Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 20/01/2025

Esercizio 1. Sia $f(x) = \max(0, 2x)$.

(a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $-1, 0, 1$.

(b) Calcolare $E = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)|$.[*]

(c) Per ogni $n \geq 0$, scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q_n(x)$ di $f(x)$ sugli $n+1$ nodi $0, 1, \ldots, n$.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, b]$ e sia $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Per ogni $n \geq 1$, sia I_n la formula dei trapezi di ordine n e passo $h = \frac{b-a}{n}$ per approssimare l'integrale I. Costruiamo un'approssimazione R di I nel modo seguente: fissiamo $n_0 \geq 1$ e definiamo R come il valore estrapolato ottenuto applicando la procedura di estrapolazione che utilizza le tre formule dei trapezi I_{n_0}, I_{2n_0}, I_{4n_0}.[†] Dimostrare che il numero R è una combinazione lineare dei numeri I_{n_0}, I_{2n_0}, I_{4n_0}, cioè

$$R = \alpha I_{n_0} + \beta I_{2n_0} + \gamma I_{4n_0}$$

per certi coefficienti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, e determinare esplicitamente α, β, γ.

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3a & 1 & a\mathrm{i} \\ 1 & 1 & -1 \\ -a\mathrm{i} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilire per quali valori di a la matrice A è definita positiva.

(b) Supponiamo che $a > 3$. Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(c) Supponiamo che $a > 3$. Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (b).

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix},$$

e sia $\mathscr{B}$ l'insieme delle matrici B_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Determinare la matrice $B_{\alpha_{\text{opt}}} \in \mathscr{B}$ che risulta più vicina ad A in norma infinito $\|\cdot\|_\infty$ e il corrispondente valore ottimale α_{opt}.[‡] Determinare inoltre la distanza fra $B_{\alpha_{\text{opt}}}$ e A in norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Poiché $\det(B_\alpha) = 2-\alpha^2$, la matrice B_α è invertibile per ogni $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\}$, calcolare $\mu_\infty(B_\alpha) =$ il numero di condizionamento di B_α in norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.

(c) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ il metodo di Jacobi per risolvere un sistema lineare di matrice B_α risulta convergente.

---

[*] E è l'errore massimo commesso approssimando $f(x)$ con $p(x)$ al variare di $x \in [-1, 1]$.

[†] Il numero R così ottenuto si chiama approssimazione di Romberg di I.

[‡] La matrice $B_{\alpha_{\text{opt}}}$ si chiama approssimazione ottima di A all'interno dell'insieme $\mathscr{B}$.

(d) Supponiamo che α sia uno dei valori trovati al punto (c) che assicurano la convergenza del metodo di Jacobi su un sistema lineare di matrice B_α. Supponiamo inoltre di arrestare il metodo di Jacobi per risolvere il sistema lineare $B_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$ alla prima iterazione $\mathbf{x}^{(K)}$ che soddisfa

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(K)}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \leq 10^{-10},$$

dove $\mathbf{r}^{(K)} = \mathbf{b} - B_\alpha \mathbf{x}^{(K)}$ è il residuo corrispondente a $\mathbf{x}^{(K)}$. Fornire una stima (dipendente da α) dell'errore relativo

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(K)} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

commesso approssimando $\mathbf{x}$ con $\mathbf{x}^{(K)}$, dove $\mathbf{x}$ è la soluzione del sistema $B_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$. La stima ottenuta è buona se α è molto vicino a $\sqrt{2}$? E se α è molto vicino a 0?