- **METODO DELLE 2 FASI:**

$$\left.\begin{aligned} \min\ z(x) &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ A_B x_B + A_N x_N &= b \\ x_B, x_N &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{FORMA STANDARD}$$

Si ha una forma canonica del simplesso se:

$c_B^T = 0$

$A_B = I_B$

$b \geq 0$

$\Rightarrow$ si trova una SBA ponendo $x_N = 0$, in modo che: $\begin{cases} x_B = b \\ z(x) = 0/d \end{cases}$. Da qui si può applicare il metodo del simplesso.

Se non è facile arrivare ad una situazione del genere (non si sa trovare una SBA di partenza), si usa il metodo delle due fasi nel quale si aggiungono variabili artificiali al fine di rendere compatibili i vincoli (se minimizzandole queste variabili non sono zero $\Rightarrow$ il sist. è incompatibile).

La I° fase consiste nel fare questo ragionamento, la II° fase consiste nel metodo del simplesso.

esempio:

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1 + 4x_2 \\ &x_1 + x_2 \leq 4 \\ &2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min\ -3x_1 + 4x_2 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ &2x_1 + 3x_2 - x_4 = 18 \\ &x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

è difficile trovare la forma canonica

$\Rightarrow$ aggiungiamo una variabile artificiale nel vincolo con b maggiore (per semplicità si potrebbe aggiungere una variabile per ogni vincolo).

$$\begin{aligned} &\min\ x_\alpha \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ &2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_\alpha = 18 \end{aligned}$$

0	0	0	0	0	1
4	1	1	1	0	0
18	2	3	0	-1	1

$\Rightarrow$

	-18	-2	-3	0	1	0
x_3	4	1	1	1	0	0
x_α	18	2	3	0	-1	1

$= I$

faccio $r_0' = r_0 - r_2$ per fa sì che l'ultima col $\in I$ ($c = 0$).

$h: 4/1 = 4 \; ; \; 18/3 = 6 \Rightarrow$ PIVOT $(h,k) = (2,1)$

-6	1	0	3	1	0
x_2 4	1	1	1	0	0
x_α 6	-1	0	-3	-1	1

$r_0' = r_0 + 3r_1'$

$r_2' = r_2 - 3r_1'$

Siccome $x_\alpha = 6$ e il tableau è ottimo $\Rightarrow$ il sist. iniziale è incompatibile perchè la variabile artificiale è $\neq 0$ una volta minimizzata $\Rightarrow$ l'insieme delle sol. del sist. di partenza è uguale all'insieme vuoto.

esempio:

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 - 2x_2 \\ &x_1 + x_2 \geq 2 \\ &-x_1 + x_2 \geq 1 \\ &x_2 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow[\text{STANDARD}]{\text{FORMA}} \begin{aligned} &\min\ x_1 - 2x_2 \\ &x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ &-x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ &x_2 + x_5 = 3 \\ &x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow[\text{CANONICA}]{\text{FORMA}}$$

HO $x_3, x_4 < 0 \Rightarrow$ È DIFFICILE $\Rightarrow$ AGGIUNGO 2 VAR. ARTIFICIALI.

I° FASE:

$$\begin{aligned} &\min\ x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} \\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_{\alpha_1} = 2 \\ &-x_1 + x_2 - x_4 + x_{\alpha_2} = 1 \\ &x_2 + x_5 = 3 \\ &x_1, \dots, x_5, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \geq 0 \end{aligned}$$

Non è in forma canonica perchè $c_i \neq 0 \Rightarrow r_0' = r_0 - r_1 - r_2$:

$\min\ -2x_2 + x_3 + x_4 + 3$ SAREBBE $= -3$ MA LO PORTO A SX.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_{\alpha_1} = 2 \\ &-x_1 + x_2 - x_4 + x_{\alpha_2} = 1 \\ &x_2 + x_5 = 3 \\ &x_1, \dots, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \geq 0 \end{aligned}$$

