Informatik II

1. Algorithmen und Datenstukturen

1.1. Terminologie

Algorithmus: Wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input/Probleminstanz) Ausgabedaten (output) berechnet.

Datenstrukturen: Eine Datenstruktur organisiert Daten so in einem Computer, dass man sie (in den darauf operierenden Algorithmen) effizient nutzen kann.

Effizienz: Die Effizienz eines Algorithmus ist seine Sparsamkeit bezüglich der Ressourcen, Zeit und Speicherplatz, die er zur Lösung eines festgelegten Problems beansprucht.

1.2. Effizienz von Algorithmen

Asymptotische Laufzeiten

- **Obere Schranke**: $\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$
- **Untere Schranke**: $\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$
- **Scharfe Schranke**: $\Theta(g) := \Omega(g) \cap \mathcal{O}(g)$
  $\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{1}{c} \cdot f(n) \leq g(n) \leq c \cdot f(n)\}$

Theorem
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ zwei Funktionen. Dann gilt.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g), \mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ (C konstant) $\Rightarrow f \in \Theta(g)$
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$

Beispiel aufsteigende Laufzeiten:
2^{16}, $\log(n^4)$, $\log^8(n)$, $\sqrt{n}$, $n \log n$, $\binom{n}{3}$, $n^5 + n$, $\frac{2^n}{n^2}$, $n!$, n^n

Analyse mit Rekurenz und Teleskopie

```
void g(int n) {
    if (n>1) {
        g(n/2);
        g(n/2);
    }
    else {
        f();
    }
}
```

Rekurrenz ($n = 2^i$)

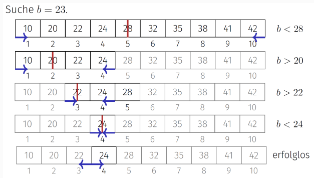
$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

Teleskopieren
$T(n) = 2 \cdot T(n/2) = 2 \cdot (2 \cdot T(n/4))$
$= 2^i \cdot T(n/2^i) = n \cdot T(n/n) \in \Theta(n)$

2. Suchen

2.1. Divide and Conquer

Gegeben: Sortiertes Array A mit n Elementen und einen Schlüssel b
Gesucht: Index k mit $A[k] = b$
Lösung: Zeiger und Halbierung des Arrays



2.2. Binärer Suchalgorithmus: BSearch(A,l,r,b)

Input: Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b. Bereichsgrenzen $1 \leq l, r \leq n$ mit $l \leq r$ oder $l = r + 1$.
Output: Index $m \in [l, \ldots, r+1]$, so dass $A[i] \leq b$ für alle $l \leq i < m$ und $A[i] \geq b$ für alle $m < i \leq r$.
$m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$
if $l > r$ **then** // erfolglose Suche
  return l
else if $b = A[m]$ **then**// gefunden
  return m
else if $b < A[m]$ **then**// Element liegt links
  return BSearch$(A, l, m-1, b)$
else // $b > A[m]$: Element liegt rechts
  return BSearch$(A, m+1, r, b)$

3. Sortieren

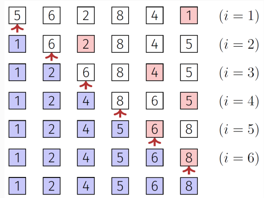
3.1. Laufzeiten von Sortier-Algorithmen

Algorithmus	Vergleiche		Vertauschungen	
	average	worst	average	worst
Bubble Sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Auswahl	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Einfügen	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Quicksort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)^*$
Mergesort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$

3.2. Bubble-Sort

```
def bubbleSort(arr):
    n = len(arr)
    for i in range(n):
        for j in range(n-i-1):
            if arr[j] > arr[j+1] :
                arr[j], arr[j+1] = arr[j+1], arr[j]
```

3.3. Sortieren durch Auswahl



Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil A[i:n] des Arrays.

Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.

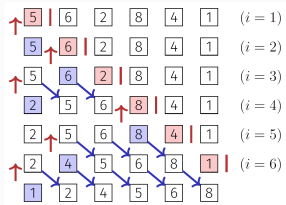
Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \to i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert.

Selection Sort

Input: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
Output: Sortiertes Array A
for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**
  $p \leftarrow i$
  for $j \leftarrow i + 1$ **to** n **do**
    if $A[j] < A[p]$ **then**
      $p \leftarrow j$;
  swap$(A[i], A[p])$

Analyse
Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$
Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $n - 1 = \Theta(n)$

3.4. Sortieren durch Einfügen



Iteratives Vorgehen: $i = 1 \to n$

Einfügeposition für Element i bestimmen.

Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Selection Sort

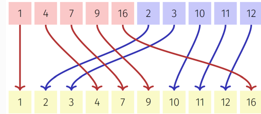
Input: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
Output: Sortiertes Array A
for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
  $x \leftarrow A[i]$
  $p \leftarrow$ `BinarySearch`$(A, 1, i-1, x)$; // Kleinstes $p \in [1, i]$ mit $A[p] \geq x$
  for $j \leftarrow i - 1$ **downto** p **do**
    $A[j+1] \leftarrow A[j]$
  $A[p] \leftarrow x$

Analyse
Nachteil: Im schlechtesten Fall viele Elementverschiebungen. / Vorteil: Der Suchbereich (Einfügebereich) ist bereits sortiert $\longrightarrow$ binäre Suche möglich.

3.5. Mergesort

3.5.1. Merge

Minimum von A kann mit 2 Vergleichen ermittelt werden.



Merge(A,l,m,r)

Input: Array A der Länge n, Indizes $1 \leq l \leq m \leq r \leq n$. $A[l, \ldots, m]$, $A[m+1, \ldots, r]$ sortiert
Output: $A[l, \ldots, r]$ sortiert
$B \leftarrow$ new Array$(r - l + 1)$
$i \leftarrow l$; $j \leftarrow m + 1$; $k \leftarrow 1$
while $i \leq m$ and $j \leq r$ **do**
  if $A[i] \leq A[j]$ **then** $B[k] \leftarrow A[i]$; $i \leftarrow i + 1$
  else $B[k] \leftarrow A[j]$; $j \leftarrow j + 1$
  $k \leftarrow k + 1$;
while $i \leq m$ **do** $B[k] \leftarrow A[i]$; $i \leftarrow i + 1$; $k \leftarrow k + 1$
while $j \leq r$ **do** $B[k] \leftarrow A[j]$; $j \leftarrow j + 1$; $k \leftarrow k + 1$
for $k \leftarrow l$ **to** r **do** $A[k] \leftarrow B[k - l + 1]$

3.5.2. Mergesort

Mergesort(A,l,r) $\to$ rekursive Variante

Input: Array A der Länge n. $1 \leq l \leq r \leq n$
Output: $A[l, \ldots, r]$ sortiert.
if $l < r$ **then**
  $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ // Mittlere Position
  `Mergesort`(A, l, m) // Sortiere vordere Hälfte
  `Mergesort`$(A, m+1, r)$ // Sortiere hintere Hälfte
  `Merge`(A, l, m, r) // Verschmelzen der Teilfolgen

Analyse: Laufzeit $\Theta(n \log(n))$

3.6. Quicksort

Pivotieren

1. Wähle ein beliebiges ELement als Pivot

p									

2. Teile A in zwei Teile

p	>	≤	≤	>	>	≤	≤	>	≤

3. Quicksort: Rekursion auf L und R

p	≤	≤	≤	≤	≤	>	>	>	>

≤	≤	≤	≤	≤	p	>	>	>	>

Wahl des Pivot

Maximum/Minimum (worst case) in $\mathcal{O}(n^2)$.
Best case (Pivot in der Mitte) $\omega(n)$.

