Calcolo combinatorio

▼ INDICE

1 Calcolo combinatorio

Alla base della matematica discreta ci sono importanti principi che definiscono il modo in cui è possibile contare grandi collezioni di oggetti in modo veloce e preciso.

Per esempio consideriamo il seguente problema elementare: in pasticceria ci sono 14 tipi di ciambelle e 16 tipi di muffin e Marco vuole comprare o una ciambella o un muffin. Quante opzioni ha Marco?

La risposta è molto semplice: 14+16 = 30. In questo caso abbiamo applicato la più semplice delle tecniche di conteggio: il **principio additivo**.

✏️ **DEFINIZIONE**:

Il principio additivo afferma che se un evento A può accadere in m_1 modi e un evento B può accadere in m_2 modi, allora l'evento A⋃B può accadere in $m_1 + m_2$ modi.

Per far sì che ciò sia valido è importante che gli eventi siano **disgiunti**, ossia diversi in ogni modo. Per esempio deve essere impossibile che A e B possano accadere allo stesso tempo.

ESEMPIO 1:

Ne caso in cui considerassimo un mazzo di 52 carte contenente 26 carte rosse e 12 facce e volessimo sapere le combinazioni possibili affinché esca una faccia rossa.

In questo caso per esempio non è possibile applicare il principio additivo perché:

26+12 = 38

poiché ci sono 6 carte che sono sia rosse che facce.

Nel esempio appena fatto dovremmo usare il **principio moltiplicativo**.

DEFINIZIONE:

Il principio moltiplicativo afferma che se un evento A può accadere in m_1 modi e un evento B può accadere in m_2 modi, allora l'evento A⋂B può accadere in $m_1 \cdot m_2$ modi.

Ora vediamo 2 esempi di principio moltiplicativo:

ESEMPIO 2:

Un ristorante offre un menù a scelta tra 5 primi piatti, 4 secondi e 7 dessert. Considerando un pasto completo come menù formato da un primo, un secondo e un dessert, quanti pasti è possibile consumare?

A⋂B = 5 · 4 · 7 = 140

ESEMPIO 3:

Una targa di un auto è costituita da 2 lettere, 3 cifre e 2 lettere. Quante targhe è possibile comporre?

A⋂B⋂C = $26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2$

Questi esempi però sono **statici**, quindi contengono a priori una quantità conosciuta di elementi appartenenti ad ogni evento. Nella maggior parte dei casi in cui sia necessario applicare il principio moltiplicativo, tali informazioni vanno ricavate attenendoci alla soluzione proposta, facendo attenzione ai dati forniti dal problema. Il principio moltiplicativo, quindi, può essere applicato anche in casi in cui ci siano dei **vincoli**.

Un caso tipico di vincolo è quello delle **scelte consecutive in uno stesso insieme**: se l'insieme d partenza ha n elementi avrò $m_1 = n$ possibilità per la prima scelta, $m_" = n - 1$ per la seconda, $m_2 = n - 3$ per la terza e così via…

Per comprendere meglio le applicazioni del principio moltiplicativo in presenza di vincoli, consideriamo il seguente esempio e le casistiche proposte:

ESEMPIO 4:

Fornendo una parola, dunque una successione, di 5 lettere scelte tra A, B, C, D, E, F, G, H, I e J:

- quante sono le parole che non iniziano con H?

  9 · 10^4

- quante sono le parole che non iniziano con H e che non finiscono con A?

  9 · 10^3 · 9

- quante sono le parole che iniziano con A?

  1 · 10^4

- quante sono le parole che iniziano con H e hanno B in terza posizione?

  1 · 10 · 1 · 10 · 10 = 10^3

- quante sono le parole che non contengono 2 lettere consecutive identiche?

  10 · 9^4

- quante sono le parole che non iniziano con J e non contengono 2 lettere consecutive identiche?

  9 · 9^4

Una volta compresi i 2 principi, è necessario affrontare le casistiche in cui sia necessario impiegare entrambi i principi al fine di poter ottenere la soluzione richiesta.

Riprendendo il precedente esempio, consideriamo questa ulteriore casistica:

- quante sono le targhe che contengono un unica P(indipendentemente dalla posizione)?

