



# Successioni e Serie numeriche

## ▼ INDICE

### [1 Successioni e serie numeriche](#)

#### [1.1 Serie Convergenti e Divergenti](#)

##### [1.1 Serie geometrica](#)

##### [1.2 Serie armonica](#)

###### [1.2.1 Serie armonica generalizzata](#)

##### [1.3 Condizioni, teoremi e criteri di convergenza](#)

###### [1.3.1 Condizioni per la convergenza di una serie](#)

###### [1.3.2 Serie a termine di segno costante](#)

###### [1.2.3 Criterio del confronto](#)

###### [1.2.4 Criterio del confronto asintotico](#)

##### [1.4 Criterio del rapporto e Criterio della radice](#)

###### [1.4.1 Criterio del rapporto](#)

###### [1.4.2 Criterio della radice](#)

##### [1.5 Criterio di Leibniz](#)

##### [1.6 Convergenza assoluta](#)

## 1 Successioni e serie numeriche

Con **successione** intendiamo l'insieme dei valori assunti da una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ . Tale insieme, andrebbe scritto come:

$$a = \{a(1), a(2), a(3), \dots, a(n)\}$$

per questioni di praticità però è molto più comodo usare la seguente notazione:

$$a_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

dove il numero che si trova in pedice si chiama **indice di successione**.



#### ESEMPI DI SUCCESSIONI:

- Se  $a_n = 2^n$  allora  $a_n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^n$ ;
- Se  $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}$ .

Immaginiamo di voler calcolare la somma dei numeri naturali. Essa è ben definita dalla seguente proprietà:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nel caso dove i termini da sommare sono illimitati, come possiamo sapere il risultato finale della somma? In questo caso viene in nostro aiuto la **serie numerica**.



#### DEFINIZIONE DI SERIE NUMERICA:

Data una successione di termine generico  $a_k$ , si dice numerico la “**somma infinita**” dei suoi termini.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

### 1.1 Serie Convergenti e Divergenti

Le serie numeriche possono assumere varie **proprietà**, per esempio:

**ESEMPI SULLE PROPRIETÀ DELLE SERIE NUMERICHE:**

1. Vediamo la seguente successione: se  $a_n = 0$ , allora:

$$S_n = \sum_{k=0}^n 0$$

Cosa accade a questa serie considerando  $n \rightarrow +\infty$ ? Nulla, essendo una funzione costante il risultato sarà sempre 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

2. Consideriamo ora invece la seguente successione:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

I primi termini della serie sono i seguenti:

- $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$
- $S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$
- $S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$
- ...

Dunque, il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di questa serie sarà:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k(k+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

In entrambi gli esempi appena mostrati tutte e due le serie **tendono ad numero finito**, per  $n \rightarrow +\infty$ , ed in questo caso si parla di **serie convergenti**.

**DEFINIZIONE DI SERIE CONVERGENTE:**

Una successione delle somme parziali  $S_n$  si dice **convergente** se il limite per  $n$  che tende a  $+\infty$  **converge** ad un valore  $l$  (ossia finito):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = l$$

Ora proviamo ad analizzare queste due ulteriori serie:

**ESEMPI SULLE PROPRIETÀ DELLE SERIE NUMERICHE:**

1. Sia data la successione costante  $a_k = 1$ . Vediamo come si comporta nelle sue prime serie parziali:

- $S_0 = 1$
- $S_1 = 1 + 1 = 2$
- $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$
- ...

Notiamo subito che:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = n + 1 = +\infty$$

2. Determinare se la seguente successione ammette limite a  $+\infty$ :

$$a_k = \frac{k}{100}$$

I primi termini della serie sono:

- $S_1 = \frac{1}{100} = 0.01$
- $S_2 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} = 0.03$
- $S_3 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} = 0.06$
- ...

Il limite della serie è infinito per  $n$  che tende a  $+\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100} = +\infty$$

Come possiamo vedere da questi due esempi entrambi **non ammettono un limite finito**, perché tutti e due tendono a  $+\infty$  e in questo caso si parla di **serie divergente**.

