Successioni e Serie numeriche

▼ ***INDICE***

1 Successioni e serie numeriche

Con successione intendiamo l'insieme dei valori assunti da una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \longmapsto a_n$. Tale insieme, andrebbe scritto come:

$$a = \{a(1), a(2), a(3), ..., a(n)\}$$

per questioni di praticità però è molto più comodo usare la seguente notazione:

$$a_n = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$$

dove il numero che si trova in pedice si chiama indice di successione.

📎 ***ESEMPI DI SUCCESSIONI:***

- Se $a_n = 2^n$ allora $a_n = 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n$;
- Se $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}$.

Immaginiamo di voler calcolare la somma dei numeri naturali. Essa è ben definita dalla seguente proprietà:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Nel caso dove i termini da sommare sono illimitati, come possiamo sapere il risultato finale della somma? In questo caso viene in nostro aiuto la serie numerica.

✏️ ***DEFINIZIONE DI SERIE NUMERICA:***

Data una successione di termine generico a_k, si dice numerico la "somma infinita" dei suoi termini.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.1 Serie Convergenti e Divergenti

Le serie numeriche possono assumere varie proprietà, per esempio:

📎 ***ESEMPI SULLE PROPRIETÀ DELLE SERIE NUMERICHE:***

1. Vediamo la seguente successione: se $a_n = 0$, allora:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 0$$

Cosa accade a questa serie considerando $n \to +\infty$? Nulla, essendo una funzione costante il risultato sarà sempre 0:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

2. Consideriamo ora invece la seguente successione:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

I primi termini della serie sono i seguenti:

- $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$
- $S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$
- $S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$
- ...

Dunque, il limite per $n \to +\infty$ di questa serie sarà:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k(k+1)}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

In entrambi gli esempi appena mostrati tutte e due le serie tendono ad numero finito, per $n \to +\infty$, ed in questo caso si parla di serie convergenti.

✏️ ***DEFINIZIONE DI SERIE CONVERGENTE:***

Una successione delle somme parziali S_n si dice convergente se il limite per n che tende a $+\infty$ converge ad un valore l(ossia finito):

$$lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = l$$

Ora proviamo ad analizzare queste due ulteriori serie:

📎 ***ESEMPI SULLE PROPRIETÀ DELLE SERIE NUMERICHE:***

1. Sia data la successione costante $a_k = 1$.Vediamo come si comporta nelle sue prime serie parziali:
   - $S_0 = 1$
   - $S_1 = 1 + 1 = 2$
   - $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$
   - ...

   Notiamo subito che:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = n + 1 = +\infty$$

2. Determinare se la seguente successione ammette limite a $+\infty$:

$$a_k = \frac{k}{100}$$

   I primi termini della serie sono:
   - $S_1 = \frac{1}{100} = 0.01$
   - $S_2 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} = 0.03$
   - $S_3 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} = 0.06$
   - ...

   Il limite della serie è infinito per n che tende a $+\infty$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{100} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{100} = +\infty$$

Come possiamo vedere da questi due esempi entrambi non ammettono un limite finito, perché tutti e due tendono a $+\infty$ e in questo caso si parla di serie divergente.

✏️ ***DEFINIZIONE DI SERIE DIVERGENTE:***

Una successione delle somme parziali S_n si dice divergente se il limite per n che tende a infinito diverge ad un valore $+\infty(\ o \ -\infty \ )$:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty(\ o \ -\infty \ )$$

⚠️ ***ATTENZIONE:***

Ricorda che se una serie non converge, non è detto che essa sia divergente, per esempio:

📎 ***ESEMPIO:***

Consideriamo la serie della seguente successione $a_n = (-1)^n$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

- $S_1 = 1$
- $S_2 = 1 - 1 = 0$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- ...

Notiamo quindi che:

$$S_n = \begin{cases} 1 \ se \ n \ è \ pari \\ 0 \ se \ n \ è \ dispari \end{cases}$$

Dunque tale serie per $n \to +\infty$ non è né convergente ad un limite finito l né divergente a $+\infty$($o \ -\infty$).

