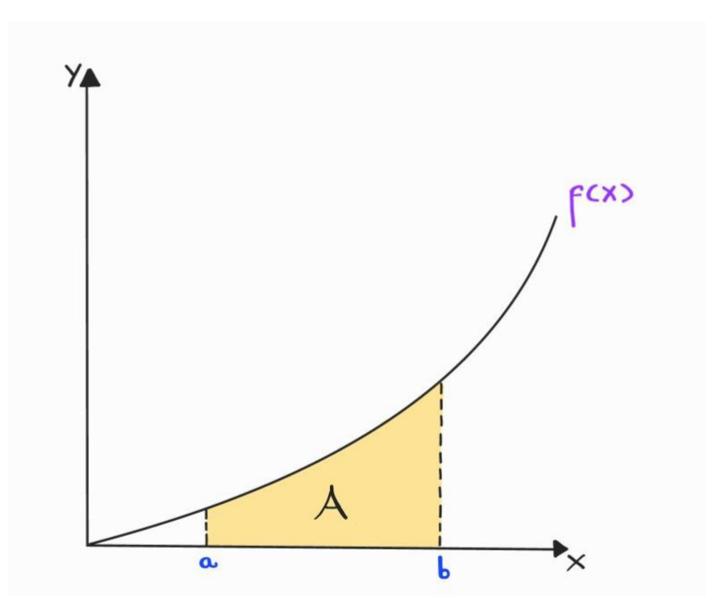
Integrali

▼ ***INDICE***

0 Introduzione

Per capire cosa intendiamo con integrale di una funzione immaginiamo di voler calcolare l'area della figura sottostante alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.



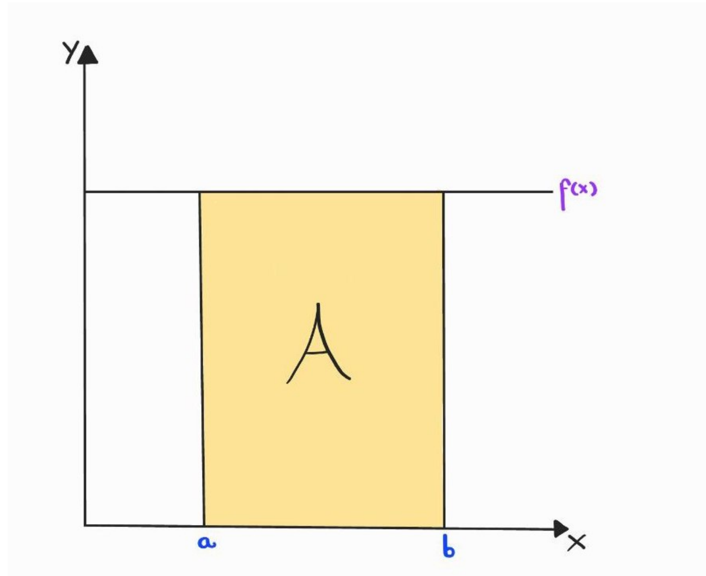
Dove abbiamo $f(x)$ che è la nostra funzione integranda, e gli intervalli(zona) di integrazione a e b.

Noi tramite l'integrale andremo a calcolare l'area della figura rappresentata sotto la funzione quindi:

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Dove A è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $f(x)$, l'asse x, a e b.

