MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Il modello di PL può essere scritto come:

$$\min \; z(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m$$

s.v.

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1m} x_m \geq b_1$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mm} x_m \geq b_m$$

Inoltre, un modello di PL include tipicamente in forma esplicita anche i vincoli di non negatività delle variabili di decisione: $x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, m$.

In forma compatta, il modello di PL può essere quindi formulato così:

$$\min \; z(x) = c^T \cdot x$$

s.v.

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0,$$

dove $c \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo, mentre $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti dei vincoli e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$ è la matrice $(m \times m)$

dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli.

· MODELLI DI PIANIFICAZIONE DELLA PRODUZIONE

I modelli di pianificazione della produzione consentono di formulare problemi per l'allocazione ottimale di "risorse", disponibili in quantità limitata e utilizzate per realizzare un numero finito di "prodotti".
Per ciascun prodotto è noto il processo produttivo, riassumibile nel consumo di un quantitativo noto di risorse.
La vendita di ciascuna unità di prodotto genera un profitto noto e la funzione obiettivo consiste nel massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tutti i prodotti

realizzati.

Si supponga di disporre di un numero m di risorse disponibili per la produzione di n prodotti. Si indichi con:

- a_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ la quantità di risorsa i necessaria per produrre una unità di prodotto j;

- b_i, $i=1,\dots,m$ la disponibilità massima della risorsa i;

- p_j, $j=1,\dots,n$ il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita del prodotto j;

- x_j, $j=1,\dots,n$, variabili di decisione ciascuna delle quali indicante il livello di produzione del prodotto j.

Il modello di PL è:

$$\max \; z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

Varianti del problema possono essere ottenute considerando come obiettivo la minimizzazione dei costi complessivi di produzione, oppure includendo vincoli di budget, di mercato o di sfruttamento degli impianti.

ESERCIZIO (HEKO)

La Heko è una multinazionale specializzata nella produzione di biocarburanti. Presso lo stabilimento di Oaxaca (Messico) si realizzano due prodotti, il biometanolo e il biodimetiletere. Il processo produttivo richiede la lavorazione nei tre stabilimenti di preparazione, purificazione ed estrazione. I tempi necessari per la lavorazione di una tonnellata dei due biocarburanti sono riportati in tabella, unitamente alla capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti.

Il responsabile del marketing aziendale ha confermato che ogni tonnellata prodotta di biometanolo e di biodimetiletere può essere venduta, realizzando un profitto pari a 540 € e 590 €, rispettivamente.

Stabilimento	Ore di lavorazione a tonnellata: Biometanolo	Biodimetiletere	Capacità giornaliera [h]
Preparazione	0,72	0,85	18
Purificazione	1,68	1,42	18
Estrazione	1,92	2,12	16

Per formulare il problema di produzione, si utilizzano le variabili di decisione x_J, $J = 1, 2$ rappresentanti il livello di produzione giornaliera dei due carburanti (1 = biometanolo, 2 = biodimetiletere). Entrambi i prodotti devono essere lavorati in ciascuno dei tre stabilimenti. In particolare, per lo stabilimento di preparazione, le ore giornaliere utilizzate per la lavorazione dei due biocarburanti sono pari a $0{,}72x_1 + 0{,}85x_2$. Essendo disponibili al più 18 ore di lavorazione giornaliera, segue il vincolo:

$0{,}72x_1 + 0{,}85x_2 \leq 18$.

Analogamente per gli altri due stabilimenti si avranno i seguenti vincoli:

$1{,}68x_1 + 1{,}42x_2 \leq 18$ e $1{,}92x_1 + 2{,}12x_2 \leq 16$

La funzione obiettivo $z(x)$ da massimizzare, corrisponde al profitto giornaliero complessivo: $\max z(x) = 540x_1 + 590x_2$.

Vincoli di non negatività: $x_1, x_2 \geq 0$.

• MODELLI DI MISCELAZIONE

Nei problemi di miscelazione si dispone di un insieme di materie prime ("ingredienti"), ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati "componenti".

L'obiettivo è miscelare gli ingredienti, secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito ("miscela"), che soddisfi determinati requisiti di qualità, esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti nella miscela.

Il più classico problema di miscelazione è il problema della dieta.

- **variabili di decisione** corrispondono al contenuto di ciascun ingrediente nella miscela.
- **vincoli** sono tipicamente associati alle caratteristiche di qualità della miscela (che dipende dai componenti presenti negli ingredienti utilizzati) e alle disponibilità limitate degli ingredienti.
- **funzione obiettivo** è rappresentata dal costo degli ingredienti impiegati.

