de l'énergie

Maintenant que le gradient de l'énergie est connu, l'idée est de déterminer le χ optimal par une descente de gradient. On aura donc à chaque utilisation de l'algorithme une distribution de départ χ_0 et une distribution après descente de gradient $\chi_n \in \mathcal{U}_{ad}^*(\beta)$. À chaque itération de la descente de gradient, on aura besoin de calculer les solutions u au problème 2.2 et p au problème adjoint 2.15. Pour cela on utilise une méthode de différences finies, en prêtant attention à respecter le critère de Shannon. Le maillage de Ω doit être suffisamment fin pour qu'il y ait au moins 10 points de maillage par demi longueur d'onde.

Il est intéressant de projeter χ_n sur $\mathcal{U}_{ad}(\beta)$ puisque les éléments de $\mathcal{U}_{ad}^*(\beta)$ ne représentent plus une distribution de matériau absorbant, et de regarder si l'énergie reste plus optimale qu'avant la descente de gradient. Pour cela, on "transforme" χ_n en utilisant un seuil s : si $\chi_n(y) \geq s$, alors on pose $\chi_{\text{charac}}(y) = 1$ et $\chi_{\text{charac}}(y) = 0$ sinon. On détermine le seuil s qui permet de conserver la condition $\int_{\Gamma} \chi_{\text{charac}} d\mu = \beta$ par dichotomie en pratique.

2.7 Résultats

On utilise l'algorithme proposé par [2] dans la partie 7.6. Pour avoir une référence, on trace l'énergie en fonction de la fréquence avec un mur recouvert à 100% de matériau absorbant :

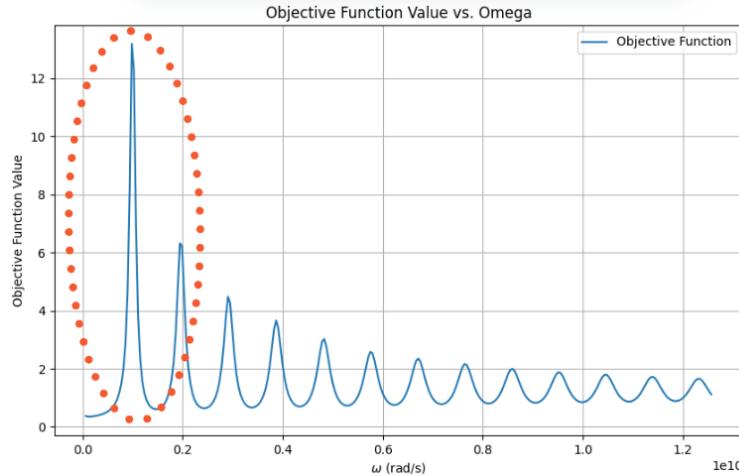


Figure 2.5: Représentation graphique de $g(y)$.

On constate que les fréquences problématiques sont plutôt les plus basses de la bande considérée, en particulier celle entourée en rouge sur la figure 2.7. Cela donne un point de départ pour l'optimisation sur une seule fréquence. D'autre part, cette figure donne une idée des ordres de grandeurs de l'énergie qu'on peut observer : nous nous étions fixé comme objectif de faire disparaître les pics les plus gros, et d'essayer de faire passer l'énergie en dessous de 3 sur toute la plage de fréquence considérée.

2.7.1 Optimisation sur une seule fréquence

On considère plusieurs χ_0 , correspondant à des β différents, puis on calcule le χ_n correspondant par descente de gradient, à la fréquence entourée en rouge sur la figure 2.7. Les résultats les plus concluants ont été ceux sur les figures 2.7.1 et légèrement mieux 2.7.1.

