Estremo superiore ed estremo inferiore

Per poter parlare di **estremo inferiore** e **estremo superiore (inf e sup)** bisogna introdurre diversi concetti che giocano un ruolo dominante nello studio dei sottoinsiemi reali, partendo da maggiorante di un insieme e di minorante di un insieme.

Maggiorante e minorante di un insieme

L'insieme dei numeri reali è un campo totalmente ordinato, per cui è possibile confrontare i valori utilizzando $\leq, \geq, >$ e $<$.

Sappiamo benissimo confrontare due numeri reali e sappiamo individuare un'infinità di numeri reali più piccoli o più grandi di un certo valore.

Esempio:

$(2,5)$ è un intervallo limitato perché compreso tra due numeri ben definiti, ed è l'insieme dei numeri reali più grandi di 2 e più piccoli di 5:

$$(2,5) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x > 2 \wedge x < 5\}$$

che significa: x appartiene ($\in$) ai numeri reali ($\mathbb{R}$) tale che (t.c.) x è maggiore di 2 e ($\wedge$) minore di 5.

- Maggiorante

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Diciamo che $y \in \mathbb{R}$ è un maggiorante dell'insieme X se per ogni $x \in X$ si ha che $y \geq x$.

$$y \in \mathbb{R} \text{ maggiorante di } X \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ risulta che } y \geq x$$

quindi: y appartiene ai numeri reali maggiorante di X se e solo se ($\Leftrightarrow$) per ogni ($\forall$) x appartenente a X risulta che y è maggiore o uguale a x

- Minorante

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali. Diciamo che $y \in \mathbb{R}$ è un minorante dell'insieme X se per ogni $x \in X$ si ha che $y \leq x$

$$y \in \mathbb{R} \text{ minorante di } X \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ risulta che } y \leq x$$

quindi: y appartiene ai numeri reali minorante di X se e solo se ($\Leftrightarrow$) per ogni ($\forall$) x appartenente a X risulta che y è minore o uguale a x

Esempi su minoranti e maggioranti:

1) Dato l'intervallo $(1, 100]$, risulta che:

- -100; -1; 0; $0{,}99$ e 1 sono tutti minoranti dell'insieme, quindi qualsiasi numero $y \leq 1$ è un minorante dell'insieme;
- 100; 111; 500 sono tutti maggioranti dell'insieme, quindi qualsiasi numero $y \geq 100$ è un maggiorante dell'insieme

ATTENZIONE!: il discorso di minorante e maggiorante vale sia per intervalli chiusi ([ ]) che aperti (( ))

2) Dato l'intervallo $(-\infty, 10)$, risulta che:

- non vi è alcun minorante ($-\infty$ non è un numero reale);
- qualsiasi numero $y \geq 10$ è un maggiorante dell'insieme

3) L'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ non presenta alcun minorante né maggiorante ($\pm\infty$ non sono numeri reali).

Definizione di estremo superiore di un insieme

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali.

Se X è un insieme limitato superiormente, chiameremo $Y \in \mathbb{R}$ l'estremo superiore dell'insieme X e scriveremo

$$\sup(X) = Y$$

se

- Y è un maggiorante di X;
- comunque scelto $z < Y$ si ha che z non è un maggiorante di X (in altre parole Y è il più piccolo maggiorante di X)

Se X è un insieme illimitato superiormente (ossia se non ammette alcun maggiorante) diremo quindi che l'estremo superiore di X è $+\infty$ e scriveremo

$$\sup(X) = +\infty$$

Esempio:

Nell'intervallo $(1, 100]$ l'estremo superiore sarà 100:

$$\sup(X) = 100$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di numeri reali.

Se X è un insieme limitato inferiormente, chiameremo $Y \in \mathbb{R}$ l'estremo inferiore dell'insieme X e scriveremo:

$$\inf(X) = Y$$

se

- Y è un minorante di X;
- comunque scelto $z > Y$ si ha che z non è un minorante di X (in altre parole Y è il più grande minorante di X).