1.1 Serie geometrica

La seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k$$

con $q \in \mathbb{R}$ è detta serie geometrica, questa tipologia di serie è particolarmente ricorrente e per valutarne la convergente o meno è sufficiente dare un'occhiata al parametro q, in questo modo:

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^k$$

Avendo questo possiamo dimostrare che se $q \neq 1$ la somma della successione riportata sopra sarà $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, mentre nel caso in cui $q = 1$ allora diventa semplicemente $n + 1$, visto che tutti i termini diventano singolarmente uguali a 1, quindi:

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ se \ q \neq 1 \\ n+1 \ se \ q = 1 \end{cases}$$

Adesso per capire se la serie converge, diverge oppure è indeterminata, sarà sufficiente fare il limite per $n \to +\infty$ della successione delle somme parziali, sfruttando la definizione data in precedenza, quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \ se \ -1 < q < 1 \\ +\infty \ se \ q \geqslant 1 \\ non \ esiste \ se \ q \leq -1 \end{cases}$$

Quindi dalla seguente definizione possiamo dedurre che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} Convergente (con \ somma \ \frac{1}{1-q}) \ se \ -1 < q < 1 \\ Divergente (+\infty) \ se \ q \geqslant 1 \\ Indeterminata (non \ esiste) \ se \ q \leq -1 \end{cases}$$

Da quanto appena concluso possiamo dare la seguente definizione:

✏️ ***DEFINIZIONE DI SERIE GEOMETRICA:***

La serie geometrica è definita come:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \; se \; q \neq 1 \\ n+1 \; se \; q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \color{red}{Convergente}(con\ somma\ \frac{1}{1-q})\ se\ -1 < q < 1 \\ \color{red}{Divvergente}(+\infty)\ se\ q\ \geqslant 1 \\ \color{red}{Indeterminata}(non\ esiste)\ se\ q \leq -1 \end{cases}$$

Ora che abbiamo la definizione della serie geometrica andiamo a vedere qualche esempio:

📎 ***ESEMPI SULLA SERIE GEOMETRICA:***

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Come si può notare si tratta di una serie geometrica in cui q è uguale ad $\frac{1}{2}$ di conseguenza possiamo subito dedurre che converge essendo q più piccolo di 1(convergente per $-1 < q < 1$) e la somma della serie sarà la seguente:

$$\frac{1}{1-q} \to \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Quindi la somma equivale a 2.

Ora avendo visto un caso abbastanza semplice e intuitivo andiamo a vedere un esempio con proprietà degli esponenziali:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Da qui copiamo che è convergente e la somma sarà:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Adesso proviamo a risolvere un caso con le costanti moltiplicative:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k}$$

A prima vista verrebbe da fare la stessa cosa fatta nel precedente esercizio ossia $\left(\frac{3}{2}\right)^k$, ma non è corretto, in questo caso bisogna avanzare in questo modo:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Fatto questo semplice passaggio ci ritroveremo con un caso simile al precedente e basterà fare:

$$3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6$$

In questo caso sarà di nuovo convergente e la somma sarà 6.

Dagli esempi appena visti avevamo sempre $k = 0$, ma cosa succede se $k > 0$?

Prendiamo per esempio la seguente successione:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Per poter svolgere tale esercizio basta applicare la seguente formula:

$$\sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \cdot \sum_{h=0}^{n-5} q^h$$

Dove nel nostro caso diventerà:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{32} \cdot 2 = \frac{1}{16}$$

1.2 Serie armonica

Per comprendere la serie armonica prendiamo come esempio la seguente successione:

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Tale successione è detta successione armonica e la sua serie finita corrisponde a:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

Per capire se questa seria converga o diverga bisogna chiedersi cosa accade per S_{n+1}:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \to S_n + \frac{1}{n+1}$$

Quindi:

$$S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$$

Possiamo concludere che per $n \to +\infty$ la serie armonica sia divergente.