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità di ciascuno degli m componenti.
Si indichi, in particolare, con

- a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la quantità di componente i presente nell'ingrediente j;

- b_i, $i = 1, \dots, m$, la quantità minima di componente i presente nella miscela

Il costo unitario dell'ingrediente j è indicato con c_j, $j = 1, \dots, n$.
Le variabili di decisione sono x_j, $j = 1, \dots, n$, ognuna delle quali corrispondente alla quantità di ingrediente j presente nella miscela da realizzare.
Il modello di PL è il seguente:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Ulteriori vincoli potrebbero essere necessari.
Ad esempio, nel caso in cui sia richiesto che un dato componente i sia presente nella miscela in un quantitativo non superiore a un valore prefissato d_i, occorre imporre che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i$$

In altri casi, potrebbero essere imposte limitazioni u_j sul massimo quantitativo di ingrediente j da utilizzare per realizzare la miscela: $x_j \leq u_j$
Nel caso in cui sia necessario produrre un quantitativo prefissato q di miscela, occorre aggiungere il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q$$

ESERCIZIO (ANSALMEC)

L'acciaio e' uno dei prodotti più facilmente riciclabili (e riciclati) al mondo. In effetti, è sufficiente fondere qualsiasi rottame di ferro per incenerire tutti gli eventuali residui plastici o di vernice contenuti nel rottame, restando così con solo metallo liquido. Il problema nasce in quanto è difficile separare i diversi metalli presenti nel rottame, per cui, insieme al ferro, si ritrovano nel metallo liquido anche rame, nichel, cromo e altri metalli.

In diverse produzioni alcuni metalli sono desiderati e altri no.

Ad esempio, nella produzione dell'acciaio 18/10 (utilizzato nella produzione di pentole), si vuole avere il 18% di cromo ed il 10% di nichel nel prodotto finito, per cui l'eventuale presenza di questi metalli nei rottami di ferro e' altamente desiderabile, in quanto cromo e nichel sono molto più costosi sia dei rottami che dello stesso acciaio 18/10.

Al contrario, il rame e' un impurità che rovina le caratteristiche estetiche dell'acciaio 18/10.

Ansalmec ha di recente analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro, riportate in tabella. Nella stessa tabella sono riportati anche il peso complessivo di ciascun lotto e il costo unitario di acquisto.

Componente	Ingrediente					
	Rottame 1 [%]	Rottame 2 [%]	Rottame 3 [%]	Rottame 4 [%]	Rottame 5 [%]	Rottame 6 [%]
Ferro	93	76	74	65	72	68
Nichel	5	13	11	16	6	23
Cromo	0	11	12	14	20	8
Impurità	2	0	3	5	2	1
Peso [q]	30	90	50	70	60	50
Costo [€]	50	100	80	85	92	115

L'obiettivo per l'azienda è produrre, al costo minimo, almeno 100 quintali di acciaio 18/10 con una presenza del 18% di cromo, 10% di nichel, almeno il 65% di ferro e al più un 1% di impurità.

Il problema di miscelazione si può formulare nel modo seguente.

- Si indichi con x_j, $j=1,\dots,6$ la variabile di decisione corrispondente alla quantità (in quintali) di rottame di tipo j da utilizzare per la produzione dell'acciaio.

- I vincoli sono imposti dalla qualità dell'acciaio. In particolare, poichè si desidera produrre 100 quintali di acciaio con almeno il 65% di ferro, si dovranno avere, per la miscela di prodotto, almeno 65 quintali di ferro.

Un quintale di rottame di tipo j, $j=1,\dots,6$, contiene, rispettivamente, 0,93, 0,76, 0,74, 0,65, 0,72, 0,68 quintali di ferro.

Pertanto, il contenuto di ferro in una miscela con x_J quintali di rottame di tipo J, $J=1,\dots,6$ e' pari a $0{,}93x_1+0{,}76x_2+0{,}74x_3+0{,}65x_4+0{,}72x_5+0{,}68x_6$ quintali, da cui il vincolo:

$$0{,}93x_1+0{,}76x_2+0{,}74x_3+0{,}65x_4+0{,}72x_5+0{,}68x_6 \geq 65$$

Analogamente per il contenuto di cromo, nichel ed impurità:

$$0{,}05x_1+0{,}13x_2+0{,}11x_3+0{,}16x_4+0{,}06x_5+0{,}23x_6=18$$

$$0{,}11x_2+0{,}12x_3+0{,}14x_4+0{,}20x_5+0{,}08x_6=10$$

$$0{,}02x_1+0{,}03x_3+0{,}05x_4+0{,}02x_5+0{,}01x_6 \leq 1$$

Poichè sono necessari 100 quintali di acciaio, occorre imporre:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=100$$

