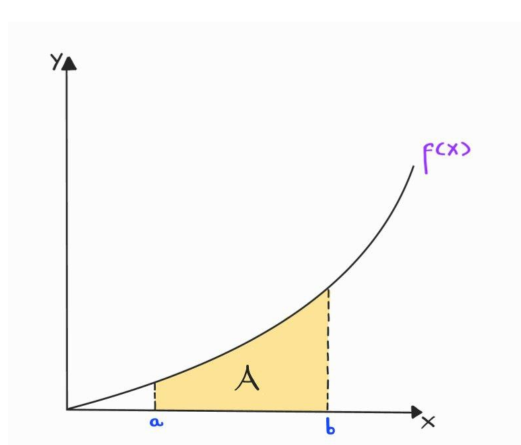
Integrali

▼ ***INDICE***

0 Introduzione

Per capire cosa intendiamo con integrale di una funzione immaginiamo di voler calcolare l'area della figura sottostante alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.



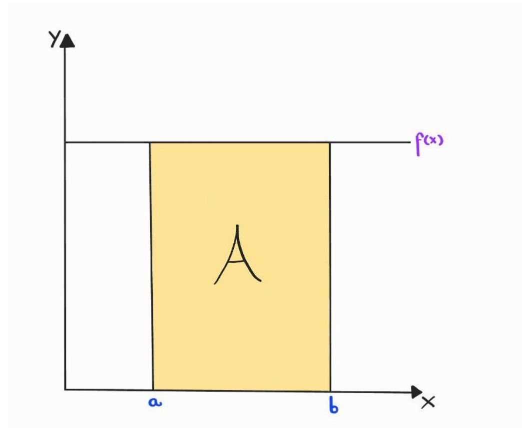
Dove abbiamo $f(x)$ che è la nostra funzione integranda, e gli intervalli(zona) di integrazione a e b.

Noi tramite l'integrale andremo a calcolare l'area della figura rappresentata sotto la funzione quindi:

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Dove A è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $f(x)$, l'asse x, a e b.

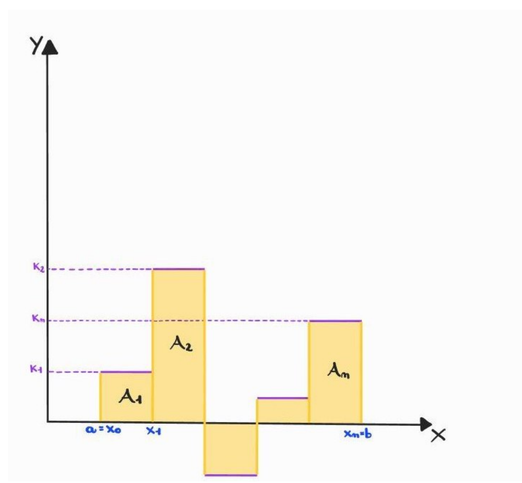
Proviamo ora a vedere un caso dove abbiamo però una funzione costante che valga sempre k(quindi ha come grafico una retta orizzontale)



Dove sia $f(x) = k$, con k costante reale, allora l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ è:

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{(b-a)}_{base} \cdot \underbrace{k}_{altezza} = \underbrace{A}_{Area\ del\ rettangoli}$$

Questo era un caso abbastanza elementare di una funzione costante, proviamo a vedere quindi un caso un po' più particolare, come per esempio una funzione costante a tratti:



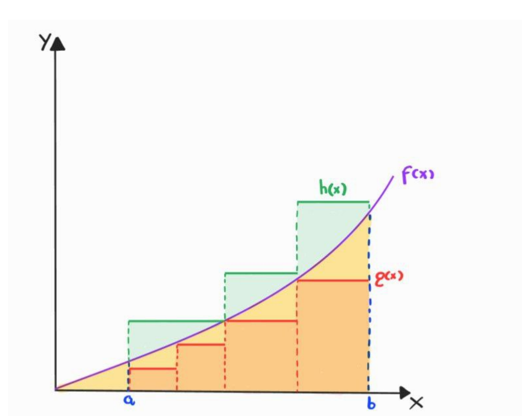
Sia $f(x)$ una funzione a scala(che assume il valore x_i nell'i-esimo intervallo avente k_{i-1} e x_i come estremi).

Allora l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ è:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \cdot \underbrace{k_i}_{altezza} = Somma\ delle\ aree\ dei\ rettangoli$$

2 Integrazione secondo Riemann

La faccenda diventa molto meno banale, quando la nostra funzione non è più costante. per esempio:



Come possiamo vedere, non avendo una funzione costante, non uscirà fuori il solito rettangolo, bensì, in questo caso, una specie di trapezio.

Cosa fare in questi casi?

L'idea sarebbe quella di considerare delle funzioni a scala che siano sempre maggiori o uguali della nostra funzione $f(x)$, nel nostro caso tale funzione a scala si chiamerà $h(x)$, inoltre dobbiamo considerare una seconda funzione a scala che è sempre minore o uguale a $f(x)$ e nel nostro caso si chiamerà $g(x)$.

Più precisamente possiamo dire che l'area del sotto-grafico che vogliamo calcolare dev'essere:

$$sup\left\{\int_a^b g(x)dx\right\} \leq A \leq inf\left\{\int_a^b h(x)\right\}$$

Dove ci aspettiamo che l'estremo inferiore coincida con l'Area che vogliamo calcolare, perché funzioni a scala di questo tipo approssimano per eccesso la funzione f e quindi il loro integrale ci darà una sovrastima dell'Area A. Nel caso dell'estremo superiore invece si approssima per difetto.