1.2.1 Serie armonica generalizzata

Proviamo ora ad usare la serie armonica generalizzata, dove α è un numero reale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

Per capire se converge o diverge bisogna tenere a mente che:

- Converge se $\alpha > 1$;
- Diverge positivamente se $\alpha \leq 1$.

Nel nostro caso:

- Se $\alpha < 1$ abbiamo:

  $$\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$$

  dunque segue che:

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > +\infty$$

  Poiché la serie armonica generalizzata per $\alpha > 1$ è minore di una serie divergente, ne consegue che essa sia divergente.

- Se $\alpha > 1$ abbiamo:

  $$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k}$$

  di conseguenza:

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$$

Poiché la serie armonica generalizzata per $\alpha > 1$ è minore di una serie divergente, ne consegue che essa sia convergente(poiché solo un valore definito può essere minore di $+\infty$)

📖 ***NOTA:***

Con queste dimostrazioni non siamo in grado di dedurre quale sia il valore a cui converge la serie, ma solo che essa converga. Per questo scriviamo $< +\infty$.

Detto questo proviamo dare una definizione alla serie armonica generalizzata:

✏️ ***DEFINIZIONE DI SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:***

La serie armonica generalizzata è definita come:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty \ se \ \alpha \leq 1 \ Diverge \\ < +\infty \ se \ \alpha > 1 \ Converge \end{cases}$$

Ora che abbiamo anche una definizione vediamone qualche esempio:

📎 ***ESEMPI DI SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:***

Facciamo caso di avere la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\pi}$$

Possiamo subito dire che converge perché α, che in questo caso è π, è $\alpha > 1$ e secondo quello detto in precedenza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\pi} < +\infty$$

Ora vediamo un altro caso:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{e}{3}}}$$

In questo caso notiamo subito che diverge perché:

$$\frac{e}{3} < 1$$

quindi secondo la definizione detta prima:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{e}{3}}} = +\infty$$

1.3 Condizioni, teoremi e criteri di convergenza

Adesso andremo a vedere una serie di condizioni, teoremi, criteri e altre regole che ci permetteranno di capire se una serie converge o diverge senza l'uso di calcoli.

1.3.1 Condizioni per la convergenza di una serie

Prendiamo in considerazione la seguente serie convergente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l, l \in \mathbb{R}$$

come ben sappiamo, l'espressione si tradurrà in:

$$l = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Avendo stabilito che $n \to \infty$ allora $S_n \to l$. Di conseguenza, lo stesso deve valere anche per s_{n+1}, quindi:

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = a_{n+1}$$
$$0 - 0 = a_n + 1$$
$$a_{n+1} = 0$$

Quindi riformulando ciò che abbiamo appena fatto:

📌 ***TEOREMA CONDIZIONE DI CONVERGENZA:***

Se una serie è convergente per $n \to \infty$, allora $a_k \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \to 0$$

⚠️ ***ATTENZIONE:***

La condizione $\implies$(se…allora) impone che solo se la prima condizione è vera allora anche la seconda deve esserlo(non il contrario).

Se la seconda condizione è negata(ossia a_k non tende a 0), allora anche la prima è necessaria che lo sia, per esempio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Calcoliamo il limite di a_k per $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})} = 1$$

Avendo come risultato $a_k \neq 0$, è impossibile che la serie converga

📌 ***TEOREMA NEGAZIONE DELLA CONDIZIONE DI CONVERGENZA:***

Se per $n \to +\infty$ esce che $a_k \nrightarrow 0$(non tende a 0), allora la serie non può convergere:

$$a_k \nrightarrow 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ non \ è \ convergente$$

1.3.2 Serie a termine di segno costante

📌 TEOREMA SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE:

Se $a_k \geq 0$ allora la serie converge oppure diverge positivamente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < +\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Se $a_k \leq 0$ allora la serie converge oppure diverge negativamente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < -\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Proviamo ora a vedere un esempio utilizzando i teoremi appena visti:

