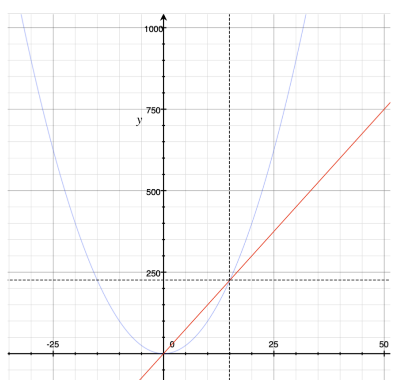
Notazione asintotica

▼ ***INDICE***

2 Notazione asintotica

In matematica la notazione asintotica permette di confrontare il tasso di crescita(comportamento asintotico) di una funzione nei confronti di un'altra, per esempio:

$f(n)=15n+1$
$g(n)=n^2$



✏️ ***DEFINIZIONE DI NOTAZIONE ASINTOTICA:***

In informatica, invece, il calcolo asintotico viene utilizzato per analizzare la complessità di un algoritmo. Nello specifico, per stimare quanto aumenta il tempo al crescere della dimensione n nell'input.

In particolare esistono 3 tipologie di notazione asintotica e sono:

- Notazione asintotica O grande: essa va a definire il limite superiore asintotico;
- Notazione asintotica Ω: essa va a definire il limite inferiore asintotico;
- Notazione asintotica Θ: essa va a definire il limite asintotico stretto.

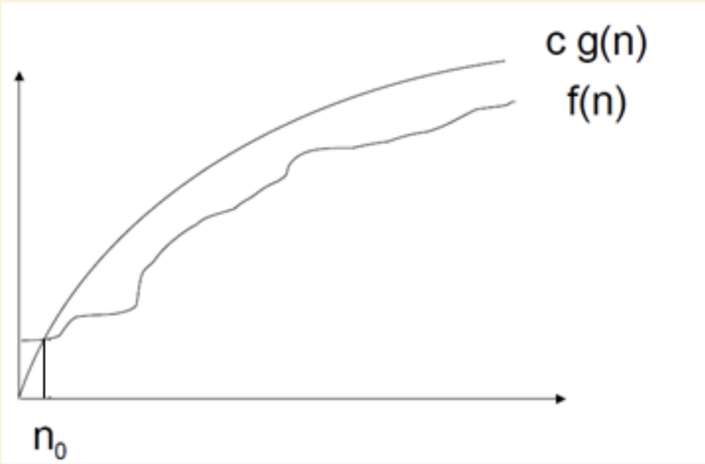
Per capire meglio cosa fanno queste 3 tipologie andiamole a vedere nel dettaglio.

2.1 Notazione asintotica O grande

Per comprendere al meglio cosa si intende con notazione asintotica O grande, partiamo direttamente con la sua definizione:

✏️ ***DEFINIZIONE DI NOTAZIONE ASINTOTICA O GRANDE:***

Date 2 funzione $f(n), g(n) \geqslant 0$ si dice che $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ se esiste un valore $c > 0$ tali che $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ per ogni $n \geqslant n_0$:



In $\mathrm{O}(g(n))$, dunque troviamo tutte le funzioni dominate dalla funzione $g(n)$.

Per capire meglio, quindi, O grande molto semplicemente va a definire un limite superiore asintotico che va a limitare la funzione $f(n)$ quando la costante n_0 ,dove $n \to +\infty$, supera un certo valore.

In questo modo essa rimarrà sempre sotto la funzione $c \cdot g(n)$ (dunque viene "dominata" da essa).

📎 ***ESEMPI SULLA NOTAZIONE ASINTOTICA O GRANDE:***

- Sia $f(n) = 3n + 3$, possiamo dire che $f(n)$ è in $\mathrm{O}(n^2)$, perché esiste una c (ossia $c = 6$) dove:

$$cn^2 \geqslant 3n + 3 \; per \; ogni \; n \geqslant 1$$
$$Esempio:$$
$$n = 1 \; e \; c = 6$$
$$6(1^2) \geqslant 3(1) + 3$$

  Tuttavia possiamo dire che $f(n)$ è in $\mathrm{O}(n)$, in quanto:

$$cn \geqslant 3n + 3 \; per \; ogni \; n \geqslant 1 \; se \; c \geqslant 6$$
$$Esempio:$$
$$n = 1 \; e \; c = 6$$
$$6(1) \geqslant 3(1) + 3$$

