

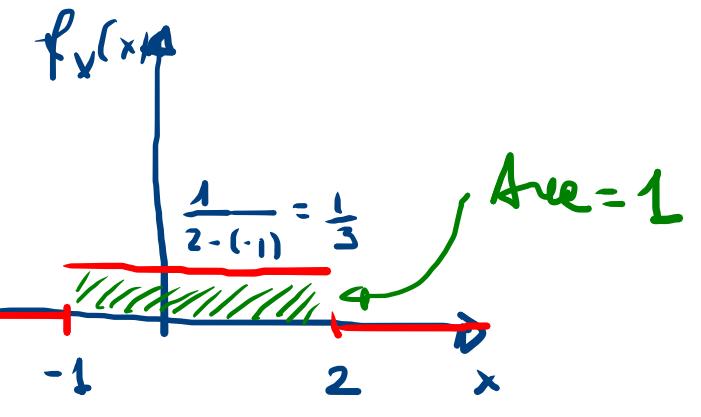
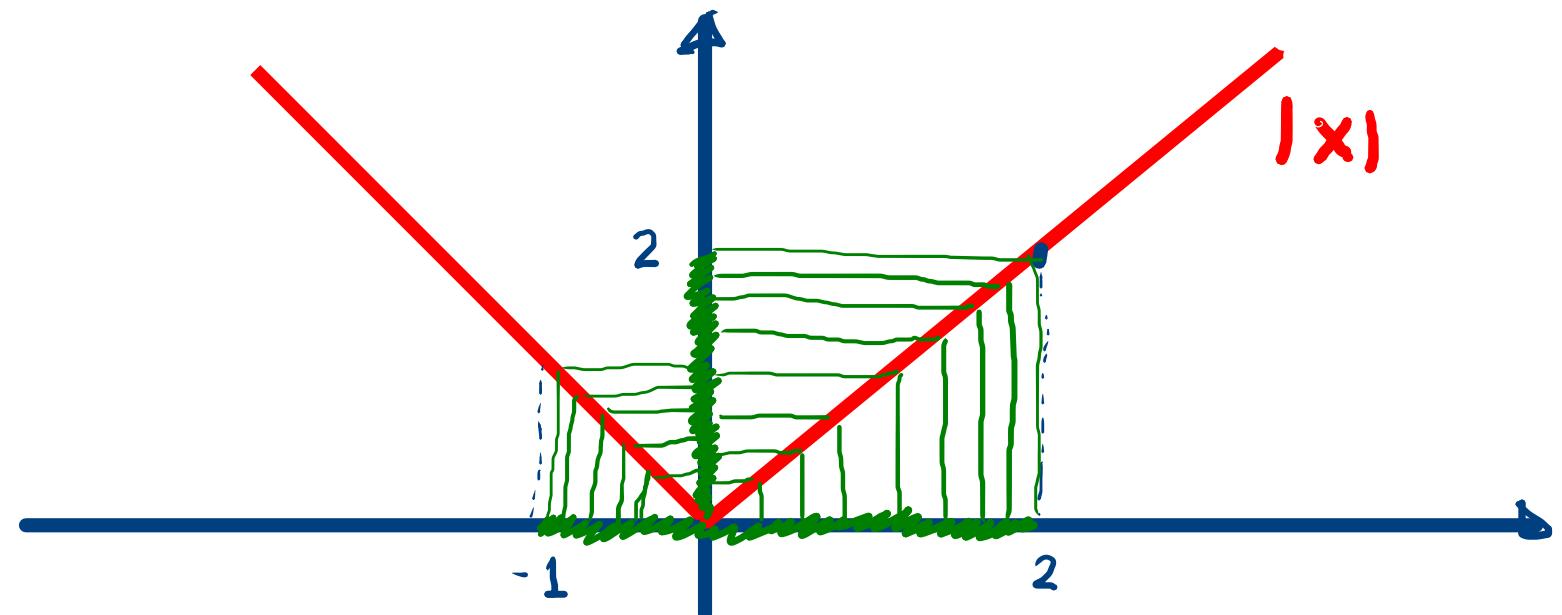
ESERCIZIO

Sia $X \sim U(-1, 2)$, Trovare la densità continua di $Y = |X|$.

RISPOSTA

Abbiamo $Y = f(X)$ con f non monotone. La funzione f non è monotone neanche in un insieme S tale che $P(X \in S) = 1$.

Si ha

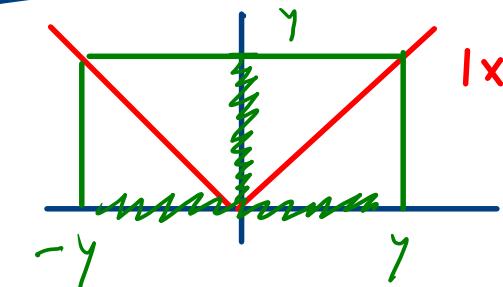


Il grafico mostra che
 $P(Y \in U) = 1$
dove $U = (0, 2)$
de cui segue ...

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \star & \text{per } y \in (0, 2) \\ 1 & \text{per } y \geq 2 \end{cases}$$

per $y \leq 0$
per $y \in (0, 2)$.

per $y \geq 2$



$$\{|x| \leq y\} = \{-y \leq x \leq y\}$$

per $y \geq 0$

Inoltre

$$\star = P(Y \leq y) = P(|x| \leq y) \stackrel{\downarrow}{=} P(-y \leq x \leq y) = \int_{-y}^y f_X(x) dx = \int_{-y}^y \frac{1}{2-(-1)} 1_{(-1,2)}(x) dx =$$

$$= 1/3$$

Abbiamo due sotto casi:

$$1) \quad y \in (0, 1] \Rightarrow \text{Diagram showing a red rectangle from x = -1 to x = 1 and y = 0 to y = 1. A green shaded region is within this rectangle, bounded by x = -y and x = y. The label '0' is at the top center of the rectangle.} \Rightarrow \star = \int_{-y}^y \frac{1}{3} dx = \left[\frac{x}{3} \right]_{x=-y}^{x=y} = \frac{y - (-y)}{3} = \frac{2y}{3}$$