Per poter ottenere una soluzione valida, è necessario scomporre la richiesta in dei tipi (o categorie) **mutualmente esclusivi**, ossia disgiunti, ed **esaustivi**, ossia contenenti tutte le casistiche possibili appartenenti alla richiesta originale.

Possiamo quindi individuare i seguenti tipi di cui possiamo facilmente calcolare la quantità applicando il principio moltiplicativo:

1. Tipo 1: Targhe con P in prima posizione $\Rightarrow 1 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 25^2 = 10^3 \cdot 25^3$
2. Tipo 2: Targhe con P in seconda posizione $\Rightarrow 25 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 25^2 = 10^3 \cdot 25^3$
3. Tipo 3: Targhe con P in terza posizione $\Rightarrow 25^2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 25 = 10^3 \cdot 25^3$
4. Tipo 4: Targhe con p in quarta posizione $\Rightarrow 25^2 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 1 = 10^3 \cdot 25^3$

Una volta calcolate le quantità dei singoli tipi possiamo applicare il principio additivo per poter soddisfare la richiesta iniziale:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 10^3 \cdot 25^3 + 10^3 \cdot 25^3 + 10^3 \cdot 25^3 + 10^3 \cdot 25^3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 25^3$$

Come è facilmente intuibile, in concetto sopra espresso è facilmente riscrivibile in termini di **insiemi**, dove ognuno dei tipi è un sottoinsieme di A, ossia l'insieme che soddisfa la richiesta:

$$A = T_1 \bigcup T_2 \bigcup T_3 \bigcup T_4$$

1.1 Principio di inclusione e esclusione(PIE)

Immaginiamo di dover contare quante siano le targhe contenenti almeno una T e almeno un 9 al loro interno.

Effettuare una tipizzazione disambigua e completa di questo insieme sarebbe molto laborioso, dunque possiamo effettuare un passaggio al complemento, escludendo l'insieme contenente le targhe **senza nessuna T o senza nessun 9** dall'insieme totale delle targhe:

- A = insieme totale targhe;
- S = insieme delle targhe contenenti almeno una T e almeno un 9(il nostro obiettivo);
- A \ S = insieme complementare di S in A.

Tuttavia, rimane il problema del dover tipizzare questo insieme complementare. Possiamo provare a dividerlo in questi 2 tipi:

- K = insieme delle targhe che non contengono una T $\Rightarrow 25^2 \cdot 10^3 \cdot 25^2$
- J = insieme delle targhe che non contengono un 9 $\Rightarrow 26^2 \cdot 9^3 \cdot 26^2$

Abbiamo quindi descritto A \ S come $K \bigcup J$.

Rimane però un problema ossia che nell'insieme K vengono contate anche le targhe sia senza T sia senza 9 e lo stesso accade anche nell'insieme J.

Quindi in poche parole stiamo contando due volte tutte le targhe sia senza t che senza 9.

Poiché entrambi i 2 insiemi K e J condividono questa tipologia di targhe possiamo dire che $K \bigcap J$ viene contato 2 volte quindi è necessario **escludere**(**esclusione**) gli elementi dell'intersezione della somma degli elementi di K e J:

$$\#(A \setminus S) = \#(K \bigcup J) = \#K + \#J - \#(K \bigcap J)$$

Una volta identificato l'insieme complementare, possiamo calcolare la quantità richiesta #S dal quesito stilando una lista delle varie quantità impiegate ed utilizzando il principio additivo tra di esse:

- $\#A = 26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2$
- $\#K = 25^2 \cdot 10^3 \cdot 25^2$
- $\#J = 26^2 \cdot 9^3 \cdot 26^2$
- $\#(K \bigcap J) = 25^2 \cdot 9^3 \cdot 25^2$
- $\#(K \bigcup J) = \#K + \#J - \#(K \bigcap J)$

$$\#S = \#A - \#(A \setminus S) = \#A - (\#K + \#J - \#(K \bigcap J))$$

$$\#S = 26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2 - (25^2 \cdot 10^3 \cdot 25^2 + 26^2 \cdot 9^3 \cdot 26^2 - 25^2 \cdot 9^3 \cdot 25^2)$$