Possiamo riscrivere il tutto come:

$$\frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k$$

dove m_k e M_k sono rispettivamente il minimo e il massimo del k-esimo intervallo, quindi la sua forma generalizzata sarà:

$$\frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}]f(x) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}]f(x)$$

dove n corrisponde al numero di suddivisioni e ogni x_k corrisponde a:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{2}$$

📖 ***NOTA:***

Può succedere però che la figura venga suddivisa infinite volte. Quindi concluderemo che l'errore nella stima si riduce ad un valore infinitesimale, così come la differenza tra $\underline{S_n}$(ossia, come visto prima, la somma dei rettangoli minori che vanno man mano ad aumentare) e $\overline{S_n}$(ossia, come visto prima, la somma dei rettangoli maggiori che vanno man mano ad aumentare).

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \underline{S}$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \overline{S}$$
$$\underline{S} = A = \overline{S}$$

Possiamo concludere che effettuando il limite per $n \to \infty$, le somme $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$ convergono al valore dell'Area A.

Se $f(x)$ è una funzione su cui può. essere applicato tale concetto, allora si dice che f è integrabile secondo Riemann.

✏️ ***DEFINIZIONE DI INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN:***

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che f è integrabile secondo Riemann se dati:

- Il limite per $n \to \infty$ della somma $\underline{S_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}] f(x) = \underline{S}$$

- I limite per $n \to \infty$ della somma $\overline{S_n}$:

$$\frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}] f(x) = \overline{S}$$

si verifica che:

- l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ di $f(x)$ viene denominato con:

$$\int_a^b f(x)dx$$

📎 ***ESEMPIO INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN:***

$$\int_0^1 x\ dx$$
$$min[x_k, x_{k+1}] f(x) = f(x_k) = a + k\frac{b-a}{2^n} = \frac{k}{2^n}$$
$$max[x_k, x_{k+1}] f(x) = f(x_{k+1}) = a + (k+1)\frac{b-a}{2^n} = \frac{k+1}{2^n}$$

Calcoliamo $\overline{S}$ e $\underline{S}$:

$$\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2^n \cdot (2^n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$
$$\underline{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2^n-1) \cdot 2^n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$$

2.1 Proprietà degli integrali

Iniziamo con il vedere l'additività degli integrali rispetto agli estremi e la linearità dell'integrale, sono 2 importantissime proprietà che vanno a descrivere il comportamento dell'integrale definito secondo Riemann rispetto all'intervallo.

2.1.1 Additività dell'integrale rispetto agli estremi

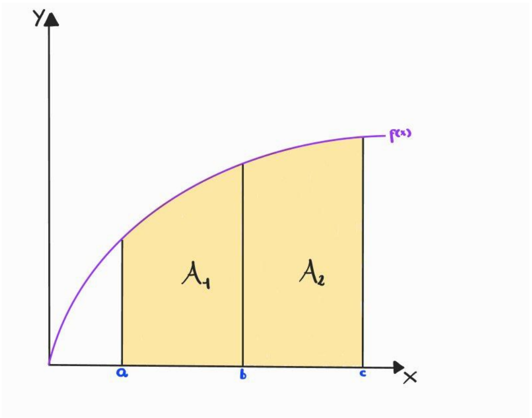
Questa prima proprietà riguarda la possibilità di spezzare un integrale definito come somma di due integrali.

📌 ***TEOREMA DELL'ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO AGLI ESTREMI:***

Se la funzione $f(x)$ è integrabile in un intervallo $[a, c]$ suddiviso in due intervalli $[a, b]\ e\ [b, c]$ allora l'integrale definito della funzione $[a, c]$ è uguale alla somma degli integrali in $[a, b]\ e\ [b, c]$.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Dal punto di vista generico vuol dire che le aree A_1 e A_2 al di sotto di questa funzione $f(x)$ sono sommabili:



📖 ***NOTA:***

Quando i punti $a = b$ coincidono, l'integrale nell'intervallo $[a, b]$ è nullo. Quindi l'integrale diventa:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = 0 + \int_b^c f(x)dx$$

Quando i punti $a = c$ coincidono, invece, l'integrale si annulla:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^a f(x)dx = 0$$

2.1.2 Linearità dell'integrale

Questa proprietà riguarda invece il comportamento dell'integrale definito rispetto alla somma di funzioni.

📌 **TEOREMA DELLA LINEARITÀ *DELL'INTEGRALE:***

Date due funzioni integrali $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, l'integrale definito della somma delle funzioni $f(x) + g(x)$ è uguale alla somma degli integrali delle funzioni:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Andiamo a vedere un esempio:

📎 **ESEMPIO LINEARITÀ *DELL'INTEGRALE:***

Ho due funzioni:

$$f(x) = 2x$$
$$g(x) = x$$

Nell'intervallo $[1, 3]$ l'integrale di $f(x)$ vale:

$$\int_1^3 2x \, dx = 3^2 - 1^2 = 8$$

📖 ***NOTA:***

L'integrale della funzione $2x$ è la funzione x^2 perché la derivata $D[x^2] = 2x$.

Nello stesso intervallo di integrazione $[1, 3]$ l'integrale della $g(x)$ vale:

$$\int_1^3 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

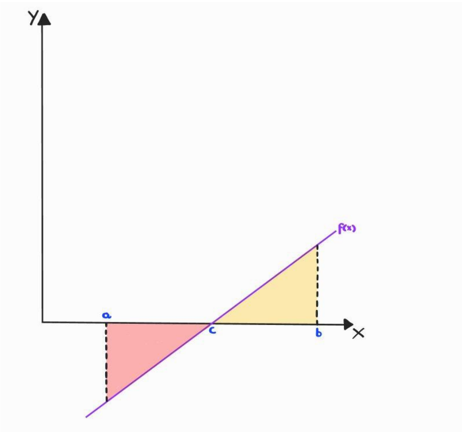
📖 **NOTA:**

L'integrale della funzione x è la funzione $\frac{1}{2} \cdot x^2$ perché la derivata $D[\frac{1}{2} \cdot x^2] = x$.

Quindi la somma degli integrali $f(x)$ e $g(x)$ è:

$$\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 12$$

Possiamo però trovare questo caso di funzione:



Come visto in precedenza l'integrale $[a, b]$ può essere spezzato nella somma tra l'integrale in $[a, c]$ e l'integrale $[c, b]$.