$C_2 < 0 \rightarrow$ TABLEAX NON OTTIMO

$h: 2/1 = 2, \; 1/1 = 1, \; 3/1 = 3$

$\Rightarrow$ PIVOT $(h,k) = (2,2)$

							I	
-3	0	-2	1	1	0	0	0
2	1	1	-1	0	0	1	0
1	-1	1	0	-1	0	0	1
3	0	1	0	0	1	0	0

-1	-2	0	1	-1	0	0	2
1	2	0	-1	1	0	1	-1
1	-1	1	0	-1	0	0	1
2	1	0	0	1	1	0	-1

$r_0' = r_0 + 2r_1'$

0	0	0	0	0	0	1	1
x_1 1/2	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2
x_2 3/2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2
x_5 3/2	0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2

=> $z=0$ => la somma delle x_α e' nulla (infatti non stanno in base) => abbiamo trovato una sol. ottima ammissibile => II° fase: elimino le ultime 2 col e sostituisco la riga della f. obiettivo:

0	1	-2	0	0	0
1/2	1	0	-1/2	1/2	0
3/2	0	1	-1/2	-1/2	0
3/2	0	0	1/2	1/2	1

NON E' FORMA CANONICA DEL SIMPLESSO PERCHÈ LE c_i DI x_1, x_2 NON VANNO BENE ($\neq 0$)

=> $r_0' = r_0 - r_1 + 2r_2$

↓

5/2	0	0	-1/2	-3/2	0
1/2	1	0	-1/2	1/2	0
3/2	0	1	-1/2	-1/2	0
3/2	0	0	1/2	1/2	1

4	3	0	-2	0	0
1	2	0	-1	1	0
2	1	1	-1	0	0
1	-1	0	1	0	1

→

6	1	0	0	0	2
2	1	0	0	1	1
3	0	1	0	0	1
1	-1	0	1	0	1

$\Rightarrow z^* = -6 \,,\; x^* = (0,3,1,2,0)$

• DUALITÀ:

Risolvere un problema lineare della forma

$$P:\quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

vuol dire trovare: $\bar{x} \in S$, $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, SOL. AMMISSIBILE

x^* ottimo $\rightarrow c^T x^* \leq c^T \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in S$

Dualità: tecnica applicabile anche a problemi non lineari.
Differenza tra un problema lineare e non: nei non lineari esiste il **duality gap**: l'ottimo del problema duale non lineare, mentre nei problemi lineari non c'è il gap.
Come si scrive il problema duale da P:

$$D:\quad \begin{cases} \max y b^T \\ A^T y \leq c \end{cases}$$

INSIEME DELLE SOL. AMMISSIBILI DEL DUALE

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \in S^D = \{y : A^T y \leq c\}$

Qualsiasi sol $\in D \leq$ sol $\in P$

Thm (DUALITÀ DEBOLE)

Se $\bar{y}$ è ammissibile per il problema D
$\Rightarrow b^T\bar{y} \leq c^T x \quad \forall x \in S$.

dim.

$b = A \cdot x$ in P

In D: $A^T\bar{y} \leq c \Rightarrow \bar{y}^T A \leq c^T \overset{\text{MOLTIPLICO PER } x}{\Rightarrow} \bar{y}^T A \cdot x \leq c^T \cdot x \Rightarrow \bar{y}^T b \leq c^T x$

$b^T\bar{y} \leq c^T x^* \leq c^T \bar{x}$

DUALITÀ DEBOLE:
P min $\rightarrow c^T x \geq b^T \bar{y}$
P max $\rightarrow c^T x \leq b^T \bar{y}$

esempio:

$\min \; x_1 - 2x_2$
$x_1 + x_2 \geq 2$
$-x_1 + x_2 \geq 1$
$x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$

TROVARE DEI VALORI ALL'INTERNO DEI QUALI SONO SICURO DI TROVARE LA F. OBIETTIVO: TROVO UNA SOL. AMMISSIBILE DEL PRIMALE, UNA SOL. AMMISSIBILE DEL DUALE E SONO SICURO CHE LA SOL. OTTIMA È COMPRESA FRA QUESTE DUE

Per trovare il duale intanto devo stare nella forma standard:

$\min \; x_1 - 2x_2$
$x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$-x_1 + x_2 - x_4 = 1$
$x_2 + x_5 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

duale:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\max \; 2y_1 + y_2 + 3y_3$
$y_1 - y_2 \leq 1$
$y_1 + y_2 + y_3 \leq -2$
$-y_1 \leq 0$
$-y_2 \leq 0$
$y_3 \leq 0$

$\Rightarrow$ $\bar{x} = [1/2, 3/2]^T$, $\bar{y} = [1, 0, -3]^T$
verificare il gap:
$z(\bar{x}) = -\frac{5}{2} \Rightarrow z(x^*) \leq -5/2$
$w(\bar{y}) = -9 \Rightarrow -9 \leq z(x^*) \leq -5/2$

• Come costruire il duale a partire dal primale nel caso in cui non ci siamo le condizioni $Ax = b, x \geq 0$:

• $\min c^T x \quad \Rightarrow \quad \min c^T x - 0^T s$

$Ax \geq b \qquad\qquad Ax - I \cdot s = b$

$x \geq 0 \qquad\qquad x, s \geq 0$

duale:

$\max b^T y \quad \xRightarrow{\text{EQUIVALE}} \quad \max b^T y$

$A^T y \leq c \qquad\qquad A^T y \leq c$

$-Iy \leq 0 \qquad\qquad y \geq 0$

$\Rightarrow$ QUANDO IN P SI HANNO VINCOLI CANONICI ($\geq b$)
$\Rightarrow$ IN D SI HANNO VARIABILI CANONICHE ($y \geq 0$)

• $\max c^T x \quad \Rightarrow \quad \min -c^T x$

$Ax = b \qquad\qquad Ax = b$

$x \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$

duale:

$\max yb^T \quad \Rightarrow \quad \max b^T y \quad \xRightarrow{y' = -y} \quad \max -b^T y'$

$A^T y \leq -c \qquad -A^T y \geq c \qquad A^T y' \geq c$

$\Rightarrow \min y' b^T$

$A^T y' \geq c$

$\Rightarrow$ FACENDO IL DUALE DI UN PROBLEMA DI MAX SI OTTIENE UN DUALE DI MIN.

• x libero (non ha nè ≥ 0 nè ≤ 0):

$\min c^T x \quad \xRightarrow{x = x^+ - x^-} \quad \min c^T x^+ - c^T x^-$

$Ax = b \qquad\qquad Ax^+ - Ax^- = b$

$x \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad x^+, x^- \geq 0$

duale:

$\max yb^T \quad \Rightarrow \quad \max yb^T$

$A^T y \leq c \qquad\qquad A^T y = c$

$-A^T y \leq -c$

	PRIMALE	DUALE
	$\min c^T x$	$\max b^T y$
VINCOLI	$a_i^T x \geq b_i$	$y_i \geq 0$
	$a_i^T x \leq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\underbrace{a_i^T}_{\text{RIGA}} x = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}^m$ (LIBERA)
VARIABILI	$x_J \geq 0$	$y^T \overbrace{A_J}^{\text{COL.}} \leq c_J$
	$x_J \leq 0$	$y^T A_J \geq c_J$
	$x_J \in \mathbb{R}^n$	$y^T A_J = c_J$

esempio:

Dato il problema, trovare il duale:

P: $\min\ z(x) = 8x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 7x_4$

$$4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 27$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 12$$
$$x_1 - 2x_4 = 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0,\quad x_3 \in \mathbb{R},\quad x_4 \leq 0$$

D: $\max\ 27y_1 + 12y_2 + 20y_3$

$$4y_1 - y_2 + y_3 \leq 8$$
$$-6y_1 + 3y_2 \leq 5$$
$$8y_1 + 5y_2 = 12$$
$$2y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 7$$
$$y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \in \mathbb{R}$$

Se faccio il duale del duale ottengo il primale.