Vediamo ora un caso più complesso dove sia necessario applicare anche il **principio di inclusione** oltre a quello di esclusione:

ESEMPIO 5:

Consideriamo un caso in cui i nostri dati sono divisi in 3 tipi. Consideriamo una classe di 41 studenti sottoposti a 3 test di valutazione: Combinatoria(C), Induzione (I) e Logica(L). I risultati dei test a nostra disposizione sono i seguenti:

- 12 superano I
- 5 superano L
- 8 superano C
- 2 superano sia I che L
- 6 superano sia I che C
- 3 superano sia L che C
- 1 supera sia I che L che C

Quanti studenti hanno superato almeno un test?

Per rispondere alla domanda, possiamo contare gli elementi appartenenti alll'unione I⋃L⋃C, in modo da ricoprirei casi possibili.

Tuttavia, come nel caso precedente, esistono alcuni casi in cui vengono ripetuti dei conteggi (ad esempio sia l'insieme I che L condividono I⋂L, dunque essa verrebbe contata 2 volte nell'unione I⋃L).

Procedendo in modo analogo all'esempio, potremmo calcolare la quantità di studenti che ha superato almeno un test come:

#I + #L + #C - #(I⋂L) - #(I⋂C) - #(L⋂C).

Tuttavia, **escludendo**(**esclusione**) le 3 intersezioni abbiamo generato un altro problema: tutti e 3 gli insiemi I, L e C contengono l'intersezione I⋂L⋂C e allo stesso modo i 3 insiemi I⋂L, I⋂C, L⋂C contengono tale intersezione abbiamo dunque **sia incluso 3 volte** questa intersezione che **escluso 3 volte**, finendo con il non conteggiare questa intersezione.

Quindi dobbiamo **re-includere** questa intersezione nel conteggio finale, ottenendo che:

#S = #I + #L + #C - #(I⋂L) - #(I⋂C) - #(L⋂C) + #(I⋂L⋂C)

#S = 12+5+8-2-3-6+1 = 15.

1.2 Figure della combinatoria

Una volta compresi i 2 principi alla base del calcolo combinatorio, di seguito vedremo anche quelle che sono le **figure fondamentali** ed estremamente ricorrenti nel calcolo combinatorio:

1.2.1 Disposizioni con ripetizione

Le **disposizioni con ripetizione** sono una generalizzazione dei casi in cui, nell'applicazione del PM(Principio Moltiplicativo) il fattore moltiplicativo sia costante.

Per comprendere al meglio di cosa si tratta, analizziamo il seguente problema:

- Consideriamo l'insieme A = *a, b, c*. Vogliamo contare le sequenze ordinate di lunghezza 2 elementi scelti in A con possibili ripetizioni.

In questo caso, le sequenze ordinate ricavabili sono: *aa, ab, ac, ba, bb, ca, cb, cc*.

Poiché abbiamo 3 scelte per il primo elemento e 3 scelte per il secondo possiamo applicare il PM e ricavare la quantità: 3 · 3 = 9.

Definiamo con disposizione con ripetizione di ordine K di N oggetti una sequenza ordinata(X_1, X_2, X_k) di K oggetti scelti tra gli N totali:

$$D_{n,k} = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

quindi l'esercizio appena svolto può essere scritto anche in questo modo:

$$D_{3,2} = 3^2 = 9.$$

1.2.2 Disposizioni semplici

Le **disposizioni semplici** sono una generalizzazione dei casi in cui, nell'applicazione del PM, il fattore moltiplicativo diminuisce di 1 ad ogni passo.

Per comprendere meglio d cosa si tratta, analizziamo il seguente problema:

- Consideriamo l'insieme A = *a, b, c*. Vogliamo contare le sequenze ordinate di lunghezza 1, 2 e 3.

In questo caso, le sequenze di lunghezza 1 sono 3(*a, b, c*), quelle di lunghezza 2 sono 6(*ab, ac, ba, ca, cb*) e quelle di lunghezza 3 sono ancora 6(*abc, acb, bac, bca, cab, cba*).