Se X è un insieme illimitato inferiormente (ossia se non ammette alcun minorante) diremo quindi che l'estremo inferiore di X è $-\infty$, e scriveremo:

$$\inf(X) = -\infty$$

Esempio:

Nell'intervallo $(1, 100]$ l'estremo inferiore sarà 100:

$$\inf(X) = 1$$

Sommatoria

La sommatoria permette di scrivere in modo compatto la somma di un numero finito e infinito di termini.

Il simbolo di sommatoria è la seguente Σ ma scritto da solo non ha nessun significato, una sommatoria infatti è composta da più parti tutte indispensabili per poter poi calcolare la sommatoria:

intervallo di valori tra cui varia l'indice

simbolo di sommatoria $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(k)$ $\longleftarrow$ espressione algebrica in cui compare l'indice

indice della sommatoria

Questa espressione si legge: somma per k che va da n ad m di f(k).

Come possiamo vedere dalla "formula" oltre al simbolo della sommatoria abbiamo:

- una lettera, chiamata indice di sommatoria, utilizzato per definire l'espressione algebrica; le lettere più usate sono k, i e j.
- un'espressione algebrica che dipende dall'indice di sommatoria la quale ci dice come sono fatti i termini da sommare.
- due numeri naturali n ed m che esprimono l'intervallo di valori tra cui varia l'indice e quindi ci dicono quanti e quali sono gli addendi.

Esempi di sommatorie e calcolo di una sommatoria

Esempi di come sono fatte le sommatorie:

$$\sum_{k=0}^{11} k,\ \sum_{k=3}^{8} [k-2],\ \sum_{k|12} k^2,\ \sum_{k\in\{4,16,36\}} \sqrt{k},\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Visto come sono fatte, vediamo come si calcola una sommatoria:

- fatta eccezione per le sommatorie il cui simbolo è ∞, per poter calcolare una sommatoria si dovranno sostituire nell'espressione algebrica i valori interi dell'intervallo tra cui varia l'indice, per poi sommare i termini così ottenuti. Procedendo in tal modo avremo:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{11} k = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$

Spiegazione: poiché l'indice di sommatoria k varia tra 0 ed 11, nell'espressione algebrica abbiamo sostituito al posto di k tutti i numeri naturali tra 0 e 11 ottenendo così i vari termini da sommare.

2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} [k-2] = (3-2)+(4-2)+(5-2)+(6-2)+(7-2)+(8-2) = 1+2+3+4+5+6=21$

Spiegazione: i vari addendi sono stati ottenuti sostituendo al posto di k i numeri interi compresi tra 3 e 8 che sono i valori tra cui varia l'indice k

3) $\displaystyle\sum_{k|12} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+6^2 = 1+4+9+16+36=66$

Spiegazione: la scrittura k|12 indica che k deve dividere 12, poiché i divisori di 12 sono 1,2,3,4 e 6 per calcolare la precedente sommatoria nell'espressione algebrica (k^2) abbiamo sostituito tali valori.

4) $\displaystyle\sum_{k\in\{4,16,36\}} \sqrt{k} = \sqrt{4}+\sqrt{16}+\sqrt{36} = 2+4+6=12$

Spiegazione: in questo caso l'indice della sommatoria appartiene ad un insieme ben definito, quindi per calcolare la somma abbiamo sostituito gli elementi dell'insieme al posto di k

Proprietà della sommatoria

La sommatoria, intesa come somma di un certo numero di addendi, gode di svariate proprietà che spesso agevolano il calcolo della somma e che elenchiamo qui di seguito.

