•METODO DEL SIMPLESSO

Per trovare il min/max di una f. lineare basta esplorare i vertici del poliedro definito dai vincoli (poliedro che definisce la regione ammissibile), ognuno dei vertici e' una base.
=> si può definire un alg. che cerca le basi (sono un num. finito).

numero di basi (e quindi di vertici): $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ m righe n col. È UN NUM. ESPONENZIALE RISP. ALLA DIM. DEL PROBLEMA

L'alg. del simplesso ci permette di elencare le basi in modo efficiente spostandoci da un vertice ad un altro in modo intelligente.

Una base e' un punto nello spazio $\mathbb{R}^n$ che ha max. m comp. positive.

$$\left.\begin{aligned} &\min z = c^T x + d \\ &Ax = b \end{aligned}\right\}$$ FORMA STANDARD

$A = A_B | A_N$
↳ COL. RELATIVE ALLA SOL. DI BASE

$x = \begin{vmatrix} x_B \\ x_N \end{vmatrix} \geq 0 \quad c = \begin{vmatrix} c_B \\ c_N \end{vmatrix}, \quad x_B \in \mathbb{R}^m, \; x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\min c_B x_B + c_N x_N + d \\ &A_B x_B + A_N x_N = b \end{aligned}$$

Moltiplico per A_B^{-1} (invertibile in quanto base) tutti i vincoli:

$\min c_B x_B + c_N x_N + d$

$A_B^{-1} A_B x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b \Rightarrow I_B x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$

=> la sol. sarà data da:

$x = \begin{vmatrix} A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ x_N \end{vmatrix}$, metto $x_N = 0$ $\quad x = \begin{vmatrix} x_B = A_B^{-1} \cdot b \\ x_N = 0 \end{vmatrix}$

Un altra semplificazione sarebbe avere $c_B = 0$ perchè il valore della f. obiettivo sarebbe zero (in quanto anche $x_N = 0$).
Mi ritrovo, quindi, un nuovo sistema equivalente chiamato sistema canonico che mi permette di evidenziare facilmente la sol. ammissibile (forma canonica del simplesso):

$c_B = 0 \quad A_B = I_B \quad b \geq 0$

↳ PERCHÈ $x_B = I_B + A_N \overset{0}{\overset{\parallel}{x_N}} = b \geq 0$

$$\min \; c_B x_B + c_N x_N = 0$$
$$x_B = b$$

Come arrivare ad una situazione del genere?

es.:

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 1$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 3$$
$$x_2 + 3x_4 \geq 5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq 0 \\ x_2 + x_3 \geq 0 \end{cases}$$ → LO MOLTIPLICO PER 2 E GLI SOTTRAGGO IL 1° VINCOLO:

$\neq$ DA $\begin{cases} x_1 + 2x_3 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 0 \end{cases}$

=> La forma standard è importante per questo voglio fare op. el. e rimanere in un sist. equivalente.

Per prima cosa quindi mi metto nella forma standard:

$$\min \; 2x_1 - x_2 + 1 \qquad z_0$$
$$x_1 + 2x_3 + x_5 = 3 \qquad z_1$$
$$x_2 + 3x_4 - x_6 = 5 \qquad z_2$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

Adesso mi porto nella forma canonica del simplesso prendendo come indici di base 3,4 e dividendo il 1° vincolo per 2 ed il 2° vincolo per 3:

$$\min \; 2x_1 - x_2 + \underbrace{0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4}_{c_B} + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 1$$
$$\tfrac{1}{2} x_1 + x_3 + \tfrac{x_5}{2} = \tfrac{3}{2}$$
$$\tfrac{1}{3} x_2 + x_4 - \tfrac{x_6}{3} = \tfrac{5}{3}$$

In questo modo $x_3 = 3/2$, $x_4 = 5/3$ e il resto degli $x_i = 0$. Come scelta di base x_1, x_2 non vanno bene perchè, in z, x_1 ha coeff. 2 e quindi non è a occhio una forma canonica del simplesso; x_5, x_6, invece, non vanno bene perchè non sono canoniche ($x_6 < 0$, potrei moltiplicare per -1 ma poi $b < 0$).