Utilizzando il PM per contarle, nel caso in cui la lunghezza sia 2 allora avremo 3 possibilità per la prima lettera. e 2 per la seconda (3 · 2), mentre nel caso in cui la lunghezza sia 3 allora avremo 3 possibilità per la prima lettera , 2 per la seconda e 1 per la terza(3 · 2 · 1 = 6

).

Definiamo come disposizione semplice di ordine k di n oggetti una sequenza ordinata($X_1, X_2, ..., X_k$) di k oggetti distinti tra loro scelti tra gli n totali:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)).$$

Questa formula però può essere riscritta in questo modo:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Quindi l'esercizio precedente sarà:

$$D_{1,3} = \frac{3!}{(3*1)!} = 3;$$
$$D_{2,3} = \frac{3!}{(3*2)!} = 6;$$
$$D_{3,3} = \frac{3!}{(3*3)!} = 6.$$

Nel caso in cui n e k coincidono, allora indicheremo questa particolare disposizione con il termine **permutazione**. Poiché in questo caso il fattoriale di ($n-k$) corrisponderebbe al fattoriale di 0, dunque 1, le permutazioni corrispondono al fattoriale di n:

$$n = k, P_n = D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Per approfondire il concetto, di seguito vedremo due esempi in cui è possibile applicare le 2 tipologie di disposizioni:

📎 ESEMPIO 6:

Quanti sono i possibili ordini di arrivo(non simultanei) in una gara con 10 partecipanti(assumendo che tutti gli atleti arrivino al traguardo)?

Ci troviamo in una casistica in cui ad ogni arrivo la quantità di possibili arrivi diminuisca: 10 atleti potranno arrivare primi, 9 potranno arrivare secondi, e così via…

$$P_{10} = 10!$$

ESEMPIO 7:

Se a un torneo partecipano 8 squadre scelte tra 15 e l'ordine di partenza è a sorte, quanti sono i possibili schieramenti di partenza?

$$D_{15,8} = \frac{15!}{(15-8)!} = \frac{15!}{7!}$$

1.2.3 Anagrammi

Gli **anagrammi** sono un caso particolare di disposizione. Per capire in modo diretto di cosa si tratta, vediamo i seguenti esempi:

📎 ESEMPIO 8:

Quanti sono gli anagrammi di NONNA?

Nel caso in cui considerassimo ognuna delle lettere ripetute come una lettera diversa(quindi come se la parola in questione fosse $N_1O_2N_3N_4A_5$) potremmo identificare la risposta come una semplice permutazione di tutte le lettere disponibili, quindi:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Nel caso in cui considerassimo ognuna delle lettere ripetute come la stessa, avremmo degli anagrammi uguali tra loro poiché le 3 N sono intercambiabili tra loro. In questo caso quindi sarà necessario dividere il numero di permutazioni originali per il numero di permutazioni della quantità N ripetute:

$$\#A = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20.$$

ESEMPIO 9:

Quanti sono gli anagrammi di NONNO?

In questo caso ci troviamo in una situazione molto simile alla precedente, tuttavia le tipologie ripetute sono 2, N e O. Per soddisfare la domanda, possiamo procedere con lo stesso modo, dividendo il numero delle permutazioni originali, ossia 5!, per il numero delle permutazioni della quantità di lettere N ripetute e di lettere 0 ripetute, che chiameremo rispettivamente n_1 e n_2:

$$\#A = \frac{P_n}{P_{n1} * P_{n2}} = \frac{5!}{3! * 2!} = 10.$$

Ricapitolando per ottenere il numero di anagrammi di una parola formata da n occorrenze di lettere di cui n_1 sono identiche, allora avremo $\frac{n!}{n_1!}$ possibilità. Nel caso in cui ci sono n_1 lettere uguali di un tipo e n_2 lettere di un altro tipo, allora avremo $\frac{n!}{n_1! * n_2!}$ possibilità.