- Proprietà associativa: quando abbiamo due o più sommatorie in cui gli indici hanno lo stesso intervallo di definizione, allora la somma algebrica delle sommatorie è uguale alla sommatoria della somma algebrica.

$$\sum_{k=m} f(k) \pm \sum_{k=m} g(k) = \sum_{k=m} [f(k) \pm g(k)]$$

- **Proprietà dissociativa:** la sommatoria di una somma algebrica equivale alla somma algebrica delle singole sommatorie.

$$\sum_{k=m}^{n} [f(k) \pm g(k)] = \sum_{k=m}^{n} f(k) \pm \sum_{k=m}^{n} g(k)$$

- **Proprietà distributiva:** si può estrarre un fattore che non dipende dall'indice della sommatoria o equivalentemente, un fattore esterno alla sommatoria può essere portato al suo interno

$$\alpha \cdot \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m}^{n} [\alpha \cdot f(k)]$$

- **Scomposizione degli indici:** una sommatoria si può scomporre nella somma di due o più sommatorie facendo variare in maniera opportuna l'intervallo di definizione dell'indice

$$\sum_{k=m}^{n_1+n_2} f(k) = \sum_{k=m}^{n_1} f(k) + \sum_{k=m}^{n_1+n_2} f(k)$$

- **Traslazione degli indici:** si può cambiare a piacimento l'intervallo di definizione dell'indice a patto però di far variare di conseguenza l'espressione algebrica della sommatoria

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m}^{n+\ell} f(k-\ell)$$

Somma di una progressione geometrica

Si dice che n termini sono in progressione geometrica se il rapporto tra ogni termine (a partire dal secondo) e il precedente è costante.

Se il primo termine termine è a e la ragione è q i termini successivi saranno aq, aq^2, aq^3 e così via quindi:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Coefficenti binomiali e formula di Newton

Sviluppando la potenza n-esima di un binomio $(a+b)$ si trova:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\, a^k b^{n-k}$$

che scritta più semplicemente sarà:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ma per poter capire questo ci servono due definizioni:

Definizione di fattoriale

Dato un numero naturale n, si dice fattoriale di n

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \end{cases}$$

Il fattoriale si indica con $n!$. Ad esempio:

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$

e, per definizione, zero fattoriale è posto convenzionalmente uguale a 1:

$0! = 1$

Definizione di coefficente binomiale

Dati due numeri naturali n,K, si dice coefficente binomiale di n su K

$$\binom{n}{K} = \begin{cases} \dfrac{n!}{K!(n-K)!} & \text{se } n,K \in \mathbb{N}, 0 \le K \le n \\ 0 & \text{se } n,K \in \mathbb{N}, 0 \le n \le K \end{cases}$$

Formula di Newton

Grazie alla precedente definizione possiamo riscrivere la formula di Newton in termini più comprensibili:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{n} \frac{n!}{K!(n-K)!} a^{n-K} b^K$$

Principio di induzione

Il principio di induzione è una tecnica di dimostrazione che consente di dimostrare la validità di una tesi dalla verifica di due condizioni: la validità del passo zero e la validità del passo induttivo

Questo si utilizza quando è richiesta la dimostrazione di una proprietà, di un teorema o ancora di una proposizione in cui enunciato è formato in funzione dei numeri naturali.

Esempio:

Dimostrare per induzione che $\forall n \ge 0$ vale:

$$\underbrace{\sum_{K=0}^{n} K^2}_{sx} = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{dx}$$

1) Verifichiamo la formula per n=0 e sostituisco con 0 sia a simistra che a destra:

$$sx)\ \sum_{K=0}^{0} K^2 = 0^2 = 0$$

$$dx)\ \frac{0(0+1)(1\cdot 0+1)}{6} = 0$$

Sono uguali quindi il PASSO BASE è dimostrato

2) Ora passiamo al Passo induttivo dove supponiamo che la formula sia vera per un n qualsiasi e dimostriamo che è vera anche per n+1.

Le nostre ipotesi sono che la formula è vera per un n qualsiasi e la nostra tesi è che la formula vale anche per il successivo di n quindi n+1.

$$\text{TESI: } \sum_{K=0}^{n+1} K^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

→ ho sostituito le n con n+1!

SONO UGUALI

Dimostrazione:

$$\sum_{K=0}^{n+1} K^2 = \sum_{K=0}^{n} K^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Verificato

osservazione: $\underbrace{(n+2)(2n+3)}_{\text{(preso dalla formula normale)}} = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$

Conclusione: La formula vale $\forall n \geq 0$