esempio:

$\min \ 3x_1 - x_2$ Dire se $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è ottimo

$x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 - 3x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

2 strade:

- risolvo con il metodo del simplesso il problema, confronto la sol. ottima con $\bar{x}$ e vedo se sono uguali o meno.

CONTRO: il vertice ottimo può non essere unico e quindi potrei non accorgermi che $\bar{x}$ è ottimo quando in realtà lo è.

Per vedere se $\bar{x}$ è in mezzo a due vertici ottimi x_1^*, x_2^* (e quindi anch'esso ottimo):

$\exists \alpha : 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \alpha x_1^* + (1-\alpha) x_2^* = \bar{x}$.

È, però, un procedimento che richiede tempo.

Volendo utilizzare comunque il primale, si può risolvere il problema con il metodo del simplesso, calcolare $f(x^*)$ e $f(\bar{x})$ e vedere se coincidono.

- Uso la teoria della dualità:

ricavo il duale e scrivo le condizioni di ortogonalità e vedo se sono soddisfatte:

$\bar{x} \in X, \ \bar{y} \in Y, \ \bar{x}^T \cdot s_d = 0 \ , \ \bar{y}^T \cdot s_p = 0$

VETT. DEGLI SCARTI DI P A PARTIRE DA $\bar{y}$

VETT. DEGLI SCARTI DI D A PARTIRE DA $\bar{x}$.

D: $\max \ 2y_1 + y_2$

$y_1 + 2y_2 \leq 3$

$y_1 - 3y_2 \leq -1$

$y_1 \leq 0, \ y_2 \geq 0$

1) ok

2) $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ t.c. $\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 \leq 3 \quad \bar{y}_1 \leq 0$

$\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 \leq -1 \quad \bar{y}_2 \geq 0$

3) $\bar{x}^T \cdot s_d = 0$

s_d : non ho $\bar{y}$ quindi lo ricavo dai vincoli all'uguaglianza

$s_{d_1} = 3 - \bar{y}_1 - 2\bar{y}_2$ PERCHÈ SAREBBE $\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + s_{d_1} = 3$

$s_{d_2} = -1 - \bar{y}_1 + 3\bar{y}_2$

$$[1\ 0]\begin{bmatrix}3-\bar{y}_1-2\bar{y}_2\\-1-\bar{y}_1+3\bar{y}_2\end{bmatrix}=3-\bar{y}_1-2\bar{y}_2=0$$

4) $\bar{y}^T \cdot S_p = 0$

$S_p: \quad \begin{matrix}x_1+x_2\leq 2\\ 2x_1-3x_2\geq 1\end{matrix} \xrightarrow{\bar{x}} \begin{matrix}1\leq 2\\ 2\geq 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}S_{p_1}=1 & 2-1\\ S_{p_2}=1 & 2-1\end{matrix}$

$$[\bar{y}_1\ \bar{y}_2]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\bar{y}_1+\bar{y}_2=0$$

Metto 3) e 4) a sistema:

$$\begin{cases}3-\bar{y}_1-2\bar{y}_2=0\\ \bar{y}_1+\bar{y}_2=0\end{cases} \quad \begin{cases}\bar{y}_1=-3\\ \bar{y}_2=3\end{cases} \Rightarrow \text{3) 4) ok}$$

2) con $\bar{y}$ ok

$\Rightarrow c^T\bar{x}=3\neq-3=b^T\bar{y} \Rightarrow \bar{x}$ non è ottima. IN REALTÀ DOVREBBE VENIRE CHE È OTTIMA PERCHÈ LE CONDIZIONI SONO SODDISFATTE.

$(3\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3 \qquad (2\ 1)\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=-6+3=-3$

esempio:

$$P:\ \min\ 2x_1+x_2$$
$$x_1-x_2\leq 4$$
$$x_1+3x_2\geq 1$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\leq 0$$

$\bar{x}=\begin{bmatrix}3\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ e' ottimo?

$$D:\ \max\ 4y_1+y_2$$
$$y_1+y_2\leq 2$$
$$-y_1+3y_2\geq 1$$
$$y_1\leq 0,\ y_2\geq 0$$

1) ok

2) $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \leq 2$
$-\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 \geq 1$
$\bar{y}_1 \leq 0,\ \bar{y}_2 \geq 0$

3) $S_{d_1} = 2 - \bar{y}_1 - \bar{y}_2$
$S_{d_2} = -1 - \bar{y}_1 + 3\bar{y}_2$

$$\bar{x}^T \cdot S_d = 0 \longrightarrow [3 \ -1/2] \cdot \begin{bmatrix} 2-\bar{y}_1-\bar{y}_2 \\ -1-\bar{y}_1+3\bar{y}_2 \end{bmatrix} = 3(2-\bar{y}_1-\bar{y}_2) - \frac{1}{2}(-1-\bar{y}_1+3\bar{y}_2) =$$

$$= 6 - 3\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 + \frac{1}{2} + \bar{y}_1/2 - 3/2\,\bar{y}_2 = -\frac{5}{2}\bar{y}_1 - 9/2\,\bar{y}_2 + 13/2 = 0$$

4) $S_p = [1/2,\ 1/2]^T$

$$\bar{y}^T \cdot S_p = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\bar{y}_1 + \frac{1}{2}\bar{y}_2 = 0$$

$$\begin{cases} -5/2\,\bar{y}_1 - 9/2\,\bar{y}_2 + 13/2 = 0 \\ 1/2\,\bar{y}_1 + 1/2\,\bar{y}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = -13/4 \\ \bar{y}_2 = 13/4 \end{cases}$$

2) con $\bar{y}$ ok

$$c^T\bar{x} = (2\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 6 - 1/2 = 11/2$$

$$b^T\bar{y} = (4\ 1)\begin{pmatrix} -13/4 \\ 13/4 \end{pmatrix} = -13 + \frac{13}{4} \neq 11/2$$

$\Rightarrow \bar{x}$ non è ottimo MA DOVREBBE VENIRE CHE È OTTIMO

•ALTRO METODO:

ES1:

Condizioni: $\begin{cases} (3-y_1-2y_2)\cdot 1 = 0 \rightarrow 3 - y_1 - 2y_2 = 0 \rightarrow 3 = y_1 + 2y_2 \\ (-1-y_1+3y_2)\cdot 0 = 0 \times \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{x}$ non è ottimo

es2:

Condizioni: $\begin{cases} (2-y_1-y_2)3=0 \\ (1+y_1-3y_2)-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2=y_1+y_2 \\ 1=-y_1+3y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=2-y_1=3-3y_2 \\ y_1=3y_2-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=3/4 \\ y_1=5/4 \end{cases}$

$$c^T\bar{x}=(2\ 1)\begin{pmatrix}3\\ -1/2\end{pmatrix}=11/2$$

$$b^T\bar{y}=(4\ 1)\begin{pmatrix}5/4\\ 3/4\end{pmatrix}=5+3/4=23/4$$

$\Rightarrow \bar{x}$ non è ottimo