📎 ***ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEI TEOREMI VISTI FINO AD ORA:***

Consideriamo la seguente serie:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Proviamo a stabilire se converge o meno senza l'ausilio dei calcoli:

1. Sappiamo che si tratta di una serie a termini positivi perché $a_k \geq 0$, quindi può solo convergere o divergere;
2. Il limite a_k per $n \to \infty$ sappiamo che è 1, ed essendo che $a_k \nrightarrow 0$ la serie non può convergere;
3. Facendo il resoconto, sappiamo che o diverge o converge e che $a_k \nrightarrow 0$ quindi non può convergere, di conseguenza la serie è divergente.

1.2.3 Criterio del confronto

Sappiamo di avere 2 successioni, ossia $a_n \ e \ b_n$ che rispettano definitivamente la condizione $0 \leq a_n \leq b_n$, allora valgono le seguenti implicazioni:

- Se la serie $\sum b_n$ converge allora converge anche la serie $\sum a_n$;
- Se la serie $\sum b_n$ diverge a $+\infty$ allora diverge a $+\infty$ anche la serie $\sum a_n$.

Come possiamo vedere questo criterio a differenza dei precedenti chiama in causa 2 serie, una è la nostra di cui vogliamo dimostrare l'eventuale divergenza o convergenza e l'altra è una seconda serie che utilizziamo come confronto.

Informalmente il criterio quindi ci dice che se riusciamo a vedere che i termini della nostra serie(a_n) sono definitivamente minori o uguali dei termini della seconda serie(b_n) e quest'ultima converge allora possiamo concludere che convergerà anche la nostra, stesso discorso per la convergenza.

📎 ***ESEMPIO CRITERIO DEL CONFRONTO:***

Analizziamo la seguente serie:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin(\frac{1}{k^2})$$

Notiamo subito che $a_k \geq 0$, dunque la serie è convergente o divergente

Andiamo quindi a calcolarci il limite di $a_k \ per \ n \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} sin(\frac{1}{k^2}) = \lim_{k\to\infty} sin(0) = 0$$

📖 NOTA:

Teoricamente con i teoremi visti prima potremmo già dire che la serie è convergente.

Proviamo ora a confrontare la serie con altre due serie secondo la condizione imposta precedentemente($0 \leq a_n \leq b_n$), quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Ovviamente la serie a sinistra è convergente visto che $a_k \to 0$. La serie a destra è una serie armonica generalizzata dove vediamo che α, ossia 2, è $\alpha > 1$ quindi converge:

$$convergente \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq convergente$$

La nostra serie essendo fra 2 serie convergenti convergerà anch'essa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) < +\infty$$

1.2.4 Criterio del confronto asintotico

Date 2 successioni a_n e b_n a termini definitivamente postivi, se sono asintotiche ovvero se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n \; e \; \sum b_n$ hanno lo stesso carattere ovvero, o sono entrambi convergenti oppure sono entrambi divergenti.

Per capire meglio come funziona vediamo subito un esempio:

📎 ***ESEMPIO CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:***

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1$$

Avendo la serie a_n dobbiamo trovare una serie asintotica b_n che in questo caso sarà:

$$e^{\frac{1}{k}} - 1 \sim \frac{1}{k}$$

poiché:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = 1$$

Fatto questo ci ritroveremo con una serie armonica, ossia:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

dove $\alpha \le 1$(in questo caso $\alpha = 1$) quindi è divergente a $+\infty$ di conseguenza lo sarà anche la serie a_n:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 = \; diverge \; a \; +\infty$$

1.4 Criterio del rapporto e Criterio della radice

Per capire meglio come funzionano entrambi i criteri andiamoli a vedere separatamente.

1.4.1 Criterio del rapporto

Supponiamo che le seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \; e \; \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

siano due serie convergenti e che $k \in \mathbb{R}$, allora:

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

2. $$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k = k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

📖 ***NOTA:***

La seconda ci segnala che la presenza di una costante moltiplicativa(k) davanti al termine generale della serie, non modifica il carattere della serie, ossia se la serie di a_n converge allora anche b_n converge(stessa cosa per la divergenza).