Partition(A,l,r,p)

Input: Array A, welches den Pivot p in $A[l,\dots,r]$ mindestens einmal enthält.
Output: Array A partitioniert in $A[l,\dots,r]$ um p. Rückgabe der Position von p.

while $l \le r$ **do**
  while $A[l] < p$ **do**
    $l \leftarrow l+1$
  while $A[r] > p$ **do**
    $r \leftarrow r-1$
  swap($A[l]$, $A[r]$)
  if $A[l] = A[r]$ **then**
    $l \leftarrow l+1$
return l-1

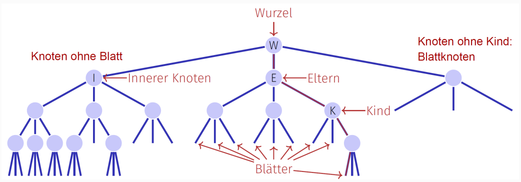
Quicksort(A,l,r)

Input: Array A der Länge n. $1 \le l \le r \le n$.
Output: Array A, sortiert in $A[l,\dots,r]$.
if $l < r$ **then**
  Wähle Pivot $p \in A[l,\dots,r]$
  $k \leftarrow \texttt{Partition}(A,l,r,p)$
  $\texttt{Quicksort}(A,l,k-1)$
  $\texttt{Quicksort}(A,k+1,r)$

Im Mittel benötigt randomisiertes Quicksort $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ Vergleiche.

4. Natürliche Suchbäume

4.1. Nomenklatur



4.2. Binäre Suchbäume

Binärer Baum (nur zwei Nachfolgerknoten) mit Eigenschaten:

- Jeder Knoten v speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum v.left kleiner als v.key
- Schlüssel im rechten Teilbaum v.right grösser als v.key

4.2.1. Höhe eines Baumes

$$h(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = \text{ null} \\ 1 + \max\{h(r\cdot \text{left}), h(r\cdot \text{ right})\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeit der Suche ist somit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(h(T))$.

4.2.2. Operationen

Knoten suchen

```
def search(k):
  global tree # access & modify the global variable tree
  v = tree
  while v != None:
    if k == v.key:
      return v
    elif k < v.key:
      v = v.left
    else:
      v = v.right
```

Knoten einfügen

```
def add(k):
  global tree # access & modify the global variable tree
  if tree is None:
    tree = Node(k)
    return True
  t = tree
  while k != t.key:
    if k < t.key:
      if t.left is None:
        t.left = Node(k)
        return True
      else:
        t = t.left
    else:
      if t.right is None:
        t.right = Node(k)
        return True
      else:
        t = t.right
  return False
```

Knoten entfernen

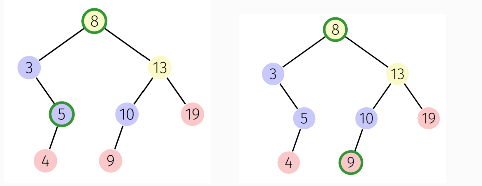
Mögliche Situationen: Knoten hat keine Kinder, Knoten hat ein Kind oder Knoten v hat zwei Kinder. Im letzten Fall: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum $v.right$ ist der symmetrische Nachfolger von v → ersetze v durch seinen symmetrischen Nachfolger.
Auch möglich: ersetze v durch seinen symmetrischen Vorgänger
Implementation: der Teufel steckt im Detail!

```
def remove(k):
  global tree # access & modify the global variable tree
  n = tree
  if n is not None and n.key == k:
    tree = symmetricDesc(tree)
    return True
  while n is not None:
    if n.left is not None and k == n.left.key:
      n.left = symmetricDesc(n.left)
      return True
    elif n.right is not None and k == n.right.key:
      n.right = symmetricDesc(n.right)
      return True
    elif k < n.key:
      n = n.left
    else:
      n = n.right
  return False
```

Symmetrischen Nachfolger finden

```
def symmetricDesc(node):
  if node.left is None:
    return node.right
  if node.right is None:
    return node.left
  n = node.right
  parent = None
  while n.left is not None:
    parent = n
    n = n.left
  if parent is not None:
    parent.left = n.right
    n.right = node.right
  n.left = node.left
  return n
```

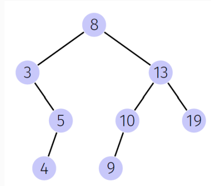
Grafik zu dem symmetrischen Vorgänger (links) oder Nachfolger (rechts)



4.3. Traversierungsarten

- **Hauptreihenfolge** (preorder):
  v, dann $T_{left}(v)$, dann $T_{right}(v)$.
- **Nebenreihenfolge** (postorder):
  $T_{left}(v)$, dann $T_{right}(v)$, dann v.
- **Symmetrische Reihenfolge** (inorder):
  $T_{left}(v)$, dann v, dann $T_{right}(v)$.

Beispiel



- **Hauptreihenfolge** (preorder):
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- **Nebenreihenfolge** (postorder):
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- **Symmetrische Reihenfolge** (inorder):
  3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19

5. AVL Bäume

Ziel: Verhinderung der Degenerierung → garantiere, dass ein Baum mit n Knoten stets eine Höhe von $\mathcal{O}(\log(n))$.

5.1. AVL Bedingung

5.1.1. Balance eines Knotens

Die Balance eines Knotens v ist definiert als die Höhendifferenz seiner beiden Teilbäume $T_l(v)$ und $T_r(v)$:

$$\text{bal}(v) := h\left(T_r(v)\right) - h\left(T_l(v)\right)$$

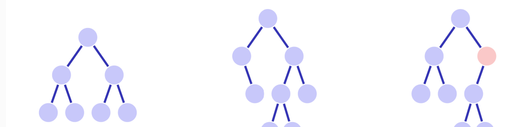
- **Augmentieren**: $v.size$ Feld mit **Balance**
- **Baumhöhe**: Ein AVL Baum ist asymptotisch nicht mehr als 44% höher als ein perfekt balancierter Baum ($\lceil \log_2 n+1 \rceil$).

5.1.2. AVL Bedingung

AVL Bedingung: für *jeden* Knoten v eines Baumes gilt:

$$\text{bal}(v) \in \{-1, 0, 1\}$$

Beispiele



AVL Baum der Höhe 2 | AVL Baum der Höhe 3 | Kein AVL Baum

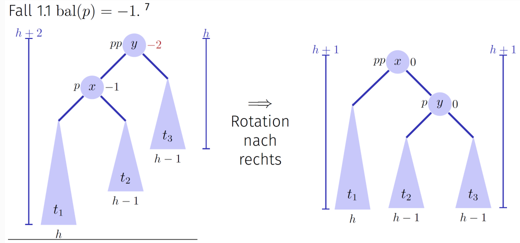
5.2. Einfügen

- Zuerst einfügen wie bei Suchbaum.
- Prüfe die Balance-Bedingung für alle Knoten aufsteigend von n zur Wurzel.
  $\text{upin}(p)$: Aufsteigend von p die Balance (Augmentation) anpassen, wobei gilt $\text{bal}(p) \in \{-1, 0, +1\}$.
- Problematischer Fall (rebalancieren!): p ist linker Sohn von pp, wobei $\text{bal}(pp)$ bereits vor dem Einfügen -1 ist (danach -2).

5.3. Rebalancieren: Rotationen

Fall 1: Rotation nach rechts

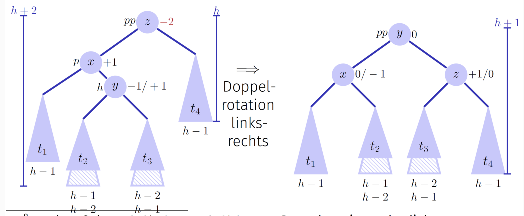
Fall 1.1 $\text{bal}(p) = -1$. [7]



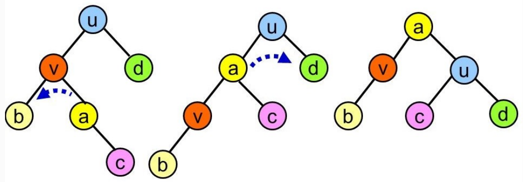
[7] p rechter Sohn ⇒ $\text{bal}(pp) = \text{bal}(p) = +1$, Linksrotation

Fall 2: Doppelrotation nach links-rechts

Fall 1.2 $\text{bal}(p) = +1$. [8]



[8] p rechter Sohn ⇒ $\text{bal}(pp) = +1$, $\text{bal}(p) = -1$, Doppelrotation rechts links



5.4. Analyse

AVL-Bäume haben asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(\log(n))$ (schlechtester Fall) für das Suchen, Einfügen und Löschen von Schlüsseln. Einfügen und Löschen ist verhältnismässig aufwändig und für kleine Probleme relativ langsam.