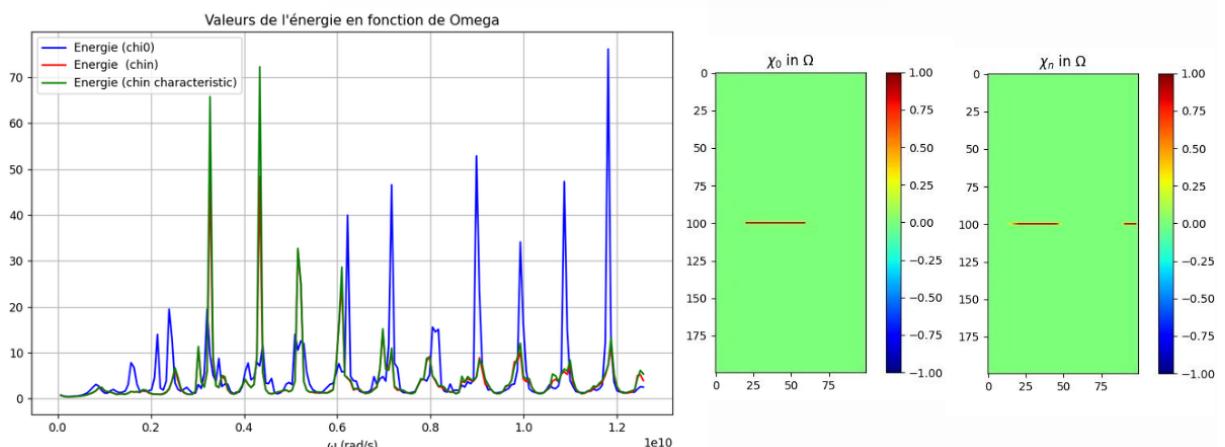


Figure 2.6: $\beta = 0.4$.

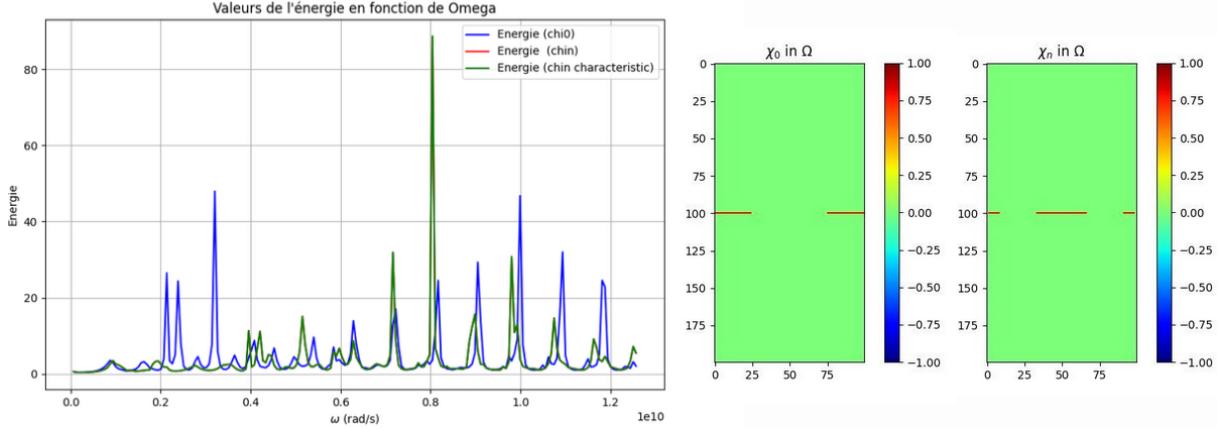


Figure 2.7: $\beta = 0.5$.

La courbe bleue verte représente l'énergie associée à χ_0 , la verte l'énergie associée à χ_n et la rouge l'énergie associée à χ_{charac} , la projection de χ_n sur $\mathcal{U}_{ad}(\beta)$. On remarque ici que χ_n était déjà extrêmement proche d'être une indicatrice, donc la courbe verte et la rouge sont quasiment confondues.

Ce premier résultat est assez mitigé. En effet, on constate bien que le niveau d'énergie a beaucoup baissé dans les basses fréquences, surtout sur la figure 2.7.1, en revanche il a augmenté en haute fréquence par rapport à χ_0 . Ceci est lié à ce qui avait déjà été expliqué dans la partie 2.4. Une idée pour pallier ce problème est alors d'identifier les autres fréquences où on identifie des pics ; on obtient alors une liste de pulsations $(\omega_1, \dots, \omega_N)$ d'intérêt. On détermine alors χ_n par descente de gradient sur J_2 définie par la formule 2.5.

