ESERCIZIO (PHARMAX)

Il consiglio di Amministrazione della società farmaceutica Pharmax di Pomezia ha assegnato un budget di tre milioni di euro alla divisione ricerca e sviluppo, da destinare alla realizzazione di nuovi farmaci per l'anno in corso, raccomandando al dott. Bianchi, responsabile della divisione, di investire nei progetti meno rischiosi.
Per il problema della Pharmax, il dott. Bianchi ha individuato due progetti di sviluppo, A e B, da finanziare con priorità. I responsabili dei due progetti valutano, pari al 30% e al 20%, rispettivamente per A e B, la percentuale di insuccesso finale di un'eventuale sperimentazione. Lo sviluppo dei progetti richiederà comunque più anni e il dott. Bianchi deve sempelicemente decidere l'entità del finanziamento da assegnare a ciascun progetto per l'anno in corso, conservando eventualmente una parte del budget per altre iniziative.
Per il problema della Pharmax, il dott. Bianchi identifica il seguente problema di ottimizzazione: "stabilire il finanziamento da assegnare al progetto A e al progetto B in modo tale che il finanziamento complessivo rientri nel budget e che il rischio d'investimento sia minimo".
Per il problema della Pharmax, il dott. Bianchi può definire due variabili di decisione x_A e x_B, pari rispettivamente al finanziamento da destinare all'esecuzione dei due progetti A e B. Il vettore x delle variabili di decisione è quindi indicato come

$$x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

Per definire la regione ammissibile X del problema, si osserva quanto segue. Non si può accettare come soluzione un valore negativo di x_A o x_B. Inoltre, il finanziamento complessivamente assegnato ai due progetti non può eccedere il budget disponibile, ovvero, $x_A + x_B \leq 3$ (ipotizzando che x_A e x_B siano espresse in milioni di euro).
L'insieme X è quindi:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_A + x_B \leq 3,\ x_A, x_B \geq 0\}.$$

La funzione obiettivo richiede di definire formalmente il rischio di un finanziamento e di considerare come investimento migliore quello con il minimo rischio. Si può definire il rischio di un progetto come il prodotto tra capitale investito e percentuale di insuccesso e il rischio di un finanziamento come la somma dei rischi di progetto, ottenendo la funzione obiettivo $z(x) = 30x_A + 20x_B$. La formulazione del problema è quindi la seguente:

$$\begin{aligned} \min\ & z(x) = 30x_A + 20x_B \\ \text{s.v.}\ & x_A + x_B \leq 3 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Per il problema della Pharmax, la soluzione ottima è, evidentemente, la soluzione $x_A^* = x_B^* = 0$, che corrisponde a una percentuale di insuccesso $z(x^*) = 0$. Infatti, qualsiasi soluzione ammissibile $x \in X$ deve avere una percentuale di insuccesso $z(x) \geq 0$, per cui, si è riusciti a trovare una soluzione ammissibile x^*, avente costo pari proprio alla limitazione inferiore di $z(x)$, e che, di conseguenza, è ottima.
Poichè il dott. Bianchi aveva giudicato prioritario il finanziamento dei progetti A e B rispetto ad altri, è verosimile che la soluzione ottima $x_A^* = 0$, $x_B^* = 0$ sia considerata inaccettabile. Da questo esito negativo, il dott. Bianchi trae la conclusione che è necessario un supplemento di raccolta dati. L'indagine porta a definire una quota minima e massima per ciascun progetto, rispettivamente di 0,5 e 1,5 milioni di euro per l'anno in corso. Inoltre, stabilisce di destinare 1,8 milioni di euro ai progetti A e B e 1,2 milioni di euro per altri progetti. Il modello risulta così modificato nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z(x) = 30x_A + 20x_B \\
\text{s.v.} \quad & x_A + x_B = 1,8 \\
& 0,5 \leq x_A \leq 1,5 \\
& 0,5 \leq x_B \leq 1,5
\end{aligned}
$$

La successiva fase di soluzione porta al calcolo di una nuova soluzione ottima, $x_A^* = 0,5$ e $x_B^* = 1,3$ e a una nuova fase di validazione, che, stavolta, si conclude con esito positivo.