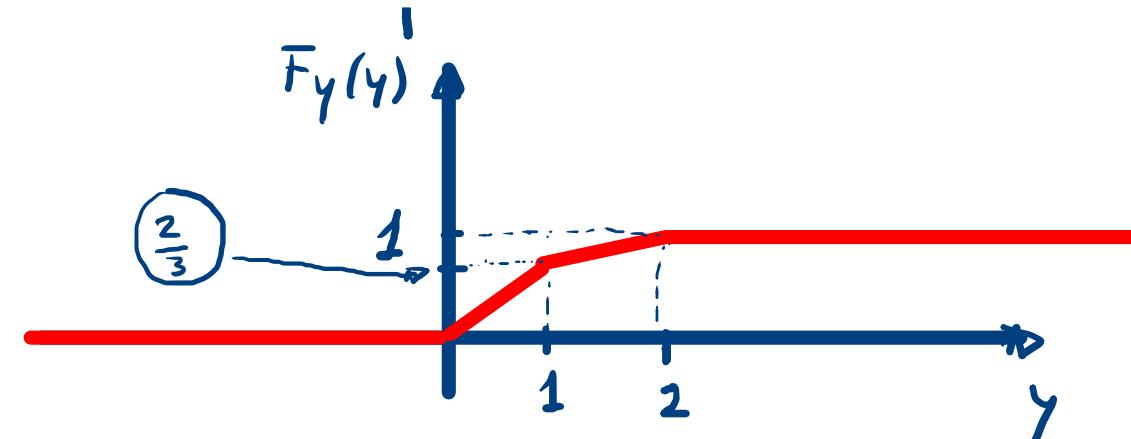
$$2) \quad y \in (1, 2) \Rightarrow \text{Diagram showing a red rectangle from x = -1 to x = 1 and y = 0 to y = 2. A green shaded region is within this rectangle, bounded by x = -1 and x = 1, and y = 1 to y = y. The label '0' is at the top center of the rectangle.} \Rightarrow \star = \int_{-1}^y \frac{1}{3} dx = \left[\frac{x}{3} \right]_{x=-1}^{x=y} = \frac{y - (-1)}{3} = \frac{y+1}{3}$$

OSS. In altri casi "senza monotonia" avevamo sfruttato alcune proprietà di simmetria. In questo caso non è possibile farelo e abbiamo dovuto considerare due sotto casi per calcolare \star .

Ricapitolando si ha

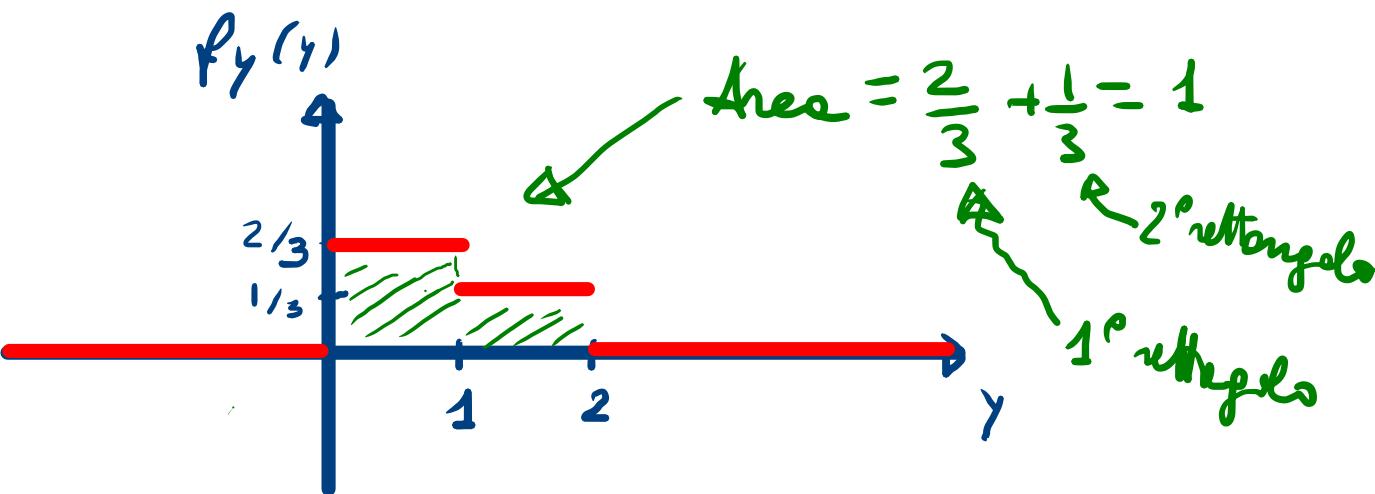
$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \frac{2y}{3} & \text{per } y \in (0, 1] \\ \frac{y+1}{3} & \text{per } y \in (1, 2) \\ 1 & \text{per } y \geq 2 \end{cases}$$

Si ha una funzione "continua a tratti" (collettive lineare a tratti) che si ricorda per continuare nei punti dove cambia la definizione ($y=0, y=1$ e $y=2$):



In fine derivando F_y (la funzione F_y non è derivabile per $y=0$, $y=1$ e $y=2$) si ha

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ 2/3 & \text{per } 0 < y < 1 \\ 1/3 & \text{per } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{per } y > 2 \end{cases} = \frac{2}{3} 1_{(0,1)}(y) + \frac{1}{3} 1_{(1,2)}(y)$$



COMMENTO. Abbiamo visto un esercizio in cui $Y = aX + b$ (con $a \neq 0$) con $X \sim U(0,1)$, Y ha distribuzione uniforme. Lo stesso vale per X uniforme qualsiasi. Qui abbiamo $Y = |X|$ in cui si hanno due etti diversi e abbiamo una situazione "con due uniformi su due intervalli diversi".

INDIPENDENZA PER V.A. (CONTINUE)

Se ha una definizione simile a quella per V.Q. discrete. In questo caso non possiamo dire che X_1, \dots, X_m sono indipendenti se

$\forall A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$

$$P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\}) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_m \in A_m).$$

[In questo caso basta richiedere le condizioni con A_1, \dots, A_m intervalli delle rette limitati:
 $A_1 = (a_1, b_1), \dots, A_m = (a_m, b_m)$ con $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \in \mathbb{R}$ e $a_1 < b_1, \dots, a_m < b_m$.]

