$\min \ x_1 - x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 3 \rightarrow$ si può scrivere come $g_1(x) \leq 0$, con $g_1(x) = 2x_1 + x_2 - 3$

$x_1 - 2x_2 \leq 1 \rightarrow g_2(x) \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 2x_2 - 1$

$x_1, x_2 \geq 0 \rightarrow$ IL SEGNO DELLE VARIABILI CI FA CAPIRE SE SONO VARIABILI CANONICHE O ANTICANONICHE

CANONICO

variabili:
≥ 0 min/max

vincoli:
$\leq$ nel max.
$\geq$ nel min.

ANTICANONICO

variabili:
≤ 0 min/max

vincoli:
≥ 0 nel max
≤ 0 nel min

Un problema di PL è in forma canonica quando sia i vincoli che le variabili sono canonici. Si può transitare da una forma normale della programmazione lineare ad una canonica.

$$
\left.\begin{aligned}
&\min \ x_1 - x_2 \\
&-2x_1 - x_2 \geq -3 \\
&-x_1 + 2x_2 \geq -1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}\right\} \text{PL IN FORMA CANONICA}
$$

La forma canonica è una delle 2 forme della PL che ha senso definire, l'altra forma è la forma standard.

STANDARD

VARIABILE:
CON IL SEGNO DI $\geq$

VINCOLO:
ESPRESSO CON IL SEGNO DI UGUAGLIANZA $=$

$\Rightarrow$ forma canonica e standard si differenziamo per la forma dei vincoli.

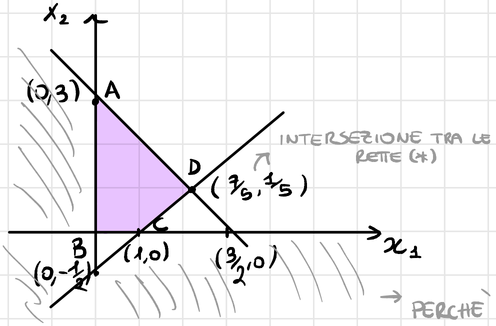
È possibile portare un problema generico in uno equivalente in forma standard semplicemente aggiungendo o sottraendo le variabili ausiliarie adeguate, dette variabili di slack (nei vincoli di $\leq$) o di surplus (nei vincoli di $\geq$):

$$
\left.\begin{aligned}
&\min \ x_1 - x_2 \\
&2x_1 - x_2 + s_1 = 3 \\
&x_1 - 2x_2 + s_2 = 1 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}\right\} \text{PL IN FORMA STANDARD}
$$

Le 2 forme sono i punti di partenza per due approcci algoritmici differenti per la risoluzione di un problema di PL: duali, primari
CANONICA STANDARD

• FORMA STANDARD

Riscriviamo geometricamente il problema di prima:



$x_2 = -2x_1 + 3 \Rightarrow (0,3)\ (3/2, 0)$

$x_2 \geq \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow (0, -\frac{1}{2})\ (1,0)$

→ PERCHÈ $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow$ TAGLIO LA ZONA IN CUI SONO <0

(*)
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3 - 2x_1 \\ x_1 = 1 + 2x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3 - 2 - 4x_2 \\ \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_2 = 1 \\ \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1/5 \\ x_1 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$

$f(A) = -3 \Leftrightarrow x_1^* = 0$
$f(B) = 0 \qquad x_2^* = 3$
$f(C) = 1$
$f(D) = 6/5$

Questo approccio è limitato a problemi di piccole dimensioni perchè può capitare che non so definire precisamente uno dei vertici oppure che mi trovo in $\mathbb{R}^n$ e quindi ci sono tanti vertici ed è difficile calcolarli.
Definiamo il concetto di soluzione di base ammissibile : SBA è una sol. ammissibile della forma standard del problema di PL t.c. il num. di componenti positive è pari al num. di vincoli del problema e le altre componenti sono nulle.