2.7.2 Optimisation sur de multiples fréquences

Sur la figure 2.7.2, on obtient un résultat beaucoup plus satisfaisant en optimisant sur 4 fréquences.

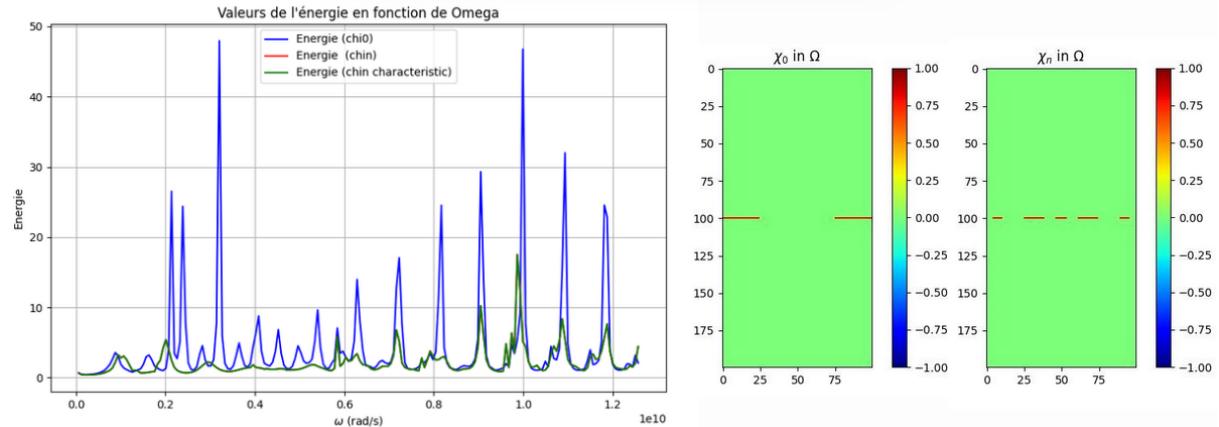


Figure 2.8: $\beta = 0.5$.

Cependant, quelques pics subsistent encore en hautes fréquences. On peut penser qu'il faudrait rajouter les fréquences correspondantes à la liste de celles sur lesquelles on optimise. Pourtant cette stratégie s'est révélée infructueuse ; l'ajout d'un grand nombre de

termes hautes fréquences dans J_2 fait perdre de l'importance aux termes de basse fréquence et on a alors des pics qui apparaissent en basse fréquence. Pour l'instant l'objectif qui avait été fixé au départ est encore assez lointain ; il faut donc trouver un autre levier d'action pour minimiser l'énergie sur toute la bande de fréquences considérée. On essaie dans un premier temps d'augmenter considérablement la distribution de matériau absorbant ($\beta \geq 0.7$). Le résultat le plus concluant a été obtenu pour $\beta = 0.8$, sur la figure 2.7.2 :

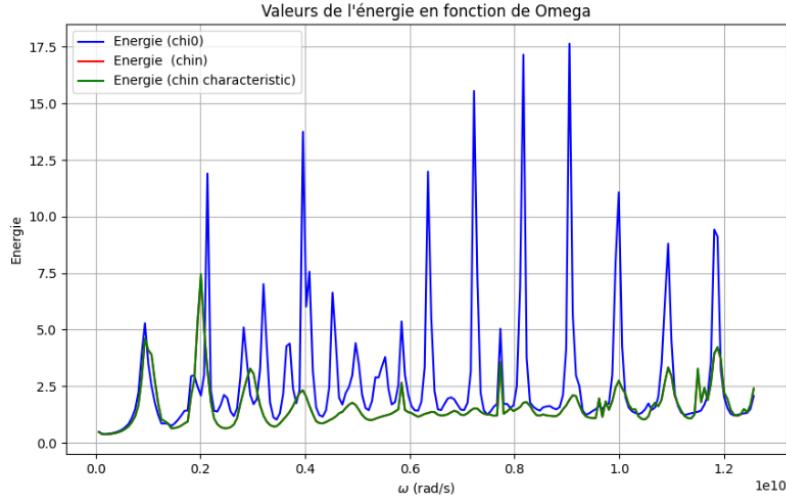


Figure 2.9: Optimisation sur une seule fréquence avec $\beta = 0.8$.