A partire da queste condizioni, si può dimostrare che possiamo prendere anche insiemi A_1, \dots, A_m che sono intervalli non limitati e quindi

$a_i = -\infty$ per qualche $i = 1, \dots, m$ (anche più di un indice)

e/o

$b_i = +\infty$ per qualche $i = 1, \dots, m$ (anche più di un indice).

Si potrebbe anche fare riferimento al concetto di "densità congiunta continua" per poi dire che (in maniera analoga a quanto accade nel discreto) che

X_1, \dots, X_m indip. \iff densità congiunta = "prodotto densità marginali".

[Non Trattiamo questo approccio perché va oltre gli obiettivi del corso
(si dovrebbero considerare gli integrali multipli come analogo continuo delle somme
con più indici viste nel caso discreto).]

Abbiamo però le seguenti differenze:

$X_1, \dots, X_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ discrete $\Rightarrow \underline{X} = (X_1, \dots, X_m): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ discrete (m-dimensionale)

$X_1, \dots, X_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ continue in generale non implica che $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua
(m-dimensionale)

La spiegazione di questo va oltre gli scopi del corso.

MASSIMI e MINIMI DI V.A. CONTINUE INDEPENDENTI

Per semplicità tratteremo il caso di 2 v.a. X_1 e X_2 .

Alcuni ragionamenti si estendono...

In queste pagine, per quel che abbiamo visto (e per quel che vedremo dopo), dobbiamo supporre che le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti.

Poniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \max \{ X_1, X_2 \} \\ W = \min \{ X_1, X_2 \} \end{array} \right.$$

Qui procediamo adattando alcune cose viste per il caso di sette:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \{Z \leq z\} &= \{X_1 \leq z\} \cap \{X_2 \leq z\} && \text{indipendenza} \\ \Rightarrow F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X_1 \leq z)P(X_2 \leq z) \\ &= F_{X_1}(z)F_{X_2}(z) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \{W > w\} = \{X_1 > w\} \cap \{X_2 > w\}$$

$$\Rightarrow 1 - F_W(w) = (1 - F_{X_1}(w))(1 - F_{X_2}(w)) = 1 - F_{X_1}(w) - F_{X_2}(w) + F_{X_1}(w)F_{X_2}(w)$$

$$\Rightarrow F_W(w) = F_{X_1}(w) + F_{X_2}(w) - F_{X_1}(w)F_{X_2}(w)$$

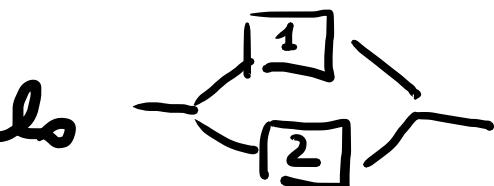
Allora derivando si ha:

$$f_Z(z) = f_{X_1}(z)F_{X_2}(z) + F_{X_1}(z)f_{X_2}(z) = F_{X_2}(z)f_{X_1}(z) + F_{X_1}(z)f_{X_2}(z)$$

$$\begin{aligned}f_W(w) &= f_{X_1}(w) + f_{X_2}(w) - \{f_{X_1}(w)F_{X_2}(w) + F_{X_1}(w)f_{X_2}(w)\} \\&= (1 - F_{X_2}(w))f_{X_1}(w) + (1 - F_{X_1}(w))f_{X_2}(w)\end{aligned}$$

Oss. Queste formule sono utili nel caso in cui X_1 e X_2 sono i tempi di funzionamento di due dispositivi e, sotto l'ipotesi di indipendenza, si ha:

Z = tempo di funzionamento del sistema con dispositivi in parallelo



W = tempo di funzionamento del sistema con dispositivi in serie



ESERCIZIO / ESEMPIO

$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Si ha

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{per } z \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda_2 z}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + (1 - e^{-\lambda_1 z}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & \text{per } z > 0 \end{cases}$$

$$= \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{per } w \leq 0 \\ (1 - (1 - e^{-\lambda_2 w})) \lambda_1 e^{-\lambda_1 w} + (1 - (1 - e^{-\lambda_1 w})) \lambda_2 e^{-\lambda_2 w} & \text{per } w > 0 \end{cases}$$

$$= \lambda_1 e^{-\lambda_1 w} e^{-\lambda_2 w} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 w} e^{-\lambda_1 w} = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) w}$$

OSS. Si ha $W = \min\{X_1, X_2\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Al contrario Z non ha distribuzione esponenziale, e nessuna delle distribuzioni notevoli continue che vedremo.

DISTRIBUZIONE NORMALE (o GAUSSIANA)

Abbiamo due definizioni: il caso standard, e il caso generale.

Il caso standard è un caso particolare al quale ci si può sempre ricordare a partire da una distribuzione Normale qualsiasi (del caso generale).

• DEFINIZIONE

Una v.a. X ha distribuzione Normale standard (in simboli: $X \sim N(0,1)$) se ha densità continua

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

• DEFINIZIONE

Sia Y una v.a. così definita: $Y = \sigma X + \mu$, dove $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, e $X \sim N(0,1)$.

Allora si dice che Y ha distribuzione Normale con parametri μ e σ^2 (in simboli:

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

In corrispondenza, per le formule già viste per v.a. del tipo $Y = aX + b$

(trasformazione affine) con $\begin{cases} a = \sigma \\ b = \mu \end{cases}$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\sigma|} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$
 $X \sim N(0, 1)$

OSS. Ponendo $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si ottiene il caso standard come caso particolare:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = f_X(y)$$

PROPOSIZIONE

Sia $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y^* = \frac{Y-\mu}{\sigma}$. Allora $Y^* \sim N(0, 1)$.