Se dimostro che è impossibile trovare una forma canonica del simplesso, il sist. non ha sol.
Per avere una forma canonica devo, tramite op. el., arrivare ad avere una x per ogni vincolo con coeff. pari a 1 e le $b \geq 0$.

$$x_B = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/3 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOL. AMMISSIBILE DI BASE

Siccome $z = \underbrace{c_B x_B}_{0} + \underbrace{c_N x_N}_{0} + d$ avrò $z = d = 1$

Se io volessi migliorare* la sol. devo operare un cambio di base e quindi scambio una variabile di base con una non di base che fa diminuire la f. obiettivo: x_2 al posto di x_4: moltiplico quindi il 2° vincolo per 3: $x_2 + 3x_4 - x_6 = 5 \Rightarrow x_2 = 5$

$x_4, x_6 = 0$ PERCHÈ NON SONO IN BASE

* guardo z e vedo i coeff., se uno è <0 => posso migliorare; se tutti i coeff. sono >0 allora quella che ho trovato e' già una sol. ottima.

Se x_2 avesse avuto tutti coeff. negativi anche nei vincoli => il problema era illimitato inferiormente.

Un altro modo e' fare combinazioni lineari tra le varie righe r_i del problema e quindi scrivere il sist. equivalente in cui si manipola la f. obiettivo:

$$\begin{aligned} r_0' &= r_0 - 2r_1 + r_2 \\ r_1' &= r_1 \\ r_2' &= r_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 - x_6 + 1 \\ & x_1 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ & x_2 + 3x_4 - x_6 = 5 \end{aligned}$$

→ SPARISCE PERCHÈ SI SOMMANO / SOTTRAGGONO PURE I TERMINI NOTI

In questo modo gli indici di base sono 1,2

BASE CANONICA x_1, x_2

$x_B = \{3, 5\}$ $\quad x_N = \{0, 0\}$ $\quad z = 0$

• THM FONDAMENTALE DEL SIMPLESSO

Dati PL in forma canonica in cui gli indici stanno in $S_B=\{s_1,\dots,s_m\}$, $S_N=N\setminus S_B$ allora

1) se $c_J \geq 0 \ \forall J \in S_N \Rightarrow$ SBA è ottima;

2) se $\exists K$ t.c. $c_K<0$ e $a_K \leq 0 \Rightarrow z \to -\infty$ (problema illimitato inferiormente), dove c_K è il coeff. di x_K in z e a_K e' la col. di coeff. di x_K in ogni vincolo;

3) se $\exists K: c_K<0$ e $a_K>0 \Rightarrow$ sol. non ottima e cioè $\exists$ un'altra sol. migliore di questa ammissibile.

dim:

1) cerchiamo di mettere in base un indice J non in base:

$$z' = c_J x_J + \underbrace{c_B x_B + c_{N'} x_{N'}}_{= c_N x_N / c_J x_J} + d \geq z = d$$

PERCHÈ $c_J \geq 0$

2) trovo una sol. $x_{s_i} + a_{ik} x_k = b_i$

$$x_{s_i} = \underbrace{b_i - \underbrace{a_{ik}}_{<0} x_k}_{+} \geq 0$$

$z' = -c_k x_k + d \to -\infty$ con $x_k \to -\infty$

3) a) sol. migliore

$$z' = \underbrace{c_k x_k}_{<0} + d < z = d$$

b) ammissibile

$x_{s_i} + a_{ik} x_k = b_i$ con $c_k<0$ e $x_{s_i} \geq 0$

$x_{s_i} = b_i - a_{ik} x_k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x_k \leq b_i/a_{ik} \quad \forall i$

Per sistematizzare questo problema si usa una matrice detta tableau:

$z = cx + d$

$z - d = cx$

$Ax = b$

$-d$	c
b	A

Cerchiamo $c_k<0$ trovando a_{hk} t.c. b_i/a_{ik} è minimo, in modo da rendere ammissibile il cambiamento di base.

a_{hk} è detto el. PIVOT e indica quale indice di base esce (h) e quale variabile non in base (k) entra al suo posto.

esercizio:

$\min \; 3x_1 - 2x_2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \end{array}$$

$$x_B = \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad x_N = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$z = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	3	-2	0	0
$\boxed{8}$	1	1	1	0
$\boxed{4}$	2	-1	0	1

VALORE DELLE VAR. IN BASE

VAR. IN BASE PERCHÈ FORMANO LA MATR. IDENTITÀ

Non è ottimo perchè c'è $c_2 < 0$, non è illimitato perchè c'è $a_2 > 0$ $\Rightarrow$ è ammissibile ma non ottima $\Rightarrow$ devo far entrare in base x_2 e far uscire il valore corrispondente al min. b_i / a_{ik}.

