FUNZIONE RAZIONALI

Consideriamo una funzione razionale:

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

I calcoli delle antitrasformate si distinguano a seconda del rapporto che c'è tra il grado del numeratore e il grado del denominatore.
In particolare:

$$\boxed{\text{grado } b(s) < \text{grado } a(s) \quad \Rightarrow F(s) \text{ è strettamente propria}}$$

$$\boxed{\text{grado } b(s) = \text{grado } a(s) \quad \Rightarrow F(s) \text{ è semplicemente propria}}$$

- Si suppone inoltre che non si possano fare semplificazioni tra numeratore e denominatore (ovvero $b(s)$ e $a(s)$ sono *coprimi* tra loro)
- Le radici del numeratore $a(s)$ vengono dette *zeri* della funzione
- Le radici del denominatore $a(s)$ vengono dette *poli* della funzione

Inoltre, *il termine di grado massimo del denominatore nella forma standard che consideriamo lo prendiamo uguale a* 1. Se $F(s)$ non avesse questa caratteristica in partenza, ci si può sempre ricondurre a quel caso, ad esempio:

$$F(s) = \frac{s}{3s^2+4} = \frac{\frac{1}{3}s}{s^2+\frac{4}{3}} \qquad b(s) = \frac{1}{3}s \qquad a(s) = s^2 + \frac{4}{3}$$

- ovvero $a(s)$ è un polinomio *monico*

TEOREMA DEI RESIDUI

CASO POLI DISTINTI

$F(s)$, nelle ipotesi di strettamente propria con poli distinti, può essere sempre riscritta in fratti semplici come:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}$$

Il generico K_i vengono detti *residui*, e ognuno è associato al relativo polo p_i. Si può calcolare secondo il teorema in questo modo:

$$K_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) \cdot F(s)$$

Infatti:

$$\lim_{s \to p_i} (s-p_i)F(s) = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) \sum_{\ell=1}^{n} \frac{K_\ell}{s-p_\ell} = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) \left\{ \frac{K_1}{s-p_1} + \dots + \frac{K_m}{s-p_m} \right\}$$

$$= \lim_{s \to p_i} (s-p_i) \left\{ \frac{K_i}{s-p_i} + \sum_{\ell \neq i} \frac{K_\ell}{s-p_\ell} \right\} = \lim_{s \to p_i} \left[K_i + \sum_{\ell \neq i} K_\ell \frac{(s-p_i)}{s-p_\ell} \right] = K_i + \cancel{\sum_{\ell \neq i} K_\ell \frac{0}{p_i - p_\ell}} = K_i$$

dove l'ultima eguaglianza vale perché $p_i \neq p_\ell$ se $i \neq \ell$

- Poiché questo vale per ogni p_i, con $i = 1, \dots, n$ ottengo n condizioni che definiscono in modo univoco $F(s)$

ESEMPIO:

$F(s) = \frac{1}{s^2-1}$ $\quad e(s) = s^2 - 1$ $\quad b(s) = 1$ $\quad n = 2$

$p_1 = -1 \quad p_2 = 1$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2}$$

$$K_1 = \lim_{s \to p_1} (s-p_1) F(s) = \lim_{s \to -1} (s+1) \cdot \frac{1}{s^2-1}$$

$$= \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{1}{\cancel{(s+1)}(s-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$k_2 = \lim_{s \to p_2} (s-p_2) F(s) = \lim_{s \to 1} \cancel{(s-1)} \frac{1}{(s+1)\cancel{(s-1)}} = \frac{1}{2}$$

- utile perché non devo impostare un sistema che potenzialmente potrebbe avere molte equazioni

il teorema e l'ANTITRASFORMATA

Partendo dai fratti semplici: $F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$, possiamo antitrasformare ciascun termine, così da ottenere $f(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i} \right\} = \sum_{i=1}^{n} K_i \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-p_i} \right\} = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i} \, 1(t)$$

dove:

- $e^{p_1 t} 1(t), \dots, e^{p_n t} 1(t)$ sono i **modi di evoluzione** della funzione $F(s)$
  - e K_i sono i residui relativi

Quindi, data una funzione razionale in Laplace dotata di poli sono associati dei segnali del tempo che caratterizzano i modi di evoluzione esponenziali. Essi sono in corrispondenza biunivoca con i relativi poli.

- Quindi dato un poli in Laplace si deduce com'è fatto il corrispondente segnale nel tempo
  - (anche senza calcolare i rispettivi residui posso capire in generale com'è l'andamento: convergente, divergente etc..)

