min $\rightarrow c^T\bar{x} \geq b^T\bar{y} \Rightarrow c^T\bar{x} \geq c^T x^* \geq b^T\bar{y}$

max $\rightarrow c^T\bar{x} \leq b^T\bar{y} \Rightarrow c^T\bar{x} \leq c^T x^* \leq b^T\bar{y}$.

Inoltre $c^T x^* = b^T y^*$

• ALGORITMO PRIMALE-DUALE (converge alla coppia di sol. ottime x^*, y^*)

$$P: \min \ 5x_1 - x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

• Se P non è in forma standard, lo porto in f.s.:

$$\min \ 5x_1 - x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, \dots, x_4 \geq 0$$

perchè in questo modo so a priori (indipendentemente da x^*) che $s_{P_1} = s_{P_2} = 0$, perchè i vincoli sono già di uguaglianza, se P non è in f.s. non posso sapere se s_P è $<, >, = 0$.

$\Rightarrow$ in f.s. so a priori che il vincolo $y^* \cdot s_P^* = 0$ è soddisfatto

Inoltre, $x^* \geq 0$ in quanto essendo P in f.s. ed essendo x^* ammissibile per P, le variabili $x_i \geq 0$ (canoniche) $\underset{\text{PER DEF.}}{s_d^* \geq 0}$ $\Rightarrow$ la condizione $x^* s_d^* = 0$ diventa $x_i^* s_{d_i}^* = 0$, $i = 1, \dots, 4$ (la si vede componente per componente).

• Scrivo il duale:

$$D: \max \ 4y_1 + 2y_2$$
$$y_1 - y_2 \leq 5$$
$$y_1 + 2y_2 \leq -1$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

· Si parte da $y^{(0)}$ perchè così mi ricavo s_d, dato che la condizione $y^* \cdot s_p^* = 0$ è soddisfatta.

$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ O ME LA DA LUI O LO INVENTO IO (BASTA CHE SODDISFI I VINCOLI DI D)

· Mi calcolo $s_d^{(0)} = (4 \quad 1 \quad 0 \quad 1)^T$ CONDIZIONI CHE IMPONGO PER FAR SI CHE $x^* s_d^* = 0$ SIA SODDISFATTA COMP. PER COMP.

$x_1^{(0)} = 0 \quad x_2^{(0)} = 0 \quad x_3^{(0)} \geq 0 \quad x_4^{(0)} = 0$

· Costruisco un' ipotetica $x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad \geq 0 \quad 0)^T$
=> se $\exists x$ fatto come $x^{(0)}$ che soddisfa i vincoli di P, $y^{(0)}$ e $x^{(0)}$ sono ottime

$$\left.\begin{aligned} & x_3 = 4 \\ & 0 = 2 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}\right\} P \text{ RISTRETTO}$$ = VINCOLI DI P CON $x^{(0)}$

=> $\nexists$ alcun vett $\in P$ ammissibile della forma di $x^{(0)}$ 2=0 NON È SODDISFATTO

=> $y^{(0)}$ e $x^{(0)}$ non sono ottime; cambio iterazione e ripeto l'alg. (finchè non convergo alla sol. ottima): calcolo $y^{(1)}$ con la formula:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \underbrace{\theta^{(k)}}_{\text{SCALARE}} \cdot \underbrace{\pi^{(k)}}_{\text{VETTORE}}$$

mi muovo lungo il segmento tra $y^{(k)}$ e $\pi^{(k)}$ e prendo il valore ammissibile $\theta^{(k)}$ che più si avvicina a $\pi^{(k)}$.
$\pi^{(k)}$: sol. di D modificato, ottenuto modificando P in modo t.c. $x^{(k)}$ sia ammissibile (tolgo un vincolo o cambio il segno di una variabile), ossia la sol. ottima del duale di P ristretto.

· Risolvo la 1° fase del metodo del simplesso per P ristretto, per capire se quest'ultimo ammette una sol. ammissibile

min $a_1 + a_2$

$x_3 + a_1 = 4$

$0 + a_2 = 2$

$x_3, a_1, a_2 \geq 0$

		x_3	a_1	a_2
	6	0	1	1
a_1	4	1	1	0
a_2	2	0	0	1

Il tableau è ottimo $\Rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ è ottima ma non ammissibile perche $f=6$.