Vincoli sulla disponibilità limitata di ciascun tipo di rottame:

$$x_1\leq 30;\ x_2\leq 90;\ x_3\leq 50;\ x_4\leq 70;\ x_5\leq 60;\ x_6\leq 50$$

Vincoli di non negatività sulle variabili di decisione: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

La funzione obiettivo $z(x)$, da minimizzare, e' rappresentata dal costo di acquisto (in €) dei rottami:

$$\min z(x) = 50x_1+100x_2+80x_3+85x_4+92x_5+115x_6$$

• **MODELLI DI FLUSSO SU RETE**

Diverse applicazioni possono essere ricondotte a modelli di ottimizzazione di flusso su rete come, ad esempio, i problemi di trasporto, di comunicazione, di gestione di reti idriche e/o elettriche, di pianificazione della produzione e numerosi altri problemi a cui non necessariamente si associa fisicamente una rete.

• **MODELLI MULTIPERIODO**

I modelli di PL multiperiodo consentono di assumere decisioni riguardanti un arco temporale più lungo (suddiviso in periodi), per semplicità si fa riferimento al caso della pianificazione della produzione multiperiodo di un unico prodotto.
In ogni periodo di tempo è possibile immagazzinare le quantità di prodotto non vendute e che faranno parte della disponibilità di prodotto per i periodi successivi; il problema consiste nel determinare la quantità di prodotto da realizzare in ciascun periodo, in modo da soddisfare le richieste della clientela

in ogni periodo minimizzando il costo complessivo di produzione e stoccaggio (possono esserci vincoli sulla capacità produttiva o sul livello di scorte).

es.

① MISCELAZIONE

ogni prodotto ha	prodotti	
Calorie	biscotti integrali	0,5 €/100g
Vit. A	latte	0,4 €/100g
Fibre	corn flakes	0,7 €/100g

Voglio scegliere una miscelazione di prodotti affinchè si abbia il minor costo:

	BIS	LAT	CORN
Kcal	452	64	365
fibre	8	0	2,3
vit. A	0	47	1,8

Valori nutrizionali che devo garantire:

MINIMI → fibre : 10   vit. A : 10   Kcal : 400

MASSIMI → Kcal : 600

Variabili : $\overset{BIS}{x_1}, \overset{LAT}{x_2}, \overset{CORN}{x_3}$

$\min z = 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}7x_3$

VINCOLI $400 \le 452x_1 + 64x_2 + 365x_3 \le 600 \rightarrow 452x_1 + 64x_2 + 365x_3 + x_4 = 600$

$452x_1 + 64x_2 + 365x_3 - x_5 = 400$

$8x_1 + 2{,}3x_3 - x_6 = 10$

$47x_2 + 1{,}8x_3 - x_7 = 10$

$x_i \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, 7$

$z^* = 0{,}7$ €

$x^* = (0{,}7,\ 1{,}25,\ 0)$

②

2 lavatrici: una standard (STD), l'altra HIQ

	STD	HIQ	MAX R RISORSE
ASSEMBLAGGIO ASM	3	2	80
TESTING TEST	2	4	60
MATERIALI MAT	4	4	70
π	12	16	€ PER OGNI LAVATRICE VENDUTA

Voglio massimizzare il profitto π:

$$\max \; 12x_1 + 16x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 80$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 60 \quad \Rightarrow \quad z^* = 260$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 70 \qquad x^* = (x_1^*, x_2^*) = (12{,}5 \, , \; 5)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

NON SI POSSONO VENDERE 12 LAVATRICI E MEZZO

$\Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0^+$ (*)

(*)

$\Rightarrow$ e' un problema di programmazione intera e non lineare

$\Rightarrow$ la sol non è ammissibile

$\Rightarrow$ il profitto z^* è maggiore di quello che otterrei producendo valori interi perchè dovrei aggiungere un ulteriore vincolo e quindi il problema di PL e' un upperbound di uno di PI.