5.5. Beispiel: Augmentierter SearchNode

```
class SearchNode(object):
  def __init__(self, k):
    self.key = k
    self.left = self.right = None
    self.size = 1       # Augmentiere Hoehe mit 1
```

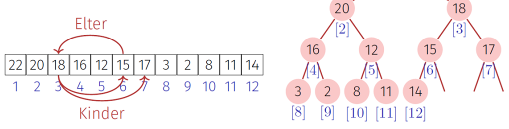
6. Heaps

6.1. [Max-]Heap

Datenstruktur optimiert zum schnellen Extrahieren von Minimum oder Maximum und Sortieren.

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften
1. Vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.
3. **Heap-Bedingung**:
   Max-(Min-)Heap: Schlüssel eines Kindes kleiner (grösser) als der des Elternknotens

Baum $\rightarrow$ Array:
1. Kinder $(i) = \{2i, 2i+1\}$
2. Elter $(i) = \lfloor i/2 \rfloor$



Höhe eines Heaps: $H(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

6.2. Einfügen

- Füge neues Element an erste freie Stelle ein.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: **Sukzessives Aufsteigen**
- Anzahl Operationen im worst case: $\mathcal{O}(\log(n))$

Aufsteigen(A,m)

Input: Array A mit mindestens m Elementen und Max-Heap-Struktur auf $A[1, \ldots, m-1]$
Output: Array A mit Max-Heap-Struktur auf $A[1, \ldots, m]$.
$v \leftarrow A[m]$ // Wert
$c \leftarrow m$ // derzeitiger Knoten (child)
$p \leftarrow \lfloor c/2 \rfloor$ // Elternknoten (parent)
while $c > 1$ and $v > A[p]$ **do**
    $A[c] \leftarrow A[p]$ // Wert Elternknoten $\rightarrow$ derzeitiger Knoten
    $c \leftarrow p$ // Elternknoten $\rightarrow$ derzeitiger Knoten
    $p \leftarrow \lfloor c/2 \rfloor$
$A[c] \leftarrow v$ // Wert $\rightarrow$ Wurzel des (Teil-)Baumes

6.3. Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: **Sukzessives Absinken** (in Richtung des grösseren Kindes / "Max. aufsteigen lassen")
- Anzahl Operationen im worst case: $\mathcal{O}(\log(n))$

Versickern(A,i,m)

Input: Array A mit Heapstruktur für die Kinder von i. Letztes Element m.
Output: Array A mit Heapstruktur für i mit letztem Element m.
while $2i \leq m$ **do**
    $j \leftarrow 2i$; // j linkes Kind
    if $j < m$ and $A[j] < A[j+1]$ **then**
        $j \leftarrow j+1$; // j rechtes Kind mit grösserem Schlüssel
    if $A[i] < A[j]$ **then**
        swap($A[i], A[j]$)
        $i \leftarrow j$; // weiter versickern
    else
        $i \leftarrow m$; // versickern beendet

6.4. Heap sortieren

- Extrahiere Maximum, stelle es hinten hin
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her
- Wiederhole
- Worst case: $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$

```python
class HeapSort(object):

    def swap(self, list_a, i, j):
        list_a[i], list_a[j] = list_a[j], list_a[i]

    def siftDown(self, list_a, index, size):
        while(2 * index + 1 < size):
            j = 2 * index + 1
            if j + 1 < size and list_a[j] < list_a[j+1]:
                j += 1
            if list_a[index] < list_a[j]:
                self.swap(list_a,index,j)
                index = j
            else:
                return

    def heapify(self, list_a):
        n = len(list_a)
        for i in range(n//2 - 1,-1,-1):
            self.siftDown(list_a, i, n)

    def sort(self, list_a):
        n = len(list_a)
        self.heapify(list_a)
        for i in range(n-1,0,-1):
            self.swap(list_a, 0, i)
            self.siftDown(list_a, 0, i)
```

6.5. Heap bauen

- Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap. $\rightarrow$ Induktion von unten!
- Aufrufe an Versickern: $n/2$. Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \cdot \log(n))$.
- Versickerpfade sind aber im Mittel viel kürzer: $\mathcal{O}(n)$

7. Hashing

7.1. Motivation und Idee

Key/Value-Paare effizient abspeichern und finden z.B. für Implementation eines Dicts oder einer Datenbank.

Wörterbuch $\longrightarrow$
```python
fruits = {
    "banana": 2.95, "kiwi": 0.70,
    "pear": 4.20, "apple": 3.95
}
```

Idee

Direkter Zugriff (Array)

Probleme
1. **Schlüssel müssen nichtnegative ganze Zahlen sein**
2. **Grosser Schlüsselbereich $\rightarrow$ grosses Array**

7.2. Pre-Hashing: Lösung des ersten Problems

Prehashing: Bilde Schlüssel ab auf positive Ganzzahlen mit einer Funktion $ph : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$

Pre-Hashing: Beispiel String

Zuordnung Name $s = s_1 s_2 \ldots s_{l_s}$ zu Schlüssel

$$\mathrm{ph}(s) = \left(\sum_{i=0}^{l_s-1} s_{l_s-i} \cdot b^i\right) \bmod 2^w$$

b so, dass verschiedene Namen möglichst verschiedene Schlüssel erhalten.
w Wortgrösse des Systems (z.B. 32 oder 64).

Implementation in Java

```java
int prehash(String s){
    int h = 0;

    for (int k = 0; k < s.length(); ++k){
        h = h * b + s.charAt(k);
    }
    return h;
}
```

7.3. Hashing: Lösung des zweiten Problems

Reduziere des Schlüsseluniversum: Abbildung (Hash-Funktion) $h : \mathcal{K} \rightarrow \{0, \ldots, m-1\} (m \approx n =$ Anzahl Einträge in der Tabelle)

7.3.1. Nomenklatur

Hashfunktion h: Abbildung aus der Menge der Schlüssel $\mathcal{K}$ auf die Indexmenge $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ eines Arrays (**Hashtabelle**)
Meist $|\mathcal{K}| \gg m$, Es gibt also $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ mit $h(k_1) = h(k_2)$ (**Kollision**). Eine Hashfunktion sollte die Menge der Schlüssel möglichst gleichmässig auf die Positionen der Hashtabelle verteilen.

7.3.2. Gebräuchliche Hashfunktion: Divisionsmethode

$$h(k) = k \bmod m$$

Ideal: m Primzahl, nicht zu nahe bei Potenzen von 2 oder 10
Aber oft: $m = 2^k - 1 (k \in \mathbb{N})$

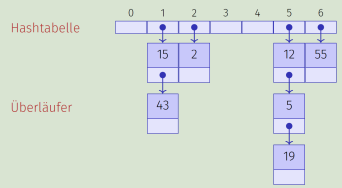
7.4. Konzept 1: Hashing mit Verkettung

Direkte Verkettung der Überläufer.
$\rightarrow$ Resultiert im worst case in $\Theta(n^2)$ pro Operation

Beispiel

$m = 7, \mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}, h(k) = k \bmod m.$

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19 , 43
Direkte Verkettung der Überläufer



Einfaches gleichmässiges Hashing

Starke Annahmen: Jeder beliebige Schlüssel wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit (**Uniformität**) und unabhängig von den anderen Schlüsseln (**Unabhängigkeit**) auf einen der m verfügbaren Slots abgebildet.

Unter dieser Annahme ergibt sich die **erwartete Länge**:
$\mathbb{E}($ Länge Kette $j) = \frac{n}{m} = \alpha$, α heisst der **Belegungsfaktor** oder **Füllgrad**.

Daraus ergibt sich (bei einfachem gleichmässigem Hashing) eine **erwartete Laufzeit (amortisiert)** von $\mathcal{O}(1)$ für Suchen, Einfügen, Löschen.

Vor- und Nachteile der Verkettung
- Belegungsfaktoren $\alpha > 1$ möglich; Entfernen von Schlüsseln einfach
- Speicherverbrauch der Verkettung

7.5. Konzept 2: Hashing mit offener Addressierung

- Speichere die Überläufer direkt in der Hashtabelle mit einer **Sondierungsfunktion** $s(k, j)$
- Tabellenposition des Schlüssels entlang der **Sondierungsfolge** $S(k)$

Technisches Detail zu **delete(k)**: Suche k in der Tabelle gemäss $S(k)$. Ersetze k durch den **speziellen Schlüssel removed**.

