Taller #2

Ejercicio 1

10. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i .$$

(a). Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

(b). Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?

(c). ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).

IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

a) $|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$

Dem. Sea $p(x), q(x), r(x) \in \mathcal{P}_n \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ $\qquad r(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ $\qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \mathbb{Z}$

• $|V_k\rangle = |V_i\rangle + |V_j\rangle \in V \quad \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i \in \mathcal{P}_n$$

pues $\forall i,\ a_i + b_i \in \mathbb{R}$

• $|V_i\rangle + |V_j\rangle = |V_j\rangle + |V_i\rangle, \ \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i = q(x) + p(x) = (q+p)(x)$$

• $|V_i\rangle + (|V_j\rangle + |V_k\rangle) = (|V_i\rangle + |V_j\rangle) + |V_k\rangle \quad \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle, |V_k\rangle \in V$

$$[p(x) + q(x)] + r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [(a_i + b_i) + c_i] x^i = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i + (b_i + c_i)] x^i = p(x) + [q(x) + r(x)].$$

• $\exists!\ 0 \in V : \ |V_i\rangle + 0 = |V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V$

Sea $0_V(x) = 0 = 0 + 0x + \ldots + 0x^{n-1}$

$\Rightarrow p(x) + 0_V(x) = p(x)$

Suponga que existe $\tilde{0}(x)$ otro elemento neutro

$\Rightarrow p(x) + \tilde{0}(x) = p(x)$

$\Rightarrow p(x) + \tilde{0}(x) = p(x) + 0_V(x)$

$\Rightarrow \tilde{0}(x) = 0_V(x)$

Por tanto, el elemento neutro existe y es único.

• $\exists |-V_i\rangle \in V : \ |-V_i\rangle + |V_i\rangle = 0 \quad \forall |V_i\rangle \in V$

Sea $p'(x) = -p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_{n-1})x^{n-1}$

$$\Rightarrow p'(x) + p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i + a_i) x^i = 0$$

• $\alpha |V_i\rangle \in V \quad \forall \alpha \in K, \ \forall |V_i\rangle \in V$

$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i) x^i \in V$$

pues $\alpha a_i \in \mathbb{R} \ \forall \alpha, a_i \in \mathbb{R}.$

- $\alpha(\beta|V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \quad \forall \alpha,\beta \in K, \ \forall |V_i\rangle \in V$

$$\alpha[\beta p(x)] = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha\beta a_i)x^i = (\alpha\beta)p(x)$$

por propiedades de la sumatoria la constante puede entrar al término que se suma.

- $(\alpha+\beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle + \beta|V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V, \ \forall \alpha,\beta \in K$

$$(\alpha+\beta)p(x) = (\alpha+\beta)\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha+\beta)a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i + \beta a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha a_i)x^i + \sum_{i=0}^{n-1}(\beta a_i)x^i$$

$$= \alpha p(x) + \beta p(x)$$

- $\alpha(|V_i\rangle + |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle + \alpha|V_j\rangle \quad \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V, \ \forall \alpha \in K$

$$\alpha[p(x)+q(x)] = \alpha\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha(a_i+b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha a_i x^i + \alpha b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha a_i)x^i + \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha b_i)x^i$$

$$= \alpha p(x) + \alpha q(x)$$

- $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V \wedge V_i \in K$

$$1p(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(1a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = p(x) \ ; \ 1 \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow P_n$ es un EV sobre K junto a las operaciones definidos //

b) En este caso, no es un EV, pues los escalares siguen proviniendo del campo $\mathbb{R}$, por lo que podríamos tener $p(x) = \sqrt{2}x$ que no tiene coeficientes enteros.

c) Para cada opción se revisan las condiciones para que sea subespacio:

I. Sí es un subespacio

1) $0 \in S_1$, pues $0(x) = 0 + 0x + \ldots + 0x^{n-2}$
2) Sean $p(x), q(x) \in S_1$. $p(x)+q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_{n-2}+b_{n-2})x^{n-2} \in S_1$
3) $\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \ldots + \alpha a_{n-2}x^{n-2} \in S_1$

II. No es subespacio

Sean $p(x) = a_1 x + \ldots a_{2n}x^{2n}$ y $p^*(x) = a_1 x + \ldots - a_{2n}x^{2n} \in S_2$

Aunque $p(x) \in S_2 \wedge p^*(x) \in S_2$ vemos que:

$$p(x) + p^*(x) = a_1 x + \ldots + (a_{2n-1}+a_{2n-1})x^{2n-1} + (a_{2n}-a_{2n})x^{2n}$$
$$= a_1 x + \ldots + 2a_{2n-1}x^{2n-1} \notin S_2$$

pues $\forall n \in \mathbb{Z}$ $2n-1$ es impar.