**DEFINIZIONE DI SERIE DIVERGENTE:**

Una successione delle somme parziali  $S_n$  si dice **divergente** se il limite per  $n$  che tende a infinito **diverge** ad un valore  $+\infty$  ( o  $-\infty$  ) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty ( o -\infty )$$

**ATTENZIONE:**

Ricorda che **se una serie non converge**, non è detto che essa sia divergente, per esempio:

**ESEMPIO:**

Consideriamo la serie della seguente successione  $a_n = (-1)^n$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$$

- $S_1 = 1$
- $S_2 = 1 - 1 = 0$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- ...

Notiamo quindi che:

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque tale serie per  $n \rightarrow +\infty$  non è **né convergente** ad un limite finito  $l$  **né divergente** a  $+\infty$  (o  $-\infty$ ).

## 1.1 Serie geometrica

La seguente serie:

$$\sum_{k=0}^n q^k$$

con  $q \in \mathbb{R}$  è detta serie geometrica, questa tipologia di serie è particolarmente ricorrente e per valutarne la convergenza o meno è sufficiente dare un'occhiata al parametro  $q$ , in questo modo:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Avendo questo possiamo dimostrare che se  $q \neq 1$  la somma della successione riportata sopra sarà  $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ , mentre nel caso in cui  $q = 1$  allora diventa semplicemente  $n + 1$ , visto che tutti i termini diventano singolarmente uguali a 1, quindi:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Adesso per capire se la serie converge, diverge oppure è indeterminata, sarà sufficiente fare il limite per  $n \rightarrow +\infty$  della successione delle somme parziali, sfruttando la definizione data in precedenza, quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Quindi dalla seguente definizione possiamo dedurre che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \text{Convergente (con somma } \frac{1}{1-q}) & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{Divergente (+}\infty) & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata (non esiste)} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Da quanto appena concluso possiamo dare la seguente definizione:



**DEFINIZIONE DI SERIE GEOMETRICA:**

La serie geometrica è definita come:

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \text{Convergente (con somma } \frac{1}{1-q}) & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{Divergente (+}\infty) & \text{se } q \geq 1 \\ \text{Indeterminata (non esiste)} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Ora che abbiamo la definizione della serie geometrica andiamo a vedere qualche esempio:



### ESEMPI SULLA SERIE GEOMETRICA:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Come si può notare si tratta di una serie geometrica in cui  $q$  è uguale ad  $\frac{1}{2}$  di conseguenza possiamo subito dedurre che **converge essendo  $q$  più piccolo di 1** (convergente per  $-1 < q < 1$ ) e la somma della serie sarà la seguente:

$$\frac{1}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Quindi la somma equivale a 2.

Ora avendo visto un caso abbastanza semplice e intuitivo andiamo a vedere un esempio con proprietà degli esponenziali:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Da qui copiamo che è convergente e la somma sarà:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Adesso proviamo a risolvere un caso con le costanti moltiplicative:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k}$$

A prima vista verrebbe da fare la stessa cosa fatta nel precedente esercizio ossia  $\left(\frac{3}{2}\right)^k$ , ma non è corretto, in questo caso bisogna avanzare in questo modo:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Fatto questo semplice passaggio ci ritroveremo con un caso simile al precedente e basterà fare:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6$$

In questo caso sarà di nuovo convergente e la somma sarà 6.

Dagli esempi appena visti avevamo sempre  $k = 0$ , ma **cosa succede se  $k > 0$ ?**

Prendiamo per esempio la seguente successione:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Per poter svolgere tale esercizio basta applicare la seguente formula:

$$\sum_{k=k_0}^n q^k = q^{k_0} \cdot \sum_{h=0}^{n-k_0} q^h$$

Dove nel nostro caso diventerà:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{32} \cdot 2 = \frac{1}{16}$$

## 1.2 Serie armonica

Per comprendere la serie armonica prendiamo come esempio la seguente successione:

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Tale successione è detta **successione armonica** e la sua serie finita corrisponde a:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

Per capire se questa serie converga o diverga bisogna chiedersi cosa accade per  $S_{n+1}$ :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \rightarrow S_n + \frac{1}{n+1}$$

Quindi:

$$S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$$

Possiamo concludere che per  $n \rightarrow +\infty$  la serie armonica sia divergente.

### 1.2.1 Serie armonica generalizzata

Proviamo ora ad usare la serie armonica generalizzata, dove  $\alpha$  è un numero reale:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

Per capire se converge o diverge bisogna tenere a mente che:

- **Converge** se  $\alpha > 1$ ;
- **Diverge positivamente** se  $\alpha \leq 1$ .