7.5.1. Lineares Sondieren

$$s(k, j) = h(k) + j \Rightarrow$$
$$S(k) = (h(k), h(k)+1, \ldots, h(k)+m-1) \bmod m$$

Problem $\rightarrow$ **Primäre Häufung**:
Ähnliche Hashaddressen haben ähnliche Sondierungsfolgen $\rightarrow$ lange zusammenhängende belegte Bereiche.

Beispiel

$m = 7, \mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}, h(k) = k \bmod m.$

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

0	1	2	3	4	5	6
5	15	2	19		12	55

7.5.2. Quadratisches Sondieren

$$s(k, j) = h(k) + \lceil j/2 \rceil^2 (-1)^{j+1}$$
$$S(k) = (h(k), h(k)+1, h(k)-1, h(k)+4, h(k)-4, \ldots) \bmod m$$

Problem $\rightarrow$ **Sekundäre Häufung**:
Synonyme k und k' $(\text{mit } h(k) = h(k'))$ durchlaufen dieselbe Sondierungsfolge.

Beispiel

$m = 7, \mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}, h(k) = k \bmod m.$

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

0	1	2	3	4	5	6
19	15	2		5	12	55

7.5.3. Double Hashing

Verwendung von zwei Hashfunktionen $h(k)$ und $h'(k)$ $\rightarrow$ Vermeidung primärer und sekundären Häufungen.

$$s(k, j) = h(k) + j \cdot h'(k)$$
$$S(k) = (h(k), h(k) + h'(k), h(k) + 2h'(k), \ldots, h(k) + (m-1)h'(k)) \bmod m$$

Gleichmässiges Hashing

Starke Annahme: Die Sondierungssequenz $S(k)$ eines Schlüssels k ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der $m!$ vielen Permutationssequenzen von $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. $\rightarrow$ Füllgrad $\alpha = \frac{n}{m} < 1$, so hat die nächste Operation erwartete Laufzeitkosten von $\leq \frac{1}{1-\alpha}$

Beispiel

$m = 7, \mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}, h(k) = k \bmod 7, h'(k) = 1 + k \bmod 5.$

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

0	1	2	3	4	5	6
5	15	2	19		12	55

7.5.4. Beispiele

- $h'(k) = \lceil \ln(k+1) \rceil \bmod q$: This function is not suitable as a second hash function, because for the key $k = 0$ we have $h'(0) = \lceil \ln(1) \rceil = 0$.
- $s(j, k) = k^j \bmod p$: This function is not suitable as a probing function, because for the keys $k = 0$ and $k = 1$, the function $s(j, k)$ has constant value of 0 and 1.
- $s(j, k) = ((k \cdot j) \bmod q) + 1$: This function is also not suitable as a probing function because its value is constant 1 if the key k is a multiple of q.
  Moreover, for all other keys, the image of $s(j, k)$ is $\{1, \ldots, q\}$, i.e., $p - q$ addresses of the hash table cannot be reached.

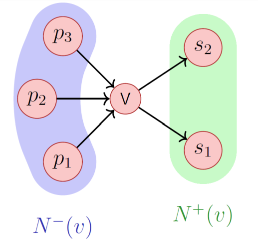
8. Graphen

8.1. Terminologie

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus der Menge von Kanten $V = \{v_1, \dots, v_1n\}$ und der Menge von Kanten E.

Gerichteter Graph: $E \subseteq V \times V = \{(u, v) : u \in V, v \in V\}$

- $w \in V$ heisst **adjazent** zu $v \in V$, falls $(v, w) \in E$
- Vorgänger eines Knotens v: $N^-(v) := \{u \in V | (u, v) \in E\}$
- Nachfolger eines Knotens v: $N^+(v) := \{u \in V | (v, u) \in E\}$
- Eingangsgrad: $\deg^-(v) := |N^-(v)|$
- Ausngangsgrad: $\deg^+(v) := |N^+(v)|$



Unerichteter Graph: $E \subseteq \{(u, v) : v \in V, u \in V\}$

- $w \in V$ heisst **adjazent** zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$
- Nachbarschaft: $N(v) := \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$
- Grad: $\deg(v) := |N(v)|$ (Schleifen zählen 2)

Vollständiger Graph: Ungerichteter Graph mit $E = \{(u, v) : u \in V, v \in V, \quad c \neq v\}$

Bipartiter Graph: Graph, bei dem V so in disjunkte U und W aufgeteilt werden kann, dass alle $e \in E$ einen Knoten in U und einen in W haben

Wege:

- **Weg / Path**: Sequenz von Knoten $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \dots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert
- **Pfad / einfacher Pfad / simple path**: Weg der keinen Knoten mehrfach verwendet
- **Länge des Weges**: Anzahl enthaltene Kanten k
- **Gewicht des Weges** (in gewichteten Graphen): $\sum_{i=1}^{k} c((v_i, v_{i+1}))$ (bzw. $\sum_{i=1}^{k} c(\{v_i, v_{i+1}\})$)

Zusammenhang:

- Ungerichteter Graph heisst **zusammenhängend**, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst **stark zusammenhängend**, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst **schwach zusammenhängend**, wenn der entsprechende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Zyklen:

- **Zyklus**: Weg (und nicht einfacher Pfad!) $\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$ mit $v_1 = v_{k+1}$
- **Einfacher Zyklus**: Zyklus, aber Knoten kommen nicht mehrfach vor (ausser s und t)
- **Kreis**: Zyklus mit paarweise verschiedenen $v_1, \dots, v_k$, welcher keine Kante mehrfach verwendet
- **Kreisfrei (azyklisch)**: Graph ohne jegliche Kreise.

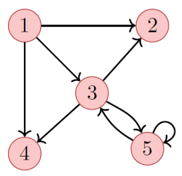
8.1.1. Beobachtungen

- Allgemein: $0 \leq |E| \in \mathcal{O}\left(|V|^2\right)$
- Zusammenhängender Graph: $|E| \in \Omega(|V|)$
- Vollständiger Graph: $|E| = \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}$ (ungerichtet)
- Maximal $|E| = |V|^2$(gerichtet)
- Maximal $|E| = \frac{|V| \cdot (|V|+1)}{2}$ (ungerichtet)

8.2. Repräsentation von Graphen

8.2.1. Adjazenzmatrix

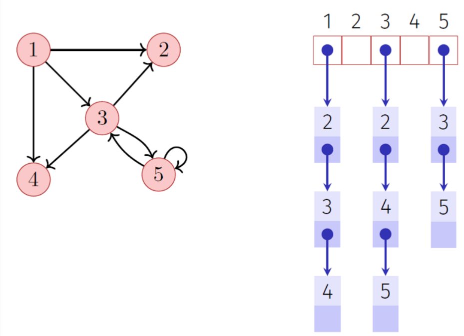
Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \dots, v_n$ gespeichert als Adjazenzmatrix $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. $a_{ij} = 1$ genau dann wenn Kante von v_i nach v_j. Speicherbedarf $\Theta\left(|V|^2\right)$. A_G ist symmetrisch, wenn G ungerichtet.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2.2. Adjazenzliste

Viele Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \dots, v_n$ haben deutlich weniger als n^2 Kanten. Repräsentation mit Adjazenzliste: Array $A[1], \dots, A[n]$, A_i enthält verkettete Liste aller Knoten in $N^+(v_i)$. Speicherbedarf $\Theta(|V| + |E|)$.

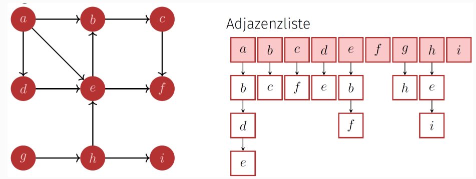


8.2.3. Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Kante löschen	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$

8.3. Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.



