Taller #1

3. Considere lo expuesto en la sección 1.4.3 y demuestre que:

$$A^{i'}_k \tilde{A}^j_{i'} = \delta^j_k \,,$$

y además, como un caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1 \,.$$

Probar que: $A^{i'}_k \tilde{A}^j_{i'} = \delta^j_k$

Dem. Sean $A^{i'}_k = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$, $\tilde{A}^j_{i'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$, $x^j = x^j(x^{i'}(x^k))$

$$\Rightarrow A^{i'}_k \tilde{A}^j_{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

Ahora, calculamos $\dfrac{\partial x^j}{\partial x^k}$ por medio de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \,,$$

por lo que obtenemos:

$$A^{i'}_k \tilde{A}^j_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k}$$

Ahora consideramos los dos casos de δ^j_k

- Si $j = k$

$$A^{i'}_j \tilde{A}^j_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^j} = 1 = \delta^j_j = \delta^k_k$$

- Si $j \neq k$

Como en este caso x^j y x^k son coordenadas independientes, tenemos:

$$A^{i'}_k \tilde{A}^j_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} = 0 = \delta^j_k \quad //$$

En particular, si $j = k$

Sea $\{\hat{e}_j\}$ la base ortonormal original y $\{\hat{e}'_{i'}\}$ la base ortonormal rotada.

$\Rightarrow \hat{e}'_{i'} = A^{i'}_j \hat{e}_j$

$\Rightarrow \hat{e}'_{i'} \cdot \hat{e}_j = A^{i'}_j$

$\Rightarrow A^{i'}_j = \cos(\theta_{i'j})$ $\quad \theta_{i'j} \to$ ángulo entre i' y j.

$\Rightarrow \hat{e}'_{i'} \cdot \hat{e}'_{i'} = 1$

$\Rightarrow A^{i'}_j A^{i'}_j (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_j) = 1$

$\Rightarrow A^{i'}_j A^{i'}_j = 1 = (A^{i'}_j)^2 = 1$

$\Rightarrow (A^{1'}_1)^2 + (A^{2'}_2)^2 + (A^{3'}_3)^2 = 1$

Si fijamos $\hat{e}'_{i'}$ entonces $\theta_{1'1} = \alpha$, $\theta_{2'2} = \beta$ y $\theta_{3'3} = \gamma$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

4. Considere el radio vector posición $\mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{i}}_i \equiv x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos las componentes de $\mathbf{r}$ transforman como verdaderas componentes de vectores.

$$(x, y) \to (-y, x)\,, \quad (x, y) \to (x, -y)\,, \quad (x, y) \to (x - y, x + y)\,, \quad (x, y) \to (x + y, x - y)\,.$$

$r = x^i \hat{i}_i = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad r' = x^{i'} \hat{i}_{i'}$

Se debe verificar que $x^{i'} = A^{i'}_j x^j$ para $i, j = 1, 2$

a) $(x^1, x^2) \to (-x^2, x^1)$

$\Rightarrow x^{1'} = -x^2 \wedge x^{2'} = x^1$

puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{i'} = A x^j$$

Calculamos $A^{i'}_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

por lo que transforma como un vector

b) $(x^1, x^2) \to (x^1, -x^2)$

$\Rightarrow x^{1'} = x^1 \wedge x^{2'} = -x^2$

puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{i'} = A x^j$$

Calculamos $A^{i'}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

por lo que transforma como vector

c) $(x^1, x^2) \to (x^1 - x^2, x^1 + x^2)$

$\Rightarrow x^{1'} = x^1 - x^2 \wedge x^{2'} = x^1 + x^2$

puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{i'} = A x^j$$

Calculamos $A^{i'}_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

por lo que transforma como vector

d) $(x^1, x^2) \to (x^1 + x^2, x^1 - x^2)$

$\Rightarrow x^{1'} = x^1 + x^2 \wedge x^{2'} = x^1 - x^2$

puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{i'} = A x^j$$

Calculamos $A^{i'}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$ por lo que transforman como vector.

2. Considere que:

- $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} = x^i\mathbf{i}_i$,
- $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}_i$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(x,y,z) = b^i(x,y,z)\mathbf{i}_i$,
- $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x,y,z)$ y $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x,y,z)$.

Utilizando la notación de índices, e inspirándose en el ejemplo: 1.14 demuestre las siguientes identidades vectoriales:

(a). $\boldsymbol{\nabla}(\phi\psi) = \phi\boldsymbol{\nabla}\psi + \psi\boldsymbol{\nabla}\phi$.