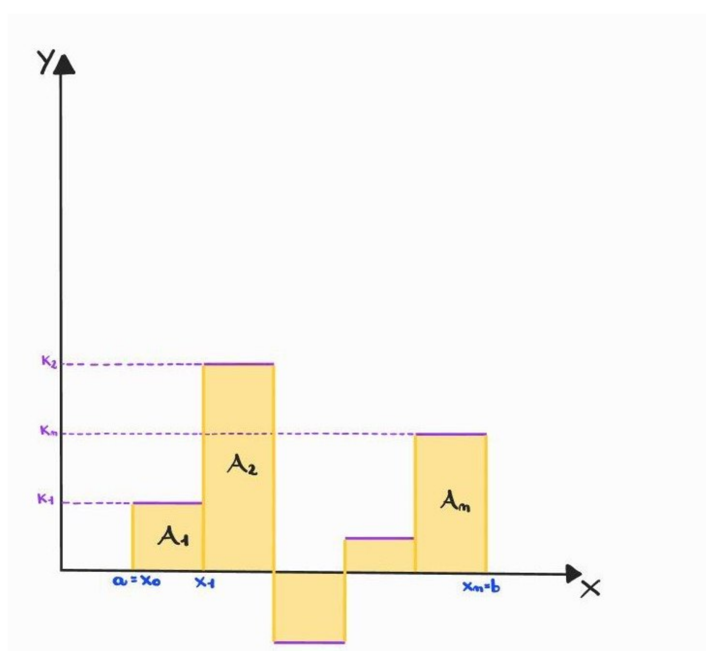
Proviamo ora a vedere un caso dove abbiamo però una funzione costante che valga sempre k(quindi ha come grafico una retta orizzontale)



Dove sia $f(x) = k$, con k costante reale, allora l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ è:

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{(b-a)}_{base} \cdot \underbrace{k}_{altezza} = \underbrace{A}_{Area\ del\ rettangolo}$$

Questo era un caso abbastanza elementare di una funzione costante, proviamo a vedere quindi un caso un po' più particolare, come per esempio una funzione costante a tratti:



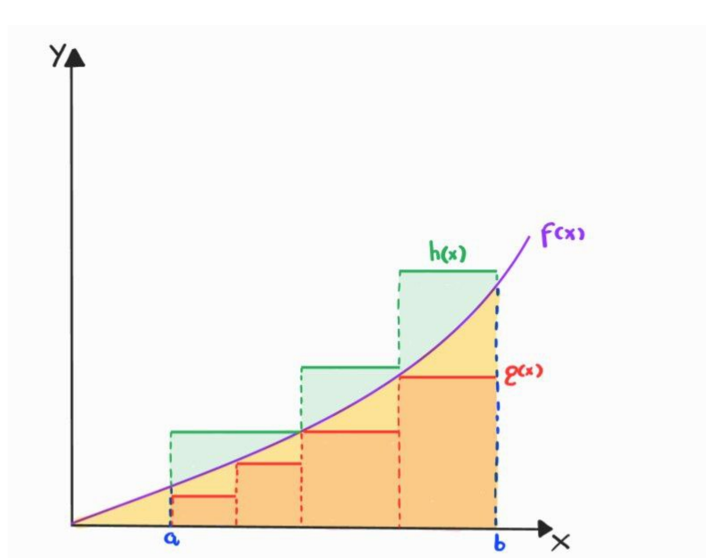
Sia $f(x)$ una funzione a scala(che assume il valore x_i nell'i-esimo intervallo avente k_{i-1} e x_i come estremi).

Allora l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ è:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \cdot \underbrace{k_i}_{altezza} = Somma\ delle\ aree\ dei\ rettangoli$$

2 Integrazione secondo Riemann

La faccenda diventa molto meno banale, quando la nostra funzione non è più costante. per esempio:



Come possiamo vedere, non avendo una funzione costante, non uscirà fuori il solito rettangolo, bensì, in questo caso, una specie di trapezio.

Cosa fare in questi casi?

L'idea sarebbe quella di considerare delle funzioni a scala che siano sempre maggiori o uguali della nostra funzione $f(x)$, nel nostro caso tale funzione a scala si chiamerà $h(x)$, inoltre dobbiamo considerare una seconda funzione a scala che è sempre minore o uguale a $f(x)$ e nel nostro caso si chiamerà $g(x)$.

Più precisamente possiamo dire che l'area del sotto-grafico che vogliamo calcolare dev'essere:

$$sup\left\{\int_a^b g(x)dx\right\} \leq A \leq inf\left\{\int_a^b h(x)\right\}$$

Dove ci aspettiamo che l'estremo inferiore coincida con l'Area che vogliamo calcolare, perché funzioni a scala di questo tipo approssimano per eccesso la funzione f e quindi il loro integrale ci darà una sovrastima dell'Area A. Nel caso dell'estremo superiore invece si approssima per difetto.