- Sia $f(n) = n^2 + 4n$, tale che $f(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n^2))$ in quanto:

$$cn^2 \geqslant n^2 + 4n \; per \; ogni \; n \; se \; c \geqslant 5$$
$$Esempio:$$
$$n = 1 \; e \; c = 5$$
$$5(1^2) \geqslant 1^2 + 4(1)$$

Possiamo subito notare che nel primo esempio con un polinomio di primo grado abbiamo concluso sia in $\mathrm{O}(n)$, mentre nel secondo esempio con un polinomio di secondo grado sia in $\mathrm{O}(n^2)$. Per questo possiamo generalizzare la cosa nel seguente teorema:

📌 ***TEOREMA DELLA NOTAZIONE ASINTOTICA O GRANDE:***

Sia $f(n)$ un polinomio di grado m, definito matematicamente come:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot n^i = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + ... + a_m \cdot n^m$$

allora possiamo concludere che $f(n)$ è in $\mathrm{O}(n^m)$.

Adesso proviamo a dimostrare questo teorema tramite induzione:

📎 ***ESEMPIO TEOREMA DELLA NOTAZIONE ASINTOTICA O GRANDE:***

- **Caso base**: Abbiamo $m = 0$, per cui $f(n) = a_0 \cdot n^0$, dunque è una funzione costante e di conseguenza è in $\mathrm{O}(n^0)$;
- **Ipotesi induttiva**: Affermiamo che

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i$$

  è un $\mathrm{O}(n^k)$ per ogni $k < m$, cioè esiste una costante c^1 tale che:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i \leq c^1 \cdot n^k$$

- **Passo induttivo**: Dobbiamo dimostrare che:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot n^i \; è \; in \; \mathrm{O}(n^m)$$

  cioè che esiste una costante c tale che:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot n^i \leq c \cdot n^m$$

  Si osservi che $f(n)$ si può scrivere come:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot n^i = a_m \cdot n^m + \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i = a_m \cdot n^m + h(n)$$

  con $k < m$ e che , per ipotesi induttiva

$$h(n) \leq c^{\prime} \cdot n^k$$

  Ora:

$$f(n) = a_m \cdot n^m + h(n) \leq a_m \cdot n^m + c^{\prime} \cdot n^k \leq a_m \cdot n^m + c^{\prime} \cdot n^m$$

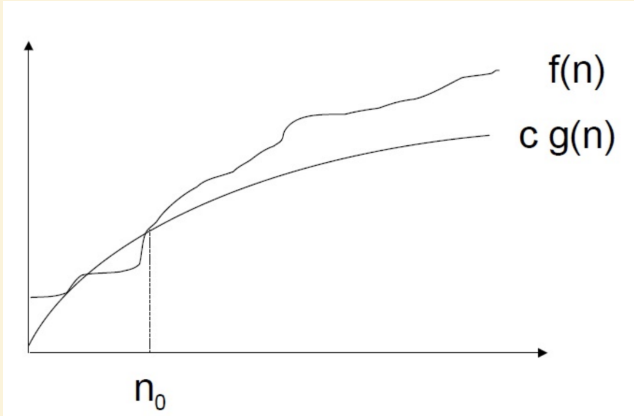
  Ponendo $c = c^1 + a_m$ si ha la tesi.

2.2 Notazione Omega

La notazione Omega, molto semplicemente fa l'opposto della Notazione O grande ossia definisce un limite inferiore.

✏️ ***DEFINIZIONE DI NOTAZIONE OMEGA:***

Date due funzioni $f(n), g(n) \geqslant 0$ si dice che $f(n) = \Omega(g(n))$se esiste un valore $c > 0$ tale che $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$ per ogni $n \geqslant n_0$:



In $\Omega(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che dominano la funzione $g(n)$.

Per capire meglio, quindi, Omega(Ω) molto semplicemente va a definire un limite inferiore asintotico che va a limitare la funzione $f(n)$ quando la costante n_0 ,dove $n \to +\infty$, supera un certo valore.

In questo modo essa rimarrà sempre sotto la funzione $c \cdot g(n)$ (dunque viene “dominata” da essa).