DMOSTRAZIONE

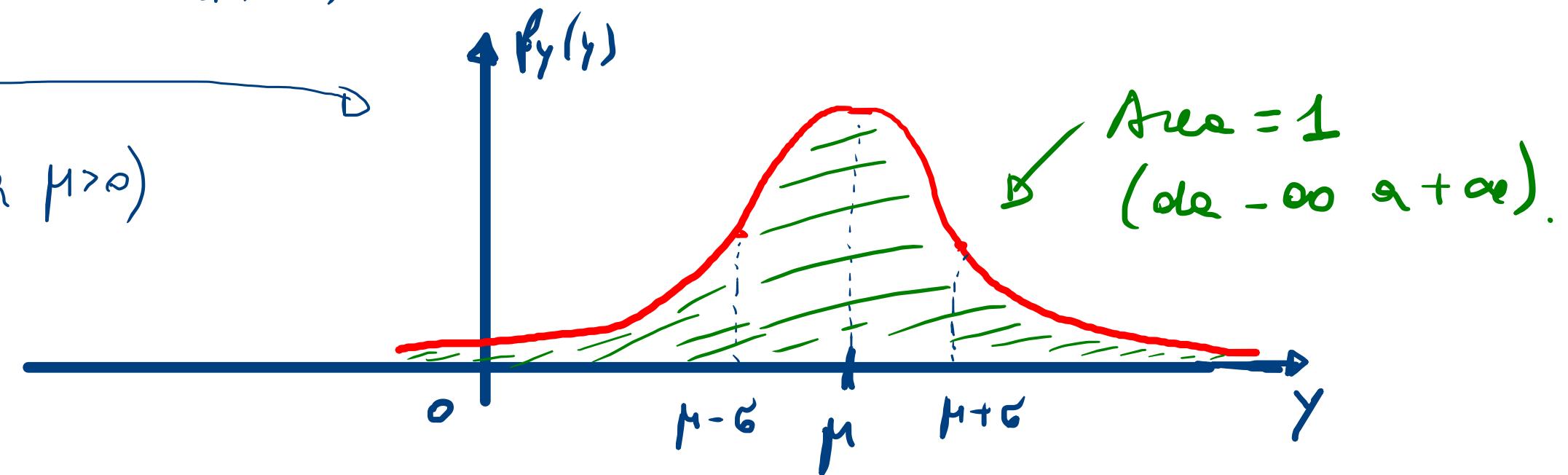
Si usa ancora le formule per le trasformazioni affine con $a = \frac{1}{\sigma}$ e $b = -\frac{\mu}{\sigma}$. Si ottiene

$$f_{Y^*}(x) = \frac{1}{|\frac{1}{\sigma}|} f_Y\left(\frac{x+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot f_Y\left(\sigma x + \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma x + \frac{\mu}{\sigma} - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

che è la densità di una v.a. con distribuzione $N(0, 1)$.

GRAFICI DI f_Y QUANDO $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(In questo caso specifica si ha $\mu > 0$)



In generale $f_Y(y)$ è simmetrica rispetto a $y = \mu$.

Si ha $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ dove $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ è una costante di normalizzazione.

In generale, con σ che si avvicina a zero, la curva si concentra maggiormente attorno a $y = \mu$ (vedere prossime slide)

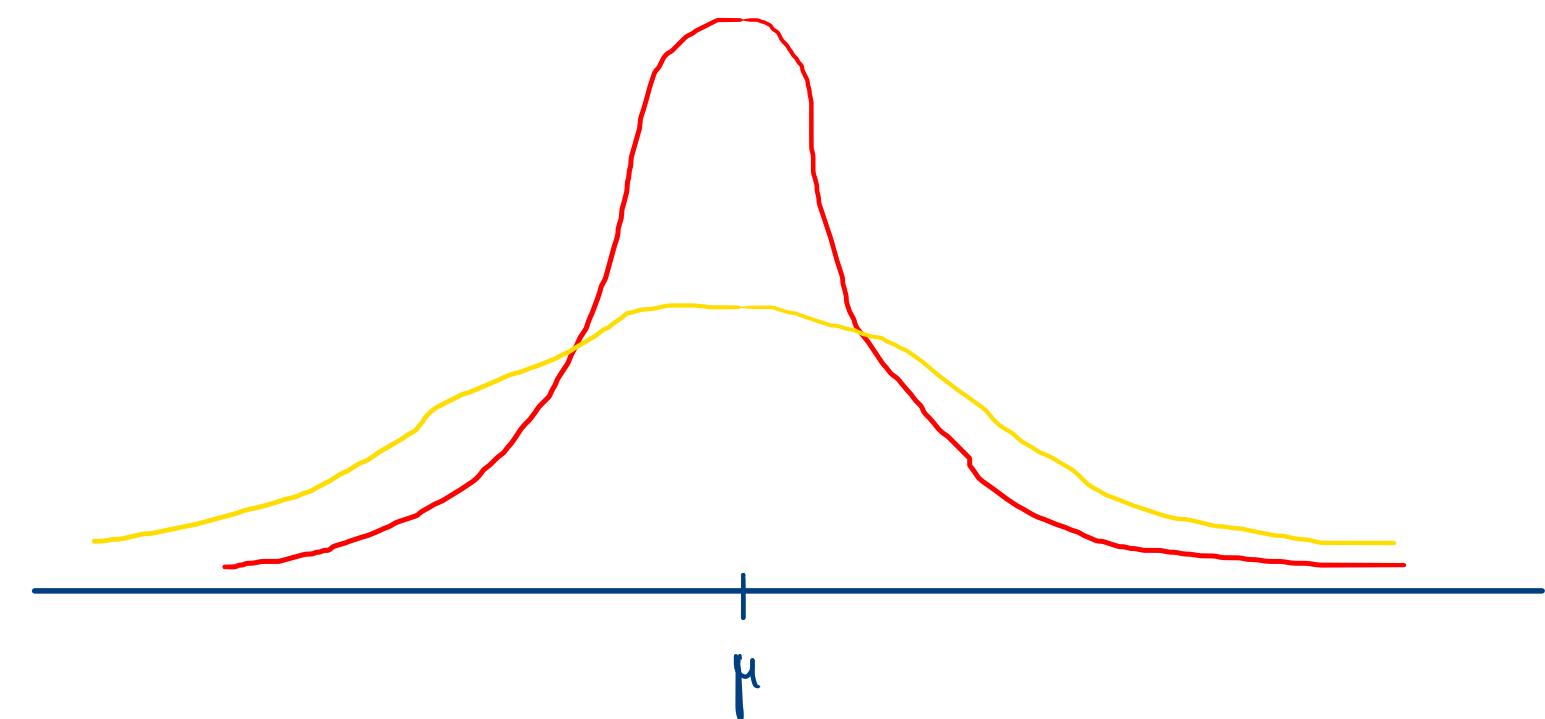
Questo sarà ancora più chiaro quando vedremo che μ e σ^2 rappresentano media e varianza delle v.a. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Prendiamo due densità di due Normali con lo stesso parametro μ e due diversi