Quando si lavora su termini definitivamente non negativi(cioè con $a_k \ge 0$) può solo convergere o divergere a $+\infty$, ma non può essere indeterminata!

Quindi possiamo definire il teorema del criterio del rapporto:

📌 ***TEOREMA CRITERIO DEL RAPPORTO:***

Sia $a_k \geq 0$ definitivamente e supponiamo che:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge;
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge;
- Se $l = 1$ non possiamo dire se la serie diverge o converge.

1.4.2 Criterio della radice

Sostanzialmente i 2 criteri sono simili e di conseguenza anche i teoremi difatti:

📌 ***TEOREMA CRITERIO DELLA RADICE:***

Sia $a_k \geq 0$ definitivamente e supponiamo che:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$$

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge;
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge;
- Se $l = 1$ non possiamo dire se la serie diverge o converge.

Poco fa abbiamo detto che i due criteri sono simili, poiché in base al valore di l entrambe convergono o divergono.

Tuttavia. vi è chiaramente una preferenza situazionale nella scelta del criterio da applicare:

- Se la serie a_k presenta un termine di tipo $k!$ allora conviene utilizzare il criterio del rapporto;
- Se la serie a_k presenta un termine di tipo $x^k, x \in \mathbb{R}$, allora conviene utilizzare il criterio della radice.

Per capire meglio andiamo subito a vedere due esempi sulla loro applicazione:

📎 ***ESEMPI SUI DUE CRITERI:***

1. Applichiamo uno dei due criteri alla seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$$

Essendoci $k!$ bisognerà utilizzare il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k!}{k^2}+1}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k+1} = +\infty \Rightarrow l > 1$$

Visto che $l(+\infty) > 1$ allora la serie diverge.

2. Vediamo subito un altro esempio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Avendo x^k useremo il criterio della radice:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt[k]{k}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow l < 1$$

Avendo $l(\frac{2}{3}) < 1$ la serie converge.

1.4.3 Criterio di Leibniz

Iniziamo subito dando il teorema di Leibniz, ossia:

📌 ***TEOREMA DEL CRITERIO DI LEIBNIZ:***

Sia a_n una successione e supponiamo che:

1. $a_n \geq 0$ definitivamente;
2. $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$;
3. $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n, ossia è una successione costante.

Allora la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n \textit{ è convergente}$$

Per poter utilizzare il criterio le 3 condizioni elencate prima devono essere verificate, se anche una delle condizioni non lo è allora non possiamo più utilizzare il criterio.

Per capire meglio andiamo subito a vedere qualche esempio:

📎 ***ESEMPI CRITERIO DI LEIBNIZ:***

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Andiamo subito a vedere se le 3 condizioni sono verificate:

1. Nel nostro caso a_n è uguale a $\frac{1}{n!}$ che in questo caso è ≥ 0;
2. Andiamo a vedere se $\frac{1}{n!} \to 0$ per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

   Quindi anche questa è verificata.

3. Andiamo ora a calcolare $a_{n+1} \leq a_n$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}$$

   Possiamo dire che è verificata visto che per ogni n a_n sarà comunque maggiore uguale a a_{n+1}.

Quindi la serie è convergente visto che tutte e 3 le condizioni sono verificate.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n-1}{n^2+n}$$

Andiamo subito a vedere se le 3 condizioni sono verificate:

1. Nel nostro caso a_n è uguale a $\frac{n-1}{n^2+n}$ che in questo caso è ≥ 0;
2. Andiamo a vedere se $\frac{n-1}{n^2+n} \to 0$ per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$$

   Quindi anche questa è verificata.