Nel nostro caso:

- Se  $\alpha < 1$  abbiamo:



$$\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$$

dunque segue che:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} > +\infty$$

Poiché la serie armonica generalizzata per  $\alpha > 1$  è minore di una serie divergente, ne consegue che essa sia **divergente**.

- Se  $\alpha > 1$  abbiamo:

$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k}$$

di conseguenza:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$$

Poiché la serie armonica generalizzata per  $\alpha > 1$  è minore di una serie divergente, ne consegue che essa sia **convergente** (poiché solo un valore definito può essere minore di  $+\infty$ )



**NOTA:**

Con queste dimostrazioni **non** siamo in grado di dedurre quale sia il valore a cui converge la serie, ma solo che essa converga. Per questo scriviamo  $< +\infty$ .

Detto questo proviamo dare una definizione alla serie armonica generalizzata:



**DEFINIZIONE DI SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:**

La serie armonica generalizzata è definita come:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Ora che abbiamo anche una definizione vediamo qualche esempio:



### ESEMPI DI SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:

Facciamo caso di avere la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\pi}}$$

Possiamo subito dire che **converge** perché  $\alpha$ , che in questo caso è  $\pi$ , è  $\alpha > 1$  e secondo quello detto in precedenza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\pi}} < +\infty$$

Ora vediamo un altro caso:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{e}{3}}}$$

In questo caso notiamo subito che **diverge** perché:

$$\frac{e}{3} < 1$$

quindi secondo la definizione detta prima:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{e}{3}}} = +\infty$$

## 1.3 Condizioni, teoremi e criteri di convergenza

Adesso andremo a vedere una serie di **condizioni**, **teoremi**, **criteri** e **altre regole** che ci permetteranno di capire se una serie converge o diverge senza l'uso di calcoli.

### 1.3.1 Condizioni per la convergenza di una serie

Prendiamo in considerazione la seguente **serie convergente**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l, l \in \mathbb{R}$$

come ben sappiamo, l'espressione si tradurrà in:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

Avendo stabilito che  $n \rightarrow \infty$  allora  $S_n \rightarrow l$ . Di conseguenza, lo stesso deve valere anche per  $s_{n+1}$ , quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= a_{n+1} \\ 0 - 0 &= a_n + 1 \\ a_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Quindi riformulando ciò che abbiamo appena fatto:



**TEOREMA CONDIZIONE DI CONVERGENZA:**

Se una serie è convergente per  $n \rightarrow \infty$ , allora  $a_k \rightarrow 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \rightarrow 0$$



**ATTENZIONE:**

La condizione  $\implies$  (se...allora) impone che solo se la prima condizione è vera allora anche la seconda deve esserlo (non il contrario).

Se la **seconda condizione è negata** (ossia  $a_k$  non tende a 0), allora anche la prima è necessaria che lo sia, per esempio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Calcoliamo il limite di  $a_k$  per  $k \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k(1 + \frac{1}{k})} = 1$$

Avendo come risultato  $a_k \neq 0$ , è impossibile che la serie converga



**TEOREMA NEGAZIONE DELLA CONDIZIONE DI CONVERGENZA:**

Se per  $n \rightarrow +\infty$  esce che  $a_k \not\rightarrow 0$  (non tende a 0), allora **la serie non può convergere**:

$$a_k \not\rightarrow 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non è convergente}$$

### 1.3.2 Serie a termine di segno costante

**TEOREMA SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE:**

Se  $a_k \geq 0$  allora la serie converge oppure diverge positivamente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < +\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Se  $a_k \leq 0$  allora la serie converge oppure diverge negativamente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < -\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Proviamo ora a vedere un esempio utilizzando i teoremi appena visti:

**ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEI TEOREMI VISTI FINO AD ORA:**

Consideriamo la seguente serie:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Proviamo a stabilire se converge o meno senza l'ausilio dei calcoli:

1. Sappiamo che si tratta di una serie a termini positivi perché  $a_k \geq 0$ , quindi può solo convergere o divergere;
2. Il limite  $a_k$  per  $n \rightarrow \infty$  sappiamo che è 1, ed essendo che  $a_k \nrightarrow 0$  la serie non può convergere;
3. Facendo il resoconto, sappiamo che o diverge o converge e che  $a_k \nrightarrow 0$  quindi non può convergere, di conseguenza la serie è **divergente**.

