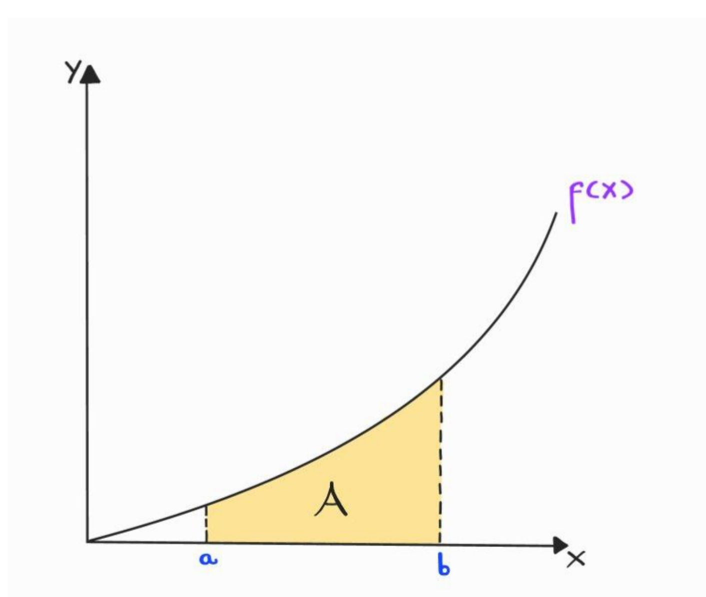
Integrali

▼ *INDICE*

0 Introduzione

Per capire cosa intendiamo con integrale di una funzione immaginiamo di voler calcolare l'area della figura sottostante alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.



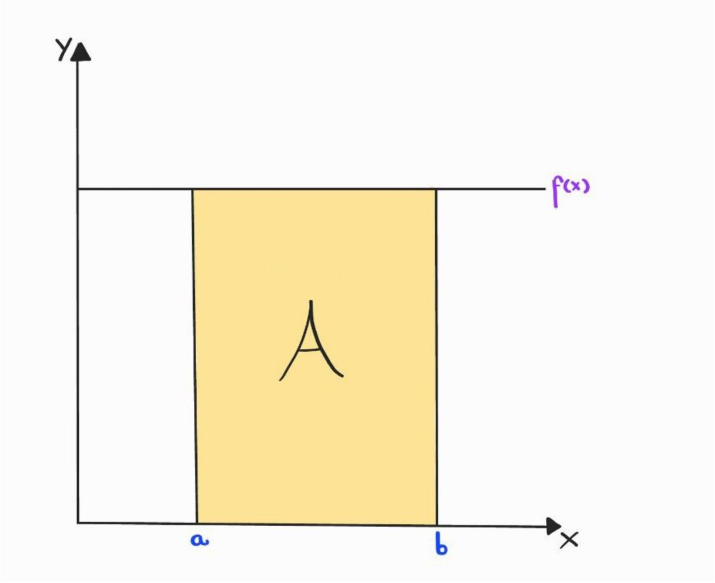
Dove abbiamo $f(x)$ che è la nostra funzione integranda, e gli intervalli(zona) di integrazione a e b.

Noi tramite l'integrale andremo a calcolare l'area della figura rappresentata sotto la funzione quindi:

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Dove A è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $f(x)$, l'asse x, a e b.

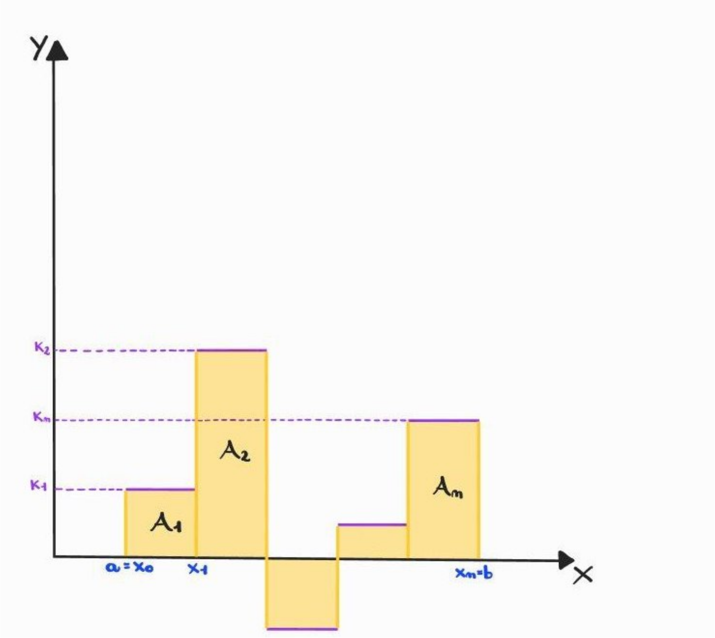
Proviamo ora a vedere un caso dove abbiamo però una funzione costante che valga sempre k(quindi ha come grafico una retta orizzontale)



Dove sia $f(x) = k$, con k costante reale, allora l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ è:

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{(b-a)}_{base} \cdot \underbrace{k}_{altezza} = \underbrace{A}_{Area\ del\ rettangolo}$$

Questo era un caso abbastanza elementare di una funzione costante, proviamo a vedere quindi un caso un po' più particolare, come per esempio una funzione costante a tratti:

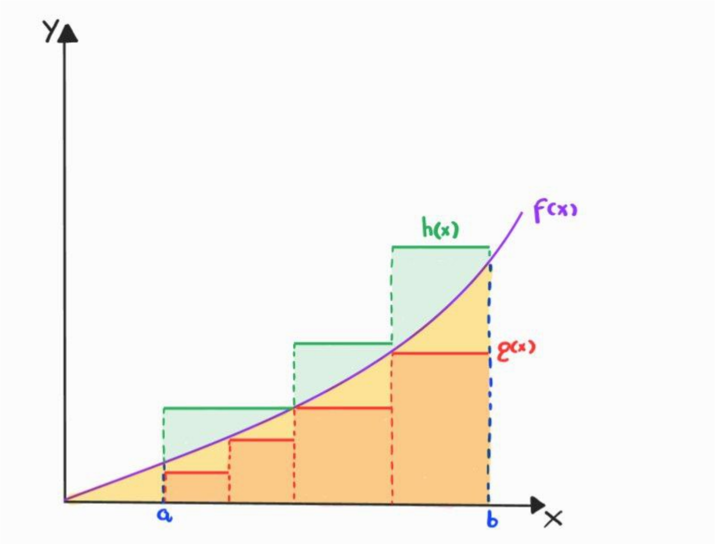


Sia $f(x)$ una funzione a scala(che assume il valore x_i nell'i-esimo intervallo avente k_{i-1} e x_i come estremi).
Allora l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ è:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \cdot \underbrace{k_i}_{altezza} = Somma\ delle\ aree\ dei\ rettangoli$$

2 Integrazione secondo Riemann

La faccenda diventa molto meno banale, quando la nostra funzione non è più costante. per esempio:



Come possiamo vedere, non avendo una funzione costante, non uscirà fuori il solito rettangolo, bensì, in questo caso, una specie di trapezio.

Cosa fare in questi casi?

L'idea sarebbe quella di considerare delle funzioni a scala che siano sempre maggiori o uguali della nostra funzione $f(x)$, nel nostro caso tale funzione a scala si chiamerà $h(x)$, inoltre dobbiamo considerare una seconda funzione a scala che è sempre minore o uguale a $f(x)$ e nel nostro caso si chiamerà $g(x)$.

Più precisamente possiamo dire che l'area del sotto-grafico che vogliamo calcolare dev'essere:

$$sup\left\{\int_a^b g(x)dx\right\} \leq A \leq inf\left\{\int_a^b h(x)\right\}$$

Dove ci aspettiamo che l'estremo inferiore coincida con l'Area che vogliamo calcolare, perché funzioni a scala di questo tipo approssimano per eccesso la funzione f e quindi il loro integrale ci darà una sovrastima dell'Area A. Nel caso dell'estremo superiore invece si approssima per difetto.

Possiamo riscrivere il tutto come:

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} M_k$$

dove m_k e M_k sono rispettivamente il minimo e il massimo del k-esimo intervallo, quindi la sua forma generalizzata sarà:

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}]f(x) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}]f(x)$$

dove n corrisponde al numero di suddivisioni e ogni x_k corrisponde a:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{2}$$

📖 ***NOTA:***

Può succedere però che la figura venga suddivisa infinite volte. Quindi concluderemo che l'errore nella stima si riduce ad un valore infinitesimale, così come la differenza tra $\underline{S_n}$(ossia, come visto prima, la somma dei rettangoli minori che vanno man mano ad aumentare) e $\overline{S_n}$(ossia, come visto prima, la somma dei rettangoli maggiori che vanno man mano ad aumentare).

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \underline{S}$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \overline{S}$$
$$\underline{S} = A = \overline{S}$$

Possiamo concludere che effettuando il limite per $n \to \infty$, le somme $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$ convergono al valore dell'Area A.

Se $f(x)$ è una funzione su cui può. essere applicato tale concetto, allora si dice che f è integrabile secondo Riemann.

✏️ ***DEFINIZIONE DI INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN:***

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che f è integrabile secondo Riemann se dati:

- Il limite per $n \to \infty$ della somma $\underline{S_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}]f(x) = \underline{S}$$

- I limite per $n \to \infty$ della somma $\overline{S_n}$:

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}]f(x) = \overline{S}$$

si verifica che:

- l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ di $f(x)$ viene denominato con:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Come possiamo, quindi, calcolare l'integrale?

Per calcolare un integrale devo seguire i seguenti passi:

1. Trovare una funzione che, nell'intervallo $[a, b]$, abbia $f(x)$ come derivata(ovvero una primitiva di f);
2. Una volta trovata, la calcolo negli estremi della zona di integrazione(calcolo cioè $F(b)$ e $F(a)$);
3. Sottraggo i 2 valori $\Rightarrow F(b) - F(a)$.

📎 ***ESEMPIO INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN:***

$$\int_0^1 x\,dx$$

$$min[x_k, x_{k+1}]f(x) = f(x_k) = a + k\frac{b-a}{2^n} = \frac{k}{2^n}$$

$$max[x_k, x_{k+1}]f(x) = f(x_{k+1}) = a + (k+1)\frac{b-a}{2^n} = \frac{k+1}{2^n}$$

Calcoliamo $\overline{S}$ e $\underline{S}$:

$$\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max[x_k, x_{k+1}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2^n \cdot (2^n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min[x_k, x_{k+1}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2^n-1) \cdot 2^n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$