ESERCIZIO (ATLETA)

Un atleta, in prossimità di una gara, deve perdere peso senza perdere massa muscolare durante gli allenamenti. Il proprio regime alimentare giornaliero prevede l'assunzione di carne, legumi e pasta, conditi con olio. In tabella è riportato il contenuto in grassi, carboidrati e proteine di ciascuno di questi alimenti, il loro contenuto calorico e la minima richiesta nutrizionale di ciascun macronutriente. Occorre stabilire il regime dietetico giornaliero che garantisce all'atleta un apporto nutrizionale non inferiore a quello richiesto, con il minimo apporto calorico. Le variabili di decisione del problema della dieta sono indicate con x_j, $j = 1, \dots, 4$, e corrispondono alla quantità giornaliera (espressa in etti) di alimento j (1 = carne, 2 = legumi, 3 = pasta, 4 = olio) che deve entrare nella dieta. I parametri del problema sono rappresentati dai dati riportati in tabella, mentre i vincoli sono le restrizioni imposte dalle richieste nutrizionali. La quantità di grassi complessivamente assunta dall'atleta è funzione delle variabili di decisione. In particolare, se 100g di carne contengono 2,6 g di grassi, si può determinare l'apporto di grassi (in g) proveniente da x_1 etti di carne che risulta pari a $2,6x_1$.

Ripetendo il ragionamento per gli altri alimenti, si ricava che l'apporto totale di grassi (in g) nella dieta sarà: $2,6x_1 + 1,5x_2 + 1,5x_3 + 100,0x_4$.

Macronutriente	Alimento: Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884	–

Tabella 1.1 Dati relativi al problema della dieta dell'atleta.

Dal momento che l'atleta deve ingerire almeno 30g di grassi al giorno, ne deriva il seguente vincolo:

$$2,6x_1 + 1,5x_2 + 1,5x_3 + 100,0x_4 \geq 30.$$

Ragionando in maniera analoga per gli altri nutrienti (carboidrati e proteine), si ottiene

$$60,7x_2 + 74,7x_3 \geq 90 \quad \text{e} \quad 20,2x_1 + 22,3x_2 + 13,0x_3 \geq 60.$$

Oltre a questi vincoli, occorre imporre che le quantità giornaliere di alimenti assunte non siano negative, ovvero, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.
Dal momento che l'obiettivo è quello di determinare la dieta con il minimo apporto calorico, la funzione obiettivo potrà essere espressa matematicamente come segue: $z(x) = 110x_1 + 337x_2 + 371x_3 + 884x_4$.
Riassumendo, la formulazione del modello di ottimizzazione e' la seguente:

$$\min(z) = 110x_1 + 337x_2 + 371x_3 + 884x_4$$

s.v.

$$2,6x_1 + 1,5x_2 + 1,5x_3 + 100,0x_4 \geq 30$$
$$60,7x_2 + 74,7x_3 \geq 90$$
$$20,2x_1 + 22,3x_2 + 13,0x_3 \geq 60$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

la cui soluzione ottima risulta: $x_1^* = 1,3335$; $x_2^* = 1,4827$; $x_3^* = 0,000$; $x_4^* = 0,2431$ con valore ottimo pari a $z^* = z(x^*) = 861,2416$.

ESERCIZIO (CONDUCENTI)

Una compagnia di trasporto deve programmare la schedulazione del personale conducente gli autobus che coprono una data zona urbana. La richiesta degli autobus (e quindi di conducenti) per il giorno successivo varia per fasce orarie, secondo quanto riportato in tabella. I conducenti hanno turni di durata pari a sei ore, a partire dai seguenti orari: 00:00, 03:00, 06:00, 09:00, 12:00, 15:00, 18:00 e 21:00. Per esempio, un conducente del terzo turno inizia a lavorare alle ore 06:00 e conclude il turno alle 12:00. Il problema consiste nell'allocare il personale in modo da soddisfare i requisiti minimi previsti per ogni fascia di servizio del giorno successivo, impiegando il minor numero possibile di autisti.

Fascia oraria	Numero di autisti
00:00–03:00	22
03:00–06:00	18
06:00–09:00	78
09:00–12:00	65
12:00–15:00	80
15:00–18:00	75
18:00–21:00	58
21:00–24:00	48

Tabella 1.2 Numero minimo di conducenti di autobus necessari il giorno successivo per la copertura delle otte fasce orarie.

Le variabili di decisione sono indicate con x_J, $J = 1, \dots, 8$ ciascuna delle quali corrispondente al numero di conducenti allocati al turno J nel giorno successivo. I vincoli, oltre a quelli relativi alla non negatività e interezza delle variabili di decisione, sono legati al minimo numero di autisti che occorre garantire per ogni fascia oraria. La prima fascia oraria è coperta dai conducenti assegnati al primo e all'ottavo turno, cosicché il vincolo corrispondente risulta essere $x_1 + x_8 \geq 22$. In modo del tutto analogo, si possono formulare i vincoli per le restanti sette fasce orarie:

$x_1 + x_2 \geq 18$; $x_2 + x_3 \geq 78$; $x_3 + x_4 \geq 65$; $x_4 + x_5 \geq 80$; $x_5 + x_6 \geq 75$; $x_6 + x_7 \geq 58$; $x_7 + x_8 \geq 48$.