Con l'unica differenza che l'integrale $[a, c]$ assumerà valori negativi, rendendo di conseguenza negativo il risultato dell'integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx$$

2.1.3 Proprietà degli estremi di negazione

Nel caso in cui invertissimo i 2 estremi di un integrale il risultato non cambierà, visto che la quantità di area sottostante non cambierà.

Tuttavia, cambierà il segno del risultato dell'integrale.

📌 **TEOREMA PROPRIETÀ *DEGLI ESTREMI DI NEGAZIONE:***

Se f è una integrabile in $[a, b]$ dove $a < b$, allora vale che:

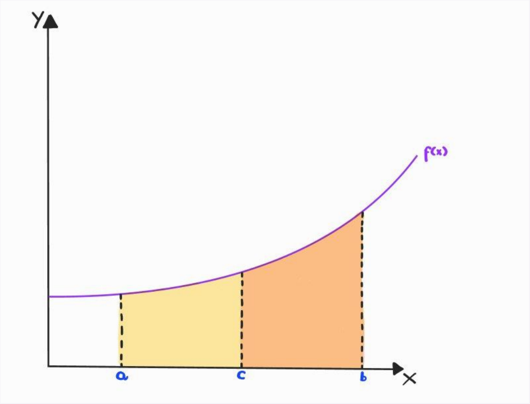
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2.1.4 Differenza tra integrali

L'ultima proprietà è il calcolo di un'area tramite la differenza tra due aree:

📎 ***ESEMPIO DI DIFFERENZA TRA INTEGRALI:***

Andiamo a considerare la seguente situazione dove vogliamo calcolare l'integrale in $[c, b]$:



per calcolare $[c, b]$ dovremo fare la differenza tra l'integrale in $[a, b]$ e l'integrale in $[a, c]$.

📌 ***TEOREMA DIFFERENZA TRA INTEGRALI:***

Sia $[a, b]$ un intervallo e sia $c \in [a, b]$. Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$, allora l'integrale di f in $[c, b]$ è esprimibile come:

$$\int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx$$

2.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il teorema fondamentale del calcolo integrale è un teorema che stabilisce la continuità della funzione integrale, inoltre, fornisce una formula di calcolo detta formula fondamentale del calcolo integrale.

📌 ***TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:***

Data una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, la funzione integrale $F(t)$:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

è derivabile e la derivata vale $f(t)$:

$$D[F(t)] = f(t)$$

Dove la funzione $F(t)$ è detta funzione primitiva di $f(x)$.

Andiamo a vedere alcuni esempi su questo teorema:

📎 ***ESEMPI TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:***

- Andiamo a considerare il seguente esempio:

$$\int_2^8 x^2 + 5x\ dx$$

Come prima cosa andiamo a cercare $F(x)$, dove ricordiamo che la sua derivata coincide con $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

Quindi il valore dell'integrale sarà:

$$\int_2^8 x^2 + 5x\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_2^8 = \left(\frac{1}{3}8^3 + \frac{5}{2}8^2\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + \frac{5}{2}2^2\right) = 318$$

- Ora andiamo a vedere un altro esempio:

$$\int_0^{\pi/2} cos(x)\ dx$$

Come prima cosa andiamo a cercare $F(x)$, dove ricordiamo che la sua derivata coincide con $f(x)$:

$$F(x) = sin(x)$$

Quindi il valore dell'integrale sarà:

$$\int_0^{\pi/2} cos(x)\ dx = \Big[sin(x)\Big]_0^{\pi/2} = sin(\frac{\pi}{2}) - sin(0) = 1$$

2.3 Tecniche di integrazione

2.3.1 Integrali e derivate immediate

Come ben sappiamo l'integrazione è l'operazione inversa alla derivata, quindi esistono integrali immediati e derivate immediate.

📌 ***DERIVATE IMMEDIATE:***

$f(x)$	$f^1(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
α^x	$\alpha^x \cdot ln(\alpha)$
$ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$

📌 ***INTEGRALI IMMEDIATI:***

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$sin(x)$	$-cos(x) + c$
$cos(x)$	$sin(x) + c$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tg(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg(x) + c$
e^x	$e^x + c$
α^x	$\frac{\alpha^x}{ln(\alpha)} + c$
$\frac{1}{x}$	$ln(\|x\|) + c$

2.3.2 Integrazione per sostituzione

Per capire meglio l'integrazione per sostituzione prendiamo come esempio il seguente integrale:

$$\int_1^4 e^{3x}\ dx$$

Questo tipo di metodo lo abbiamo già usato, ma in questo caso bisogna fare più passaggi:

1. Per prima cosa poniamo $f(x) = e^{3x} = e^t$;
2. Facendo questo dobbiamo anche modificare gli estremi poiché quando abbiamo $x = 1$ t diventa 3, mentre quando avremo $x = 4$ t diventa 12;
3. Inoltre anche la variabile di integrazione deve essere modificata:

$$\begin{gathered} t = 3x \\ dt = D[3x]dx \\ dt = 3dx \\ \frac{dt}{3} = dx \end{gathered}$$

Svolti tutti i passaggi il nostro integrale diventerà:

$$\int_1^4 e^{3x}\ dx = \int_3^{12} e^t\ \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int_3^{12} e^t\ dt$$

A questo punto basterà calcolare l'integrale immediato per poi riportare il risultato ottenuto in termini della variabile di integrazione originale:

$$\frac{1}{3}\int_3^{12} e^t dt = \left[\frac{e^t}{3}\right]_3^{12} = \frac{e^{12} - e^3}{3}$$

📎 ***ESEMPI DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE:***

- Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi} cos(6x)\ dx$$

Andiamo a sostituire $6x$ con t e gli estremi dell'intervallo diventano $[0, 6\pi]$.