## 1.2.3 Criterio del confronto

Sappiamo di avere 2 successioni, ossia  $a_n$  e  $b_n$  che rispettano definitivamente la condizione  $0 \leq a_n \leq b_n$ , allora valgono le seguenti implicazioni:

- Se la serie  $\sum b_n$  **converge allora converge** anche la serie  $\sum a_n$ ;
- Se la serie  $\sum b_n$  **diverge a  $+\infty$  allora diverge a  $+\infty$**  anche la serie  $\sum a_n$ .

Come possiamo vedere questo criterio a differenza dei precedenti chiama in causa 2 serie, una è la nostra di cui vogliamo dimostrare l'eventuale divergenza o convergenza e l'altra è una seconda serie che utilizziamo come confronto.

Informalmente il criterio quindi ci dice che se riusciamo a vedere che i termini della nostra serie ( $a_n$ ) sono definitivamente minori o uguali dei termini della seconda serie ( $b_n$ ) e quest'ultima converge allora possiamo concludere che convergerà anche la nostra, stesso discorso per la convergenza.



#### ESEMPIO CRITERIO DEL CONFRONTO:

Analizziamo la seguente serie:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Notiamo subito che  $a_k \geq 0$ , dunque la serie è convergente o divergente

Andiamo quindi a calcolarci il limite di  $a_k$  per  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin(0) = 0$$



NOTA:

Teoricamente con i teoremi visti prima potremmo già dire che la serie è convergente.

Proviamo ora a confrontare la serie con altre due serie secondo la condizione imposta precedentemente ( $0 \leq a_n \leq b_n$ ), quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Ovviamente la serie a sinistra è convergente visto che  $a_k \rightarrow 0$ . La serie a destra è una serie armonica generalizzata dove vediamo che  $\alpha$ , ossia 2, è  $\alpha > 1$  quindi converge:

$$\text{convergente} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \text{convergente}$$

La nostra serie essendo fra 2 serie convergenti convergerà anch'essa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) < +\infty$$

### 1.2.4 Criterio del confronto asintotico

Date 2 successioni  $a_n$  e  $b_n$  a termini definitivamente positivi, se sono **asintotiche** ovvero se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

allora le corrispondenti serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  hanno lo stesso carattere ovvero, **o sono entrambi convergenti oppure sono entrambi divergenti**.

Per capire meglio come funziona vediamo subito un esempio:

**ESEMPIO CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:**

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1$$

Avendo la serie  $a_n$  dobbiamo trovare una serie asintotica  $b_n$  che in questo caso sarà:

$$e^{\frac{1}{k}} - 1 \sim \frac{1}{k}$$

poiché:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = 1$$

Fatto questo ci ritroveremo con una serie armonica, ossia:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

dove  $\alpha \leq 1$  (in questo caso  $\alpha = 1$ ) quindi è divergente a  $+\infty$  di conseguenza lo sarà anche la serie  $a_n$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 = \text{diverge a } +\infty$$

## 1.4 Criterio del rapporto e Criterio della radice

Per capire meglio come funzionano entrambi i criteri andiamoli a vedere separatamente.

### 1.4.1 Criterio del rapporto

Supponiamo che le seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

siano due serie convergenti e che  $k \in \mathbb{R}$ , allora:

1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

2.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k = k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

**NOTA:**

La seconda ci segnala che la presenza di una **costante moltiplicativa**( $k$ ) davanti al termine generale della serie, **non** modifica il carattere della serie, ossia se la serie di  $a_n$  converge allora anche  $b_n$  converge(stessa cosa per la divergenza).

Quando si lavora su termini definitivamente non negativi(cioè con  $a_k \geq 0$ ) può solo convergere o divergere a  $+\infty$ , ma non può essere indeterminata!

Quindi possiamo definire il teorema del criterio del rapporto:

**TEOREMA CRITERIO DEL RAPPORTO:**

Sia  $a_k \geq 0$  definitivamente e supponiamo che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

- Se  $l < 1$  allora  $\sum a_n$  converge;
- Se  $l > 1$  allora  $\sum a_n$  diverge;
- Se  $l = 1$  non possiamo dire se la serie diverge o converge.