Possiamo riscrivere il tutto come:

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} M_k$$

dove m_k e M_k sono rispettivamente il minimo e il massimo del k-esimo intervallo, quindi la sua forma generalizzata sarà:

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}]f(x) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}]f(x)$$

dove n corrisponde al numero di suddivisioni e ogni x_k corrisponde a:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{2}$$

📖 ***NOTA:***

Può succedere però che la figura venga suddivisa infinite volte. Quindi concluderemo che l'errore nella stima si riduce ad un valore infinitesimale, così come la differenza tra $\underline{S_n}$(ossia, come visto prima, la somma dei rettangoli minori che vanno man mano ad aumentare) e $\overline{S_n}$(ossia, come visto prima, la somma dei rettangoli maggiori che vanno man mano ad aumentare).

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \underline{S}$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \overline{S}$$
$$\underline{S} = A = \overline{S}$$

Possiamo concludere che effettuando il limite per $n \to \infty$, le somme $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$ convergono al valore dell'Area A.

Se $f(x)$ è una funzione su cui può. essere applicato tale concetto, allora si dice che f è integrabile secondo Riemann.

✏️ ***DEFINIZIONE DI INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN:***

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che f è integrabile secondo Riemann se dati:

- Il limite per $n \to \infty$ della somma $\underline{S_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}]f(x) = \underline{S}$$

- I limite per $n \to \infty$ della somma $\overline{S_n}$:

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}]f(x) = \overline{S}$$

si verifica che:

- l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ di $f(x)$ viene denominato con:

$$\int_a^b f(x)dx$$

📎 ***ESEMPIO INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN:***

$$\int_0^1 x\ dx$$
$$min[x_k, x_{k+1}]f(x) = f(x_k) = a + k\frac{b-a}{2^n} = \frac{k}{2^n}$$
$$max[x_k, x_{k+1}]f(x) = f(x_{k+1}) = a + (k+1)\frac{b-a}{2^n} = \frac{k+1}{2^n}$$

Calcoliamo $\overline{S}$ e $\underline{S}$:

$$\overline{S} = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}] = \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2^n\cdot(2^n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$
$$\underline{S} = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}] = \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$$

2.1 Proprietà degli integrali

Iniziamo con il vedere l'additività degli integrali rispetto agli estremi e la linearità dell'integrale, sono 2 importantissime proprietà che vanno a descrivere il comportamento dell'integrale definito secondo Riemann rispetto all'intervallo.

2.1.1 Additività dell'integrale rispetto agli estremi

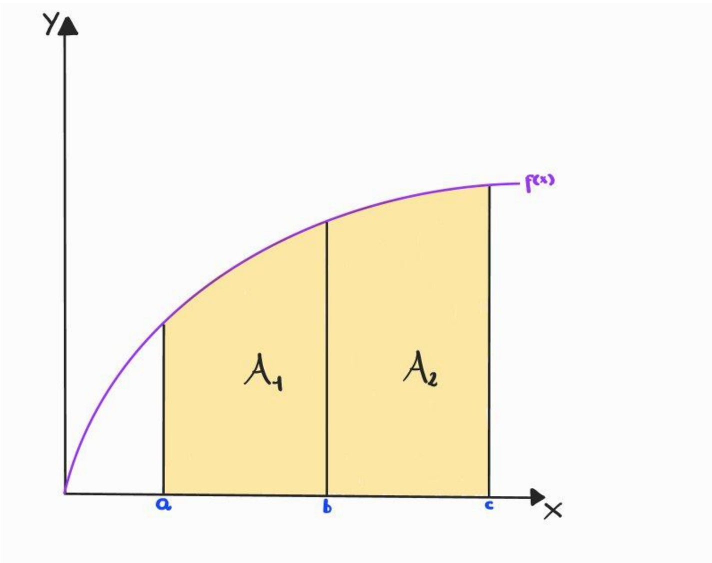
Questa prima proprietà riguarda la possibilità di spezzare un integrale definito come somma di due integrali.

