Calcolo Integrale Compito n. 00155

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La serie di termine generico $\frac{1}{k+1}$ è divergente.

Vero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \rightarrow \alpha \leq 1 \quad \text{Diverge}$$

1B) La serie di termine generico $\frac{3^k}{4^k}$ è convergente.

Vero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \rightarrow q = \frac{3}{4} \quad \text{Converge essendo } -1<q<1$$

1C) La serie di termine generico $\frac{1}{k\sqrt{k}}$ è convergente

Vero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \qquad \underset{\frac{3}{2}}{\underset{\downarrow}{\alpha}} > 1 \quad \text{Converge}$$

1D) La serie di termine generico $\frac{5^k}{(-4)^k}$ non converge

Vero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^k \rightarrow q = -\frac{5}{4} \qquad q \leq -1 \quad \text{Indeterminata (Non esiste)}$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\frac{3^k}{4^k}$ converge a 4.

Vero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \qquad q = \frac{3}{4} \quad \text{Converge con somma } \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$$

2B)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$$

Falso

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

2C)

$$\sum_{K=0}^{\infty} 4^K = \frac{4^{18+1}}{3}$$

Falso

$$\sum_{K=18}^{\infty} 4^K = 4^{12} \sum_{K=0}^{\infty} 4^K = 4^{12} \cdot +\infty = +\infty$$

2D) La serie di termine generico $\frac{15}{5^K}$ converge a $\frac{15}{4}$.

Falso

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{15}{5^K} = 15 \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^K = 15 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{75}{4}$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La serie di termine generico $\frac{K}{K+1}$ può essere convergente.

Falso

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{K}{K+1} \rightarrow \lim_{K\to\infty} \frac{K}{K+1} = 1$$ Diverge perché $K \not\to 0$

3B) La serie di termine generico $\cos^2\left(\frac{1}{K+5}\right)$ è convergente

Falso

$$\sum_{K=0}^{\infty} \cos^2\left(\frac{1}{K+5}\right) \rightarrow \lim_{K\to\infty} \cos^2\left(\frac{1}{K+5}\right) = 1$$ Non può essere convergente

3C) La serie a termine generico $\sin\left(\frac{1}{K+5}\right)$ o converge o diverge positivamente.

Vero

$$\sum_{K=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{K+5}\right) \rightarrow \lim_{K\to\infty} \sin\left(\frac{1}{K+5}\right) = 0$$ quindi o converge o diverge positivamente

3D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^K}{K+3}$ soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

Vero

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K+3} \rightarrow \lim_{K\to\infty} \frac{(-1)^K}{K+3} = 0$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) La serie di termine generico $e^{7/k^2}-1$ è divergente.

$$e^{7/k^2}-1 \sim \frac{7}{k^2}$$ Falso

infatti

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{7/k^2}-1}{\frac{7}{k^2}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7}{k^2} \to \alpha=2 \quad \alpha>1 \quad \text{Converge}$$

4B) La serie di termine generico $\ln(1+\frac{4}{k})$ è divergente

$$\ln\left(1+\frac{4}{k}\right) \sim \frac{4}{k}$$

infatti Vero

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{4}{k})}{\frac{4}{k}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k} \quad \alpha\leq 1 \quad \text{Diverge}$$

4C) La serie di termine generico $tg\left(\frac{k}{k+2}\right)$ è divergente

Vero

$$\lim_{k\to\infty} tg\left(\frac{k}{k+2}\right) = tg(1) \not\to 0 \quad \text{Diverge}$$

4D) La serie di termine generico $k^4 \sin\left(\frac{1}{k^7}\right)$ è divergente.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^4 \sin(\frac{1}{k^7})}{\frac{1}{k^3}} = \frac{\sin(\frac{1}{k^7})}{\frac{1}{k^7}} = 1$$

infatti Falso

$$k^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{k^7}\right) \sim \frac{1}{k^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad \alpha=3 \quad \alpha>1 \quad \text{Converge}$$

5) Sia $a_K = \frac{1}{K^8}$ per $K \geq 1$

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^8} \quad \alpha = 8$$ essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$ Converge

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{a_K}{a_{K+2}}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{K^8}}{\frac{1}{(K+2)^8}} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^8}{(K+2)^8} \to \lim_{K\to\infty} \frac{K^8}{(K+2)^8} = 1$$ Diverge perché $a_K \not\to 0$

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=1}^{\infty} K^2 \cdot tg\left(\frac{1}{K^8}\right)$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{K^2 \cdot tg\left(\frac{1}{K^8}\right)}{\frac{1}{K^6}} = \frac{tg\left(\frac{1}{K^8}\right)}{\frac{1}{K^8}} = 1$$

infatti

$$K^2 \cdot tg\left(\frac{1}{K^8}\right) \sim \frac{1}{K^6}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^6} \quad \alpha = 6 \quad \alpha > 1$$ allora converge

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1-\cos(a_K)}{\ln(1+a_K)}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1-\cos(a_K)}{\ln(1+a_K)} = \frac{a^2_K}{2a_K} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^8}$$ Converge

6) Sia $a_K = 5^K$ per $K \geq 0$

a) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_K$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} 5^K \rightarrow q=5$$ quindi $q \geq 1$ per questo Diverge

b) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{a_K}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{5^K} = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^K \quad q = \frac{1}{5}$$ quindi $-1 < q < 1$ per questo Converge

c) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{a_K}{6^K}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{5^K}{6^K} = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^K \quad q = \frac{5}{6}$$ quindi $-1 < q < 1$ per questo Converge

d) Dire (motivando la risposta) se è convergente o no la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{K^5 \cdot a_K}{K!}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{K^5 \cdot 5^K}{K!}$$

Avendo $K!$ useremo il Criterio del rapporto, quindi:

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\frac{(K+1)^5 \cdot 5^{(K+1)}}{(K+1)!}}{\frac{K^5 \cdot 5^K}{K!}} = \lim_{K \to \infty} \frac{5(K+1)^4}{K^5} = 0$$

$\ell(0) < 1$ quindi converge