Nell'esercizio precedente il vettore $x^T = [x_1\ x_2\ s_1\ s_2] \in \mathbb{R}^4$ è una sol. ammissibile, per essere di base deve essere con 2 componenti >0 e le altre $2 = 0$; ad es., il vettore $x'^T = [0\ 0\ 3\ 1]$ è S.B.A. mentre $x''^T = [1\ 1\ 0\ 2]$ non è S.B.A. perchè i vincoli vengono rispettati (quindi è una sol ammissibile) ma non ha num. di componenti positive pari al num. di vincoli.

È importante determinare le S.B.A. tra le sol. ammissibili perchè dal es. guardando la rappresentazione geometrica si può prendere un vertice come componente x_i e poi calcolare le s_i: prendendo $(0,3)$ si ha $x^T = [0\ 3\ 0\ 7]$ che è S.B.A., oppure $x^T = [7/5\ \ 1/5\ \ 0\ \ 0]$ o ancora $x^T = [1\ 0\ 1\ 0]$, sono sempre S.B.A

$2\cdot 0 + 3 + S_1 = 3$
$\Rightarrow S_1 = 0$
$0 - 2\cdot 3 + S_2 = 1$
$\Rightarrow S_2 = 1 + 6 = 7$

Ma allora si può definire il concetto di S.B.A e calcolarle per poter limitare la ricerca sui vertici. La forma standard aiuta a calcolare una S.B.A di partenza.

$\Rightarrow$ si trova una SBA di partenza mettendo le x_i a zero e gli s_i pari al num. dopo l'uguale (si prende una variabile $\neq 0$ per ogni vincolo $\Rightarrow$ è SBA).

Da questa si cerca un procedimento che ci fa andare da vertice in vertice (dato che i vertici sono SBA), in modo da trovare facilmente la sol. ottima del problema.

Il termine "di base" è legato al concetto di base. Prendiamo la matrice dei coeff. dei vincoli

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{b}_{\text{VETT. DEI TERMINI NOTI}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ il sistema di vincoli corrisponde all'eq. $Ax = b$

Si può vedere x come $x = [x_B, x_N]^T$, con x_B vett. delle comp. positive (IN BASE) che determinano il vett. SBA e x_N vett. delle comp. negative (non in base).

$$\Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$ LE COMP. POSITIVE DI x SONO LA 3°, 4°

$$A = \begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rinomino le colonne di A che corrispondono a x_B e lo stesso per x_N:

$$A = [B \,\vdots\, N] \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$Ax = Bx_B + N\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_N} = b \Rightarrow Bx_B = b$

B è una matrice che ha comp. positive pari al numero di vincoli, è una base e in quanto tale è invertibile per cui $x_B = B^{-1}b$.

=> Si chiama SBA perchè e' una sol. ammissibile e le comp. positive corrispondono alle colonne della matrice A che rappresentano una base.

Calcolo la SBA che ha B corrispondente alle prime 2 colonne di A:

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\underset{\overset{\shortparallel}{5}}{\det B}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$

(*) se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} = x_B \quad \left(x_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

x_B è SBA e corrisponde al vertice D del grafico. Questo ragionamento si può fare usando come base 2 colonne di A alla volta.

Le s_i (in questo caso ma non sempre) fanno in modo di ottenere una base canonica per poter calcolare un vertice di partenza in modo semplice.
=> la forma standard è una forma canonica per il metodo del simplesso (base canonica e b positive).

Vertici vicini (es. B, C) hanno, su m componenti, m-1 comp. uguali => si ottengono scambiando una col. di A che sta in base con una che non ci sta
Una volta trovati i vicini ed es. di B (A, C), calcolo la f. su tutti e tre e se B ha f. min. => e' la sol. perchè un min. locale e' anche globale, se invece la f. min. è per es. quella di A, mi sposto su A ed itero il procedimento.

• DETERMINANTE

- Se A ha una riga/col. nulla => $\det A = 0$
- Se A 2x2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ => $\det A = ad - bc$
- $\det A = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, dove A_{ij} e' la sottomatrice di A ottenuta cancellando da A la riga i e la col. j.