On constate que les résultats sont très bons en optimisant sur une seule fréquence, mais quelques pics restent encore. Puisque la méthode avait marché avec β plus bas on essaie d'optimiser sur plusieurs fréquences. Il se trouve que pour une raison inexpliquée, cette méthode est complètement inefficace dès que $\beta \geq 0.7$: optimiser sur plus d'une fréquence ajoute systématiquement des nouveaux pics plus hauts, comme on peut le voir sur la figure 2.7.2:

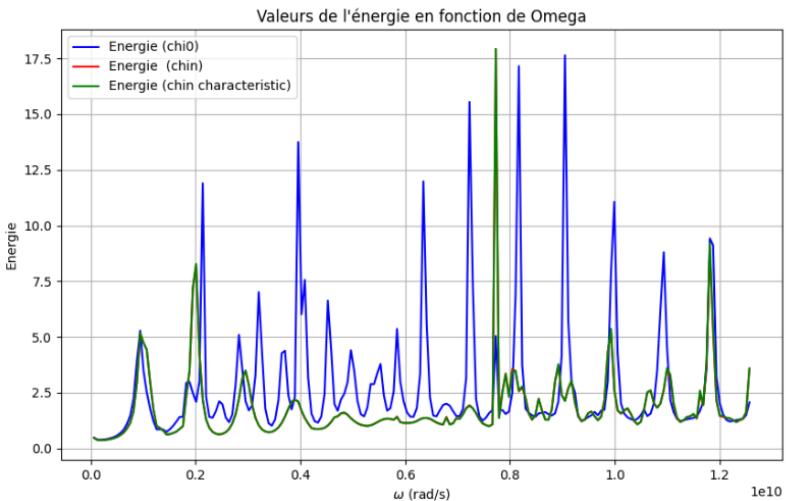


Figure 2.10: Optimisation sur plusieurs fréquences avec $\beta = 0.8$.

Il faut donc trouver un autre levier d'action.

2.7.3 Optimisation avec mur pré-fractal

En considérant un mur pré-fractal, on augmente la surface d'interaction de l'onde avec le mur absorbant, en laissant encore la possibilité d'avoir des réflexions. On suit les mêmes étapes que celles présentées avec le mur plat, et on retient les meilleurs résultats obtenus :