$\Rightarrow$ P non ammetto sol. ammissibili per quel dato $x^{(0)} = (0\ 0\ {\geq}0\ 0\ 0)^T$.

- Faccio il duale di P ristretto utilizzando $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{array}{l} \max\ 4\pi_1 + 2\pi_2 \\ \quad \pi_1 \leq 0 \\ \quad \pi_1 \leq 1 \\ \quad \pi_2 \leq 1 \\ \quad \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{D RISTRETTO} \Rightarrow \pi_1^* = \pi_2^* = 1 \Rightarrow \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \theta^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{(0)} \\ \theta^{(0)} - 1 \end{pmatrix}$$

SOSTITUISCO QUESTI VALORI IN D A Y_1, Y_2 E VEDO QUAL'È IL VALORE AMMISSIBILE MAGGIORE:

$$\theta^{(0)} + 1 - \theta^{(0)} \leq 5$$
$$\theta^{(0)} - 2 + 2\theta^{(0)} \leq -1$$
$$3\theta^{(0)} \leq 1 \rightarrow \theta^{(0)} \leq 1/3$$
$$\theta^{(0)} \leq 0$$
$$\theta^{(0)} - 1 \leq 0 \rightarrow \theta^{(0)} \leq 1$$

~o~o~o~o

$$\begin{array}{l} \min\ 2x_1 - x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \end{array} \xrightarrow[\text{CAMBIO SEGNO A } X_2 \text{ IN MODO CHE SIA } \geq 0]{f.s.} \begin{array}{l} \min\ 2x_1 + x_2 \\ \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ \quad -x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{l} \max\ 2y_1 + y_2 \\ \quad y_1 - y_2 \leq 2 \\ \quad -2y_1 - y_2 \leq -1 \\ \quad y_1 \leq 0 \\ \quad y_2 \leq 0 \\ \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

prendo $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $s_d^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_1, X_2 = 0$

$X_3, X_4 \geq 0$

UNA ∂ PER OGNI VINCOLO

$$\left.\begin{array}{l} \min\ \partial_1 + \partial_2 \\ \quad x_3 + \partial_1 = 2 \\ \quad x_4 + \partial_2 = 1 \\ \quad x_3, x_4, \partial_1, \partial_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{P RISTRETTO}$$

Lo risolvo:

		x_3	x_4	a_1	a_2
		0	0	1	1
a_1	2	1	0	1	0
a_2	1	0	1	0	1

$\longrightarrow$ FACCIO DIVENTARE i $c_B = c_{a_1}, c_{a_2} = 0$

	-3	-1	-1	0	0
a_1	2	1	0	1	0
a_2	1	0	1	0	1

$\longrightarrow$

	-1	0	-1	1	0
x_3	2	1	0	1	0
a_2	1	0	1	0	1

	0	0	0	1	1
x_3	2	1	0	1	0
x_4	1	0	1	0	1

$\Rightarrow y^{(0)} = y^*$ e $x^{(0)} = x^* = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

Stesso problema di prima cambiando punto di partenza:

$y^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $S_d^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\rightarrow x_1^{(0)} = 0$, $\rightarrow x_4^{(0)} = 0$

$$\left.\begin{aligned}&\min\ a_1 + a_2\\&-2x_2 + x_3 + a_1 = 2\\&-x_2 + a_2 = 1\\&x_2, x_3, a_1, a_2 \geq 0\end{aligned}\right\} \text{P RISTRETTO}$$

		x_2	x_3	a_1	a_2
		0	0	1	1
a_1	2	-2	1	1	0
a_2	1	-1	0	0	1

$\longrightarrow$

	-3	3	-1	0	0
a_1	2	-2	1	1	0
a_2	1	-1	0	0	1

$$\begin{array}{c|c|cccc}
 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
x_3 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
a_2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \Rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il tableau è ottimo, $f = 1 \neq 0 \Rightarrow$ la sol. trovata non e' ammissibile.

$$\left.\begin{array}{ll}
\max & 2\pi_1 + \pi_2 \\
x_2) & -2\pi_1 - \pi_2 \leq 0 \\
x_3) & \pi_1 \leq 0 \\
a_1) & \pi_1 \leq 1 \\
a_2) & \pi_2 \leq 1 \\
 & \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}
\end{array}\right\} D \text{ RISTRETTO} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_1^* = 0 \\ \pi_2^* = 1 \end{array} \Rightarrow \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \theta^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+\theta^{(0)} \end{pmatrix}$$

sostituisco ai vincoli di D:

$1 - \theta \leq 2 \rightarrow \theta \geq -1$

$1 - \theta \leq 1 \longrightarrow \theta \geq 0$

$0 \leq 0$

$-1 + \theta \leq 0 \longrightarrow \theta \leq 1$

$$\Rightarrow \theta = 1 \Rightarrow y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~o~

$$\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 - x_2 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0
\end{array}
\xrightarrow{f.s.}
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 + x_2 \\
 & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\
 & -x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\
 & x_1, \dots, x_4 \geq 0
\end{array}$$

Non ho una base canonica immediata $\Rightarrow$ uso il metodo delle 2 fasi:

1° fase:

$$\begin{array}{ll}
\min & a \\
 & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\
 & -x_1 - x_2 - x_4 + a = 1 \\
 & x_1, \dots, x_4, a \geq 0
\end{array}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	a
	0	0	0	0	0	1
x_3	2	1	-2	1	0	0
a	1	1	1	0	-1	1

FORMA CANONICA DEL SIMPLESSO $\longrightarrow$ FACCIO DIVENTARE $c_a = 0$

	-1	-1	-1	0	1	0
x_3	2	1	-2	1	0	0
a	1	1	1	0	-1	1

$\Rightarrow$

	0	0	0	0	0	1
x_3	4	3	0	1	-2	2
x_2	1	1	1	0	-1	1

$$\Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2° fase:

0	2	1	0	0
4	3	0	1	-2
1	1	1	0	-1

$\longrightarrow$

	-1	1	0	0	1
x_3	4	3	0	1	-2
x_4	1	1	1	0	-1

$$\Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad z^* = 1 \qquad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se al posto di 2 ho α e mi si chiedono le condizioni di α affinchè $\bar{x} = [1\ 0]^T$ sia ottimo: intanto vedo le condizioni per far sì che $\bar{x}$ sia ammissibile: $\alpha \geq 1$ (sostituendo $\bar{x}$ nel 1° vincolo), poi metto P in f.s. e ne faccio il duale.
Si trova $s_{P_1} = \alpha - 1$ $\quad s_{P_2} = 0$ $\Rightarrow y_1(\alpha - 1) = 0$ è soddisfatta sempre se:

$$\left.\begin{cases} \alpha = 1 \\ y_2 \leq -3 \\ y_2 \leq -1 \end{cases}\right\} \text{PER } \bar{x} \text{ OTTIMA}$$

$\Rightarrow$ se $\alpha > 1 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -2 \Rightarrow$ non si ha ammissibilità.

~ o ~

	α	0	β
2	-2	1	0
1	γ	0	1

$\left.\begin{array}{l}\beta=0\\ \alpha\geq 0\\ \gamma\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$ PER FAR SÌ CHE IL TABLEAU SIA OTTIMO

$\left.\begin{array}{l}\beta=0\\ \alpha=0\\ \gamma>0\end{array}\right\}$ SE SI CHIEDE CHE IL TABLEAU SIA OTTIMO NON UNICO (SI POTEVA METTERE $\gamma\in\mathbb{R}$, MA IN QUEL CASO SE $\gamma\leq 0$ LA SOL. OTTIMA È UNA SEMIRETTA E NON UN SEGMENTO).

Data la coppia primale - duale, è vera una delle seguenti affermazioni:

1. i problemi primale e duale ammettono sol. ottime finite x^* e y^*, t.c. $c^T x^* = b^T y^*$;
2. il primale è illimitato inferiormente e il duale è inammissibile;
3. il duale è illimitato superiormente e il primale è inammissibile;
4. i problemi primale e duale sono entrambi inammissibili;

Questo perchè SE IL PRIMALE È ILLIMITATO INFERIORMENTE, IL DUALE NON AMMETTE SOL; SE IL DUALE È ILLIMITATO SUPERIORMENTE, IL PRIMALE NON AMMETTE SOL (AMMISSIBILI).

→ se uno dei due problemi ammette sol. ottima, deve necessariamente essere vera l'affermazione 1.