📎 ***ESEMPIO DI NOTAZIONE OMEGA:***

Sia $f(n) = 2n^2 + 3$, $f(n)$ è in $\Omega(n)$ in quanto:

$$2n^2 + 3 \geqslant cn \; per \; qualunque \; n \; se \; c = 1 \\ Esempio: \\ n = 1 \; e \; c = 1 \\ 2(1^2) + 3 \geqslant 1(1)$$

Tuttavia $f(n)$ è anche in $\Omega(n^2)$ in quanto:

$$2n^2 + 3 \geqslant cn^2 \; per \; ogni \; n \; se \; c \leq 2 \\ Esempio: \\ n = 1 \; e \; c = 2 \\ 2(1^2) + 3 \geqslant 1(1)$$

Tuttavia $f(n)$ è anche $\Omega(n^2)$ in quanto:

$$2n^2 + 3 \geqslant cn^2 \; per \; ogni \; n \; se \; c \leq 2 \\ Esempio: \\ 2(1^2) + 3 \geqslant 2(1)$$

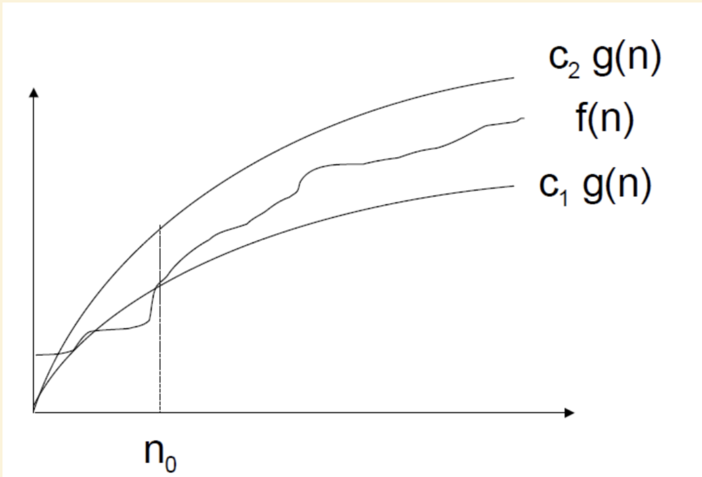
La dimostrazione che $f(n)$ è in $\Omega(n^m)$ è analoga alla dimostrazione che $f(n)$ è in $\mathrm{O}(n^m)$ e perciò viene lasciata come esercizio.

2.3 Notazione Theta

Avendo le definizioni di O grande e Omega, possiamo dare la definizione anche di Notazione Theta:

✏️ ***DEFINZIONE DI NOTAZIONE THETA:***

Date 2 funzioni $f(n), g(n) \geqslant 0$ si dice che $f(n) = \Theta(g(n))$ se esistono 2 valori $c_1 > 0\ e\ c_2 > 0$ tali che $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ per ogni $n \geqslant n_0$.



Dunque se $f(n)$ è sia in $\mathrm{O}(g(n))$ sia $\Omega(g(n))$, allora è anche in $\Theta(g(n))$.

La notazione Theta, quindi, rappresenta il limite stretto asintotico della funzione: una volta superata una certa n, la funzione $f(n)$ si comporta come $g(n)$.

📎 ***ESEMPIO DI NOTAZIONE THETA:***

Sia $f(n) = 2n^2 - 5n + 5$, $f(n)$ è in $\Theta(n^2)$ ponendo ad esempio $c_1 = 1\ e\ c_2 = 3\ e\ n = 1$, così avremo:

$$0 \leq 1(1^2) \leq 2(1^2) - 5(1) + 5 \leq 3(1^2)$$

2.4 Calcolo della notazione asintotica tramite limiti

Per determinare i limiti asintotici di 2 funzioni $f(n)\ e\ g(n)$ si utilizza il metodo del limite del rapporto $f(n)/g(n)$:

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è 0, allora la funzione $f(n)$ è $\mathrm{O}(g(n))$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f(n) = \mathrm{O}(g(n))$$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è infinito, allora la funzione $f(n)$ è $\Omega(g(n))$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ tende a un numero finito k, allora la funzione $f(n)$ è $\Theta(g(n))$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k \Leftrightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

> ⚠️ ***ATTENZIONE:***
>
> Ovviamente, quando il limite non esiste, questo metodo non si può usare e bisogna procedere diversamente.

2.2 Algebra della notazione asintotica

Oltre al modo appena visto, ossia l'uso dei limiti, per semplificare il calcolo del costo computazionale asintotico degli algoritmi si possono utilizzare 3 regole algebriche:

- Regola delle costanti moltiplicative;
- Regola della commutatività con somma;
- Regola della commutatività con prodotto.