Successivamente la variabile di integrazione diventa:

$$t = 6x$$
$$dt = 6x\ dx$$
$$\frac{dt}{6} = dx$$

Dunque:

$$\int_0^{\pi} cos(6x)\ dx = \frac{1}{6}\int_0^{6\pi} cos(t)\ dt = \left[\frac{sin(t)}{6}\right]_0^{6\pi} = \frac{0-0}{6} = 0$$

- Consideriamo un altro integrale:

$$\int x^2 e^{x^3}\ dx$$

Andiamo di nuovo a sostituire x^3 con t, dove successivamente la variabile di integrazione diventerà:

$$t = x^3$$
$$dt = 3x^2\ dx$$
$$\frac{dt}{3} = x^2\ dx$$

Dunque:

$$\int x^2 e^{x^3}\ dx = \int e^t\ \frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + c = \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

- Consideriamo ora il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{2x+15}\ dx$$

Andiamo a sostituire $2x + 15$ con t e gli estremi dell'intervallo diventeranno $[13, 21]$.

La variabile di integrazione invece diventerà:

$$t = 2x + 15$$
$$dt = 2\ dx$$
$$\frac{dt}{2} = dx$$

Dunque:

$$\int_{13}^{21} \frac{1}{t}\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{13}^{21} \frac{1}{t}\ dt = \left[\frac{ln(|t|)}{2}\right]_{13}^{21} = \frac{ln(21) - ln(13)}{2}$$

- Andiamo a vedere un ultimo esempio di integrale:

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+6}\ dx$$

Andiamo a sostituire $x^2 + 3x + 6$ con t e successivamente la variabile di integrazione diventerà:

$$t = x^2 + 3x + 6$$
$$dt = 2x + 3\ dx$$

Dunque:

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+6}\ dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+6}\ dx = 2\int \frac{1}{t}\ dt = 2ln(|t|) = 2ln(|x^2+3x+6|) + c$$

2.3.3 Integrazione per parti

Per capire l'integrazione per parti andiamo subito a vedere un esempio:

$$\int x^3 e^x\ dx$$

Proviamo a risolverlo utilizzando l'integrazione per sostituzione vista precedentemente:

$$t = x^2$$
$$dt = 2x\ dx$$
$$\frac{dt}{2} = x\ dx$$

Dunque l'integrale diventerà:

$$\int x^3 e^{x^2}\ dx = \int x \cdot x^2 e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int te^t dt$$

Come possiamo vedere non possiamo utilizzare gli integrali immediati, in questi casi bisogna usare l'integrazione per parti.

📌 ***TEOREMA INTEGRAZIONE PER PARTI:***

Se il prodotto tra funzioni $f'(x) \cdot g(x)$ è integrabile allora:

$$\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Andiamo a continuare l'integrale precedente, ossia:

$$\frac{1}{2} \int te^t dt$$

Come prima cosa nell'integrazione per parti bisogna decidere quale tra le due funzioni è $f'(x)$ e $g(x)$.

Nel nostro caso:

- $f'(x) = e^t$ poiché tramite integrazione $f(x) = e^t$;
- $g(x) = t$ poiché tramite derivazione $g'(x) = 1$.

Dunque:

$$\frac{1}{2} \int te^t dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t \cdot 1dt\right) = \frac{te^t - e^t}{2} + c = \frac{x^2 e^{x^2} - e^{x^2}}{2} + c$$

Andiamo ora a vedere altri esempi per capire meglio l'integrazione per parti.

ESEMPI INTEGRAZIONE PER PARTI:

- Come primo esempio usiamo il seguente integrale:

$$\int x^3 e^x \, dx$$

  Come prima cosa quindi bisogna individuare $f'(x)$ e $g(x)$:
  - $f'(x) = e^x$ poiché tramite integrazione $f(x) = e^x$;
  - $g(x) = x^3$ poiché tramite derivazione $g'(x) = 3x^2$.

  Dunque:

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx$$

  Avendo ancora un integrale senza integrale immediato dobbiamo ancora una volta applicare l'integrazione per parti:
  - $f'(x) = e^x$ poiché tramite integrazione $f(x) = e^x$;
  - $g(x) = 3x^2$ poiché tramite derivazione $g'(x) = 6x$.

  Dunque:

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6xe^x \, dx\right)$$

  Abbiamo ancora lo stesso caso di prima quindi bisogna ancora applicare l'integrazione per parti:
  - $f'(x) = e^x$ poiché tramite integrazione $f(x) = e^x$;
  - $g(x) = 6x$ poiché tramite derivazione $g'(x) = 6$.

  Dunque:

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6xe^x \, dx\right) = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \left(6xe^x - \int 6e^x \, dx\right)\right) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

- Andiamo a vedere un altro esempio:

$$\int_0^\pi x cos(2x) \, dx$$

  Applichiamo l'integrazione per parti:
  - $f'(x) = cos(2x)$ poiché tramite integrazione $f(x) = \frac{sin(2x)}{2}$;
  - $g(x) = x$ poiché tramite derivazione $g'(x) = 1$.

  Dunque:

$$\int_0^\pi x \cdot cos(2x) \, dx = \frac{x \cdot sin(2x)}{2} - \int \frac{sin(2x)}{2} \, dx = \frac{x \cdot sin(2x)}{2} + \frac{cos(2x)}{4} = \left[\frac{2x \cdot sin(2x) + cos(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

- Come ultimo esempio andiamo a vedere un caso particolare :

$$\int ln(x) \, dx$$

  Questo integrale andrà riscritto come:

$$\int 1 \cdot ln(x) \, dx$$

  Adesso possiamo applicare l'integrazione per parti:
  - $f'(x) = 1$ poiché tramite integrazione $f(x) = x$;
  - $g(x) = ln(x)$ poiché tramite derivazione $g'(x) = \frac{1}{x}$.