Reihenfolge: $a, b, c, f, d, e, g, h, i$

Tiefensuche ab Knoten v: DFS-Visit(G,v)

Laufzeit (ohne Rekursion): $\Theta\left(\deg^+ v\right)$

Tiefensuche für alle Knoten: DFS-Visit(G)

Laufzeit: $\Theta(|V| + \sum_{v \in V}(\deg^+(v) + 1)) = \Theta(|V| + |E|)$

DFS-Visit(G,v)

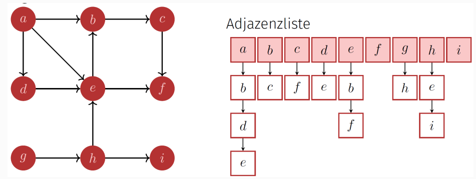
Input: Graph $G = (V, E)$
foreach $v \in V$ **do**
  $v.color \leftarrow$ white
foreach $v \in V$ **do**
  if $v.color =$ white **then**
    DFS-Visit(G,v)

DFS-Visit(G)

Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten v.
$v.color \leftarrow$ grey
foreach $w \in N^+(v)$ **do**
  if $w.color =$ white **then**
    DFS-Visit(G, w)
$v.color \leftarrow$ black

8.4. Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.



Reihenfolge: $a, b, d, e, c, f, g, h, i$

BFS-Visit(G,v)

Input: Graph $G = (V, E)$
Queue $Q \leftarrow \emptyset$
$v.color \leftarrow$ grey
enqueue(Q, v)
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $w \leftarrow$ dequeue(Q)
  foreach $c \in N^+(w)$ **do**
    if $c.color =$ white **then**
      $c.color \leftarrow$ grey
      enqueue(Q, c)
  $w.color \leftarrow$ black

BFS-Visit(G)

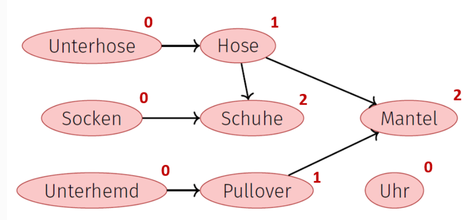
Input: Graph $G = (V, E)$
foreach $v \in V$ **do**
  $v.color \leftarrow$ white
foreach $v \in V$ **do**
  if $v.color =$ white **then**
    BFS-Visit(G,v)

Extraplatz: $\mathcal{O}(|V|)$

Laufzeit: $\Theta(|V| + |E|)$

8.5. Topologische Sortierung

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine topologische Sortierung, wenn er **kreisfrei** ist.



Augmentiere den Eingangsgrad. Abbarbeitung nur wenn Eingangsgrad 0 ist. Eingangsgrad verringern entspricht Knotenentfernen.

Topological-Sort(G)

Input: Graph $G = (V, E)$.
Output: Topologische Sortierung ord
Stack $S \leftarrow \emptyset$
foreach $v \in V$ **do** $A[v] \leftarrow 0$
foreach $(v, w) \in E$ **do** $A[w] \leftarrow A[w] + 1$ // Eingangsgrade berechnen
foreach $v \in V$ with $A[v] = 0$ **do** push(S, v) // Merke Nodes mit Eingangsgrad 0
$i \leftarrow 1$
while $S \neq \emptyset$ **do**
  $v \leftarrow$ pop(S); ord$[v] \leftarrow i$; $i \leftarrow i + 1$ // Wähle Knoten mit Eingangsgrad 0
  foreach $(v, w) \in E$ **do** // Verringere Eingangsgrad der Nachfolger
    $A[w] \leftarrow A[w] - 1$
    if $A[w] = 0$ **then** push(S, w)
if $i = |V| + 1$ **then return** ord **else return** "Cycle Detected"

Analyse

- Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Der Algorithmus Topological-Sort berechnet in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung ord für G.
- Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, **nicht**-kreisfreier Graph. Der Algorithmus Topological-Sort terminiert in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ und detektiert den Zyklus.

8.6. Kürzeste Wege

Notation

$\delta(u,v) =$ Gewicht eines kürzesten Weges von u nach v

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & \text{kein Weg von } u \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beobachtungen

- Einfachster Fall: Kantengewicht 1 $\to$ Breitensuche
- Es gibt Situationen, in denen kein kürzester Weg existiert: negative Zyklen könnten auftreten.
- Es kann exponentiell viele Wege geben $\to$ alle Wege probieren ist ineffizient
- Ein kürzester Weg von s nach v (ohne weitere Einschränkungen) kann nicht länger sein als ein kürzester Weg von s nach v, der u enthalten muss.
  $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + \delta(u,v)$
- **Optimale Substruktur**: Teilpfade von kürzesten Pfaden sind kürzeste Pfade (**Kürzester Pfad $\Rightarrow$ kürzeste Subpfäde**)
- Kürzeste Wege enthalten keine Zyklen

8.6.1. Allgemeiner Algorithmus (Relaxier-Algorithmus)

Gesucht: Kürzeste Wege von einem Startknoten s aus.

- Gewicht des kürzesten bisher gefundenen Pfades
  - Zu Beginn: $d_s[v] = \infty$ für alle Knoten $v \in V$
  - Ziel: $d_s[v] = \delta(s,v)$ für alle $v \in V$
- Vorgänger eines Knotens: u Beginn $\pi_s[v]$ undefiniert für jeden Knoten $v \in V$

Algorithmus

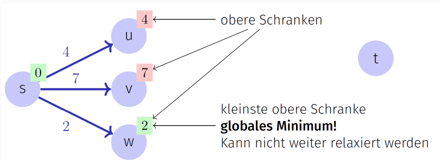
1. Initialisiere d_s und $\pi_s : d_s[v] = \infty$, $\pi_s[v] =$ null für alle $v \in V$
2. Setze $d_s[s] \leftarrow 0$
3. Wähle eine Kante $(u,v) \in E$:

   Relaxiere (u,v):
   if $d_s[v] > d[u] + c(u,v)$ then
   $\quad d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u,v)$
   $\quad \pi_s[v] \leftarrow u$

4. Wiederhole 3 bis nichts mehr relaxiert werden kann (bis $(d_s[v] \leq d_s[u] + c(u,v) \quad \forall (u,v) \in E)$)

8.6.2. Dijkstra Algorithmus

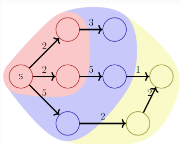
Beobachtung



Grundidee

Menge V aller Knoten wird unterteilt in

- die Menge M von Knoten, für die schon ein kürzester Weg von s bekannt ist
- die Menge $R = \cup_{v \in M} N^+(v) \setminus M$ von Knoten, für die kein kürzester Weg bekannt ist, die jedoch von M direkt erreichbar sind.
- die Menge $U = V \setminus (M \cup R)$ von Knoten die noch nicht berücksichtigt wurden.



Betrachte alle Nachbarn der Menge M und füge den Knoten mit dem kürzesten Weg zu s der Menge M hinzu.

Dijkstra(G,s)

Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V,E,c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade und Vorgängerknoten für jeden Knoten.

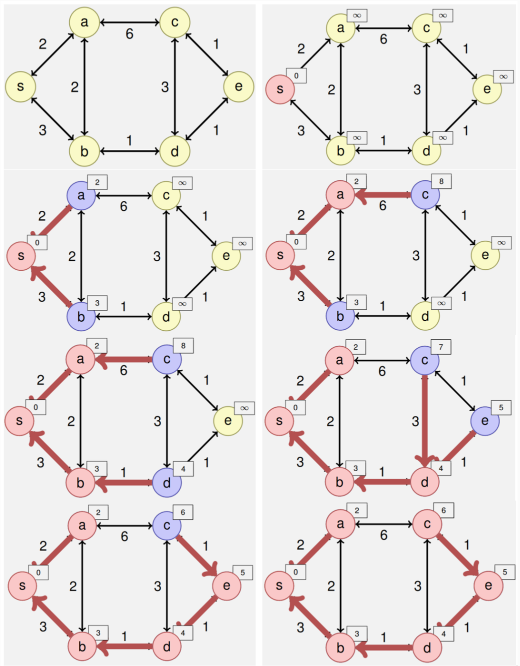
foreach $u \in V$ **do**
$\quad d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ null
$d_s[s] \leftarrow 0$; $R \leftarrow \{s\}$
while $R \neq \emptyset$ **do**
$\quad u \leftarrow$ ExtractMin(R)
$\quad$ **foreach** $v \in N^+(u)$ **do**
$\quad\quad$ **if** $d_s[u] + c(u,v) < d_s[v]$ **then**
$\quad\quad\quad d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u,v)$
$\quad\quad\quad \pi_s[v] \leftarrow u$
$\quad\quad\quad$ **if** $v \in R$ **then**
$\quad\quad\quad\quad$ DecreaseKey(R, v) // Update eines $d(v)$ im Heap zu R
$\quad\quad\quad$ **else**
$\quad\quad\quad\quad R \leftarrow R \cup \{v\}$ // Einfügen eines neuen $d(v)$ im Heap zu R