valori σ_1^2 e σ_2^2 :

$$N(\mu, \sigma_1^2)$$

$$N(\mu, \sigma_2^2)$$



dove $\sigma_1 < \sigma_2$
(e quindi $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$).

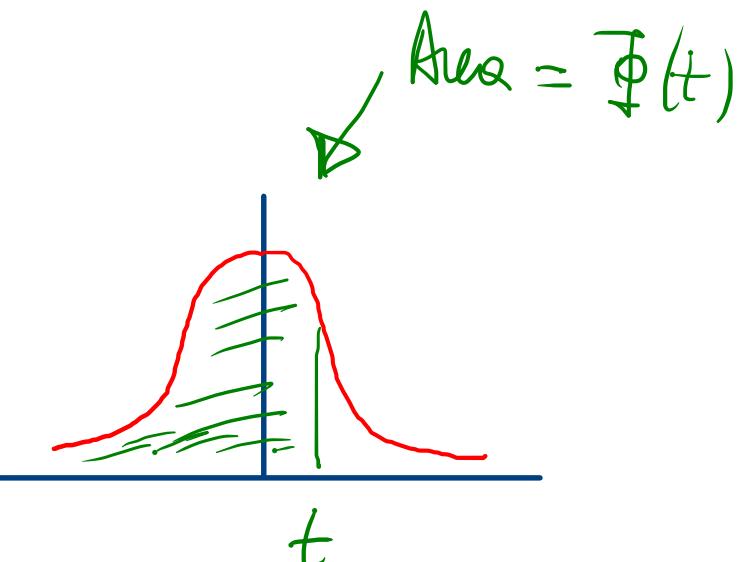
L'area sotto ciascuna delle due curve è uguale a 1.

NOTAZIONE CHE USEGGIO DURANTE IL CORSO

Φ (lettera greca "phi" maiuscola)

per la funzione di distribuzione di $X \sim N(0,1)$:

per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\Phi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$



Poi, per una Normale generale, cioè per $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, si ha

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\tilde{Z}X + \mu \leq t) = P(\tilde{Z}X \leq t - \mu) = P\left(X \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per un qualsiasi caso generale, si può ricordare al caso standard.

la funzione Φ ha le proprietà desiderate che deve avere la funzione di distribuzione di una v.a. continua.

Infatti

- Φ è crescente (e quindi non decrescente)
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = 0$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1$
- Φ è continua, e ovviamente è derivabile per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Però c'è un problema:

non si riesce ad esprimere le primitive di $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ tramite funzioni elementari, e quindi non si ha un'espressione per $\Phi(t)$.

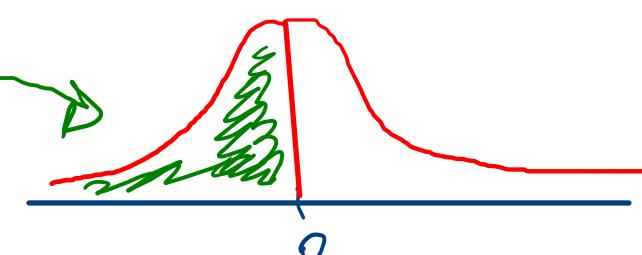
In generale i valori di $\Phi(t)$ si ottengono da opportune tavole (e sono approssimati).