  Dunque:

$$\int 1 \cdot ln(x) \, dx = xln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = xln(x) - x + c$$

2.4.4 Integrazioni pre-calcolate

Ora andiamo a vedere e calcolare gli integrali più comuni in modo da saperne già lo sviluppo:

1. $$\int e^{\alpha x} \, dx$$

   dove $\alpha \neq 0$.

   In questo caso procederemo per sostituzione:

$$t = dx$$
$$dt = \alpha \, dx$$
$$\frac{dt}{\alpha} = dx$$

   Dunque, indipendentemente dal valore di α, l'integrale sarà:

$$\int e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \int e^t \, dt = \frac{e^t}{\alpha} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. $$\int sin(\alpha x)\ dx$$

   Procederemo per sostituzione:

   $$t = dx$$
   $$dt = \alpha\ dx$$
   $$\frac{dt}{\alpha} = dx$$

   Dunque, indipendentemente dal valore di α, l'integrale sarà:

   $$\int sin(\alpha x)\ dx \frac{1}{\alpha}\int sin(t)\ dt = -\frac{cos(t)}{\alpha} = -\frac{cos(\alpha x)}{\alpha} + c$$

---

3. $$\int cos(\alpha x)\ dx$$

   Procederemo per sostituzione:

   $$t = \alpha x$$
   $$dt = \alpha\ dx$$
   $$\frac{dt}{\alpha} = dx$$

   Dunque, indipendentemente dal valore di α, l'integrale sarà:

   $$\int cos(\alpha x)\ dx = \frac{1}{\alpha}\int cos(t)\ dt = \frac{sin(t)}{\alpha} = \frac{sin(\alpha x}{\alpha} + c$$

---

4. $$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}\ dx$$

   Procederemo per sostituzione:

   $$t = \alpha x + \beta$$
   $$dt = \alpha\ dx$$
   $$\frac{dt}{\alpha} = dx$$

   Dunque indipendentemente dal valore di $\alpha x + \beta$, l'integrale sarà:

   $$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}\ dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{t}\ dt = \frac{ln(|t|)}{\alpha} = \frac{ln(|\alpha x + \beta|)}{\alpha} + c$$

---

5. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx$$

   In questo caso $f(x)$ è una qualsiasi funzione e$f'(x)$ è la sua derivata, anche in questo caso procederemo per sostituzione:

   $$t = f(x)$$
   $$dt = f'(x)\ dx$$
   $$\frac{dt}{f'(x)} = dx$$

   Quindi, indipendentemente dalla funzione $f(x)$, l'integrale sarà:

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \int \frac{f'(x)}{t} \cdot \frac{dt}{f'(x)} = \int \frac{1}{t}\ dt$$

---

6. $$\int e^{\alpha x} \cdot cos(\beta x)\ dx$$

   In questo caso procedendo per parti avremo come risultato finale:

   $$\int e^{\alpha x} \cdot cos(\beta x)\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cdot cos(\beta x) + \beta \cdot sin(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2} + c$$

---

7. $$\int e^{\alpha x} \cdot sin(\beta x)\ dx$$

   Procederemo per parti e il risultato sarà simile al caso precedente:

   $$\int e^{\alpha x} \cdot sin(\beta x)\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cdot sin(\beta x) - \beta \cdot cos(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2} + c$$

---

8. Andiamo ora a considerare questo integrale generico, dove $P_n(x)$ è un qualsiasi polinomio di grado n:

   $$\int P_n(x)e^x\ dx$$

   Per capire meglio il tutto prendiamo subito un esempio:

   $$\int (x^3 - 3x^2 + 8x - 11)e^x\ dx$$

   Dove $P_n(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 11$:

   $$\int (x^3 - 3x^2 + 8x - 11)e^x\ dx = \int P_3(x)e^x\ dx = Q_3(x)e^x$$

e quindi che:

$$P_3(x) = Q_3(x) + Q_3'(x)$$
$$x^3 - 3x^2 + 8x - 11 = Q_3(x) + Q_3'(x)$$

Inoltre, poiché $Q_3'(x)$ corrisponde alla derivata, di $Q_3(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, ne segue che:

$$Q_3(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

Riscriviamo quindi l'equazione precedente come:

$$P_3(x) = Q_3(x) + Q_3'(x)$$
$$x^3 - 3x^2 + 8x - 11 = \alpha x^3 + (3\alpha + \beta)x^2 + (2\beta + \gamma)x + \gamma + \delta$$

Adesso basta risolvere il sistema di equazioni per ottenere il risultato:

$$\begin{cases} x^3 = \alpha x^3 \\ -3x^2 = (3\alpha + \beta)x^2 \\ 8x = (2\beta + \gamma)x \\ -11 = \gamma + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 - 3 = -6 \\ \gamma = 12 + 8 = 20 \\ \delta = -11 - 20 = -31 \end{cases}$$

Quindi:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 8x - 11)e^x \, dx = (x^3 - 6x^2 + 20x - 31)e^x + c$$

2.4.5 Integrazione di $sin^k(x)$ e $cos^k(x)$

Andiamo ora a vedere come sviluppare gli integrali relativi alle funzioni trigonometriche, nello specifico andremo a vedere questi 2 casi:

$$\int sin^k(x) \text{ oppure } \int cos^k(x)$$

In questi casi lo sviluppo dell'integrale dipenderà da k, ossia:

- Nel caso k è una potenza dispari useremo la sostituzione:

> 📎 ***ESEMPIO k DISPARI:***
>
> $$\int sin^3(x) \, dx$$
>
> Possiamo riscrivere l'integrale come:
>
> $$\int sin^2(x) \cdot sin(x) \, dx = \int 1 - cos^2(x) \cdot sin(x)$$
>
> Procedendo per sostituzione:
>
> $$t = cos(x)$$
> $$dt = -sin(x) \, dx$$
> $$\int 1 - cos^2(x) \cdot sin(x) \, dx = -\int 1 - t^2 \, dt = -\int 1 \, dt + \int t^2 \, dt = -t + \frac{t^3}{3} = -cos(x) + \frac{cos(x^3)}{3} + c$$

