Principio Additivo e moltiplicativo

Il principio additivo afferma che se un evento A può accadere in m_1 modi e un evento B può accadere in in m_2 modi, allora l'evento $A \vee B$ può accadere in $m_1 + m_2$ modi.
Per far sì che questo sia valido è importante che gli eventi siano disgiunti (ossia diversi in ogni modo quindi impossibile che A e B accadano allo stesso tempo.

Esempio:

Se consideriamo 52 carte contenente 26 carte rosse e 12 facce e volessimo sapere le combinazioni possibili affinché esca una faccia rossa non potremmo applicare il principio additivo, dunque $26+12=38$, poiché ci sono 6 carte che sono sia rosse che facce.

Il principio moltiplicativo afferma che se un evento A può accadere in m_1 modi e un evento B può accadere in $m_1 \cdot m_2$ modi

Esempio:

- Un ristorante offre un menù a scelta tra 5 primi piatti, 4 secondi piatti e 7 dessert.
Considerando un pasto completo come menù formato da un primo un secondo e un dessert, quanti pasti completi è possibile consumare?

$$A \wedge B = 5 \cdot 4 \cdot 7$$

- Una targa italiana di un'auto è costituita da 2 lettere, 3 cifre e 2 lettere.
Quante targhe è possibile comporre?

$$A \wedge B \wedge C = 26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2$$

Questi esempi però sono statici, quindi hanno già una quantità conosciuta.
Nella maggior parte dei casi in cui è necessario applicare il PM (Principio Moltiplicativo) le informazioni vanno ricavate attenendosi alla situazione proposta e facendo attenzione ai dati forniti. Quindi il PM può essere applicato anche in casi in cui ci siano dei vincoli.
Il caso tipico è quello di scelte consecutive di elementi in uno stesso insieme:

se l'insieme di partenza ha n elementi avrò $m_1 = n$ per la prima scelta, $m_2 = n - 1$ per la seconda, $m_3 = n - 3$ per la terza volta ecc...

Un esempio di PM in presenza di vincoli può essere:

- Formando una parola di 5 lettere scelte tra A, B, C, D, E, F, G, H, I e J:
  - quante sono le parole che non iniziano con H?

    $$9 \cdot 10^4$$

  - quante sono le parole che non iniziano con H e non finiscono con A?

    $$9 \cdot 10^3 \cdot 9$$

  - quante sono le parole che iniziano con A?

    $$1 \cdot 10^4$$

  - quante sono le parole che non iniziano con H e hanno B in terza posizione?

    $$1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$

  - quante sono le parole che non contengono 2 lettere consecutive identiche?

    $$10 \cdot 9^4$$

- quante sono le parole che non iniziano con J e non contengono 2 lettere consecutive identiche?

$$9 \cdot 9^4$$

Ora prendiamo come esempio un altro caso:

- Quante sono le Targhe che contengono una unica P (indipendentemente dalla posizione)?

Per poter ottenere una soluzione valida, è necessario scomporre la richiesta in dei tipi (o categorie) mutualmente esclusivi, ossia disgiunti, ed esaustivi, ossia contenenti tutte le casistiche possibili appartenenti alla richiesta originale. Possiamo, quindi, individuare i seguenti Tipi di cui possiamo facilmente calcolare la quantità applicando il PM:

Tipo 1: Targhe con P in 1° posizione:

$$1 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 25^2 = 10^3 \cdot 25^3$$

Tipo 2: Targhe con P in 2° posizione:

$$25 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 25^2 = 10^3 \cdot 25^3$$

Tipo 3: Targhe con P in 3° posizione:

$$25^2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 25 = 10^3 \cdot 25^3$$

Tipo 4: Targhe con P in 4° posizione:

$$25 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 1 = 10^3 \cdot 25^3$$

Una volta calcolate le quantità dei singoli tipi, possiamo applicare il Principio Additivo per poter soddisfare la richiesta iniziale:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 10^3 \cdot 25^3 + 10^3 \cdot 25^3 + 10^3 \cdot 25^3 + 10^3 \cdot 25^3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 25^3$$

Questo concetto è facilmente riconducibile in termini di insiemi, dove ognuno dei tipi è un sottoinsieme di A:

$$T_1 \subseteq A, T_2 \subseteq A, T_3 \subseteq A, T_4 \subseteq A$$

$$A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$$

Per semplificare la scrittura, nel caso in cui A sia un insieme, useremo la notazione $\#A$ per indicare il numero di elementi di A (o cardinalità di A).