III. Sí es un subespacio

1) $0 \in S_3$, pues $0(x) = x0 = 0$
2) $p(x) = x(a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) \in S_3$, $q(x) = x(b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) \in S_3$

$\Rightarrow p(x)+q(x) = x[(a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \ldots + (a_n+b_n)x^n] \in S_3$

3) $\alpha p(x) = \alpha x(a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = x(\alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n) \in S_3$

IV. Sí es un subespacio

1) $0 \in S_4$, pues $0(x) = (x-1)0 = 0$

2) $p(x) = (x-1)(a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1})$ y $q(x) = (x-1)(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}) \in S_4$

$\Rightarrow p(x)+q(x) = (x-1)[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}] \in S_4$

3) $\alpha p(x) = \alpha(x-1)(a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}) = (x-1)(\alpha a_0+\alpha a_1+\ldots+\alpha a_{n-1}x^{n-1}) \in S_4$

Ejercicio 2

Con la información anterior, responda las siguientes preguntas:

(a). Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenada cartesianas.

$V = \{|x\rangle : |x\rangle = x^\alpha|q_\alpha\rangle\}$

$|a\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle \qquad |c\rangle = c^\alpha|q_\alpha\rangle$

$|b\rangle = b^\alpha|q_\alpha\rangle \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

- $|V_k\rangle = |V_i\rangle + |V_j\rangle \in V, \ \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$

$|a\rangle + |b\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle + b^\alpha|q_\alpha\rangle = (a^\alpha+b^\alpha)|q_\alpha\rangle \in V$

- $|V_i\rangle + |V_j\rangle = |V_j\rangle + |V_i\rangle, \ \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V$

$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha+b^\alpha)|q_\alpha\rangle = (b^\alpha+a^\alpha)|q_\alpha\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

- $|V_i\rangle + (|V_j\rangle + |V_k\rangle) = (|V_i\rangle + |V_j\rangle) + |V_k\rangle \quad \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle, |V_k\rangle \in V$

$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = a^\alpha|q_\alpha\rangle + (b^\alpha|q_\alpha\rangle + c^\alpha|q_\alpha\rangle) = (a^\alpha|q_\alpha\rangle + b^\alpha|q_\alpha\rangle) + c^\alpha|q_\alpha\rangle = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle.$

- $\exists!\ 0 \in V : |V_i\rangle + 0 = |V_i\rangle \ \forall |V_i\rangle \in V$

$0_V = 0^\alpha|q_\alpha\rangle = 0 + 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} \in V$

$|a\rangle + 0_V = a^\alpha|q_\alpha\rangle + 0^\alpha|q_\alpha\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle = |a\rangle$

Supongamos $\tilde{0} \in V : \tilde{0} + |a\rangle = |a\rangle$

$\Rightarrow \tilde{0} + |a\rangle = 0_V + |a\rangle$

$\Rightarrow \tilde{0} = 0_V \longrightarrow$ Es único.

- $\exists |-V_i\rangle \in V : |-V_i\rangle + |V_i\rangle = 0 \ \forall |V_i\rangle \in V$

$|-a\rangle = (-a)^\alpha|q_\alpha\rangle \in V$

$\Rightarrow |-a\rangle + |a\rangle = (-a)^\alpha|q_\alpha\rangle + a^\alpha|q_\alpha\rangle = (-a+a)^\alpha|q_\alpha\rangle = 0^\alpha|q_\alpha\rangle = 0_V$

- $\alpha|V_i\rangle \in V \ \forall \alpha \in K, \forall |V_i\rangle \in V$

$\beta|a\rangle = \beta(a^\alpha|q_\alpha\rangle) = (\beta a)^\alpha|q_\alpha\rangle \in V$