DecreaseKey (Aufsteigen im MinHeap), Position im Heap: Speichern am Knoten, Hashtabelle oder Lazy Deletion

Laufzeit

- $|V| \times$ ExtractMin: $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$
- $|E| \times$ Insert oder DecreaseKey: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$
- $1 \times$ Init: $\mathcal{O}(|V|)$
- **Insgesamt**: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$

Beispiel Dijkstra



8.7. Minimale Spannbäume

Problem

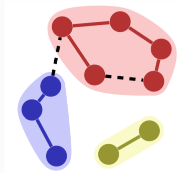
- Gegeben: Ungerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V,E,c)$
- Gesucht: Minimaler Spannbaum $T = (V,E')$: zusammenhängender, zyklenfreier Teilgraph $E' \subset E$, so dass $\sum_{e \in E'} c(e)$ minimal.

Greedy (gierige) Verfahren berechnen eine Lösung schrittweise, indem lokal beste Lösungen gewählt werden.

8.7.1. Union-Find Kruskal Algorithmus

Zur Implementation

Gegeben eine Menge von Mengen $i \equiv A_i \subset V$. Zur Identifikation von Schnitten und Kreisen: Zugehörigkeit der beiden Endpunkte einer Kante zu einer der Mengen.



Allgemeines Problem: Partition (Menge von Teilmengen) benötigt einen abstrakter Datentyp (**Union-Find**) mit folgenden Operationen:

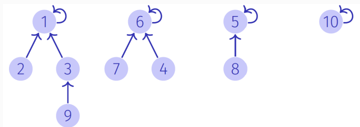
- Make-Set((i)): Hinzufügen einer neuen Menge i $(p[i] \leftarrow i; return i)$
- Find (e): Name i der Menge, welche e enthält $(while(p[i] \neq 0) do\ i \leftarrow p[i]$; return $i)$
- Union(i,j): Vereingung der Mengen mit Namen i und j $(p[j] = i$, wobei i und j die Wurzeln (Namen) sind.)

Laufzeitoptimierungen:

a) Immer kleineren Baum an grösseren hängen
b) Bei Find Knoten immer an den Parent hängen

Implementation von Union-Find

Idee: Baum für jede Teilmenge in der Partition, z.B. 1, 2, 3, 9, 7, 6, 4, 5, 8, 10, wobei die Baumwurzeln $\to$ Namen (Stellvertreter) der Mengen ist.



Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Algorithmus

Input: Gewichteter Graph $G = (V,E,c)$
Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A.

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq ... \leq c(e_m)$
$A \leftarrow \emptyset$
for $k = 1$ **to** $|V|$ **do**
$\quad$ MakeSet(k)
for $k = 1$ **to** m **do**
$\quad (u,v) \leftarrow e_k$
$\quad$ **if** Find(u) $\neq$ Find(v) **then**
$\quad\quad$ Union(Find(u), Find(v))
$\quad\quad A \leftarrow A \cup e_k$
$\quad$ **else** // konzeptuell: $R \leftarrow R \cup e_k$
return (V,A,c)

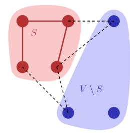
Laufzeit des Kruskal Alghorithmus

- Sortieren der Kanten: $\Theta(|E| \log |E|) = \Theta(|E| \log |V|)$
- Initialisieren der Union-Find Datenstruktur $\Theta(|V|)$
- $|E| \times$ Union (Find (x), Find (y)) : $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$
- **Insgesamt**: $\Theta(|E| \log |V|)$

8.7.2. Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra

Idee: Starte mit einem $v \in V$ und lasse von dort unter Verwendung der Auswahlregel einen Spannbaum wachsen:

$A \leftarrow \emptyset$
$S \leftarrow \{v_0\}$
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
$\quad$ Wähle billigste (u,v) mit $u \in S$, $v \notin S$
$\quad A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$
$\quad S \leftarrow S \cup \{v\}$ // (Färbung)



Bemerkungen

- Man braucht keine Union-Find Datenstruktur (Färbung reicht aus)
- Vorgehensweise:
  a) Immer Knoten mit kleinstem Gewicht zur Menge S hinzufügen
  b) Wenn der Knoten noch nicht in S ist $\to$ MST ist zyklenfrei

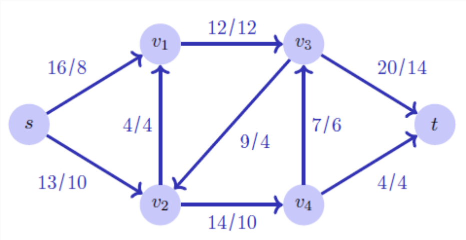
Laufzeit insgesamt: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$

9. Flüsse in Netzen

9.1. Terminologie und Eigenschaften

Flussnetzwerk

- Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$: gerichteter Graph mit Kapazitäten
- Antiparallele Kanten verboten
- Quelle s und Senke t : spezielle Knoten. Jeder Knoten v liegt auf einem Pfad zwischen s und t : $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$



Fluss $f : V \times V \to \mathbb{R}$ erfüllt Bedingungen:

- **Kapazitätsbeschränkung**: $\forall u, v \in V : f(u, v) \le c(u, v)$
- **Schiefsymmetrie**: $\forall u, v \in V : f(u, v) = -f(v, u)$
- **Flusserhaltung**: $u \in V \backslash \{s, t\} : \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$
- **Wert w des Flusses**: $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$

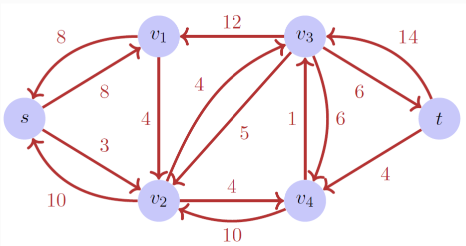
Eigenschaften

1. $|f| = f(s, V)$
2. $f(U, U) = 0$
3. $f(U, U') = -f(U', U)$
4. $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, wenn $X \cap Y = \emptyset$
5. $f(R, V) = 0$ wenn $R \cap \{s, t\} = \emptyset$. [Flusserhaltung!]

Wobei gilt:
$f(U, U') := \sum_{\substack{u \in U \\ u' \in U'}} f(u, u')$, $f(u, U') := f(\{u\} U')$

Restnetzwerk

Restnetzwerk G_f gegeben durch alle Kanten mit Restkapazität. Restnetzwerke haben dieselben Eigenschaften wie Flussnetzwerke, ausser dass antiparallele Kapazitäten-Kantenzugelassen sind.



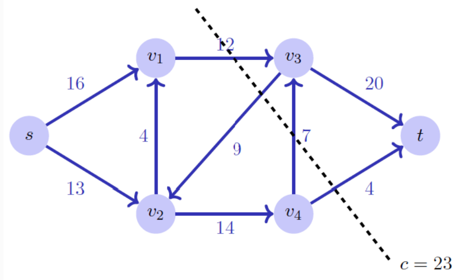
Erweiterungspfade

- **Erweiterungspfad** p: einfacher Pfad von s nach t im Restnetzwerk G_f
- **Restkapazität** $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ Kante in } p\}$

9.2. Maximaler Fluss / Minimaler Schnitt

$$|f| \le \sum_{v \in S, v' \in T} c(v, v') = c(S, T)$$

Wobei S die Menge der Knoten vor dem Cut und T die Menge der Knoten nach dem Cut ist. Gezählt werden folglich nur die Kapazitäten von S zu T und nicht alle! So ergibt dies im Beispiel: $c(S, T) = 12 + 7 + 4 = 23$



Max-Flow Min-Cut Theorem

Wenn f ein Fluss in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t ist, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. Das Restnetzwerk G_f enthält keine Erweiterungspfade
3. Es gilt $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T) von G

9.2.1. Die Ford-Fulkerson Methode

- Starte mit $f(u, v) = 0$ für alle $u, v \in V$
- Bestimme Restnetzwerk G_f und Erweiterungspfad in G_f
- Erhöhe Fluss über den Erweiterungspfad
- Wiederholung bis kein Erweiterungspfad mehr vorhanden.

