· ESEMPIO:

$$\left.\begin{array}{l} \min \ -2x_1 + x_2 + 1 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{array}\right\} \text{FORMA STANDARD}$$

in forma vettoriale: $\min \ c^T x$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Per poter operare con il metodo del simplesso deve essere in forma canonica del simplesso, cioè deve esserci la base canonica all'interno della matrice A e deve essere $b \geq 0$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{è in forma canonica del simplesso}$$

(la sottomatrice destra $= I$)

Se una delle 2 condizioni fosse violata: metodo delle 2 fasi

→ 1: preprocessamento che porta ad avere le condizioni soddisfatte

→ 2: metodo del simplesso

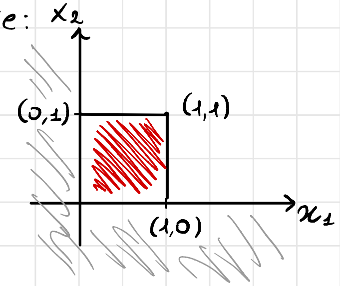
Procediamo quindi con la creazione del tableau che trasporta i dati del problema in 1 forma più agevole dal punto di vista implementativo.

0	-2	1	0	0
2	2	0	1	0
1	0	1	0	1

IL +1 NON SI CONSIDERA PERCHÈ È COSTANTE

$$SBA = \begin{array}{c} x_N \\ \\ x_B \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

geometricamente:



x_N è 0 indipendentemente dal coeff. nei vincoli, $x_B \geq 0$ ma ha coeff. = 0.

L'assenza dei coeff. negativi è dimostrazione di arresto del sistema: la sol. è ottima, non posso migliorarla ulteriormente.
Sol. non ottima perchè $\exists\, c_1 < 0$, esce x_3 dalla base perchè $a_{12} = 0$ quindi non ammissibile ($b_i / a_{ik} = 1/0 \rightarrow$ indeterminato), infatti se uscisse x_4 i vincoli sarebbero $2 \cdot x_1 + 2 = 2$ e $0 + 0 = 1$; mentre $a_{11} = 2 > 0$ ($b_i / a_{ik} = 2/2 = 1$) $\Rightarrow$ PIVOT$(h,k) = (1,1)$

2	0	1	1	0
1	1	0	1/2	0
1	0	1	0	1

$\Rightarrow$ SBA $= -2$ (sol. ottima perchè $\nexists\, c_j < 0$)

$\Rightarrow z^* = -2 + \overset{d}{1} = -1$

La SBA ottima trovata e' unica, se $\exists\, c_j = 0$ per $x_i \in x_N$ nel tableau ottimo $\Rightarrow$ si può far entrare x_i in x_B ottenendo una sol. ottima a sua volta e ciò vuol dire che c'è almeno un altro vertice (oltre a quello del tableau ottimo) che entrando in base fornisce una SBA ottima $\Rightarrow$ ci sono infinite sol. ottime (date dai valori di $f(x)$ degli infiniti punti tra i 2 vertici ottimi).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	2	0	0	3	0	-1
$b_1 = x_3$: 1	1/3	0	1	0	1/3	0
$b_2 = x_2$: 5	0	1	0	3	0	-1

$$\text{SBA} = -4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

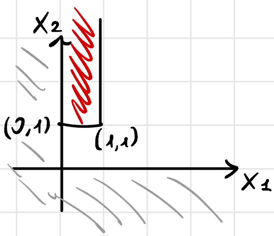
La sol. non è ottima perchè x_6 ha $c<0 \Rightarrow \exists$ un vertice che permette di migliorare il valore della f. obiettivo.
Però i coeff. in A per x_6 sono uno negativo $\Rightarrow$ non va bene (non ammissibile) e uno $=0$, che non va bene uguale (indeterminato).
In questo caso x_6 è un vertice illimitato inferiormente (regione ammissibile aperta) $\Rightarrow$ il problema è vuoto (non ammette sol. ottima finita, $\to -\infty$).

Cosa succede se ho una forma standard che non è canonica?

es:

$$\min \; -2x_1 + x_2$$
$$2x_1 \leq 2$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

geometricamente:



Questo problema non ha analiticamente una forma standard canonica perchè non si passa per l'origine. Infatti standardizzando il problema:

$$\min \; -2x_1 + x_2$$
$$2x_1 + s_1 = 2$$
$$x_2 - s_2 = 1$$

non si ha la base canonica, infatti:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \underbrace{0 \;\; -1}_{\neq I} \end{bmatrix}$$

SE SI MOLTIPLICASSE PER -1 LA $b<0 \Rightarrow$ NON ANDREBBE BENE UGUALE

non si può prendere $x_2, s_1 = x_B$ perchè $c_{x_2} > 0$

Il modo più semplice per portare il sistema in una forma canonica del simplesso è aggiungere un'altra colonna introducendo una variabile a artificiale che però ha un costo (il problema non è equivalente a meno che a non sia zero, in quel caso le sol. sono ammissibili anche nel sist. originario): *

↘* $x_2 = 3$, $S_2 = 3$, $a = 1$ ⇒ VINCOLO SODDISFATTO MA NEL SIST. INIZIALE NO

$\min \; -2x_1 + x_2$

$2x_1 + S_1 = 2$

$x_2 - S_2 + a = 1$

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Una volta fatta entrare in base a, la si fa uscire dalla base ottenendo comunque un sist. canonico: in generale aggiungo tante variabili artificiali quanti sono i vincoli che non hanno col. in base.

Risolvo il problema:

$\min \; a$ → PERCHÈ a PUÒ ESSERE AL MIN 0 → INDIPENDENTEMENTE SE IL SIST. ORIGINARIO È UN PROBLEMA DI MIN. O MAX f.

$2x_1 + S_1 = 2$

$x_2 - S_2 + a = 1$

$a, x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$

Questo procedimento è detto I° fase del metodo del simplesso (metodo a 2 fasi).
La sol. ottima della I° fase può portare a 2 sol:

- il min. $a > 0$ ⇒ ∄ forma canonica del simplesso per il sist. originario e quindi ∄ sol. per quel sistema (il sist è vuoto) perchè il vincolo senza a non sarà mai soddisfatto.
- il min $a = 0$ ⇒ ho trovato la sol. ammissibile per il sist. originario ⇒ continuo con la II° fase.

II° fase: prendo il tableau, butto via le col. di a (perchè tanto se min a ⇒ a non è in base) e cancello la 1° riga del tableau per sostituirla con la f. obiettivo del sist. originario e risolvo il metodo del simplesso per trovare la sol. ottima.