- $\alpha(\beta|V_i\rangle) = (\alpha\beta)|V_i\rangle \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall |V_i\rangle \in V$

$\beta(\gamma|a\rangle) = \beta[(\gamma a)^\alpha|q_\alpha\rangle] = (\beta\gamma a)^\alpha|q_\alpha\rangle = \beta\gamma(a^\alpha|q_\alpha\rangle) = (\beta\gamma)|a\rangle$

- $(\alpha+\beta)|V_i\rangle = \alpha|V_i\rangle + \beta|V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V, \ \forall \alpha, \beta \in K$

$(\beta+\gamma)|a\rangle = (\beta+\gamma)a^\alpha|q_\alpha\rangle = \beta a^\alpha|q_\alpha\rangle + \gamma a^\alpha|q_\alpha\rangle = \beta|a\rangle + \gamma|a\rangle$

• $\alpha(|V_i\rangle + |V_j\rangle) = \alpha|V_i\rangle + \alpha|V_j\rangle \quad \forall |V_i\rangle, |V_j\rangle \in V, \ \forall \alpha \in K$

$$\beta(|a\rangle + |b\rangle) = \beta[(a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle] = \beta a^\alpha |q_\alpha\rangle + \beta b^\alpha |q_\alpha\rangle = \beta|a\rangle + \beta|b\rangle$$

• $1|V_i\rangle = |V_i\rangle \quad \forall |V_i\rangle \in V \wedge 1 \in K$

$$1|a\rangle = (1a^\alpha)|q_\alpha\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle = |a\rangle \ ; \quad 1 \in \mathbb{R}$$

(b). Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}) \ ,$$

donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

Tenemos que: $\hat{\imath}^2 = \hat{\jmath}^2 = \hat{k}^2 = -1$

$\wedge \ \hat{\imath}\hat{\jmath} = \hat{k}, \ \hat{\jmath}\hat{k} = \hat{\imath}, \ \hat{k}\hat{\imath} = \hat{\jmath}$ y anticonmutan.

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0, b)\odot(r^0, r) = b^\alpha|q_\alpha\rangle \odot r^\alpha|q_\alpha\rangle$$

$$= (b_0 + b\cdot|q_i\rangle)\odot(r_0 + r\cdot|q_i\rangle) = b_0 r_0 + b_0 r\cdot|q_i\rangle + r_0 b\cdot|q_i\rangle + (b\cdot|q_i\rangle)(r\cdot|q_i\rangle)$$

$$(b\cdot|q_i\rangle)(r\cdot|q_i\rangle) = (b^1\hat{\imath} + b^2\hat{\jmath} + b^3\hat{k})(r^1\hat{\imath} + r^2\hat{\jmath} + r^3\hat{k})$$

$$= b^1r^1\hat{\imath}^2 + b^1r^2\hat{\imath}\hat{\jmath} + b^1r^3\hat{\imath}\hat{k} + b^2r^1\hat{\jmath}\hat{\imath} + b^2r^2\hat{\jmath}^2 + b^2r^3\hat{\jmath}\hat{k} + b^3r^1\hat{k}\hat{\imath} + b^3r^2\hat{k}\hat{\jmath} + b^3r^3\hat{k}\hat{k}$$

Usando la tabla de multiplicación encontramos:

$$= -b^1r^1 + b^1r^2\hat{k} - b^1r^3\hat{\jmath} - b^2r^1\hat{k} - b^2r^2 + b^2r^3\hat{\imath} + b^3r^1\hat{\jmath} - b^3r^2\hat{\imath} - b^3r^3$$

$$= -b^1r^1 - b^2r^2 - b^3r^3 + (b^2r^3 - b^3r^2)\hat{\imath} + (b^3r^1 - b^1r^3)\hat{\jmath} + (b^1r^2 - b^2r^1)\hat{k}$$

$$= -b\cdot r + (b\times r)$$

$$\Rightarrow (b_0 + b\cdot|q_i\rangle)\odot(r_0 + r\cdot|q_i\rangle) = b_0r_0 + b_0 r + r_0 b + (-b\cdot r) + (b\times r)$$

Agrupando parte vectorial y escalar:

$$|d\rangle = |b\rangle\odot|r\rangle = (d_0, d) = (b_0r_0 - b\cdot r,\ b_0 r + r_0 b + (b\times r))$$

(c). Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^\alpha|q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha|q_\alpha\rangle$, compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle\odot|r\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle\odot|r\rangle = a\,|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha\,|q_j\rangle + A^{[jk]i}b_j r_k\,|q_i\rangle \ .$$

donde a representa un número, $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores $j,k,l = 1,2,3$, mientras $\alpha = 0,1,2,3$), donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica, y por lo tanto $\left(S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha\right)|q_j\rangle$.

Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k:[21]

$$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to \left(A^{jki}b_j r_k - A^{kji}b_j r_k\right)|q_i\rangle \ .$$

Para la parte escalar, $a|q_0\rangle = a$ por lo que por sí sola representa toda la parte escalar.

$S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle$ es un término asociado a dos vectores que aparecen en la fórmula, que son simétricos y son sumados, por lo que este elemento debe ser simétrico.

$A^{[jk]i}b_j r_k|q_i\rangle$ indica una permutación anticíclica, asociada al producto cruz presente en la fórmula en las componentes de los vectores r y b, en dirección perpendicular a ellos, por ello se incluye $|q_i\rangle$.

Con las definiciones correctas para estos elementos es posible, ya que sigue la estructura:

$|a\rangle\odot|b\rangle$ = escalar + simétrico + antisimétrico.

(d). Identifique las cantidades: a, $S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$, en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? Explique por qué.

Podemos definir:

$a = b_0 r_0 - b \cdot r \rightarrow$ Parte escalar

$S^{\alpha j} \delta^0_\alpha = S^{j\alpha} \delta^0_\alpha = S^{0j} = S^{j0}$

$\Rightarrow S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle = \frac{1}{2}(S^{0j} + S^{j0})|q_j\rangle$

$\Rightarrow S^{0j} = S^{j0} = r_0 b_j + b_0 r_j = b_0 r_j + r_0 b_j \rightarrow$ Parte simétrica.

$S^{(ij)} = b_i r_j + r_i b_j$.

$A^{[jk]i} = \varepsilon^{jki} \rightarrow$ Parte antisimétrica.

para recuperar la notación de índices para el producto vectorial

El producto $|a\rangle \odot |b\rangle$ mezcla vectores, pseudovectores y escalares.

La parte vectorial de $|a\rangle \odot |b\rangle$ bajo una reflexión:

$d = \underbrace{r_0 b + b_0 r}_{\text{Vector}} + \underbrace{(b \times r)}_{\text{Pseudovector}}$

$d^{i'} = A^{i'}_j a^j + \det|A^{i'}_j| A^{i'}_j a^j \qquad A^{i'}_j \rightarrow$ Matriz de rotación.

En general $\det|A^{i'}_j|$ no siempre es 1, por lo que no se tiene

$d^{i'} = B^{i'}_j a^j \rightarrow$ Transformación como vector puro

$d^{i'} = \det|C^{i'}_j| C^{i'}_j a^j \rightarrow$ Transformación como pseudo vector puro.

(e). Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 \equiv \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$. Seguidamente muestre que matrices complejas 2×2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix},$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$ son números complejos. Las Matrices de Pauli aparecen en mecánica cuántica cuando se tiene en cuenta la interacción del espín de una partícula con un campo electromagnético externo y en estas notas las consideraremos en varios momentos (ver, por ejemplo los ejercicios de las secciones 4.3.7 y 4.6.6).

Podemos identificar a cada matriz como una base del cuaternión.

$|q_0\rangle \leftrightarrow I$ pues $|q_j\rangle I = |q_j\rangle \wedge |q_0\rangle|q_0\rangle = II = I$

$|q_j\rangle \leftrightarrow i\sigma_j \qquad j = 1, 2, 3$

$\left.\begin{array}{l} i\sigma_1 i\sigma_2 = -\sigma_3 \\ i\sigma_2 i\sigma_1 = \sigma_3 \end{array}\right\}$ Anticonmutativa

$i\sigma_2 i\sigma_3 = -\sigma_1 \qquad i\sigma_1 i\sigma_3 = -\sigma_2$

$i\sigma_3 i\sigma_2 = \sigma_1 \qquad i\sigma_3 i\sigma_1 = \sigma_2$

Por lo que se cumple la tabla de multiplicación.