3

MULTIPERIODO

$d_t = \{30, 60, 40, 70, 50\}$ DOMANDA

$c_t = \{8, 8, 10, 10, 20\}$ COSTO DI PRODUZIONE UNITARIO

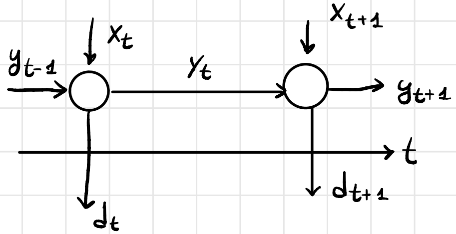
$h_t = \{1, 1, 2, 2, 2\}$ COSTO DI MANTENIMENTO A SCORTA DI UN'UNITÀ DI PRODOTTO

capacità max : 30 $\qquad$ $\text{scorte}_{t=0} = 0$

Definisco x_t, con $\underbrace{t \in \{1, \dots, 5\}}_{= T}$ QUANTITÀ CHE VOGLIO PRODURRE

y_t $\hookrightarrow$ SCORTE CHE VOGLIO AVERE

Devo spostare il prodotto nel tempo (grafo temporale)



devo tradurre in equazioni questo grafo.

Nella f. obiettivo devo elencare i nodi mettendoci i costi:

$$\min \sum_{t \in T} c_t x_t + \sum_{t \in T} h_t y_t$$

VINCOLI

$y_t \leq 30 \quad \forall t \in T$

$x_t + y_{t-1} - y_t - d_t = 0 \quad \forall t \in T$

$y_0 = 0$ PERCHÈ ALL'INIZIO DELLA PRODUZIONE CI SONO ZERO PRODOTTI

$x_t, y_t \geq 0 \quad \forall t \in T$

Si aggiunge F per ogni volta che produco, che rappresenta i costi di produzione fissi (es. accensione del macchinario), quindi ad $f(x)$ andrebbe aggiunto $+F\sum_{t \in T} z_t$ con $z_t \in \{0,1\}$ ed il vincolo aggiuntivo $x_t \leq M z_t$

NON PRODUCO — PRODUCO

NUM. MOLTO GRANDE, LO SI PUÒ EVENTUALMENTE SOSTITUIRE CON LA CAPACITÀ PRODUTTIVO K

aggiungendo F il problema diventa non più trattabile IN QUANTO ESPONENZIALE

4 Problema dello zaino:

ho un contenitore che ha una capacità C e ho n prodotti che voglio mettere al suo interno, ognuno con un valore/profitto p_i w_i ingombro.
Voglio max il profitto (devo scegliere i prodotti da metterci)

$$y_i \in \{0,1\} \begin{cases} 0 & \text{se il prodotto } i \text{ non selezionato} \\ 1 & \text{se il prodotto } i \text{ selezionato} \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i y_i \leq C$$

VINCOLO

Notazione

In alcuni esercizi abbiamo bisogno di trasformare i vincoli di $\leq / \geq$ in uguaglianze o viceversa.

es.

$\max f(x) = 3x_1 - x_2 + 3x_3$ con vincoli

$2x_1 + 3x_2 = 4$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \leq 0$, $x_3 \geq 0$

Voglio passare ad un problema di min. quindi i vincoli devono essere $\geq$ e $f(x)$ ha segni invertiti

$$\max \underbrace{f(x)}_{z} = \min -f(x)$$

$\min \; -3x_1 + x_2 - 3x_3$

modifico i vincoli in modo tale che ci sia sempre $\geq$:

$2x_1 + 3x_2 \geq 4$

$2x_1 + 3x_2 \leq 4 \xrightarrow{\text{MOLTIPLICO PER } -1} -2x_1 - 3x_2 \geq -4$

$x_2' = -x_2 \geq 0 \Rightarrow$ sostituisco $-x_2'$ a x_2 : PER SEMPLICITÀ NEGLI ES. POSSO DIRETTAMENTE CAMBIARE SEGNO SENZA VARIABILI AGGIUNTIVE.

$2x_1 - 3x_2' \geq 4$

$-2x_1 + 3x_2' \geq -4$

$-3x_1 - x_2' - 3x_3$

$x_1 = x_1' - x_1''$ con $x_1' \geq 0$, $x_1'' \geq 0$ cosicché $x_1 \geq 0$ sempre

SCORPORO LA PARTE POS. DA QUELLA NEG.: SE $x_1'' > x_1'$ SI HA LA PARTE NEG. DI x_1 ALTRIMENTI QUELLA POS.

$\Rightarrow$ sostituisco:

$-3x_1' + 3x_1'' - x_2' - 3x_3 = z'$

$2x_1' - 2x_1'' - 3x_2' \geq 4$

$-2x_1' + 2x_1'' + 3x_2' \geq -4$

x_3 e' già ≥ 0 allora rimane $x_3 \geq 0$

Bisogna trovare un valore ottimo z^* in corrispondenza di 1 punto x^* t.c. $z = f(x) \leq f(x^*) = z^*$ $\forall x \in X$ (z^* e' quindi il valore della sol. ottima).