- Se invece k è una potenza pari procederemo per parti:

> 📎 ***ESEMPIO k PARI:***
>
> $$\int sin^2(x) \, dx$$
>
> Possiamo riscrivere tal integrale come:
>
> $$\int sin(x) \cdot sin(x) \, dx$$
>
> Procedendo per parti, otteniamo:
>
> - $g(x) = sin(x) \Rightarrow g'(x) = cos(x)$.
> - $f'(x) = sin(x) \Rightarrow f(x) = -cos(x)$;
>
> $$\int sin'(x) \, dx = -cos(x) \cdot sin(x) - \int -cos(x) \cdot cos(x) \, dx = -cos(x) \cdot sin(x) + cos(x) \cdot sin(x) + \frac{1}{2}x - \frac{sin(2x)}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x - \frac{sin(2x)}{4} + c$$

2.4 Integrazione di funzioni razionali

Ora andiamo a vedere come si integrano le funzioni razionali, ossia tutte quelle frazioni dove sia al numeratore che al denominatore troviamo un polinomio:

$$\int \frac{n(x)}{d(x)} dx$$

Questi casi prevedono 4 passaggi, di cui il primo va fatto solo in certi casi:

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE: questo passaggio va fatto solo se il grado di $d(x) \leq$ del grado di $n(x)$, in caso contrario questo passaggio si deve saltare;
2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE: ovvero scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di primo grado e/o di secondo grado non ulteriormente scomponibili;
3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI;
4. INTEGRARE I VARI PEZZI CHE SI SONO ANDATI A CREARE.

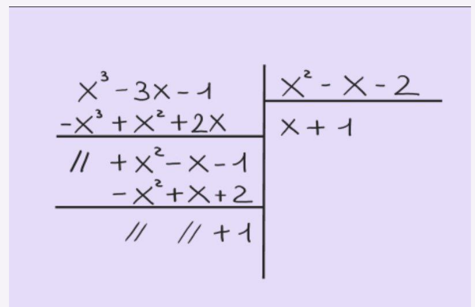
📎 ***ESEMPI INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI:***

Andiamo subito a vedere un primo esempio:

$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}dx$$

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE:

   visto che $2 \leq 3$ andiamo a dividere:



   quindi:

$$\frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{1}{x^2-x-2}$$

2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE:

   Andiamo ora a scomporre il denominatore:

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$$

3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI:

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

   Se vogliamo che la prima e ultima frazione coincidano deve succedere che il termine con la x sparisca, quindi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

   Quindi possiamo dire che:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

4. INTEGRARE I VARI PEZZI CHE SI SONO ANDATI A CREARE:

$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}dx = \int \left[x+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right]dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}ln(|x-2|)-\frac{1}{2}ln(|x+1|)+c$$

Andiamo a vedere ora un secondo esempio:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE:

   in questo caso il primo passaggio non serve.

2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE:

$$x^2-1 = (x-1(x+1)$$

3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x-A+B}{(x-1)(x+1)}$$

   Se vogliamo che la prima e ultima frazione coincidano deve succedere che il termine con la x sparisca, quindi:

$$\begin{cases} -A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A=-B \\ 2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

4. INTEGRARE I VARI PEZZI CHE SI SONO ANDATI A CREARE:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right]dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx = -\frac{1}{2}ln(|x+1|)+\frac{1}{2}ln(|x-1|)+c$$

Ora andiamo a vedere se nel fattorizzare il denominatore compaia un fattore di secondo grado o superiore, non ulteriormente scomponibile:

📎 ***ESEMPI INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI CASI SPECIALI:***

Andiamo subito a vederne un esempio:

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$$

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE:

   in questo caso il primo passaggio non serve.

2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE:

   Andiamo ora a scomporre il denominatore:

$$x^3+x=x(x^2+1)$$

3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

   Se vogliamo che la prima e ultima frazione coincidano deve succedere che il termine con la x sparisca, quindi:

$$\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-B=-A\\C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1\\C=0\\A=1\end{cases}$$

4. INTEGRARE I VARI PEZZI CHE SI SONO ANDATI A CREARE:

$$\int\frac{1}{x^3+x}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=ln(|x|)-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=ln(|x|)-\frac{1}{2}ln(|x^2+1|)+c$$

Ora andiamo a vedere un altro caso particolare:

$$\int\frac{x+1}{x^3-2x^2+x}$$

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE:

   in questo caso il primo passaggio non serve.

2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE:

   Andiamo ora a scomporre il denominatore:

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$$

3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI:

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(C-2A-B)x+A}{x(x-1)^2}$$

   Se vogliamo che la prima e ultima frazione coincidano deve succedere che il termine con la x sparisca, quindi:

$$\begin{cases}A+B=0\\C-2A-B=1(\text{perché al numeratore abbiamo x})\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=2\end{cases}$$

4. INTEGRARE I VARI PEZZI CHE SI SONO ANDATI A CREARE:

$$\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx+2\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=ln(|x|)-ln(|x-1|)+2\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c$$

Ovviamente se avessimo avuto un caso del genere:

$$\frac{1}{x(x-3)^3}$$

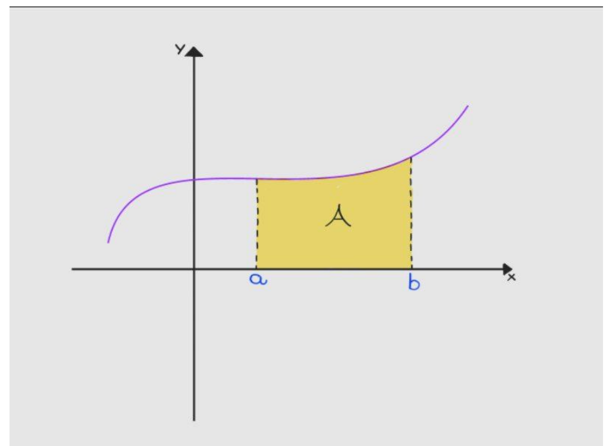
Dobbiamo fare la stessa cosa vista nell'ultimo esercizio visto, ossia:

$$\frac{1}{x(x-3)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3}\quad\text{ecc...}$$