Las matrices 2x2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \quad z = x + iy \quad w = a + ib$$

Se pueden ser consideradas como cuaterniones pues:

$$|b\rangle = x I + b i\sigma_1 + a i\sigma_2 + y i\sigma_3$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & bi \\ bi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy & 0 \\ 0 & -iy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+bi & x-iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

(f). Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es: la matriz identidad y las matrices reales 4×4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos asociar cada matriz a un cuaternión y mirar que cumple la tabla de multiplicación:

$|q_0\rangle = I$ pues $|q_i\rangle|q_0\rangle = |q_0\rangle|q_i\rangle = |q_i\rangle \quad i = 1,2,3.$

$|q_1\rangle$ representa la multiplicación por i y sucesivamente.

$|q_1\rangle|q_2\rangle = |q_3\rangle \qquad |q_2\rangle|q_3\rangle = |q_1\rangle \qquad |q_3\rangle|q_1\rangle = |q_2\rangle$

$|q_2\rangle|q_1\rangle = -|q_3\rangle \qquad |q_3\rangle|q_2\rangle = -|q_1\rangle \qquad |q_1\rangle|q_3\rangle = -|q_2\rangle$

$|q_2\rangle|q_2\rangle = -|q_2\rangle$

$|q_3\rangle|q_3\rangle = -|q_3\rangle$

$|q_1\rangle|q_1\rangle = -|q_1\rangle$

(g). Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a \,|b\rangle} = |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle \,.$$

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle$$

No es una buena definición de producto interno, pues:

$|a\rangle = a_0 + a^i|q_i\rangle \quad |b\rangle = b_0 + b^i|q_i\rangle$

$\Rightarrow |a\rangle^{\maltese} = a_0 - a^i|q_i\rangle$

$\Rightarrow |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle = a_0 b_0 + a \cdot b - b_0 a + a_0 b + (b \times a)$

Que no es un número, sino un cuaternión.

cro

(i). Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|b\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\widetilde{\langle a\,|a\rangle}} = \sqrt{|a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle}\,.$$

$|a\rangle = a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$|a\rangle^{\maltese} = a_0 - a_1\hat{i} - a_2\hat{j} - a_3\hat{k}$

$\Rightarrow |a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle = a_0 a_0 + a \cdot a$

$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$$\Rightarrow \sqrt{|a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle} = n(|a\rangle) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Que es idéntica a la norma euclidiana en $\mathbb{R}^4$, por lo que es una buena definición de norma.

(j). Compruebe si un cuaternión definido por:

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\| |a\rangle \|^2},$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$.

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\| |a\rangle \|^2} \Rightarrow |a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$|a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\| |a\rangle \|^2} = (a_0 + a_1 \hat{\imath} + a_2 \hat{\jmath} + a_3 \hat{k}) \odot \left(\frac{a_0}{\| |a\rangle \|^2} + \frac{a_1}{\| |a\rangle \|^2} \hat{\imath} + \frac{a_2}{\| |a\rangle \|^2} \hat{\jmath} + \frac{a_3}{\| |a\rangle \|^2} \hat{k} \right)$$

$$= \frac{a_0^2}{\| |a\rangle \|^2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\| |a\rangle \|^2} = 1$$

Por tanto se puede considerar inverso.

(k). Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a la operación multiplicación $\odot$. Construya la tabla de multiplicación para el grupo de cuaterniones.

$\odot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Con esta tabla se pueden comprobar las 5 propiedades del grupo

$$G = \{\pm 1, \pm j, \pm k, \pm i\}$$

(l). Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte escalar es nula $v^0 = 0 \to |v\rangle = v^j |q_j\rangle$. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma:

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle .$$

Estos es: $\| |v'\rangle \|^2 = \left(v^{1'}\right)^2 + \left(v^{2'}\right)^2 + \left(v^{3'}\right)^2 \equiv (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \| |v\rangle \|^2$.

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$\| |v'\rangle \| = \| \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle \|$$

$$= \| \overline{|a\rangle} \| \, \| |v\rangle \| \, \| |a\rangle \|$$

$$= \frac{1}{\cancel{\| |a\rangle \|}} \| |v\rangle \| \cancel{\| |a\rangle \|}$$

$$= \| |v\rangle \|$$

Por lo tanto, se preserva la norma.