Ford-Fulkerson(G,s,t)

Input: Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$
Output: Maximaler Fluss f.

for $(u, v) \in E$ **do**
  $f(u, v) \leftarrow 0$
while Existiert Pfad $p : s \rightsquigarrow t$ im Restnetzwerk G_f **do**
  $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
  foreach $(u, v) \in p$ **do**
    $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
    $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

Praktische Anmerkung zur Implementierung

In einer Implementation des Ford-Fulkerson Algorithmus müssen die negativen Flusskanten nicht unbedingt gespeichert werden, da ihr Wert sich stets als der negierten Wert der Gegenkante ergibt. Somit kann dies vereinfacht folgendermassen implementiert werden:

$f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
$f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

wird zu

if $(u, v) \in E$ **then**
  $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
else
  $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

Analyse

Der Ford-Fulkerson Algorithmus muss für irrationale Kapazitäten nicht einmal terminieren! Sonst $\mathcal{O}(f_{\max} \cdot |E|)$.

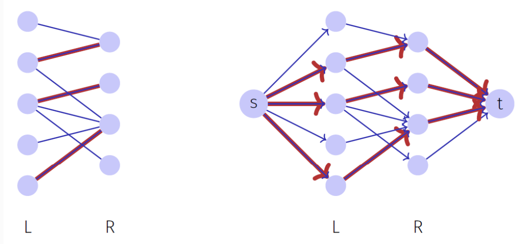
9.2.2. Edmonds-Karp Algorithmus

Wähle in der Ford-Fulkerson-Methode zum Finden eines Pfades in G_f jeweils einen Erweiterungspfad kürzester Länge (z.B. durch Breitensuche).

$\Rightarrow$ Gesamte asymptotische Laufzeit: $\mathcal{O}\left(|V| \cdot |E|^2\right)$

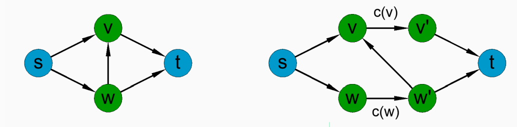
9.3. Bipartites Matching

Konstruiere zur einer Partition L, R eines bipartiten Graphen ein korrespondierendes Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t, mit gerichteten Kanten von s nach L, von L nach R und von R nach t. Jede Kante bekommt Kapazität 1.



9.4. Anwendungen vom Maximalen Fluss

Knotenkapazitäten in Graphen einbauen



Trick: Um Knotenkapazitäten in einen Graphen einzubauen muss man aus einem Knoten zwei machen (**Input-Knoten** und **Output-Knoten**). Die Kante zwischen dem Input-Knoten und dem Output-Knoten muss die Kapazität des Knotens haben. D.h. $c(v) = c(v, v')$

10. Dynamische Programmierung

10.1. Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

→ Wir tauschen Laufzeit gegen Speicherplatz

10.2. Dynamic Programming vs. Divide-And-Conquer

- **Optimale Substruktur**: In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen sind **Teilprobleme unabhängig**; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt. Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat **überlappende Teilprobleme**, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet d.h. **keine zirkulären Abhängigkeiten zwischen Teilproblemen**

10.3. Memoization

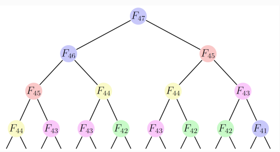
Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

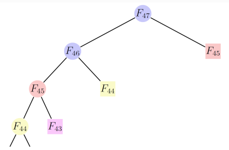
- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert

Beispiel Fibonacci

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

```
if n ≤ 2 then
    f ← 1
else if ∃memo[n] then
    f ← memo[n]
else
    f ← FibonacciMemoization(n − 1) + FibonacciMemoization(n − 2)
    memo[n] ← f
return f
```





→ Genau hingesehen lösen wir das Problem bottom-up

10.4. Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

Beispiel Fibonacci

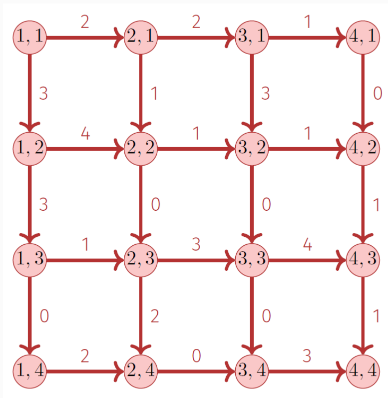
1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**
   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.
2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**
   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach "berechenbar".
3. **Berechnungsreihenfolge?**
   F_i mit aufsteigenden i.
4. **Rekonstruktion einer Lösung?**
   F_n ist die n-te Fibonacci-Zahl.

10.5. Wie findet man den DP Algorithmus?

1. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
2. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl)
3. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten)
4. Rekursion: verbinde die Teilprobleme
5. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
6. Lösung des Problems:
   Laufzeit = Anz. Teilprobleme $\times$ $\frac{\text{Zeit}}{\text{Teilproblem}}$

10.6. Beispiel Kaninchen

Ein Kaninchen sitzt auf Platz (1,1) eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?



Rekursion

Gesucht: $T_{0,0}$ = Maximale Anzahl Rüben von (0,0) nach (n, n). Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i, j) nach (i', j'). Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

Teilabhängigkeitsgraph

- Richtung der Abhängigkeiten: Links oben nach rechts unten
- Richtung der Berechung: Rechts unten nach links oben

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**
   Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).
2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**
   Wert $T_{n,n}$ ist 0.
3. **Berechnungsreihenfolge?**
   $T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).
4. **Rekonstruktion einer Lösung?**
   $T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben

10.7. Die Editierdistanz / Levenshteinabstand

Aufgabenstellung

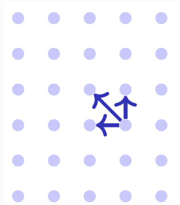
Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \to B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT[24]	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \to c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T I G E R	T I _ G E R	T→Z +E -R
Z I E G E	Z I E G E _	Z→T -E +R

Wie findet man den DP Algorithmus?

1. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung:
   $E(n, m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für $a_{1...n} \to b_{1...m}$
2. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl):
   Teilprobleme $E(i, j)$ = ED von $a_{1...i}.b_{1...j}$ (Anz. $n \cdot m$)
3. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten):
   $a_{1..i} \to a_{1...i-1}$(löschen) $a_{1..i} \to a_{1...i}b_j$ (einfügen) $a_{1..i} \to a_{1...i-1}b_j$ (ersetzen)
4. Rekursion: verbinde die Teilprobleme:
   $$E(i, j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i-1, j) \\ \text{ins}(b_j) + E(i, j-1) \\ \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1) \end{cases}$$
5. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme:
   
   Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.
6. Lösung des Problems: Lösung steht in $E(n, m)$

Bottom-Up Beschreibung

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**
   Tabelle $E[0, \ldots, m][0, \ldots, n]$. $E[i, j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1, \ldots, a_i)$ und $(b_1, \ldots, b_j)$
2. **Berechnung eines Eintrags**
   $E[0, i] \leftarrow i \; \forall 0 \leq i \leq m$, $E[j, 0] \leftarrow i \; \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $E[i, j]$ sonst mit $E[i, j] = \min\{\text{del}(a_i)+E(i-1, j), \text{ins}(b_j)+E(i, j-1), \text{repl}(a_i, b_j)+E(i-1, j-1)\}$
3. **Berechnungsreihenfolge**
   Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.
4. **Rekonstruktion einer Lösung?**
   Beginne bei $j = m$, $i = n$. Falls $E[i, j] = \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1)$ gilt, gib $a_i \to b_j$ aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j-1, i-1)$; sonst, falls $E[i, j] = \text{del}(a_i) + E(i-1, j)$ gib del(a_i) aus fahre fort mit $j \leftarrow j - 1$; sonst, falls $E[i, j] = \text{ins}(b_j) + E(i, j-1)$, gib ins$(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i - 1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.