2.5 Integrali impropri

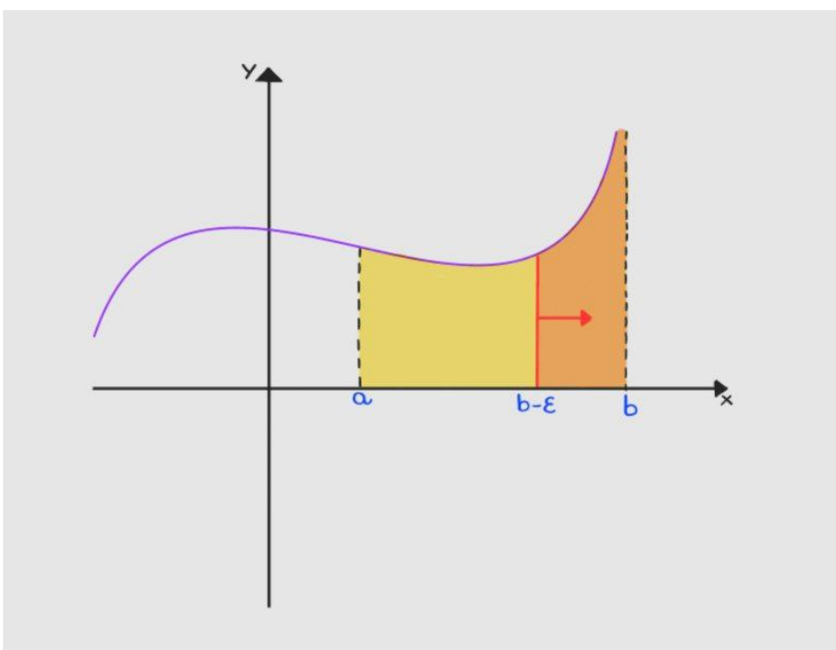
Per capire cosa intendiamo con integrali impropri, bisogna ricordare inanzitutto le 2 caratteristiche fondamentali degli integrali con cui abbiamo a che fare di solito, ossia gli integrali propri, dove:

- Negli integrali propri:
  - La zona di integrazione è limitata;
  - La funzione integranda è limitata.



Se la funzione integranda o la zona di integrazione(o eventualmente entrambe) non sono limitate si parla di integrale improprio o generalizzato.

Come prima cosa vediamo un caso dove è la funzione ad essere illimitata:

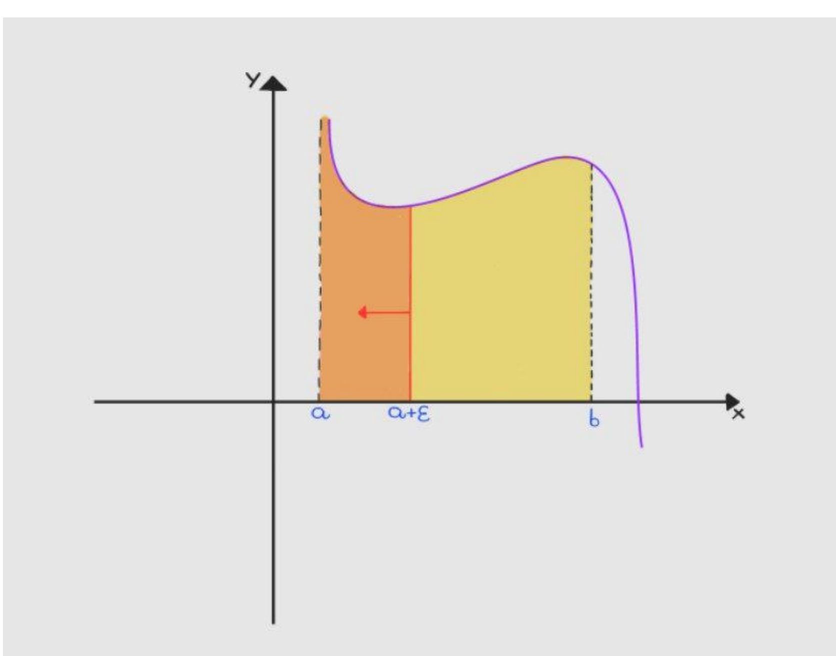


Sia $f(x) = [a, b) \to \mathbb{R}$ continua e illimitata a sinistra di b, ovvero:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$

In questo caso si definisce:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$



Sia $f(x) : (a, b] \to \mathbb{R}$ continua e illimitata a estra di a, ovvero:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

In questo caso si definisce:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

In entrambi i casi:

- Se il limite esiste ed è finito $f(x)$ si dice integrabile di $[a, b]$ o che $\int_a^b f(x)\,dx$ converge;
- Se il limite risulta $+\infty$ oppure $-\infty$ si dice che l'integrale improprio diverge(a $+\infty$ o $-\infty$);
- Se il limite non esiste si dice che l'integrale improprio non esiste o è indeterminato.