La funzione obiettivo, da minimizzare, è il numero complessivo di conducenti e risulta pertanto: $z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$.

La formulazione complessiva del modello di PI è la seguente:

$$
\begin{aligned}
\min \; & z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8. \\
\text{s.v.} \; & x_1 + x_8 \geq 22 \qquad x_4 + x_5 \geq 80 \\
& x_1 + x_2 \geq 18 \qquad x_5 + x_6 \geq 75 \\
& x_2 + x_3 \geq 78 \qquad x_6 + x_7 \geq 58 \\
& x_3 + x_4 \geq 65 \qquad x_7 + x_8 \geq 48 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0, \text{ intero},
\end{aligned}
$$

la cui soluzione ottima è: $x_1^* = 22$; $x_2^* = 0$, $x_3^* = 78$; $x_4^* = 0$, $x_5^* = 80$; $x_6^* = 0$; $x_7^* = 58$; $x_8^* = 0$, con valore ottimo pari a $z^* = 238$. Vale la pena osservare che, in questo caso, esistono più soluzioni ottime del problema. Per esempio, la soluzione: $\bar{x}_1 = 22$; $\bar{x}_2 = 28$; $\bar{x}_3 = 50$; $\bar{x}_4 = 15$; $\bar{x}_5 = 65$; $\bar{x}_6 = 10$; $\bar{x}_7 = 48$; $\bar{x}_8 = 0$ è ammissibile e ha valore ottimo pari a $\bar{z} = 238$ ed è, pertanto, anch'essa ottima.

ESERCIZIO (INVESTIMENTO)

Il settore marketing di un'azienda produttrice di liquori ha deciso di promuovere le vendite del proprio prodotto di punta. Allo scopo, sono state prese in esame otto proposte di campagne pubblicitarie su differenti canali di comunicazione (TV, radio, quotidiani, riviste specializzate). Per ciascuna campagna pubblicitaria proprosta sono disponibili, in tabella, i costi e l'incremento atteso delle vendite di prodotto. Si assume la disponibilità di un budget complessivo pari a 1.240.000 €.

L'azienda ha inoltre stabilito che l'investimento deve essere effettuato su almeno 4 campagne promozionali differenti. Il problema consiste nel selezionare le campagne promozionali che massimizzino l'incremento atteso delle vendite di prodotto, nel rispetto dei vincoli di budget e di diversificazione delle campagne pubblicitarie adottate. Le variabili di decisione devono esprimere una scelta relativa alla selezione o meno di una campagna pubblicitaria. Si indichi con x_j, $j = 1, \dots, 8$, una variabile di decisione di tipo binario, avente valore pari a 1 se la campagna pubblicitaria j viene scelta, 0 altrimenti. Un primo vincolo è imposto dal budget disponibile. In particolare, il costo complessivo dell'investimento, in funzione delle variabili di decisione, è pari a: $250x_1 + 340x_2 + 570x_3 + 650x_4 + 700x_5 + 175x_6 + 190x_7 + 180x_8$.

Campagna pubblicitaria	Costo [k€]	Incremento atteso delle vendite [%]	Canale di comunicazione
1	250	3,5	Radio
2	340	5,0	Radio
3	570	5,8	TV
4	650	6,5	TV
5	700	7,2	TV
6	175	0,4	Giornali
7	190	1,6	Giornali
8	180	1,3	Rivista specializzata

Tabella 1.3 Dati relativi al problema di selezione delle campagne pubblicitarie.

Dal momento che il budget a disposizione è pari a 1.240 k€, segue il vincolo:
$250x_1 + 340x_2 + 570x_3 + 650x_4 + 700x_5 + 175x_6 + 190x_7 + 180x_8 \leq 1.240$.