In generale quindi gli anagrammi di una parola lunga n lettere, in cui compaiono t gruppi di lettere ripetute sono:

$$\#A = \frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_t}$$

Il calcolo degli anagrammi, tuttavia non si limita ad essere applicato solo nel caso in cui si lavori con parole, bensì in qualsiasi caso analogo dove ogni tipologia di elemento può "corrispondere" ad una lettera, come nel seguente esempio:

📎 ESEMPIO 10:

Quanti sono gli ordinamenti di 14 frutti di cui 7 mele, 3 pere e 4 pesche se mi interessa distinguere tra mele, pere e pesche?

$$\#A = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3!} = \frac{14!}{7! * 3! * 4!} = 120120.$$

1.2.4 Combinazioni semplici

Fino ad ora, abbiamo visto problemi in cu veniva sempre considerato l'ordine in cui gli elementi di un dato insieme si presentavano(permutazioni e disposizioni).

Nell'ambito delle **combinazioni**, invece, l'ordine non ha alcuna importanza. Per capire meglio di cosa si parla vediamo il seguente esempio:

📎 ESEMPIO 11:

Consideriamo l'insieme A = a, b, c. Vogliamo contare quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi.

Poiché si tratta di sottoinsiemi possibili e non sequenze ordinate, tutti i sottoinsiemi dove gli stessi 3 elementi sono in ordine deciso, corrispondono tutti ad una singola possibile combinazione:

{a, b, c} = *{b, c, a}* = *{b, a, c}* = . . .

Possiamo quindi contare manualmente quanti sono i sottoinsiemi possibili: *{a, b, c}*, *{a, b, d}*, *{a, c, d}*, *{b, c, d}*.

Per poter calcolare le combinazioni possibili in modo matematico, invece, possiamo ricavare il concetto partendo dalle disposizioni semplici, in questo caso di ordine 3:

$$D_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 16$$

abc, acb, bca, cab, cba $\Rightarrow$ *3!*

abd, adb, bad, bda, dab, dba $\Rightarrow$ *3!*

adc, acd, dac, dca, cad, cda $\Rightarrow$ *3!*

dbc, dcb, bcd, cbd $\Rightarrow$ *3!*

Una volta enumerate tutte le possibili disposizioni semplici, possiamo notare come, considerando il caso in cui l'ordine non sia importante, ogni "fila" corrisponda allo stesso sottoinsieme.

Per ottenere la quantità di combinazioni semplici, dunque, sarà necessario considerare solo **1 disposizione** per "fila".

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$$

Questa formula è molto importante nella combinatoria e perciò viene definita **coefficiente binomiale** e viene indicato con la seguente notazione(che si legge *"* n *scegli* k*"*):

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

Di seguito vedremo alcuni esercizi in cui sia possibile applicare il concetto di combinazione semplice per ricavare una soluzione:

📎 ESEMPIO 12:

In un gruppo di 80 individui vogliamo scegliere un gruppo di 4 rappresentanti. In quanti modi posso farlo?

Questo è un tipico esempio di applicazione diretta del concetto di combinazione semplice, poiché non ci interessa l'ordine dei rappresentanti della delegazione.

$$C\binom{8}{40} = \frac{80!}{(80-4)!*4!} = 1581580.$$

- Invece con le delegazioni con 2 individui per gruppo?

In questo caso possiamo calcolare le totali combinazioni possibili calcolando prima le combinazioni possibili per scegliere i 2 componenti, successivamente le combinazioni per scegliere i restanti 2 e calcolare il prodotto di entrambe applicando il PM:

$$\#A = C_{n,k} = \binom{40}{2} \cdot \binom{40}{2}.$$

- Quante sono invece le delegazioni con almeno un rappresentante per genere?

La parola "almeno" indica la possibilità di ottenere la risposta attraverso un **passaggio al complemento**, ossia l'ottenimento della soluzione attraverso

l'**esclusione** del numero di combinazioni vincolate dal numero di combinazioni totali possibili.

In questo caso, le categorie di combinazioni vincolate sono due: le combinazioni con solo rappresentanti maschi $\binom{40}{2}$ e quelle con solo rappresentanti femminili $\binom{40}{2}$:

$$\#A = \binom{80}{4} \cdot \binom{40}{4} \cdot \binom{40}{4}$$

In alternativa, potremmo soddisfare la domanda con una tipizzazione in 3 categorie esaustive:

1. T_1: solo un maschio e 3 femmine $\Rightarrow \binom{40}{1} \cdot \binom{40}{3}$;
2. T_2: solo una femmina e 3 maschi $\Rightarrow \binom{40}{1} \cdot \binom{40}{3}$;
3. T_3: 2 maschi e 2 femmine $\Rightarrow \binom{40}{2} \cdot \binom{40}{2}$

$$\#A = \#T_1 + \#T_2 + \#T_3 = \binom{40}{1} \cdot \binom{40}{3} + \binom{40}{1} \cdot \binom{40}{3} + \binom{40}{2} \cdot \binom{40}{2} = 2 \cdot \binom{40}{1} \cdot \binom{40}{3} + 2 \cdot \binom{40}{2}$$

- Quanti modi abbiamo di scegliere una delegazione di 4 rappresentanti in cui un membro assume il ruolo di portavoce?

Per poter rispondere a questa domanda invece possiamo procedere in 2 modi:

1. Scegliamo prima i 4 rappresentanti e successivamente scegliere il portavoce tra di loro;
2. Scegliamo prima il portavoce e successivamente gli altri 3 rappresentanti.

Quindi le 2 soluzioni saranno:

$$\#A = \binom{80}{4} \cdot \binom{4}{1} \text{ oppure } \#A = \binom{80}{1} \cdot \binom{79}{3}.$$

Entrambi i procedimenti daranno lo stesso valore, dunque possiamo affermare che:

$$\binom{80}{4} \cdot \binom{4}{1} = \binom{80}{1} \cdot \binom{79}{3}.$$

Generalizzando questa situazione, possiamo dire che scegliendo m elementi, dove sia importante l'ordine di un solo elemento tra essi, tra n totali, allora:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{1} = \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{m-1} \Rightarrow \binom{n}{m} \cdot m = n \cdot \binom{n-1}{m-1}$$

- Consideriamo una elezione in cui si presentano 15 liste politiche ciascuna delle quali presenta 10 candidati. Il sistema di voto consiste nello scegliere una lista e nell'esprimere al massimo 2 preferenze tra i candidati di quella lista. Vogliamo sapere quanti sono i possibili esiti del voto.

Possiamo tipizzare il problema in 3 categorie:

1. T_1: Voti con 0 preferenze $\Rightarrow \binom{10}{0}$, poiché devo contare l'insieme vuoto;
2. T_2: Voti con 1 preferenze $\Rightarrow \binom{10}{1}$;

3. T_3: Voti con 2 preferenze $\Rightarrow \binom{10}{2}$.

Successivamente sarà necessario applicare il PA(Principio Additivo) tra i 3 tipi individuati, per poi moltiplicare il risultato per il numero di liste totali:

$$15 \cdot \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right) \Rightarrow 15 \cdot \sum_{i=1}^{2} \binom{10}{i}$$

1.3 Tecniche di dimostrazione

1.3.1 Dimostrazione per doppio conteggio

Abbiamo osservato come la seguente identità possa essere dimostrata per doppio conteggio:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{1} = \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{m-1}.$$

Tuttavia, essa è valida solo nel caso in cui si vada a scegliere solo una persona appartenente alla sotto delegazione. Possiamo, dunque, generalizzare l'espressione sostituendo 1 con un valore k, mantenendola vera solo nel caso in cui $0 < k \leqslant m \leqslant n$:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$$

In questo modo la parte sinistra dell'espressione conterà i modi di scegliere una delegazione di m **elementi** tra n **elementi**, tra cui vengono poi scelti k **elementi** che possono comporre una sotto-delegazione, mentre la parte destra conterà prima i modi di scegliere ua sotto-delegazione di k**elementi** scelti tra n **elementi**, per poi scegliere $m-k$ **elementi** tra $n-k$ **elementi** con cui formare la normale delegazione.

Sappiamo quindi che $\binom{n}{k}$ ci permette di contare la quantità di sottoinsiemi di k elementi scelti tra n elementi. Tuttavia, esiste anche un altro modo di contare la quantità che può tornare utile nel caso in cui k sia un numero molto vicino ad n.

Considerando l'insieme A come l'insieme composto da n elementi, vogliamo contare la quantità di sottoinsiemi contenenti k elementi.

Nel fare ciò, ogni volta che viene considerato un sottoinsieme di A contenente k elementi(che chiameremo S) viene **scartato** un sottoinsieme di $n-k$ elementi.