Analyse

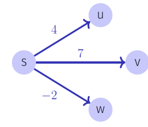
Anzahl Tabelleneinträge: $(m + 1) \cdot (n + 1)$
Laufzeit: $\mathcal{O}(m \cdot n)$

10.8. Kürzeste Wege: DP Ansatz (Bellman)

Induktion über Anzahl Kanten $d_s[i, v]$: Kürzeste Weglänge von s nach v über maximal i Kanten.

$$d_s[i, v] = \min \begin{cases} d_s[i-1, v] \\ \min_{(u,v)\in E}(d_s[i-1, u] + c(u, v)) \end{cases}$$
$$d_s[0, s] = 0, \underbrace{d_s[0, v] = \infty \forall v \neq s}_{\text{Zyklus}}$$

	s	$\cdots$	v	$\cdots$	w
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	7	∞	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$



Algorithmus: Iteriere über letzte Zeile bis die Relaxationsschritte keine Änderung mehr ergeben, maximal aber $n - 1$ mal. Wenn dann noch Änderungen, dann gibt es keinen kürzesten Pfad.

Bellmann-Ford(G,s)

Input: Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Wenn Rückgabe true, Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade zu jedem Knoten, sonst kein kürzester Pfad.

```
foreach u ∈ V do
    d_s[u] ← ∞; π_s[u] ← null
d_s[s] ← 0;
for i ← 1 to |V| do
    f ← false
    foreach (u, v) ∈ E do
        f ← f ∨ Relax(u, v)
    if f = false then return true
return false;
```

Analyse

Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$
Speicherplatz: $\mathcal{O}(|V|^2)$ ⇝ eigentlich sogar $\mathcal{O}(|V|)$, da nur immer die letzte Zeile abgespeichert werden muss.

11. Code Beispiele

11.1. Beispiel: Levenshtein-Algorithmus

```
def Levenshtein(x, y):
  # D[n,m] = distance between x and y
  # D[i,j] = distance between strings x[1..i] and y[1..j]
  n = len(x)
  m = len(y)
  D = [[0 for i in range(m+1)] for j in range(n+1)]
  for j in range(0,m+1):
    D[0][j] = j
  for i in range(1,n+1):
    D[i][0] = i
    for j in range(1,m+1):
      # D[i,j] = min{
      # D[i-1,j-1] + d(x[i],y[j]);
      # D[i-1,j] + 1
      # D[i,j-1] + 1 }
      q = D[i-1][j-1]
      if x[i-1] != y[j-1]:
        q += 1
      q = min(q, D[i][j-1]+1)
      q = min(q, D[i-1][j]+1)
      D[i][j] = q
  return D[n][m]
```

11.2. Beispiel: Längste gemeinsame Teilfolge

```
import Data
import time

# compute longest ascending sequence for a point of the matrix
def LASR(A,L,y,x):
  if L[y][x] > 0:
    return L[y][x]
  maxLength = 0
  if x>0 and A[y][x] < A[y][x-1]:
    maxLength = max(maxLength, LASR(A,L,y,x-1))
  if y>0 and A[y][x] < A[y-1][x]:
    maxLength = max(maxLength, LASR(A,L,y-1,x))
  if y<len(A)-1 and A[y][x] < A[y+1][x]:
    maxLength = max(maxLength, LASR(A,L,y+1,x))
  if x<len(A[y])-1 and A[y][x] < A[y][x+1]:
    maxLength = max(maxLength, LASR(A,L,y,x+1))
  L[y][x] = maxLength + 1;
  return L[y][x]

# compute longest ascending sequence for each point of the matr
def LAS(A):
  maxLength = 0
  L = [[0] * len(A[i]) for i in range(len(A))]
  for y in range(len(A)):
    for x in range(len(A[y])):
      L[y][x] = LASR(A,L,y,x)
      maxLength = max(maxLength, L[y][x])
  return maxLength,L

A = Data.get()

start = time.time()
(m,L) = LAS(A)
stop = time.time();

if len(A)<15 and len(A[0])<15:
  print("matrix a")
  Data.print_matrix(A)
  print("path lengths matrix")
  Data.print_matrix(L)

print("maximum length",m)
print("time:", stop-start, "s")
```

11.3. Beispiel: Union Find

```
class Set:
  def __init__(self,n):
    self.a = [i for i in range(0,n)]
    self.g = [1] * n

  def union(self,i,j):
    i = self.find(i)
    j = self.find(j)
    if i == j:
      return False
    self.a[j] = i # j under i
    return True

  def find(self,i):
    while self.a[i] != i:
      i = self.a[i]
    return i

  def path_length(self,i):
    count = 1;
    while self.a[i] != i:
        i = self.a[i];
        count = count + 1;
    return count;

class SmallUnderLarge(Set):
  def union(self,i,j):
    i = self.find(i)
    j = self.find(j)
    if i == j:
      return False
    if self.g[i] < self.g[j]:
      i,j = j,i
    self.a[j] = i # j under i
    if self.g[i] == self.g[j]:
      self.g[i] = self.g[i] + 1
    return True

class ConsolidateFind(Set):
  def find(self,i):
    root = i
    while self.a[root] != root:
      root = self.a[root]
    while self.a[i] != root:
      next = self.a[i]
      self.a[i] = root
      i = next
    return root

  # recursive version
  def find_recursive(self,i):
    if self.a[i] == i:
      return i
    self.a[i] = self.find(self.a[i])
    return self.a[i]
```

11.4. Beispiel: Dict Comprehension

```
accounts = {
    'Food' : { 'Amount' : 1242, 'Kind': 'Credit' },
    'Insurances' : { 'Amount' : 5547, 'Kind': 'Credit' },
    'Fun-Time' : { 'Amount' : 3978, 'Kind': 'Credit'},
    'Salary'   : { 'Amount': 14785, 'Kind': 'Debit' },
    'Jewelry' : { 'Amount': 14785, 'Kind': 'Debit' }
}

credit_accounts = { account : record['Amount']
    for account, record in accounts.items()
    if record['Kind'] == 'Credit'   }  # create your dict here
```

11.5. Beispiel: Sliding Window

```
def main():
  text = input()

  map = {'a':0, 'b':0, 'c':0}
  bestl = -1
  bestr = len(text)
  l=0
  r=-1
  num=0
  while r < len(text):
    if num == 3 and bestr-bestl > r-l:
      bestl = l
      bestr = r
    if num >= 3:
      x = text[l]
      if x in map:
        xc = map[x]
        xc -= 1
        map[x]=xc
        if xc == 0:
            num -= 1
      l += 1
    else:
      r += 1
      if r < len(text):
        x = text[r]
        if x in map:
            xc = map[x]
            xc += 1
            map[x] = xc
            if xc == 1:
              num += 1
  if bestl == -1:
    print(text,"does not contain a,b AND c.")
  else:
    print("contains a,b,c between",bestl,"and",bestr)
```

11.6. Beispiel: Palindrome Checker

```
def isPalindrome(word):
  for i in range(0, len(word)//2):
    if word[i] != word[-1 -i]:
      return False
  return True

def main():
  again, word = True, input("Enter a word: ")
  while again:
    if isPalindrome(word):
      cprint(word + ' is a palindrome!')
    else:
      cprint(word + ' is not a palindrome')
    word = input("Enter a word (or just <ENTER> to stop): ")
    again = len(word) > 0
```

12. Anhang

12.1. Nützliche Formeln für asymptotische Laufzeiten

Gauss'sche Summenformel

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \in \theta\left(n^2\right)}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k)!}^{k\text{-Faktoren}}}{k! \cdot (n-k)!} \in \theta\left(n^k\right)$$

Spezielle Summen

$$\sum_{i=0}^{10n} \log n^n \in \theta\left(10 \cdot n \cdot \log n^n\right) \in \theta\left(n^2 \cdot \log n\right)$$

12.2. Asymptotische Laufzeiten Python

	Wahlfreier Zugriff	Einfügen	Iteration	Ins. nach Element	Suchen (x in S)
list	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$ A	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
set	-	$\Theta(1)$ P	$\Theta(n)$	-	$\Theta(1)$ P
dict	-	$\Theta(1)$ P	$\Theta(n)$	-	$\Theta(1)$ P

A: Amortisiert
P: Erwartet (sonst worst case)