$K = 2$

$h = b_h / a_{hk} = \min \; b_i / a_{ik} \; : \; a_{ik} > 0$

$\Rightarrow h = 1$ perchè $h = 2$ è < 0

$\Rightarrow$ PIVOT $(h, k) = (1, 2)$

$\Rightarrow$ esce x_3

La trasformazione deve portare ad un nuovo tableau equivalente perchè deve contenere la matrice canonica, per fare ciò svolgo delle op. el.:

$-d$	c_1'	0	c_3'	0
b_1'		1		0
	a_1'		a_3'	
b_2'		0		1

Prendo la riga $r_h' = r_h / a_{hk}$ => la 1° riga la divido per 1

$-d$	c_1'	0	c_3'	0
8	1	1	1	0
b_2'	a_{12}'	0	a_{32}'	1

$r_0' = r_0 - 2r_1$, in generale $r_i' = r_i - r_h' \cdot a_{ik}$ per $i \neq k$.

16	5	0	2	0
8	1	1	1	0
b_2'	a_{12}'	0	a_{32}'	1

e poi

16	5	0	2	0
8	1	1	1	0
12	3	0	1	1

=> nuova base x_2, x_4 => $x_B = \begin{vmatrix} x_2 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 12 \end{vmatrix}$ $\quad x_N = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad z = -16$

È una sol. ottima perchè sono tutti $c \geq 0$.
L'alg. trova la sol. ottima (a meno che non si trovi in una situazione di illimitatezza) in un num. finito di passi, in quanto il num. di basi è limitato; siccome il numero di basi è esponenziale, il simplesso non e' un alg. polinomiale però sappiamo che converge.

·ESERCIZIO

$\min \; -3x_1 - 2x_2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$2x_1 - x_2 + x_4 = 4$

0	-3	-2	0	0
8	1	1	1	0
4	2	-1	0	1

$x_B = \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \end{vmatrix}$

$x_N = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad z = 0$

Il tableau non e' ottimo perchè ci sono coeff. di costo <0 e non è illimitato inferiormente perchè ci sono coeff. di vincoli positivi per le variabili che hanno $c<0$.
Prendo il coeff. più negativo perche in linea di massima è la sol. con costo più basso => prendo $x_1 = (k=1)$ e vedo quale variabile far uscire dalla base:

$\min \{ 8/1 = 8, 4/2 = 2 \} \Rightarrow$ esce x_4 $(h=2)$

$\Rightarrow (h,k) = (2,1)$

6	0	$-7/2$	0	$3/2$
6	0	$3/2$	1	$-1/2$
2	1	$-1/2$	0	$1/2$

sol : $x_B = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 6 \end{vmatrix}$ $\quad x_N = \begin{vmatrix} x_2 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad z = -6$

$\Rightarrow$ non è ancora ottima e non è illimitata, allora ripeto il procedimento facendo entrare x_2 e uscire x_3 (perchè $-1/2 < 0$):

20	0	0	$7/2$	$1/3$
4	0	1	$2/3$	$-1/3$
4	1	0	$1/3$	$5/6$

$\Rightarrow$ sol. ottima $z = -20$, $x_B = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix}$ $\quad x_N = \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Alg. del simplesso : CONSTA DI 5 PASSI

Data la PL canonica del simplesso

1. controllare c_j:
   se tutti $c_j \geq 0 \Rightarrow$ STOP (sol. ottima)
2. $\exists c_k < 0$, se tutti $a_{ik} \leq 0 \Rightarrow$ STOP : $-\infty$
3. $\exists c_k < 0$, $b_h / a_{hk} = \min b_i / a_{ik}$ $\forall i$ con $a_{ik} > 0$
4. fare il PIVOT su h, k
5. aggiornare gli indici di base togliendo l'indice S_h e aggiungendo l'indice S_k

VAI AL $\rightarrow$ 1

Il problema è che a volte non è banale trovare la forma canonica del simplesso (metodo delle 2 fasi).