Questo sottoinsieme contenente gli "scarti" è quindi il **complementare del sottoinsieme di k elementi in A** e viene identificato nella notazione $A \backslash S$.

Visto che dall'esistenza della prima tipologia di sottoinsieme deriva anche l'esistenza dell'altra, possiamo dire che contare la **quantità dei sottoinsiemi** di k elementi che si vuole realmente contare:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m-k}.$$

📎 ESEMPIO 13:

Immaginiamoci di trovarci in un caso in cui bisogni contare i sottoinsiemi di 98 elementi scelti tra 100 elementi, dunque $\binom{100}{98}$ possiamo applicare il ragionamento descritto precedentemente e contare $\binom{100}{100-98}$ sottoinsiemi, ottenendo la stessa quantità.

1.3.2 Dimostrazione per traduzione

Tuttavia la dimostrazione più usata è la dimostrazione a traduzione che infatti va anche a convalidare la precedente dimostrazione, possiamo quindi traslare il concetto precedente nel concetto di **traduzione** da un insieme all'altro, dove l'insieme di partenza è quello dei sottoinsiemi di A di k elementi, che chiameremo L_1, e l'insieme di arrivo è quello dei sottoinsiemi di A di $n-k$ elementi, che chiameremo L_2.

Stiamo quindi effettuando una traduzione tra i 2 insiemi, dove ad ogni elemento del primo viene associato un elemento dell'altro. Quindi ad ogni sottoinsieme S di A viene associato il suo complementare in A:

$$S \longmapsto A \backslash S.$$

Per poter sostenere che si tratti di una **buona traduzione**, e dunque che L_2 ha lo stesso numero di elementi di L_1, dobbiamo assicurarci che la traduzione rispetti le seguenti proprietà:

1. Ogni elemento di L_1 viene tradotto in **uno e un solo** elemento di L_2;
2. Ogni elemento di L_2 è LA traduzione di **almeno** un elemento di L_1;
3. Non si dà il caso che due elementi distinti di L_1 vengano tradotti nello stesso elemento di L_2.

ESEMPIO 14:

Immaginiamo di distribuire una quantità t di giocattoli a m bambini. Vogliamo sapere quanti siano i modi per effettuare tale distribuzione.

Scegliamo di dover distribuire 3 giocattoli a 2 bambini, che chiameremo Irene e Marco. Poiché si tratta di numeri piccoli, possiamo calcolare manualmente i possibili modi di distribuire i giocattoli ai 2 bambini:

Irene	Marco
3	0
2	1
1	2
0	3

Possiamo quindi dire che i modi possibili sono **4**. Ma avremmo potuto utilizzare un altro metodo per calcolare questa quantità?

Possiamo provare a risolvere il problema affrontando una **traduzione**, dove i numeri vengono riscritti come **pallini**:

Irene	Marco
○○○	
○○	○
○	○○
	○○○

Volendo astrarre ulteriormente, possiamo riscrivere la barra separatrice tra i 2 bambini come una **stanghetta**:

○○○ |

○○ | ○

○ | ○○

| ○○○

Queste traduzioni sono le caratteristiche tipiche di una **buona traduzione**, dunque possono affermare che contare la quantità di modi di poter scrivere una stringa contenente **3 pallini** ed **1 stanghetta** corrisponde a contare i modi di poter distribuire **3 giocattoli** a **2 bambini.**

Per poter contare i modi di poter scrivere la stringa di pallini e stanghette, possiamo calcolare al quantità di sottoinsiemi in cui compaiono solo i 3 pallini o la quantità do sottoinsiemi in cui compare solo la stanghetta(poiché sono complementari).