3. Andiamo ora a calcolare $a_{n+1} \leq a_n$:

$$\frac{n}{(n+2)(n+1)} \leq \frac{(n-1)}{n^2+n} \Rightarrow n \cdot n \leq (n-1)(n+2) \Rightarrow n \geq 2 \textit{ quindi converge}$$

1.6 Convergenza assoluta

Iniziamo subito dando il teorema della convergenza assoluta, ossia:

📌 ***TEOREMA DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:***

Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum |a_n|$, quindi se la $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge.

Andiamo a vedere un esempio per capire meglio come funziona:

📎 ***ESEMPIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA:***

Prendiamo come esempio la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n!)}{n^4}$$

Andiamo a vedere se la nostra serie converge per $\sum |a_n|$, usando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sin(n!)}{n^4} \right|$$

$$0 \leq \left| \frac{sin(n!)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sin(n!)}{n^4} \right| converge \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n!)}{n^4} converge$$

1.7 Polinomio di Taylor

Il polinomio di Taylor di una funzione in un punto è la rappresentazione della funzione come serie di termini calcolati a partire dalle derivate della funzione stessa nel punto.

Esso ci permette di approssimare funzioni complesse con funzioni estremamente più semplici.

Più alto è il grado del polinomio, maggiore sarà l'approssimazione.

La formula generica per un qualsiasi grado n del polinomio di Taylor equivale a:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

che possiamo estendere in:

$$T_n(x) = f(x_0) + f^{I}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{II}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Mentre il resto infinitesimale equivale a:

$$R(x; x_0) = \frac{f^{(x+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

Vediamo subito un esempio:

📎 ***ESEMPIO POLINOMIO DI TAYLOR:***

Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine n della funzione $f(x) = e^x$ centrato in $x_0 = 0$:

Prima di tutto dobbiamo calcolare le derivate, quindi:

$$
\begin{gathered}
f(x_0) = e^0 = 1 \\
f^{I}(x_0) = e^0 = 1 \\
f^{II}(x_0) = e^0 = 1 \\
... \\
f^n(x_0) = e^0 = 1
\end{gathered}
$$

Fatto questo andiamo a calcolare il polinomio di Taylor:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{I}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Quindi sostituendo con le derivate calcolate in precedenza:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^n}{n!} \sim e^x$$

Nel esempio precedente utilizzeremo il segno di approssimazione non avendo considerato il resto infinitesimo della differenza tra $f(x)$ e $T(x;x_0)$.

Il vero valore di e^x quindi coincide con:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Possiamo affermare che per $n \to \infty$, la serie di Taylor coincide esattamente con il valore di $f(x)$.

Infatti, se andiamo a calcolare il limite per $n \to \infty$ del resto infinitesimo, vedremo che tende a 0, quindi lo possiamo trasformare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}\xi}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = f^{n+1}\xi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = f^{n+1}\xi \cdot 0 = 0$$

Possiamo quindi dare la definizione di serie di Taylor:

✏️ ***DEFINIZIONE DI SERIE DI TAYLOR:***

Sia $f : [a,b]$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Si definisce come serie di Taylor il polinomio i Taylor $T(x;x_0)$ di ordine n per $n \to \infty$ che coincide esattamente con il valore di $f(x_0)$.

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

📖 ***NOTA:***

Possiamo dire brevemente che il polinomio di Taylor è una approssimazione polinomiale finita della funzione, mentre la serie di Taylor è una somma infinita di potenze del punto di riferimento che rappresenta la funzione in un intervallo di convergenza.

1.7.1 Serie di Taylor notevoli

Andiamo ora a vedere una lista di serie di Taylor notevoli che sarà comodo ricordare:

- Sviluppo di Taylor della funzione esponenziale:

  Lo abbiamo calcolato in precedenza è sappiamo che:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + \frac{x^k}{k!} + o(x^k) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

  che in forma compatta sarà:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

- Sviluppo di Taylor del coseno:

  Dopo aver calcolato le derivate avremo:

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - ... + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

  che in forma compatta sarà:

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

- Sviluppo di Taylor del seno:

  Dopo aver calcolato le derivate avremo:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + ... + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

  che in forma compatta sarà:

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

- Sviluppo di Taylor della funzioni razionale$\left(\frac{1}{1+x}\right)$:

  Dopo aver calcolato le derivate avremo:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^k \cdot x^k \;\; \forall x \in (-1;1)$$

  che in forma compatta sarà:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k \;\; \forall x \in (-1;1)$$

- Sviluppo di della funzione razionale$\left(\frac{1}{1-x}\right)$:

  Dopo aver calcolato le derivate avremo:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k \;\; \forall x \in (-1;1)$$

  che in forma compatta sarà:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \;\; \forall x \in (-1;1)$$

- Sviluppo di Taylor della funzione logaritmica:

  Dopo aver calcolato le derivate avremo:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^k \cdot x^{k+1}}{k+1!} + o(x^k) \;\; \forall x \in (-1;1)$$

  che in forma compatta sarà:

$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{k+1}}{k+1!} \;\; \forall x \in (-1;1)$$

- Sviluppo di Taylor della funzione arcotangente:

  Dopo aver calcolato le derivate avremo:

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^k \cdot x^{2(k)+1}}{2k+1!} \;\; \forall x \in (-1;1)$$

  che in forma compatta sarà:

$$arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2(k)+1}}{2k+1!} \;\; \forall x \in (-1;1)$$

1.7.2 Principio di sostituzione e calcolo delle derivate

Come nel polinomio di Taylor, anche per la serie di Taylor vale il principio di sostituzione.

Ad esempio se volessimo calcolare la serie di Taylor di e^{x^2}, ci basterebbe porre $t = x^2$ per trasformare la funzione e^t.

Fatto questo saremo in grado di calcolare la sommatoria di questa funzione:

$$e^{x^2} = e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

Poiché il polinomio di Taylor viene calcolato utilizzando le derivate stesse della funzione. è possibile calcolare il valore della derivata k-esima nel punto $x_0 = 0$, ossia $f^{(k)}(0)$, calcolando tra il termine a_k della serie e $k!$:

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

📎 ***ESEMPIO CALCOLO DELLE DERIVATE:***

Prendiamo come esempio la seguente funzione:

$$f(x) = x^3 \cdot sin(x^3)$$

- Se ne calcoli la corrispondente serie di Taylor:

$$t = x^3$$
$$t \cdot sin(t)$$
$$t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^3)^{2k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!}$$

- Si calcoli valore di $f^{\text{II}}(0)$:

  Il termine di grado 2 non esiste all'interno della serie:

$$f^{\text{II}}(0) = a_2 \cdot 2! = 0$$

- Si calcoli valore di $f^{\text{VI}}(0)$:

$$f^{\text{VI}}(0) = a_6 \cdot 6! = \frac{1}{1!} \cdot 6! = 6!$$

1.8 Serie di potenze

La serie di potenze sono una generalizzazione delle Serie di Taylor.

✏️ ***DEFINIZIONE SERIE DI POTENZE:***

Con serie di potenze, ci andiamo a riferire ad una serie che assume la seguente forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

dove a_k è una successione di numeri reali, detta successione di coefficienti, mentre x_0 è detto centro della serie.

Vediamone qualche esempio:

📎 ***ESEMPI SERIE DI POTENZE:***

Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Successione di coefficienti:

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

- Centro:

$$x_0 = 0$$

In questo caso è 0 perché abbiamo solo x^k e non essendoci corrisponderà a 0.

Indicare la successione di coefficienti ed il centro delle seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2+1}$$

- Successione di coefficienti:

$$a_k = \frac{1}{k^2+1}$$

- Centro:

$$x_0 = 3$$

1.8.1 Raggio di convergenza di una serie di potenze

Definiamo come prima cosa il teorema di un Intervallo di convergenza, ossia:

📌 ***TEOREMA INTERVALLO DI CONVERGENZA:***

Sia P una serie di potenze e sia x_0 il suo centro:

- Se P converge in x_1 dove $x_1 \neq x_0$, allora essa converge $\forall x \in [x_0, x_1]$;
- Se P non converge in x_1, dove $x_1 \neq x_0$, allora essa non converge $\forall x > x_1$.