Solo per $t=0$ abbiamo un valore esatto: si ha

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

perché

$$\text{Area} = \frac{1}{2}$$

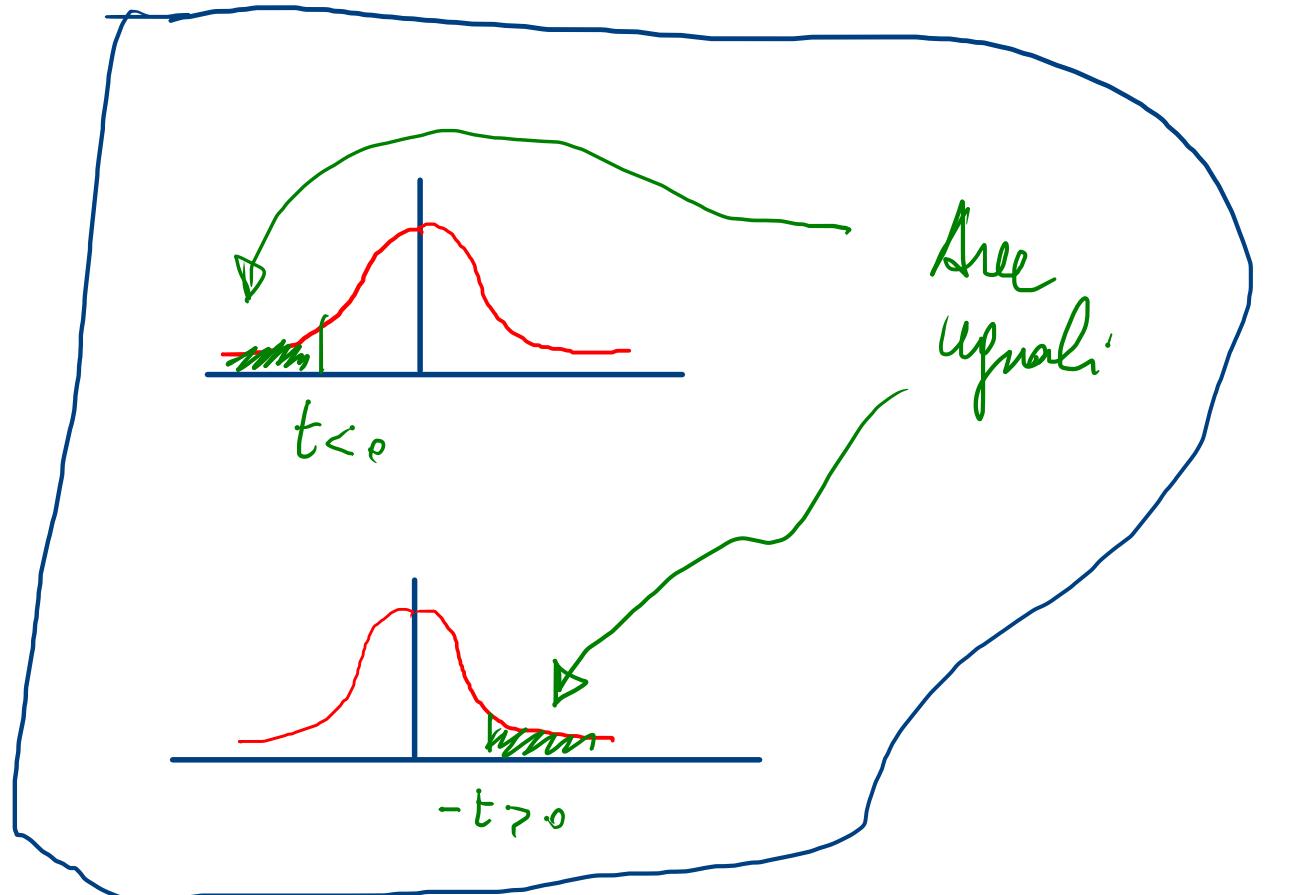
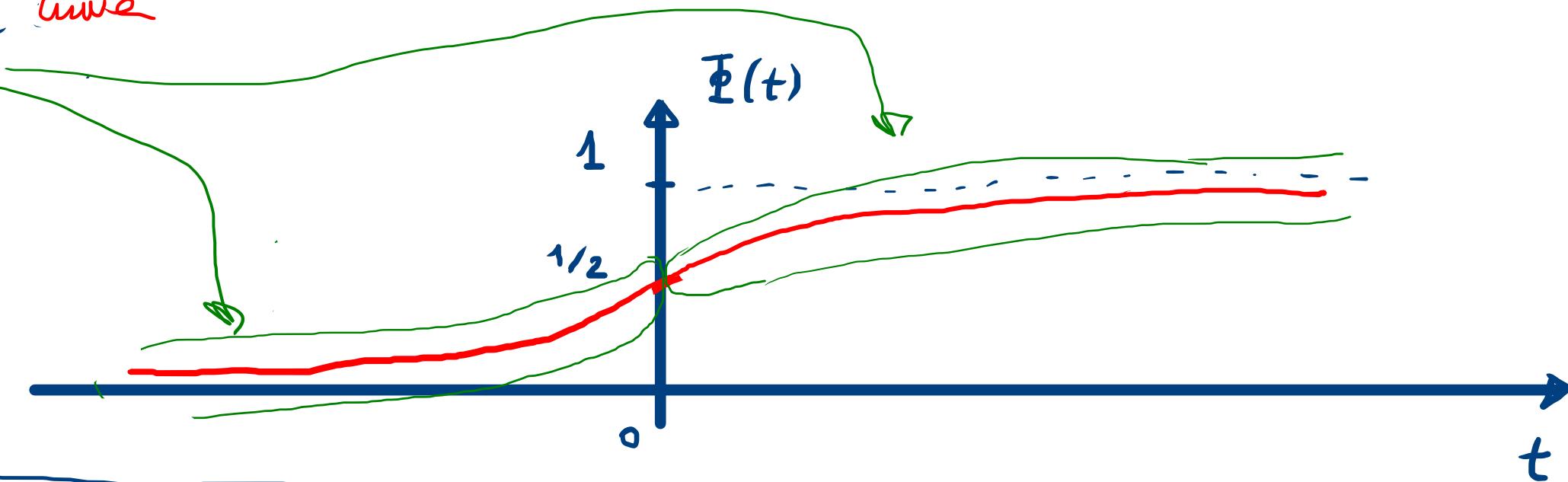


Per maggiore chiarezza possiamo dire che graficamente abbiamo questa situazione:

OSS.