La prima quantità può essere calcolata come un **sottoinsieme di 3** in un insieme di 4 elementi(ossia i 3 pallini e la singola stanghetta), mentre la seconda può analogamente essere calcolata come un sottoinsieme di 1 elemento in un insieme di 4 elementi. Poiché complementari, i 2 conteggi corrispondono alla stessa quantità:

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} \Rightarrow 4$$

Volendo generalizzare questo conteggio, notiamo come 4 corrisponda al numero dei giocattoli sommato al numero dei bambini meno 1($m + t - 1$), 3 corrisponde al numero di giocattoli e 1 al numero di bambini meno 1($t - 1$). Possiamo quindi affermare la seguente regola di conteggio:

$$\binom{m+t-1}{m} = \binom{m+t-1}{t-1}$$

Per confermare la validità di questa regola, possiamo provare a calcolare i modi per poter distribuire 7 giocattoli a 6 bambini, sostituendo i nuovi valori a quelli precedenti:

$$\binom{7+6-1}{7} = \binom{7+6-1}{6-1} \Rightarrow \binom{12}{7} = \binom{12}{5} \Rightarrow 792 = 792$$

Per questi tipi di problemi tramite la traduzione abbiamo trovato un modo per estrarre il problema trasformandolo nel calcolare i modi per scrivere una stringa, è facilmente intuibile come sia possibile, in entrambi i casi mostrati, utilizzare anche gli **anagrammi** per poter calcolare le stesse quantità.

Quindi il primo caso che abbiamo visto con gli anagrammi sarà cosi:

ESEMPIO 15:
Quanti sono gli anagrammi di una parola formata da 3 pallini ed una stanghetta?

- “Lettere” totali: 4;
- Ripetizioni della “lettera” ○: 3;
- Ripetizioni della “lettera” |: 1.

$$\#A = \frac{3!}{3!*1!} = \binom{3}{1}$$

Mentre il secondo esercizio visto con l’uso degli anagrammi sarà così:

ESEMPIO 16:

Quanti sono gli anagrammi di una parola formata da 7 pallini e 5 stanghette?

- “Lettere” totali: 12;
- Ripetizioni della “lettera” ○: 7;
- Ripetizioni della “lettera” |: 5.

$$\#A = \frac{12!}{7!*5!} = \binom{12}{5}$$

1.4 Combinazioni semplici e sottoinsiemi

Ora che abbiamo compreso come contare i sottoinsiemi di k elementi scelti tra n elementi di un insieme A, utilizzando vari metodi, vogliamo trovare un modo per poter contare la quantità di **tutti i sottoinsiemi possibili** di un insieme A.

In un linguaggio insiemistico, l’insieme contenente tutti i sottoinsiemi possibili di un altro insieme viene definito come **insieme potenza**, e viene identificato come:

$$P(A) = \{\, S : S \subseteq A\}.$$

Per poter contare il numero di elementi presenti nell’insieme potenza di A, possiamo applicare il principio additivo su tutte le combinazioni semplici di n elementi partendo da 0 fino a n stesso:

$$\#P(A) = \#S_{tot} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}.$$

Tuttavia, contare questa quantità prende parecchio tempo, quindi, possiamo cercare un modo più semplice per poterli contare:

ESEMPIO 17:

Consideriamo la collezione di lettere B, M, Q, T, U e z di cui vogliamo contare tutti i modi possibili per selezionare una sotto-collezione, ossia scegliere alcune lettere e altre no, senza tenere conto dell’ordine degli elementi(ossia non distinguo tra una scelta M, Q, Z e Q, M, Z).

Per semplificare il conteggio, possiamo effettuare una traduzione dalle lettere che compongono la collezione ad una stringa di numeri binari, dove ad ogni lettera può corrispondere un 1 o uno 0 a seconda della sua presenza o meno all’interno del sottoinsieme descritto.

Nel caso in cui volessimo rappresentare il sottoinsieme M, Q, T potremmo riscrivere questo sottoinsieme come 011100, poiché B, U e Z non ci sono vengono sostituite da uno 0.

Di conseguenza, all’insieme vuoto corrisponderà 000000, mentre all’insieme di tutte le lettere corrisponderà 111111.

Poiché si tratta di una buona traduzione, per rispondere alla domanda possiamo contare direttamente la quantità di disposizioni semplici di 6 cifre scelte tra 0 e 1($D_{6,2}$), corrispondenti alle possibili disposizioni della stringa binaria, ossia 2^6.

Nel caso aggiungessimo A e C alla collezione di lettere, il risultato diventerebbe 2^8.

Possiamo quindi dedurre che un insieme di n elementi possiede 2^n sottoinsiemi e di conseguenza:

$$\#P(A) = \#S_{tot} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$