📌 ***TEOREMA DELL'ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO AGLI ESTREMI:***

Se la funzione $f(x)$ è integrabile in un intervallo $[a, c]$ suddiviso in due intervalli $[a, b]\ e\ [b, c]$ allora l'integrale definito della funzione $[a, c]$ è uguale alla somma degli integrali in $[a, b]\ e\ [b, c]$.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Dal punto di vista generico vuol dire che le aree A_1 e A_2 al di sotto di questa funzione $f(x)$ sono sommabili:



📖 ***NOTA:***

Quando i punti $a = b$ coincidono, l'integrale nell'intervallo $[a, b]$ è nullo. Quindi l'integrale diventa:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = 0 + \int_b^c f(x)dx$$

Quando i punti $a = c$ coincidono, invece, l'integrale si annulla:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^a f(x)dx = 0$$

2.1.2 Linearità dell'integrale

Questa proprietà riguarda invece il comportamento dell'integrale definito rispetto alla somma di funzioni.

📌 **TEOREMA DELLA LINEARITÀ *DELL'INTEGRALE:***

Date due funzioni integrali $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, l'integrale definito della somma delle funzioni $f(x) + g(x)$ è uguale alla somma degli integrali delle funzioni:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Andiamo a vedere un esempio:

📎 **ESEMPIO LINEARITÀ *DELL'INTEGRALE:***

Ho due funzioni:

$$f(x) = 2x$$
$$g(x) = x$$

Nell'intervallo $[1, 3]$ l'integrale di $f(x)$ vale:

$$\int_1^3 2x\ dx = 3^2 - 1^2 = 8$$

📖 ***NOTA:***

L'integrale della funzione $2x$ è la funzione x^2 perché la derivata $D[x^2] = 2x$.

Nello stesso intervallo di integrazione $[1, 3]$ l'integrale della $g(x)$ vale:

$$\int_1^3 x\ dx = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

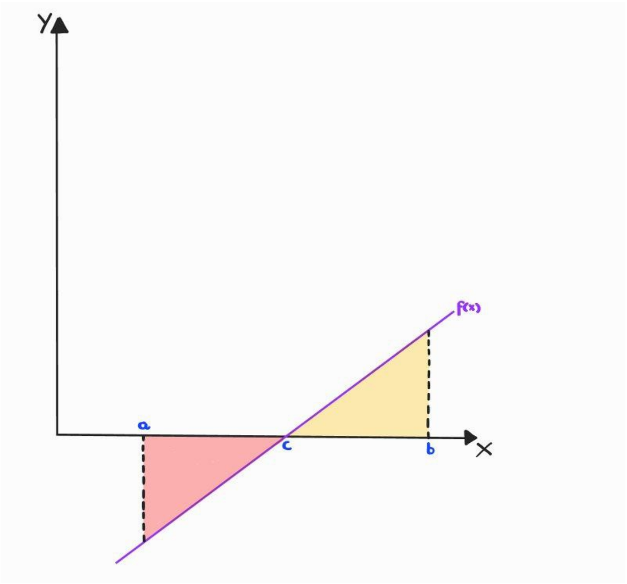
📖 **NOTA:**

L'integrale della funzione x è la funzione $\frac{1}{2} \cdot x^2$ perché la derivata $D[\frac{1}{2} \cdot x^2] = x$.

Quindi la somma degli integrali $f(x)$ e $g(x)$ è:

$$\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 12$$

Possiamo però trovare questo caso di funzione:



Come visto in precedenza l'integrale $[a, b]$ può essere spezzato nella somma tra l'integrale in $[a, c]$ e l'integrale $[c, b]$.

Con l'unica differenza che l'integrale $[a, c]$ assumerà valori negativi, rendendo di conseguenza negativo il risultato dell'integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx$$

2.1.3 Proprietà degli estremi di negazione

Nel caso in cui invertissimo i 2 estremi di un integrale il risultato non cambierà, visto che la quantità di area sottostante non cambierà.