I due tratti delle curve
sono simmetrici

Queste simmetrie
si spiega
osservando che



$$\Phi(t) = 1 - \Phi(-t) \quad \text{per } t < 0$$

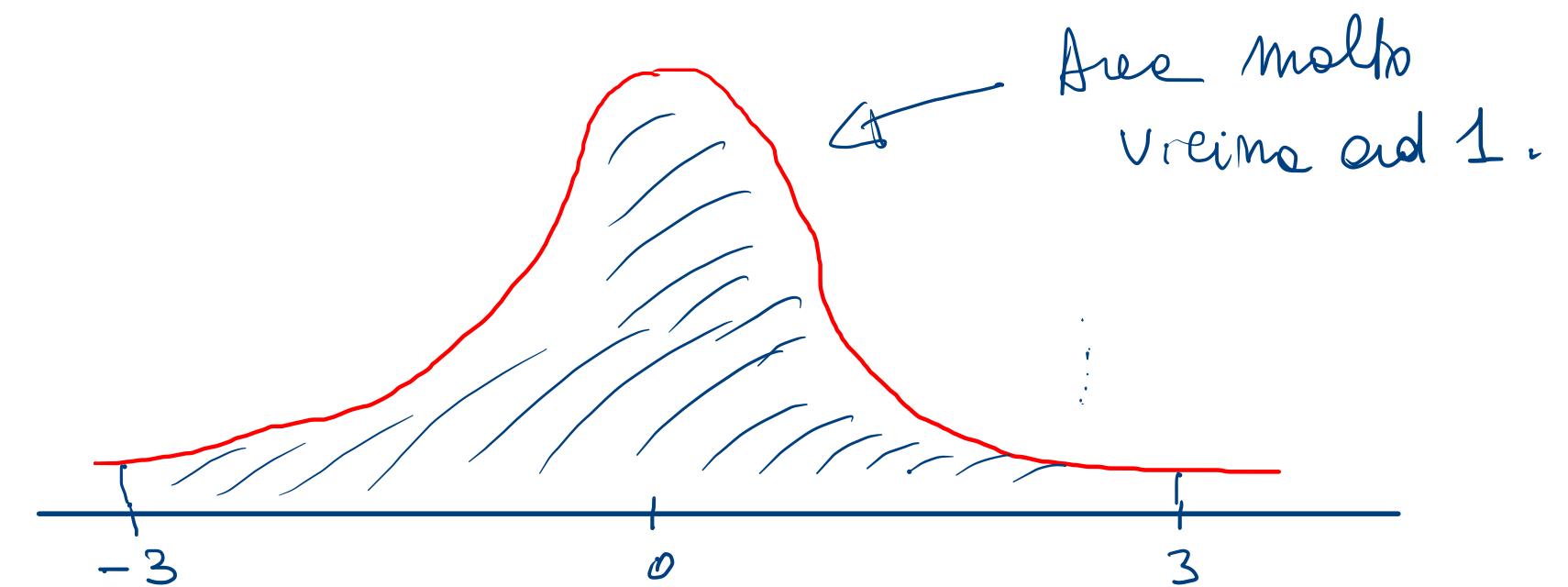
(il valore di $\Phi(t)$ con $t < 0$ segue da
quello di $\Phi(-t)$ con $-t > 0$; nelle tavole si
considera solo il caso di argomenti positivi).

I valori di $\Phi(t)$ per $t > 0$ sono tabulati (censo all'uso delle tavole sulle prossime slide).

Ovviamente sono valori approssimati.

Si prendono valori $\Phi(t)$ per $0 \leq t \leq 2.99$. Quando $t = 2.99$ abbiamo un valore molto vicino a 1, e a maggior ragione vale lo stesso per $\Phi(t)$ con $t > 2.99$.

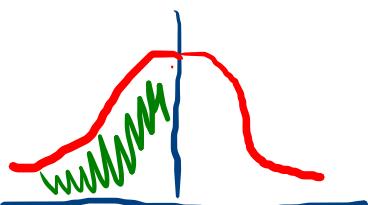
In altri termini si ha



ISTRUZIONI SULL'USO DELLE TAVOLE

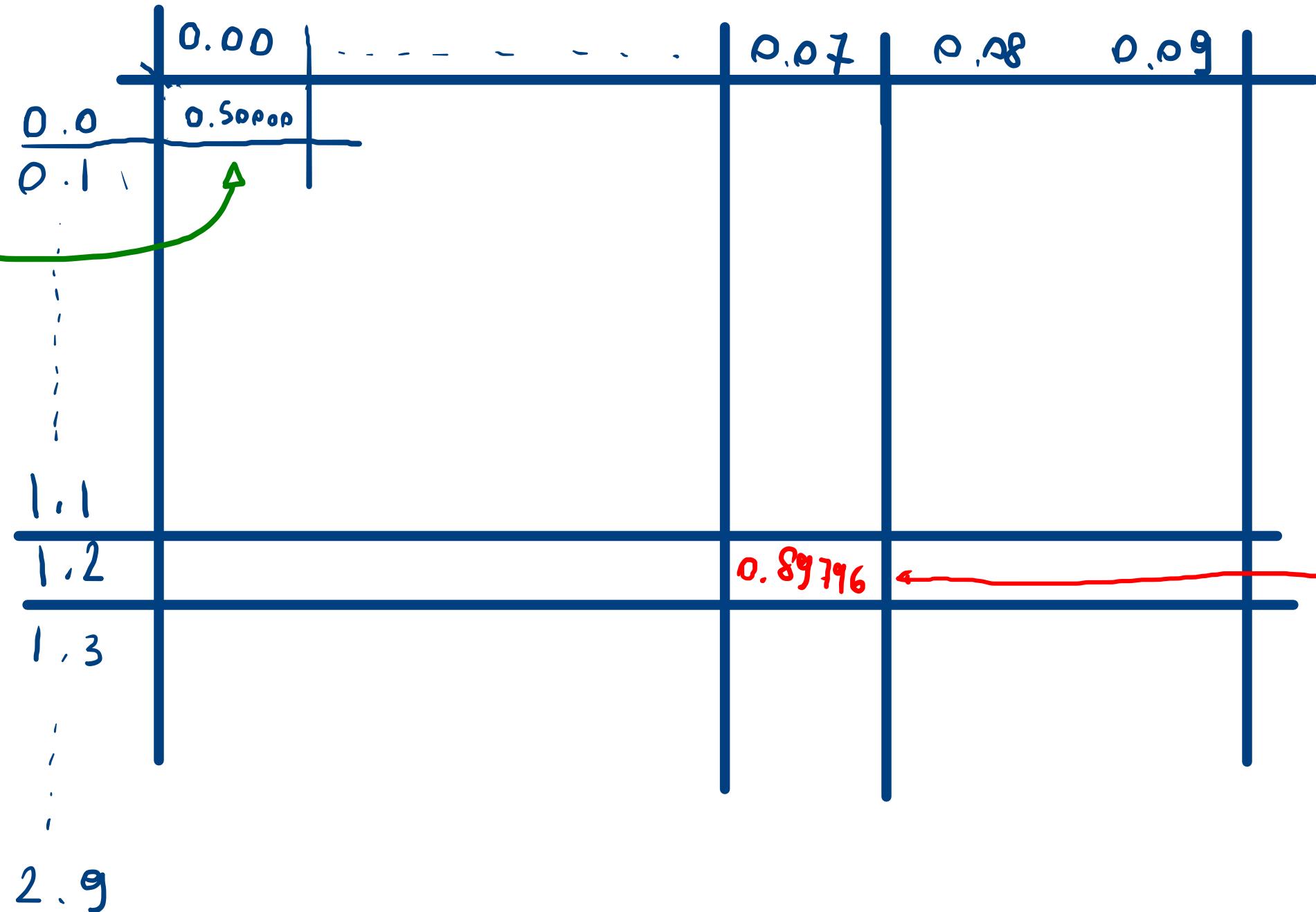
Questo
è l'unico
caso
per cui si ha
un valore
esatto di $\Phi(t)$

In effetti si ha



$\Phi(0)$

Area = $\frac{1}{2}$



Esempio:
Calcolo di $\Phi(1.27)$

Inoltre,
per quanto
abbiamo
detto,

$$\begin{aligned}\Phi(-1.27) &= 1 - \Phi(1.27) \\ &= 1 - 0.89796 \\ &= 0.10204,\end{aligned}$$

Inoltre da queste tavole si possono dedurre i valori approssimati dei quantili.