📎 ***ESEMPIO INTEGRALE IMPROPRIO CON FUNZIONE ILLIMITATA:***

Andiamo a considerare il seguente integrale:

$$\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

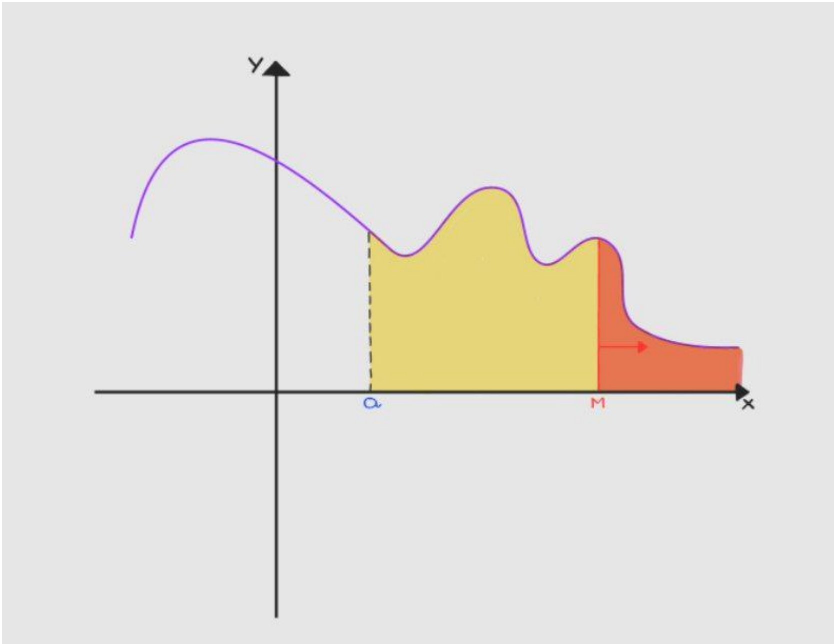
Vediamo subito che è illimitata a destra di a:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0+\epsilon}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_{\epsilon}^{4} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\sqrt{4} - \sqrt{\epsilon}\right] = 2$$

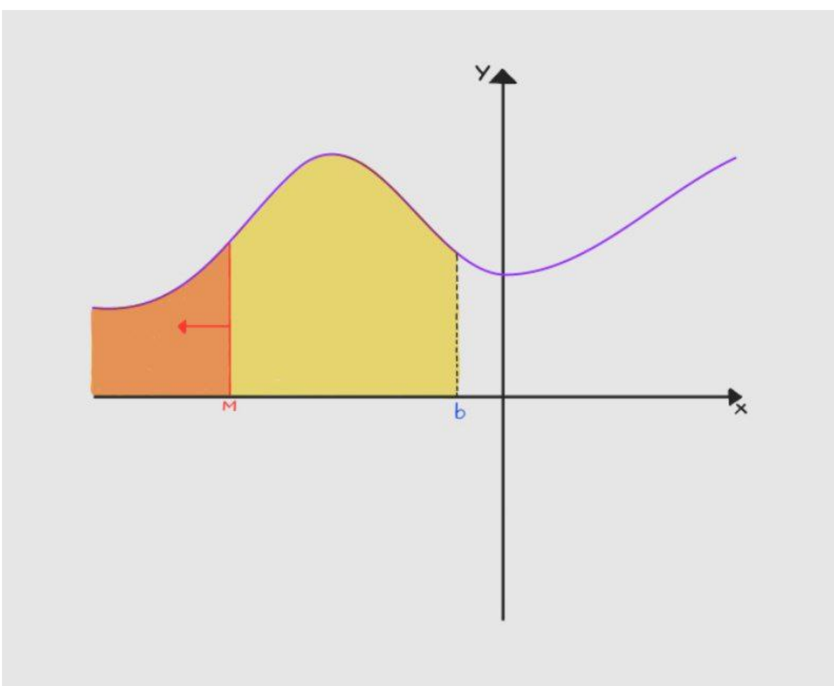
Andiamo ora a vedere il caso in cui ad essere illimitata è la zona di integrazione:

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

In questo caso si definisce:



$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$



Sia $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua.

In questo caso si definisce:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)\,dx$$

📎 ***ESEMPIO INTEGRALE IMPROPRIO CON INTEGRAZIONE ILLIMITATA:***

Andiamo a considerare il seguente integrale:

$$\int_4^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_4^M\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_4^M = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{M}+\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

2.5.1 Integrali impropri convergenza

In molti casi è possibile dire se un integrale improprio converge o meno senza determinare la primitiva, cosa che risulta molto scomoda da fare oppure non si può in effetti fare.

Esistono allora dei criteri di convergenza molto simili a quelli visti nelle serie numeriche.

Il più semplice di questi, ed il primo che vedremo, è il criterio del confronto.

📌 ***TEOREMA DEL CRITERIO DEL CONFRONTO:***

Siano $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ due funzioni continue con $0\le f(x)\le g(x)$ in $[a,+\infty)$.

Allora.

1. Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge;
2. Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge a $+\infty$ allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge a $+\infty$.

Andiamo quindi a vedere un esempio:

📎 ***ESEMPIO CRITERIO DEL CONFRONTO:***

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

In questo caso converge infatti $0\le e^{-x^2}\le e^{-x}$ per $x\ge 1$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[e^{-x}\right]_1^M = \frac{1}{e}$$

Un altro metodo è il criterio del confronto asintotico:

📌 ***TEOREMA DEL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:***

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e positive.

Se $f \sim g$ per $x \to +\infty$ allora:

$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge/diverge a $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge/diverge a $+\infty$.

📖 ***NOTA:***

Vediamo gli integrali utili da ricordare:

$$\left.\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{array}\right\} \text{vale se } a > 0$$

$$\left.\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (ln(x))^\beta}\, dx \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \ e \ \beta > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \ e \ \beta = 1 \end{array}\right\} \text{vale se } a > 1$$

Andiamo quindi a vedere un esempio:

📎 ***ESEMPIO CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:***

Stabilire se $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x^2+1}\, dx$ converge.

Possiamo trovare l'asintotico prendendo i termini più grandi al numeratore e denominatore quindi:

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

quindi:

$$\frac{x+5}{x^3+x^2+1} \sim \frac{1}{x^2} \text{ per } x \to +\infty$$

Quindi l'integrale iniziale si comporta allo stesso modo di:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

dalla 📖***NOTA*** scritta poco fa possiamo dire subito che converge, perché $\alpha(2) > 1$ e $a > 0$, quindi anche l'integrale iniziale converge.

Andiamo ora a vedere degli integrali impropri utili da ricordare:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{array}$$