Essendo almeno quattro le campagne pubblicitarie che occorre selezionare, si avrà il seguente ulteriore vincolo: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 4$.
L'obiettivo consiste nella massimizzazione dell'incremento percentuale atteso delle vendite, esprimibile come: $z(x) = 3{,}5x_1 + 5{,}0x_2 + 5{,}8x_3 + 6{,}5x_4 + 7{,}2x_5 + 0{,}4x_6 + 1{,}6x_7 + 1{,}3x_8$
Il modello di PI di tipo binario è dunque il seguente:

$$\max z(x) = 3{,}5x_1 + 5{,}0x_2 + 5{,}8x_3 + 6{,}5x_4 + 7{,}2x_5 + 0{,}4x_6 + 1{,}6x_7 + 1{,}3x_8.$$

s.v.

$$250x_1 + 340x_2 + 570x_3 + 650x_4 + 700x_5 + 175x_6 + 190x_7 + 180x_8 \leq 1.240$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \{0,1\}.$$

La soluzione ottima risulta essere: $x_1^* = 1$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 1$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 0$; $x_6^* = 0$; $x_7^* = 1$; $x_8^* = 1$ con valore ottimo pari a $z^* = 12{,}20$.

ESERCIZIO (LOCALIZZAZIONE)

Un'azienda deve localizzare un punto di approvvigionamento per servire cinque centri di distribuzione. Il numero medio annuo di viaggi a pieno carico (ovvero, in modalità "porta a porta") per servire i centri di distribuzione è indicato in tabella. La stessa tabella riporta anche le coordinate cartesiane dei cinque centri. Il problema è affrontato determinando nel piano cartesiano la posizione ottimale del punto di approvvigionamento, cosa che consente di individuare un'area di "interesse", per poi procedere a valutare, con criteri di tipo qualitativo, i siti potenziali che ricadono nell'area di interesse. Ogni centro di distribuzione non può essere distante più di 90 Km in linea d'aria dal punto di approvvigionamento. Il problema può essere formulato utilizzando le variabili di decisione x_1 e x_2, rappresentanti le coordinate cartesiane del punto di approvvigionamento. La distanza euclidea tra il primo centro di distribuzione e il punto di approvvigionamento si ottiene come $\sqrt{(x_1-20)^2+(x_2-45)^2}$. Dal momento che il centro di distribuzione non può distare più di 90 Km dal punto di approvvigionamento, segue il vincolo: $\sqrt{(x_1-20)^2+(x_2-45)^2} \leq 90$.

Centro di distribuzione	Numero annuo di viaggi	Ascissa [km]	Ordinata [km]
1	250	20	45
2	180	0	85
3	160	120	0
4	240	98	142
5	190	158	98

Analogamente, si ricavano i vincoli per gli altri quattro centri di distribuzione:

$\sqrt{(x_1)^2+(x_2-85)^2} \leq 90$; $\sqrt{(x_1-120)^2+(x_2)^2} \leq 90$; $\sqrt{(x_1-98)^2+(x_2-142)^2} \leq 90$; $\sqrt{(x_1-158)^2+(x_2-98)^2} \leq 90$.

La funzione obiettivo, da minimizzare, deve rappresentare il numero di chilometri coperti complessivamente nell'anno per servire tutti i centri di distribuzione dal punto di approvvigionamento. Essendo il numero di viaggi previsti per il primo centro di distribuzione pari a 250 e considerando che un viaggio è composto da una tratta di andata e ritorno, il contributo alla funzione obiettivo dato dal primo centro di distribuzione è pari a $500\sqrt{(x_1-20)^2+(x_2-45)^2}$. Di conseguenza, la funzione obiettivo si esprime complessivamente come:

$$z(x_1,x_2) = 500\sqrt{(x_1-20)^2+(x_2-45)^2} + 360\sqrt{(x_1)^2+(x_2-85)^2} + 320\sqrt{(x_1-120)^2+(x_2)^2} + 480\sqrt{(x_1-98)^2+(x_2-142)^2} + 380\sqrt{(x_1-158)^2+(x_2-98)^2}.$$

Il modello di PNL è dunque il seguente:

$$\min\ z(x_1,x_2) = 500\sqrt{(x_1-20)^2+(x_2-45)^2} + 360\sqrt{(x_1)^2+(x_2-85)^2} + 320\sqrt{(x_1-120)^2+(x_2)^2} + 480\sqrt{(x_1-98)^2+(x_2-142)^2} + 380\sqrt{(x_1-158)^2+(x_2-98)^2}$$

s.v.

$$\sqrt{(x_1-20)^2+(x_2-45)^2} \leq 90 \quad \sqrt{(x_1)^2+(x_2-85)^2} \leq 90 \quad \sqrt{(x_1-120)^2+(x_2)^2} \leq 90$$

$$\sqrt{(x_1-98)^2+(x_2-142)^2} \leq 90 \quad \sqrt{(x_1-158)^2+(x_2-98)^2} \leq 90$$

a cui corrisponde la seguente soluzione ottima: $x_1^* = 70{,}88$; $x_2^* = 75{,}41$, con valore ottimo pari a $z^* = 152.898{,}45$.