Ad esempio si vede che $\Phi(1.96) = 0.97500$ e quindi $q_{0.975} = 1.96$

Oppure

$$q_{0.5} = 0$$

(la mediana è zero)

e queste sono ragionevoli esatte

Si ricorda
che non sono
ragionevoli esatte

PER L'ESAME: Da qualche anno non viene più richiesto l'uso delle tavole.
Si richiede solamente di esprimere il risultato tramite la funzione Φ .
Talvolta si richiede che questo si debba fare con un argomento di Φ positivo.
Gli indi, ad esempio, se si avesse a dimostrare che la probabilità richiesta è
uguale a $\Phi(-1)$, si dovrebbe poi scrivere che è uguale a $1 - \Phi(1)$.

ESERCIZIO

1) Sia $X \sim N(\mu, 1)$. Calcolare $P(|X| > 2)$ usando la funzione Φ .

2) Sia $Y \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 25)$. Calcolare $P(1 \leq Y \leq 4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ .

SVOLGIMENTO

$$1) P(|X| > 2) = P(\{X > 2\} \cup \{X < -2\}) = \underbrace{P(X > 2)}_{=1-\Phi(2)} + \underbrace{P(X < -2)}_{=\Phi(-2)} = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2(1 - \Phi(2)),$$

oppure: $= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$

$$P(|X| > 2) = 1 - P(|X| \leq 2) = 1 - P(-2 \leq X \leq 2) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 1 - \Phi(2) + \underbrace{\Phi(-2)}_{=1-\Phi(2)} = 2(1 - \Phi(2)),$$

$$2) P(1 \leq Y \leq 4) = P\left(\frac{1-\mu}{\sigma} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \underbrace{\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)}_{=\Phi\left(\frac{1}{5}\right)} - \underbrace{\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)}_{=\Phi\left(-\frac{2}{5}\right)} = \Phi\left(\frac{1}{5}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{2}{5}\right)}_{=1-\Phi\left(\frac{2}{5}\right)} = \Phi\left(\frac{1}{5}\right) + \Phi\left(\frac{2}{5}\right) - 1.$$

ESERCIZIO

Si è X una v.a. continua con densità $f_X(x) = 6x(1-x) \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

Trovare la densità continua di $Y = e^{-X}$.

RISPOSTA

La funzione $g(x) = e^{-x}$ decrescente; quindi le v.a. Y assume valori in $(g(1), g(0)) = (e^{-1}, 1)$.

Quindi la funzione di distribuzione di Y è

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq e^{-1} \\ \textcircled{\$} & \text{per } y \in (e^{-1}, 1), \\ 1 & \text{per } y \geq 1 \end{cases}$$

Inoltre $\textcircled{\$} = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \log y) = P(X \geq -\log y) = \int_{-\log y}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\log y}^1 6x(1-x) dx =$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \int_{-\log y}^1 x - x^2 dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-\log y}^{x=1} = 6 \left[\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}} - \left(\frac{(-\log y)^2}{2} - \frac{(-\log y)^3}{3} \right) \right] \\
 &= 6 \left[\frac{1}{6} - \frac{(-\log y)^2}{2} + \frac{(-\log y)^3}{3} \right] = \\
 &= 1 - 3(\log y)^2 - 2(\log y)^3.
 \end{aligned}$$

oss. Sostituendo $y=1$ si ha 1 oh
 Sostituendo $y=e^{-1}$ si ha
 $1 - 3(-1)^2 - 2(-1)^3 = 1 - 3 + 2 = 0$ oh

Quindi la densità continua è

$$f_y(y) = \left(-3 \cdot 2 \frac{\log y}{y} - 2 \cdot 3 \frac{(\log y)^2}{y} \right) 1_{(e^{-1}, 1)}(y) = 6 \frac{\log y}{y} (-1 - \log y) 1_{(e^{-1}, 1)}(y)$$

Nelle prossime slide verificheremo (non è necessario) che, come deve essere,

$$6 \frac{\log y}{y} (-1 - \log y) \geq 0 \quad \text{per } y \in (e^{-1}, 1) \quad \text{e che} \quad \int_{e^{-1}}^1 6 \frac{\log y}{y} (-1 - \log y) dy = 1.$$

$$\text{Se ho } \frac{6}{y} \log y (-1 - \log y) \geq 0 \iff \log y (-1 - \log y) \geq 0 \iff \log y (\log y + 1) \leq 0$$

$y \in (e^{-1}, 1)$
e quindi $y > 0$

$$\iff -1 \leq \log y \leq 0 \iff e^{-1} \leq y \leq e^0 = 1 \iff e^{-1} \leq y \leq 1$$

ok

è una parabola verso l'alto
in alto c'è $\log y$

Inoltre

$$\int_{e^{-1}}^1 6 \frac{\log y}{y} (-1 - \log y) dy = \int_{-1}^0 \frac{r}{e^r} (-1 - r) e^r dr =$$

$$= -6 \int_{-1}^0 r(r+1) dr = -6 \int_{-1}^0 r^2 + r dr = -6 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} \right]_{r=-1}^{r=0}$$

$$= -6 \left[\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} \right) \right] = -6 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] = -6 \cdot \frac{2-3}{6} = -6 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) = 1.$$

Area sotto un'area di
parabola verso il basso
Opposita