## 1.4.2 Criterio della radice

Sostanzialmente i 2 criteri sono simili e di conseguenza anche i teoremi difatti:

**TEOREMA CRITERIO DELLA RADICE:**

Sia  $a_k \geq 0$  definitivamente e supponiamo che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = l$$

- Se  $l < 1$  allora  $\sum a_n$  converge;
- Se  $l > 1$  allora  $\sum a_n$  diverge;
- Se  $l = 1$  non possiamo dire se la serie diverge o converge.

Poco fa abbiamo detto che i due criteri sono simili, poiché in base al valore di  $l$  entrambe convergono o divergono.

Tuttavia, vi è chiaramente una preferenza situazionale nella scelta del criterio da applicare:

- Se la serie  $a_k$  presenta un termine di tipo  $k!$  allora conviene utilizzare il **criterio del rapporto**;
- Se la serie  $a_k$  presenta un termine di tipo  $x^k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , allora conviene utilizzare il **criterio della radice**.

Per capire meglio andiamo subito a vedere due esempi sulla loro applicazione:

**ESEMPI SUI DUE CRITERI:**

1. Applichiamo uno dei due criteri alla seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$$

Essendoci  $k!$  bisognerà utilizzare il **criterio del rapporto**:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k!}{k^2} + 1}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k+1} = +\infty \Rightarrow l > 1$$

Visto che  $l(+\infty) > 1$  allora la serie **diverge**.

2. Vediamo subito un altro esempio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Avendo  $x^k$  useremo il **criterio della radice**:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k \left(\frac{2}{3}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \sqrt[k]{k}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow l < 1$$

Avendo  $l\left(\frac{2}{3}\right) < 1$  la serie **converge**.

### 1.4.3 Criterio di Leibniz

Iniziamo subito dando il teorema di Leibniz, ossia:

**TEOREMA DEL CRITERIO DI LEIBNIZ:**

Sia  $a_n$  una successione e supponiamo che:

1.  $a_n \geq 0$  definitivamente;
2.  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
3.  $a_{n+1} \leq a_n$  per ogni  $n$ , ossia è una successione costante.

Allora la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \text{ è convergente}$$

Per poter utilizzare il criterio le 3 condizioni elencate prima devono essere verificate, se anche una delle condizioni non lo è allora non possiamo più utilizzare il criterio.

Per capire meglio andiamo subito a vedere qualche esempio:



**ESEMPI CRITERIO DI LEIBNIZ:**

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Andiamo subito a vedere se le 3 condizioni sono verificate:

1. Nel nostro caso  $a_n$  è uguale a  $\frac{1}{n!}$  che in questo caso è  $\geq 0$ ;
2. Andiamo a vedere se  $\frac{1}{n!} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Quindi anche questa è verificata.

3. Andiamo ora a calcolare  $a_{n+1} \leq a_n$ :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}$$

Possiamo dire che è verificata visto che per ogni  $n$   $a_n$  sarà comunque maggiore uguale a  $a_{n+1}$ .Quindi la serie è **convergente** visto che tutte e 3 le condizioni sono verificate.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n^2+n}$$

Andiamo subito a vedere se le 3 condizioni sono verificate:

1. Nel nostro caso  $a_n$  è uguale a  $\frac{n-1}{n^2+n}$  che in questo caso è  $\geq 0$ ;
2. Andiamo a vedere se  $\frac{n-1}{n^2+n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$$

Quindi anche questa è verificata.

3. Andiamo ora a calcolare  $a_{n+1} \leq a_n$ :

$$\frac{n}{(n+2)(n+1)} \leq \frac{(n-1)}{n^2+n} \Rightarrow n \cdot n \leq (n-1)(n+2) \Rightarrow n \geq 2 \text{ quindi converge}$$

## 1.6 Convergenza assoluta

Iniziamo subito dando il teorema della convergenza assoluta, ossia:

**TEOREMA DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:**

Una serie  $\sum a_n$  si dice **assolutamente convergente** se converge la serie  $\sum |a_n|$ , quindi se la  $\sum a_n$  converge assolutamente, allora converge.

Andiamo a vedere un esempio per capire meglio come funziona:

**ESEMPIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:**

Prendiamo come esempio la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$$

Andiamo a vedere se la nostra serie converge per  $\sum |a_n|$ , usando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n!)}{n^4} \right|$$

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n!)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n!)}{n^4} \right| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4} \text{ converge}$$