2.2.1 Regole delle costanti moltiplicative

> ✏️ ***PRIMA REGOLA DELLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:***
>
> Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geqslant 0$, se $f(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n))$.

Adesso che abbiamo la definizione della prima regola proviamo a dimostrarla:

> 🔍 ***DIMOSTRAZIONE PRIMA REGOLA DELLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:***
>
> Per ipotesi $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ quindi esistono 2 costanti c e n_0 tali che:
>
> $$f(n) \leq c \cdot g(n) \ per\ ogni\ n \geq n_0$$
>
> Ne segue che:
>
> $$k \cdot f(n) \leq k \cdot c \cdot g(n)$$

Questo prova che, prendendo $k \cdot c$ come nuova costante $c^{\prime}$ e mantendo lo stesso n_0, $k \cdot f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$.

> ✏️ ***SECONDA REGOLA DELLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:***
>
> Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geq 0$, se $f(n)$ è in $\Omega(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è in $\Omega(g(n))$.

Adesso che abbiamo la definizione della seconda regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE SECONDA REGOLA DELLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:***

Per ipotesi $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ quindi esistono 2 costanti c e n_0 tali che:

$$c \cdot g(n) \leq f(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0$$

Ne segue che:

$$k \cdot c \cdot g(n) \leq k \cdot f(n)$$

Questo prova che, prendendo $k \cdot c$ come nuova costante c^{I} e mantenendo lo stesso n_0, $k \cdot f(n) \in \Omega(g(n))$.

✏️ ***TERZA REGOLA DELLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:***

Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geq 0$, se $f(n)$ è in $\Theta(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è in $\Theta(g(n))$.

Adesso che abbiamo la definizione della seconda regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE TERZA REGOLA DELLE COSTANTI MOLTIPLICATIVE:***

Per ipotesi $f(n) \in \Theta(g(n))$ quindi esistono 3 costanti $c_1, c_2 \; e \; n_0$ tali che:

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0$$

Ne segue che:

$$k \cdot c \cdot g(n) \leq k \cdot c \cdot f(n) \leq k \cdot c \cdot g(n)$$

Questo prova che, prendendo $k \cdot c_1 \; e \; k \cdot c_2$ come nuove costanti c_1^{I} e c_2^{II} e mantendo lo stesso n_0, $k \cdot f(n) \in \Theta(g(n))$.

In modo informale, quindi, possiamo dire che le costanti moltiplicative possono essere ignorate durante il calcolo di un qualsiasi limite asintotico.

⚠️ ***ATTENZIONE:***

Da precisare il fatto che la costante moltiplicativa non sia all'esponente della funzione:

> 📎 ***ESEMPIO DI ERRORE:***
>
> Per esempio nella seguente funzione:
>
> $$f(n) = 2^{k \cdot n}$$
>
> Non possiamo ignorare la k.

2.2.2 Regole sulla commutatività con la somma

✏️ ***PRIMA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ CON LA SOMMA:***

Per ogni $f(n), d(n) > 0$, se $f(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n))$ e $d(n)$ è in $\mathrm{O}(h(n))$ allora $f(n) + d(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n) + h(n)) = \mathrm{O}(max(g(n), h(n)))$.

Adesso che abbiamo la definizione della prima regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE PRIMA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ CON LA SOMMA:***

Se $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ e $d(n) \in \mathrm{O}(h(n))$ allora esistono 4 costanti: c^{I} e c^{II}, n_0^{I} e n_0^{II} tali che:

$$f(n) \leq c^{\mathsf{I}} \cdot g(n) \ per\ ogni\ n \geq n_0^{\mathsf{I}}\ e\ d(n) \leq c^{\mathsf{II}} \cdot h(n)\ per\ ogni\ n \geq n_0^{\mathsf{II}}$$

allora:

$$f(n) + d(n) \leq c^{\mathsf{I}} \cdot g(n) + c^{\mathsf{II}} \cdot h(n) \leq max(c^{\mathsf{I}}, c^{\mathsf{II}})(g(n) + h(n))\ per\ ogni\ n \geq max(n_0^{\mathsf{I}}, n_0^{\mathsf{II}})$$

Da ciò segue che $f(n) + d(n) \in \mathrm{O}(g(n) + h(n))$.