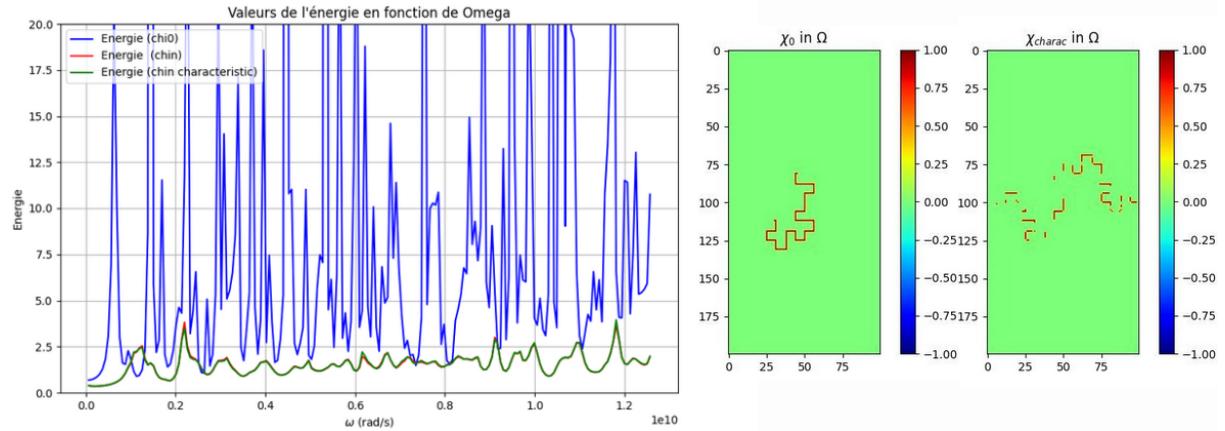


Figure 2.11: Optimisation sur plusieurs fréquences avec $\beta = 0.4$ et une fractale d'ordre 2.

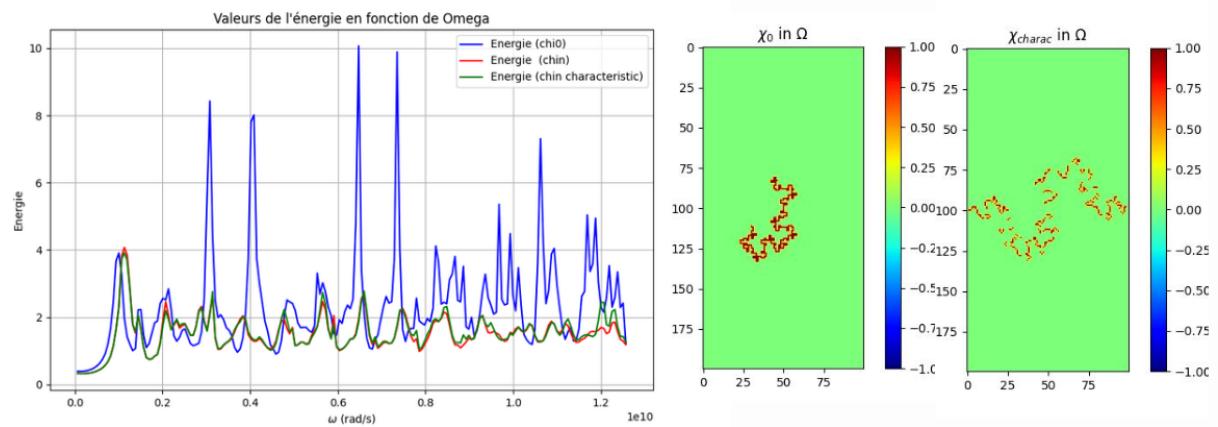


Figure 2.12: Optimisation sur plusieurs fréquences avec $\beta = 0.4$ et une fractale d'ordre 3.

L'objectif est quasiment atteint, notamment avec la fractale d'ordre 2. Quelques pics subsistent, même quand on essaie de rajouter les fréquences associées dans l'optimisation. Augmenter la quantité de matériau absorbant n'a pas été une solution ici non plus, on rencontre le même problème qu'avec le mur plat, c'est à dire que l'optimisation sur plusieurs fréquences ne marche plus.

Conclusion

Le produit le plus efficace retenu est donc le mur préfractal d'ordre 2, avec une proportion 0.4 de matériau absorbant. On retiendra que si l'optimisation sur la distribution de matériau a été faite de façon rigoureuse (avec la descente de gradient), celle sur la forme a plutôt été faite sur la base d'observations. Il serait intéressant de développer des méthodes mathématiques d'optimisation de la géométrie du domaine, par exemple une optimisation de la bordure Γ sous la contrainte que Γ est comprise dans un certain ouvert du plan, et de voir si les formes optimales se rapprochent de celles dont on a pu constater l'efficacité simplement par l'expérience.

Bibliography

- [1] Frédéric Magoulès, Thi Phuong Kieu Nguyen, Pascal Omnes, and Anna Rozanova-Pierrat. Optimal absorption of acoustical waves by a boundary, 2020.
- [2] Anna Rozanova-Pierrat. *Polycopié du cours de la 2ème année, ST5-57, MDS: "Contrôle des Ondes"*, 2024.