Insiemi

Il linguaggio degli insiemi si basa su 3 parole chiave:

1) Insieme
2) Elemento
3) Appartenenza

Un insieme è determinato dai suoi elementi, quindi un insieme è **definito** quando abbiamo un criterio con cui stabilire se un oggetto è non è elemento di questo insieme
Quando un oggetto fa parte di un determinato insieme si dirà che quell'elemento **appartiene** all'insieme.

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole, come:

$$A, B, X, Y \ldots$$

Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole $(a, b, c, x, y \ldots)$, e per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A scriviamo:

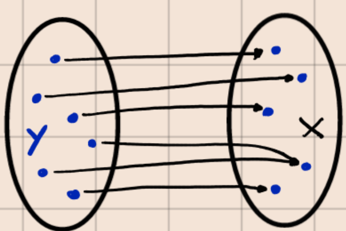
$$x \in A \rightarrow x \text{ appartiene ad } A$$

Applicazioni tra insiemi

Tramite un'applicazione associo ad ogni elemento dell'insieme A associo un elemento dell'insieme B.
Le applicazioni possono essere:

- **suriettiva** quando ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X:

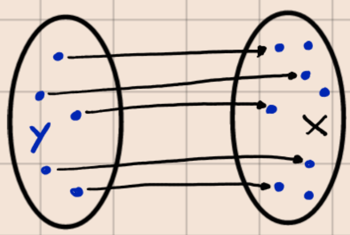
$$f(x) = Y$$



ogni punto dell'insieme X è raggiunto da almeno una freccia però è possibile che più di due elementi di Y puntino verso lo stesso elemento di X.

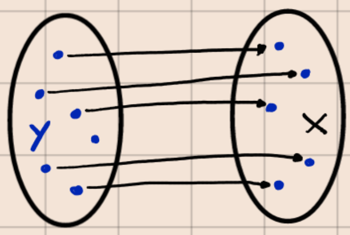
• **iniettiva** se a elementi distinti di X corrispondono elementi distinti di Y:

se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$



ogni elemento di Y punta ad un unico elemento di B, però è possibile che non tutti gli elementi di X vengano raggiunti.

• **biettiva o univoca** quando è sia iniettiva e suriettiva:



è sia iniettiva (ad elementi distinti di Y corrispondono elementi distinti di X) che suriettiva (ogni elemento di X è raggiunto da una freccia).

Come si specifica un insieme

Quando diciamo

$$A = \{1, 2, 5\}$$

significa che l'insieme A ha come elementi i numeri 1, 2, 5, quindi l'insieme è ben definito elencando gli elementi che vi appartengono (o per **Tabulazione**).

Definire un insieme per Tabulazione presuppone che l'insieme abbia un numero finito di elementi.

Dobbiamo ricordare che in un insieme:

- l'ordine degli elementi è irrilevante, quindi:

$$\{1, 2, 5\} = \{1, 5, 2\}$$

  l'unica cosa che conta è definire quali elementi appartengono a quel determinato insieme
- non c'è bisogno di specificare se un elemento di un insieme è contato più volte

Relazioni tra insiemi: uguaglianza

Abbiamo già detto che due insiemi sono uguali quando possiedono gli stessi elementi, quindi

$A = B$ significa:

Ogni elemento che appartiene anche a B e ogni elemento che appartiene a B appartiene anche ad A.

Dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi comporta quindi dimostrare due proposizioni distinte:

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ e } \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

- il simbolo $\forall$ si chiama **quantificatore universale** e si legge "per ogni", "per tutti", "per ciascuno";
- il simbolo $\Rightarrow$ si chiama **implicazione logica** e si legge "implica" o "se.... allora", ad esempio: se $x \in A$ allora $x \in B$

Relazioni tra insiemi: inclusione

Può accadere che valga solo un delle due richieste espresse dalla definizione di uguaglianza.

Esempio:

Se sappiamo solo che ogni elemento di A è anche elemento di B, possiamo dire che A è contenuto in B e si scrive:

$A \subseteq B$ = A è contenuto in B

quindi possiamo dire anche:

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Quindi dire che $A=B$ equivale a dire che $A\subseteq B$ e che $B\subseteq A$.
Se invece vogliamo proprio affermare che A è contenuto in B ma non coincide con B, diremo che A è strettamente contenuto in B e scriveremo:

$$A \subsetneq B$$

in tal caso significa affermare che ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B ed esisterà un elemento di B che non appartiene ad A.

$$\forall x\,(x\in A \Rightarrow x\in B) \text{ e } \exists x\in B : x\notin A$$

- il simbolo $\exists$ si chiama quantificatore esistenziale e si legge "esiste", "esistono";
- il simbolo $:$ si legge "tale che";
- il simbolo $\notin$ si legge "non appartiene".

Insieme vuoto

L'insieme vuoto è quell'insieme che non contiene nessun elemento, questo insieme si indica con questo simbolo:

$$\emptyset$$

L'insieme vuoto ha 0 elementi, con questo non si intende che è il numero 0 e neanche l'insieme $\{0\}$ perché in questo caso un elemento ci sarebbe, mentre $\emptyset$ non ne ha nessuno.
Per qualsiasi insieme A, possiamo affermare che

$$\emptyset\subseteq A$$

Per dimostrarlo dovremmo provare che ogni elemento che appartiene a $\emptyset$, appartiene anche ad A, ma nessun elemento appartiene a $\emptyset$.