Infine:

$$max(c^{\mathsf{I}}, c^{\mathsf{II}})(g(n) + h(n)) \leq 2 \cdot max(c^{\mathsf{I}}, c^{\mathsf{II}}) \cdot max(g(n)h(n))$$

Ne segue che $f(n) + d(n) \in \mathrm{O}(max(g(n), h(n))$.

✏️ ***SECONDA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ CON LA SOMMA:***

Per ogni $f(n), d(n) > 0$, se $f(n)$ è in $\Omega(g(n))$ e $d(n)$ è in $\Omega(h(n))$ allora $f(n) + d(n)$ è in $\Omega(g(n) + h(n)) = \Omega(max(g(n), h(n)))$.

Adesso che abbiamo la definizione della regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE SECONDA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ CON LA SOMMA:***

Se $f(n) \in \ \Omega(g(n))$ e $d(n) \in \ \Omega(h(n))$ allora esistono 4 costanti: c^{I} e c^{II}, n_0^{I} e n_0^{II} tali che:

$$c^{\text{I}} \cdot g(n) \leq f(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0^{\text{I}} \; e \; c^{\text{II}} \cdot h(n) \leq d(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0^{\text{II}}$$

allora:

$$c^{\text{I}} \cdot g(n) + c^{\text{II}} \cdot h(n) \leq max(c^{\text{I}}, c^{\text{II}})(g(n) + h(n)) \leq f(n) + d(n) \; per \; ogni \; n \geq max(n_0^{\text{I}}, n_0^{\text{II}})$$

Da ciò segue che $f(n) + d(n) \in \Omega(g(n) + h(n))$.

Infine:

$$max(c^{\text{I}}, c^{\text{II}})(g(n) + h(n)) \leq 2 \cdot max(c^{\text{I}}, c^{\text{II}}) \cdot max(g(n)h(n))$$

Ne segue che $f(n) + d(n) \in \Omega(max(g(n), h(n))$.

✏️ ***TERZA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ CON LA SOMMA:***

Per ogni $f(n), d(n) > 0$, se $f(n)$ è in $\Theta(g(n))$ e $d(n)$ è in $\Theta(h(n))$ allora $f(n) + d(n)$ è in $\Theta(g(n) + h(n)) = \Theta(max(g(n), h(n)))$.

Adesso che abbiamo la definizione della regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE SECONDA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ CON LA SOMMA:***

Se $f(n) \in \ \Theta(g(n))$ e $d(n) \in \ \Theta(h(n))$ allora esistono 6 costanti: c^{I}, c^{II}, c^{III} e c^{IV}, n_0^{I} e n_0^{II} tali che:

$$c^{\text{I}} \cdot g(n) \leq f(n) \leq c^{\text{II}} \cdot g(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0^{\text{I}} \; e \; c^{\text{III}} \cdot h(n) \leq d(n) \leq c^{\text{IV}} \cdot h(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0^{\text{II}}$$

allora:

$$c^{\text{I}} \cdot g(n) + c^{\text{II}} \cdot h(n) \leq max(c^{\text{I}}, c^{\text{II}})(g(n) + h(n)) \leq f(n) + d(n) \; per \; ogni \; n \geq max(n_0^{\text{I}}, c_0^{\text{II}}) \; e \; f(n) + d$$

Da ciò segue che $f(n) + d(n) \in \ \Theta(g(n) + h(n))$.

Infine:

$$max(c^{\text{I}}, c^{\text{II}})(g(n) + h(n)) \leq 2 \cdot max(c^{\text{I}}, c^{\text{II}}) \cdot max(g(n)h(n)) \; e \; max(c^{\text{III}}, c^{\text{IV}})(g(n) + h(n)) \leq 2 \cdot max($$

Ne segue che $f(n) + d(n) \in \Theta(max(g(n), h(n))$.

Informalmente possiamo dire che le notazioni asintotiche mutano con l'operazione di somma.

2.2.3 Regole sulla commutatività col prodotto

✏️ ***PRIMA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ COL PRODOTTO:***

Per ogni $f(n), d(n) > 0$, se $f(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n))$ allora $f(n) \cdot d(n)$ è in $\mathrm{O}(g(n) \cdot h(n))$.