Data una definizione di intervallo di convergenza della serie, possiamo dare una definizione di raggio di convergenza della serie:

✏️ ***DEFINIZIONE DI CONVERGENZA DELLA SERIE:***

Sia P una serie di potenze e sia x_0 il suo centro.

Esiste un valore R chiamato raggio di convergenza della serie per cui vale che:

- P converge se $|x - x_0| < R$;
- P non converge se $|x - x_0| > R$;
- La convergenza di P è ignota se $|x - x_0| = R$, dunque è necessario analizzarla separatamente.

📖 ***NOTA:***

R può essere $0, +\infty$ o un valore in $(0, +\infty)$.

Avendo una serie notevole calcolare R è molto semplice, andiamo a vedere perché:

📎 ***ESEMPIO DI RAGGIO CON SERIE NOTEVOLI:***

Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Centro:

$$x_0 = 0$$

- Raggio:

$$R = +\infty$$

- Intervallo di convergenza:

$$E = \mathbb{R}$$

Questo perché se andiamo a rivedere le serie notevoli di Taylor $e^x \forall x \in \mathbb{R}$.

Invece il modo per saper calcolare il raggio di convergenza di qualsiasi serie dobbiamo attuare il seguente teorema, detto anche criterio della radice:

📌 ***TEOREMA CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA:***

Se P è una serie di potenze. Esiste un valore l equivalente a:

$$l = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Tale che:

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < +\infty \end{cases}$$

Prima di vedere qualche esempio bisogna introdurre un importante teorema, ossia il Teorema di Abel:

📌 ***TEOREMA DI ABEL:***

Una serie di potenze avendo raggio di convergenza $R \geq 0$. Il teorema di Abel dice:

- Se la serie converge puntualmente in $x_0 + R$ allora essa convergerà uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(x_0 - R, x_0 + R]$;
- Se la serie converge puntualmente in $x_0 - R$ allora essa convergerà uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $[x_0 - R, x_0 + R)$;
- Se la serie converge puntualmente in $x_0 - R$ e $x_0 + R$ allora essa convergerà uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato in $[x_0 - R, x_0 + R]$.

Andiamo a vedere qualche esempio:

📎 ***ESEMPI CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA:***

Prendiamo come esempio la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{(k+1)(k+2)}$$

- Centro della serie:

  Il centro della serie come visto in precedenza lo vediamo in $(x-x_0)^k$ e in questo caso sarà:

  $$(x-2)^k \to x_0 = 2$$

- Raggio della serie:

  In questo caso basterà adottare ciò detto prima ossia:

  $$l = \lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+2)}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+3)}{(k+1)} = 1$$

  Quindi R sarà uguale a:

  $$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{1} = 1$$

Come possiamo vedere $R \geq 0$ quindi secondo il teorema di Abel:

- $x_0 + R = 2 + 1 = 3$

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-2)^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(1)^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

  In questo caso per vedere se converge o meno andremo ad usare il teorema del confronto asintotico dove:

  $$\frac{1}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k^2}$$

  perché il limite tende ad 1:

  $$\lim_{k\to+\infty} = \frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{1}{k^2}} = 1$$

  Visto che $\frac{1}{k^2}$ converge(è una serie armonica e $\alpha(2) > 1$ quindi converge) allora anche la nostra serie convergerà.

  Quindi $x_0 + R$ converge.

- $x_0 - R = 2 - 1 = 1$

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-2)^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}$$

  In questo caso useremo per vedere se converge useremo il criterio di Leibniz:

  - $a_n = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \geq 0$;
  - Vediamo anche che tende a 0:

    $$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 0$$

  - Andiamo a verificare che $a_{k+1} \leq a_k$:

    $$\frac{1}{(k+2)(k+3)} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

    Avendo verificato anche questa possiamo dire che converge.

Quindi l'insieme di convergenza della serie sarà $[1, 3]$.