Tuttavia, cambierà il segno del risultato dell'integrale.

📌 **TEOREMA PROPRIETÀ *DEGLI ESTREMI DI NEGAZIONE:***

Se f è una integrabile in $[a, b]$ dove $a < b$, allora vale che:

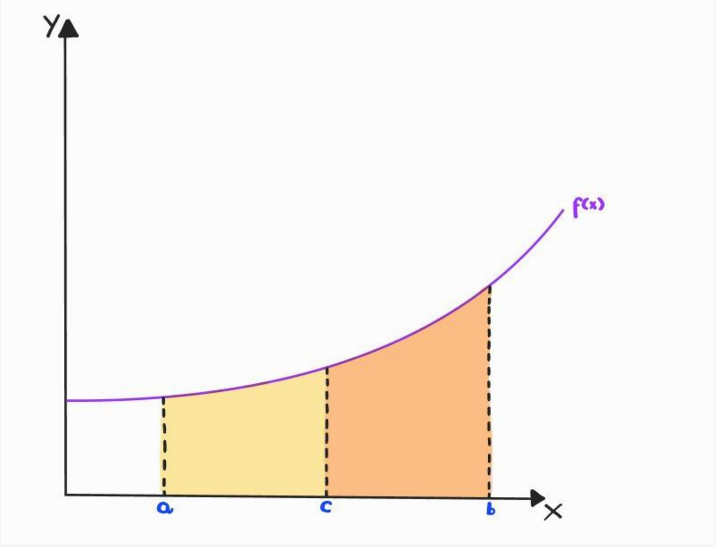
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2.1.4 Differenza tra integrali

L'ultima proprietà è il calcolo di un'area tramite la differenza tra due aree:

📎 ***ESEMPIO DI DIFFERENZA TRA INTEGRALI:***

Andiamo a considerare la seguente situazione dove vogliamo calcolare l'integrale in $[c, b]$:



per calcolare $[c, b]$ dovremo fare la differenza tra l'integrale in $[a, b]$ e l'integrale in $[a, c]$.

📌 ***TEOREMA DIFFERENZA TRA INTEGRALI:***

Sia $[a, b]$ un intervallo e sia $c \in [a, b]$. Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$, allora l'integrale di f in $[c, b]$ è esprimibile come:

$$\int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx$$

2.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il teorema fondamentale del calcolo integrale è un teorema che stabilisce la continuità della funzione integrale, inoltre, fornisce una formula di calcolo detta formula fondamentale del calcolo integrale.

📌 ***TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:***

Data una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, la funzione integrale $F(t)$:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

è derivabile e la derivata vale $f(t)$:

$$D[F(t)] = f(t)$$

Dove la funzione $F(t)$ è detta funzione primitiva di $f(x)$.

Andiamo a vedere alcuni esempi su questo teorema:

📎 ***ESEMPI TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:***

- Andiamo a considerare il seguente esempio:

  $$\int_2^8 x^2 + 5x \; dx$$

  Come prima cosa andiamo a cercare $F(x)$, dove ricordiamo che la sua derivata coincide con $f(x)$:

  $$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

  Quindi il valore dell'integrale sarà:

  $$\int_2^8 x^2 + 5x \; dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_2^8 = \left(\frac{1}{3}8^3 + \frac{5}{2}8^2\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + \frac{5}{2}2^2\right) = 318$$

- Ora andiamo a vedere un altro esempio:

  $$\int_0^{\pi/2} cos(x) \; dx$$

  Come prima cosa andiamo a cercare $F(x)$, dove ricordiamo che la sua derivata coincide con $f(x)$:

  $$F(x) = sin(x)$$

  Quindi il valore dell'integrale sarà:

  $$\int_0^{\pi/2} cos(x) \; dx = \Big[sin(x)\Big]_0^{\pi/2} = sin(\frac{\pi}{2}) - sin(0) = 1$$