Adesso che abbiamo la definizione della regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE PRIMA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ COL PRODOTTO:***

Se $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))\ e\ d(n) \in \mathrm{O}(h(n))$, allora esistono 4 costanti:c^{I} e c^{II}, n_0^{I} e n_0^{II} tali che:

$$f(n) \le c^{I} \cdot g(n)\ per\ ogni\ n \ge n_0^{I}\ e\ d(n) \le c^{II} \cdot h(n)\ per\ ogni\ n \ge n_0^{II}$$

allora:

$$f(n) \cdot d(n) \le c^{I} \cdot c^{II} \cdot g(n) \cdot h(n)\ per\ ogni\ n \ge max(n_0^{I}, n_0^{II})$$

Da ciò segue che $f(n) \cdot d(n) \in \mathrm{O}(g(n) \cdot h(n))$.

✏️ ***SECONDA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ COL PRODOTTO:***

Per ogni $f(n), d(n) > 0$, se $f(n)$ è in $\Omega(g(n))$ allora $f(n) \cdot d(n)$ è in $\Omega(g(n) \cdot h(n))$.

Adesso che abbiamo la definizione della regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE SECONDA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ COL PRODOTTO:***

Se $f(n) \in \Omega(g(n))\ e\ d(n) \in \Omega(h(n))$, allora esistono 4 costanti:c^{I} e c^{II}, n_0^{I} e n_0^{II} tali che:

$$c^{I} \cdot g(n) \le f(n)\ per\ ogni\ n \ge n_0^{I}\ e\ c^{II} \cdot h(n) \le d(n)\ per\ ogni\ n \ge n_0^{II}$$

allora:

$$c^{I} \cdot c^{II} \cdot g(n) \cdot h(n) \le f(n) \cdot d(n)\ per\ ogni\ n \ge max(n_0^{I}, n_0^{II})$$

Da ciò segue che $f(n) \cdot d(n) \in \Omega(g(n) \cdot h(n))$.

✏️ ***TERZA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ COL PRODOTTO:***

Per ogni $f(n), d(n) > 0$, se $f(n)$ è in $\Theta(g(n))$ allora $f(n) \cdot d(n)$ è in $\Theta(g(n) \cdot h(n))$.

Adesso che abbiamo la definizione della regola proviamo a dimostrarla:

🔍 ***DIMOSTRAZIONE TERZA REGOLA SULLA COMMUTATIVITÀ COL PRODOTTO:***

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $d(n) \in \Theta(h(n))$, allora esistono 4 costanti: c^{I}, c^{II}, c^{III} e c^{IV}, n_0^{I} e n_0^{II} tali che:

$$c^{\text{I}} \cdot g(n) \leq f(n) \leq c^{\text{II}} \cdot g(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0^{\text{I}} \; e \; c^{\text{III}} \cdot h(n) \leq d(n) \leq c^{\text{IV}} \cdot h(n) \; per \; ogni \; n \geq n_0^{\text{II}}$$

allora:

$$c^{\text{I}} \cdot c^{\text{II}} \cdot g(n) \cdot h(n) \leq f(n) \cdot d(n) \leq c^{\text{III}} \cdot c^{\text{IV}} \cdot g(n) \cdot h(n) \; per \; ogni \; n \geq max(n_0^{\text{I}}, n_0^{\text{II}})$$

Da ciò segue che $f(n) \cdot d(n) \in \Theta(g(n) \cdot h(n))$.

Informalmente possiamo dire che le notazioni cambiano con l'operazione di prodotto.

Ora che abbiamo visto tutte le regole algebriche della notazione asintotica andiamo a vedere qualche esempio sulla loro applicazione.

📎 ***ESEMPIO REGOLE ALGEBRICHE DELLA NOTAZIONE ASINTOTICA 1:***

Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 3n2^n + 4n^4$:

$$3n2^n + 4n^4 = \Theta(n2^n) + \Theta(n^4) = \Theta(n2^n) \rightarrow Perché \; è \; il \; max \; tra \; i \; due.$$

ESEMPIO REGOLE ALGEBRICHE DELLA NOTAZIONE ASINTOTICA 2:

Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 3n^2 + 7$:

$$3n^2 + 7 = \Theta(n^2)$$

ESEMPIO REGOLE ALGEBRICHE DELLA NOTAZIONE ASINTOTICA 3:

Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 2^{2n}$:

$$2^{2n} = 2^n \cdot 2^n = \Theta(2^n) \cdot \Theta(2^n) = \Theta(2^{2n})$$