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Dem. Sean $\phi = \phi(r)$; $\psi = \psi(r)$ campos escalares.

$$\begin{aligned}(\nabla(\phi\psi))^i &= \partial^i(\phi\psi)\\ &= \psi\,\partial^i(\phi) + \phi\,\partial^i(\psi)\\ &= (\phi\nabla\psi)_i + (\psi\nabla\phi)_i\end{aligned}$$

La igualdad se mantiene en cada componente

$\Rightarrow \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$; como se quería demostrar. //

(d). $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})$ ¿Qué puede decir de $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})$?

d) $\nabla\cdot(\nabla\times a) = 0$

Dem. Sea $a = a(r)$ un campo vectorial.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times a) &= \partial^i(\nabla\times a)_i\\ &= \partial^i(\varepsilon_{ijk}\partial^j a^k)\\ &= \varepsilon_{ijk}\partial^i(\partial^j a^k)\\ &= \varepsilon_{jik}\partial^j(\partial^i a^k) \rightarrow \partial^i(\partial^j a^k) = \partial^j(\partial^i a^k)\\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial^i(\partial^j a^k)\end{aligned}$$

Las derivadas parciales conmutan.

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\partial^i(\partial^j a^k) = -\varepsilon_{ijk}\partial^i(\partial^j a^k)$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\partial^i(\partial^j a^k) = 0$

$\Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\times a) = 0$ //

$\nabla\times(\nabla\cdot a)$ no está definido pues $\nabla\cdot a$ es un escalar y el rotacional sólo se define para campos vectoriales

(f). $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{a}$.

f) $\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a$

Dem. Sea $a = a(r)$ un campo vectorial.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times a) &= \varepsilon_{ijk}\partial^j(\nabla\times a)^k\\ &= \varepsilon_{ijk}\partial^j(\varepsilon^{klm}\partial_l a_m)\\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{klm}\partial^j(\partial_l a_m)\end{aligned}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon^{lmk}\,\partial^j(\partial_l a_m)$$

$$= (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l)\,\partial^j(\partial_l a_m)$$

$$= \partial^j(\partial_i a_j) - \partial^j(\partial_j a_i)$$

$$= \partial_i(\partial^j a_j) - \partial^j \partial_j a_i$$

$$= \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a \;//$$

2. Demuestre:

(a). $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)$.

(b). $\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$.

a) $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha$

Dem. Sea $z = x + iy = |z| e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow z^n = (|z| e^{i\theta})^n = |z|^n (e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)} = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

$\Rightarrow |z|^n (\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) = |z|^n (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n$

$\Rightarrow (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$

Tomando $n = 3 \Rightarrow (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta$

$\Rightarrow \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta = \cos 3\theta + i\operatorname{sen}3\theta$

Igualando parte imaginaria y real, obtenemos:

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen}3\theta = 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta \end{cases} //$$

5. Encuentre todas las raíces de las siguientes expresiones:

(a). $\sqrt{2i}$

(b). $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

(c). $(-1)^{1/3}$

(d). $8^{1/6}$

(e). $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]$$

a) $\sqrt{2i}$

Tomando $z=2i$ y $n=2$

$\Rightarrow |z|=2 \wedge \theta=\pi/2$

• Para $k=0$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 1+i$$

• Para $k=1$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = -1-i$$

b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

Tomando $z=1-\sqrt{3}i$

$\Rightarrow |z|=2 \wedge \theta=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$

• Para $k=0$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

• Para $k=1$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

c) $(-1)^{1/3}$

Tomando $z=-1$

$\Rightarrow |z|=1 \wedge \theta=\pi$

• Para $k=0$

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

• Para $k=1$

$$z_1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$$

- Para $k = 2$

$$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

d) $8^{1/6}$

Tomando $z = 8$

$\Rightarrow |z| = 8 \wedge \theta = 0$

- Para $k = 0, 1 .., 5$

$$z_0 = \sqrt{2}\,(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = \sqrt{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\,(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) = -\sqrt{2}$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

Tomando $z = -8 - 8\sqrt{3}i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16 \wedge \theta = \arctan\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right) = \frac{\pi}{3}$

Pero z está en el tercer cuadrante

$\Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

- Para $k = 0, 1, 2, 3$

$$z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

6. Demuestre que:

(a). $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$.

(b). $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} i$

(c). $\text{Log}(e) = 1 + 2n\pi i$.

(d). $\text{Log}(i) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$.

$\text{Log}(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n)$

a) $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

Tomando $z = -ie \Rightarrow |z| = e$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \text{Log}(-ie) = \ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

Si tomamos $n = 0$

$\Rightarrow \text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

b) $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} i$

Tomando $z = 1-i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$ y $\theta = -\pi/4$

$\Rightarrow \text{Log}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

Si tomamos $n = 0$

$\Rightarrow \text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} i$

c) $\text{Log}(e) = 1 + 2n\pi i$

Tomando $z = e \Rightarrow |z| = e$ y $\theta = 0$

$\Rightarrow \text{Log}(e) = \ln e + 2n\pi i$

$= 1 + 2n\pi i$

d) $\text{Log}(i) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$

Tomando $z = i \Rightarrow |z| = 1$ y $\theta = \pi/2$

$\Rightarrow \text{Log}(i) = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$= \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$