Calcolo Numerico

Esame del 10/02/2025

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } -1 \le x \le 0, \\ -x+1, & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $-1, 0, 1$.

(b) Calcolare $E = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)|$.[*]

(c) Per ogni $n \ge 1$, scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q_n(x)$ di $f(x)$ sugli $n+1$ nodi uniformi $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[a, b]$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare l'integrale $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Supponiamo che I_n converga a I con una velocità superiore a n^2, nel senso che

$$\lim_{n\to\infty} n^2 |I_n - I| = 0.$$

Dimostrare che in tal caso deve esistere necessariamente un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f''(x_0) = 0$.

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore della formula dei trapezi e il seguente risultato sulle funzioni continue: se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su $[a, b]$ che non ha zeri su $[a, b]$ (cioè $g(x) \ne 0$ per ogni $x \in [a, b]$), allora il minimo $m_{|g|} = \min_{x\in[a,b]} |g(x)|$ è strettamente positivo ($m_{|g|} > 0$).

Esercizio 3. Sia[†] $f(x) = \frac{1}{\log(x+2)}$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$.

(b) Calcolare un'approssimazione $\tilde{I}$ di I con errore $|\tilde{I} - I| \le 10^{-2}$.

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

(a) Stabilire per quali valori di α la matrice A è definita positiva.

(b) Supponiamo che α sia uno dei valori trovati al punto (a) e sia $p(x)$ un polinomio tale che $-2 \le p(x) \le 2$ per ogni $x \in (0, \rho(A)]$. Dimostrare che $\rho(B) \le 2$, dove $B = p(A)$.

(c) Supponiamo che $\alpha \ge 1$. Dimostrare che gli autovalori di A si trovano nell'intervallo aperto $(-\alpha, 1+2\alpha)$ e, sulla base di questo fatto, fornire la stima più precisa possibile per il raggio spettrale $\rho(A)$.

(d) Sia[‡]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di α il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

---

[*] E è l'errore massimo commesso approssimando $f(x)$ con $p(x)$ al variare di $x \in [-1, 1]$.

[†] Il simbolo log (senza specificazione della base del logaritmo) indica sempre il logaritmo in base e (logaritmo naturale).

[‡] In pratica, M è ottenuta sostituendo 0 al posto di α nell'espressione di A.