Taller #3

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real}, \\ z_4^* = z_4 & \text{real}, \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos}. \end{cases}$$

Entonces

(a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

(b). Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a \, | b \rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

(c). Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

$V_H = \{ A \in \mathbb{C}_{2\times 2} : A = A^\dagger \}$; $z_n = a_n + i b_n$

a) Calcular una base para V_H:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \in V_H \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = z_1^* \\ z_2 = z_3^* \\ z_3 = z_2^* \\ z_4 = z_4^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + i b_1 = a_1 - i b_1 \\ a_2 + i b_2 = a_3 - i b_3 \\ a_3 + i b_3 = a_2 - i b_2 \\ a_4 + i b_4 = a_4 - i b_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_1, \; b_1 = -b_1 \Rightarrow 0 \\ a_4 = a_4, \; b_4 = -b_4 = 0 \\ a_2 + i b_2 = a_3 - i b_3 \\ a_3 + i b_3 = a_2 - i b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 + i b_1 & a_2 + i b_2 \\ a_3 + i b_3 & a_4 + i b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + i b_2 \\ a_2 - i b_2 & a_4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } V_H$$

$\Rightarrow \dim(V_H) = 4$

Las matrices de Pauli son LI $\Rightarrow$ son una base de V_H

b) Mostraremos que $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es ortogonal. $I = \sigma_0$

$$\langle I | \sigma_1 \rangle = tr(I^\dagger \sigma_1) = tr(\sigma_1) = 0$$

$$\langle I | \sigma_2 \rangle = \langle I | \sigma_3 \rangle = tr(\sigma_2) = tr(\sigma_3) = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = tr(\sigma_1^\dagger \sigma_2) = tr(\sigma_1 \sigma_2) = tr \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = tr(\sigma_2 \sigma_3) = tr \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = tr(\sigma_1 \sigma_3) = tr \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

c) Para una matriz real, $A^\dagger = \overline{A^T} = A^T$, pues $\bar{a} = a \; \forall a \in \mathbb{R}$

$\forall B \in \mathbb{R}_{2\times 2}$: $\to$ Si B es real:

$B \in V_H \Leftrightarrow B$ es simétrica

$\Rightarrow V_S = \{ B \in \mathbb{R}_{2\times 2} : B^T = B \}$ es un subespacio real de V_H.

Es un subespacio pues es claro que es un espacio y $V_S \subseteq V_H$

Para una matriz con componentes imaginarias puras, consideremos a V_H como un EV sobre $\mathbb{R}$ y el conjunto:

$V_A = \left\{ C \in M_{2\times 2} : C = \begin{pmatrix} a i & b i \\ c i & d i \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow$ Comprobamos los axiomas

- $0 \in V_A$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 i & 0 i \\ 0 i & 0 i \end{pmatrix} \in V_A$

- $\forall C, \tilde{C} \in V_A \quad C + \tilde{C} \in V_A$

$C = \begin{pmatrix} a i & b i \\ c i & d i \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{a} i & \tilde{b} i \\ \tilde{c} i & \tilde{d} i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C + \tilde{C} = \begin{pmatrix} (a+\tilde{a}) i & (b+\tilde{b}) i \\ (c+\tilde{c}) i & (d+\tilde{d}) i \end{pmatrix} \in V_A$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall C \in V_A \quad \alpha C \in V_A$

$\alpha C = \begin{pmatrix} \alpha a i & \alpha b i \\ \alpha c i & \alpha d i \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha a i$ es imaginario puro $\Rightarrow \alpha C \in V_A$.

$\Rightarrow$ V_A es subespacio si se considera V_H como EV sobre $\mathbb{R}$.