Se $\bar{x}$ è ammissibile per P, $\bar{y}$ ammissibile per D e $c^T\bar{x} = b^T\bar{y} \Rightarrow \bar{x}, \bar{y}$ sono ottimi rispettivamente per P, D.

dim

- $b^T\bar{y} \leq c^T x \quad \forall x \in P$ PER THM DEBOLE

$c^T\bar{x} = b^T\bar{y} \leq c^T x \Rightarrow \bar{x} \leq x \quad \forall x \in S \Rightarrow \bar{x} = x^*$ (è ottimo)

- $b^T\bar{y} = c^T\bar{x} \geq b^T y \quad \forall y \in S^D \Rightarrow \bar{y}$ e' ottimo

COROLLARIO

Siccome $b^T y \leq c^T \bar{x}$ e il valore duale e' sempre < del primale, se il primale è illimitato $\Rightarrow$ il duale e' vuoto. $\rightarrow$ NON AMMETTE SOL. AMMISSIBILI

Viceversa, se il duale e' illimitato $\Rightarrow$ il primale è vuoto.

Se il primale e' vuoto non è detto che il duale sia illimitato:

$$P \text{ VUOTO} \rightarrow \begin{cases} D \text{ ILLIMITATO} \\ D \text{ VUOTO} \end{cases}$$

es:

$\min\ z(x) = \frac{1}{2}x_1 - x_2$

$2x_1 - 3x_2 \leq 6$

$-x_1 + x_2 \leq 2$

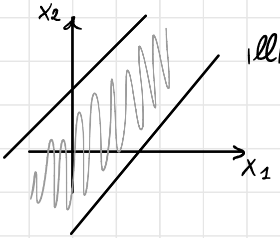
duale: $\max\ 6y_1 + 2y_2$

$2y_1 - y_2 \leq 1/2$

$-3y_1 + y_2 \leq -1$

$y_1, y_2 \leq 0$

non ammissibile



illimitato

· Thm (DUALITÀ FORTE)

Data $\bar{x}$ ammissibile,

e' ottima per P $\Leftrightarrow \exists\ \bar{y}$ ammissibile per D t.c. $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ e $\bar{y}$ è ottima per D.

COROLLARIO:

AMMISSIBILITÀ PRIMALE $(Ax = b, x \geq 0)$

AMMISSIBILITÀ DUALE $(A^T y \leq c)$

DUALITÀ FORTE $(c^T x = b^T y)$

I° condizione (di ottimalità)

equivale a

x^* e' ottimo in un problema

$\min\ c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

II° condizione

Un problema di ottimizzazione II equivale a risolvere un sist. di eq. I.

· Thm (COMPLEMENTARIETÀ O DELLE CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ)

Date

$\bar{y}$ sol ammissibili per D, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$

$\bar{x}$ sol ammissibili per P, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \geq 0$

allora

$\bar{x}, \bar{y}$ sono ottime $\Leftrightarrow \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{y}_i\right) \bar{x}_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$

es.:

$$\min \tfrac{1}{4}x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 15$$
$$4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 31$$

$\bar{x} = [2, 3, \tfrac{1}{2}, 0]^T$ è ottima?

Mi scrivo il duale e le condizioni di complementarietà e vedo se sono verificate:

D: $\max 15y_1 + 31y_2$
$$-2y_1 + 4y_2 \leq 4$$
$$5y_1 + 8y_2 \leq 2$$
$$8y_1 - 2y_2 \leq -1$$
$$5y_1 + 6y_2 \leq 2$$

condizioni:

$$\begin{cases} (4 + 2y_1 - 4y_2)\overset{x_1}{2} = 0 \\ (2 - 5y_1 - 8y_2)3 = 0 \\ (-1 - 8y_1 + 2y_2)\tfrac{1}{2} = 0 \\ (2 - 5y_1 - 6y_2)0 = 0 \quad \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4 + 2y_1 - 4y_2)2 = 0 \\ (2 - 5y_1 - 8y_2)3 = 0 \\ (-1 - 8y_1 + 2y_2)\tfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2y_1 + 4y_2 = 4 \\ 5y_1 + 8y_2 = 2 \\ 8y_1 - 2y_2 = -1 \end{cases}$$

SIST. IMPOSSIBILE

$\Rightarrow \bar{x}$ non è ottima

Quindi data una sol. primale, si vede se i valori nulli corrispondono a vincoli saturi (verificati all'uguaglianza)

COME SFRUTTARE QUESTO THM.