L'obiettivo quindi è capire come *prevedere* l'evoluzione nel tempo dell'esponenziale, ovvero capire come influisce la posizione del polo sul piano complesso per l'evoluzione del segnale nel tempo

- ovvero capire la corrispondenza $polo \longleftrightarrow esponenziale$ per capire il comportamento, ovvero:

$$p_i \longleftrightarrow e^{p_i t}\, 1(t)$$

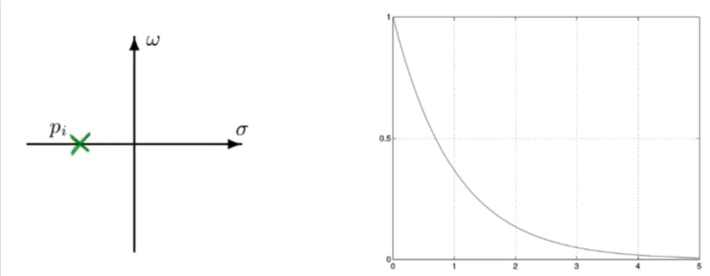
CORRISPONDENZE POLO - ESPONENZIALE

POLO REALE NEGATIVO

Consideriamo $p_i < 0$. Avremo in generale:

$$p_i \longleftrightarrow e^{p_i t}\, 1(t)$$

- ovvero un esponenziale **convergente a zero**



Posizione del polo nel piano s Evoluzione del modo nel tempo

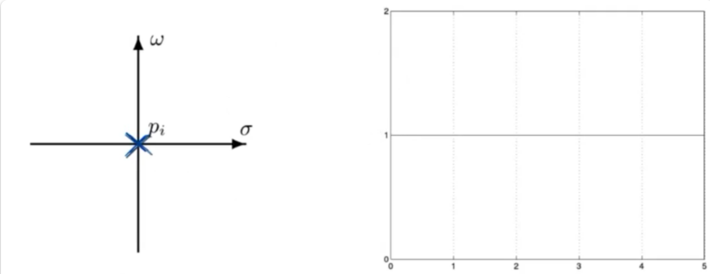
- più il polo si avvicina a 0 più la convergenza diventa lenta

POLO REALE ZERO

Consideriamo $p_i = 0$. Avremo in generale:

$$p_i \longleftrightarrow e^{p_i t}\, 1(t) = e^{0t}\, 1(t) = 1(t)$$

- ovvero un esponenziale **convergente costante a uno (gradino)**



Posizione del polo nel piano s Evoluzione del modo nel tempo

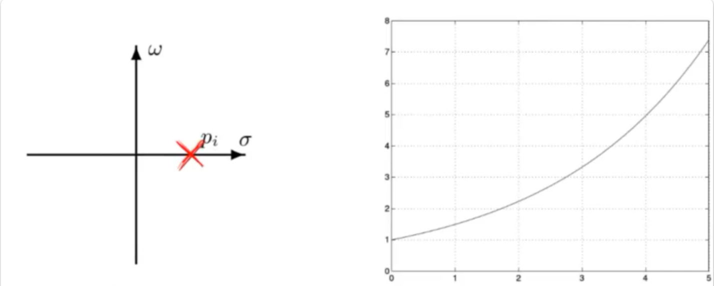
- segnale limitato ma non convergente a zero

POLO REALE POSITIVO

Consideriamo $p_i > 0$. Avremo in generale:

$$p_i \longleftrightarrow e^{p_i t}\, 1(t)$$

- ovvero un esponenziale **convergente divergente a ∞**



Posizione del polo nel piano s Evoluzione del modo nel tempo

- sempre più divergente se p_i è grande

POLI COMPLESSI

Per capire l'evoluzione nel tempo, conviene prendere a *coppie* i poli *complessi coniugati*.
Se prendiamo un polo complesso del tipo: $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ allora a esso sono associati: il coniugato, il residuo e il coniugato del residuo, ovvero:

$$\begin{cases} p_i = \sigma_i + j\omega_i \longleftrightarrow K_i = \alpha_i + j\beta_i \\ \overline{p_i} = \sigma_i - j\omega_i \longleftrightarrow \overline{K}_i = \alpha_i - j\beta_i \end{cases}$$

I **modi di evoluzione** associati sono i seguenti:

$$P_i \longleftrightarrow e^{p_i t}1(t) = e^{(\sigma_i + j\omega_i)t}1(t) = e^{\sigma_i t}e^{j\omega_i t}1(t) = e^{\sigma_i t} \cdot [\cos(\omega_i t) + j\sin(\omega_i t)]1(t)$$

$$\overline{P_i} \longleftrightarrow e^{\overline{p_i} t}1(t) = e^{(\sigma_i - j\omega_i)t}1(t) = e^{\sigma_i t}e^{-j\omega_i t}1(t) = e^{\sigma_i t} \cdot [\cos(\omega_i t) - j\sin(\omega_i t)]1(t)$$

Considerando anche i residui, possiamo mettere tutto insieme:

$$K_i e^{p_i t}1(t) + \overline{K_i} e^{\overline{p_i} t}1(t)$$

Ovvero:

$$K_i \, e^{\sigma_i t} \cdot [\cos(\omega_i t) + j\sin(\omega_i t)]1(t) + \overline{K_i} \, e^{\sigma_i t} \cdot [\cos(\omega_i t) - j\sin(\omega_i t)]1(t)$$

- dove i residui $k_i$sono numeri complessi della forma: $\alpha_i \pm j\beta_i$

Combinandoli algebricamente in maniera corretta, ci si rende conto che *la parte immaginaria scompare*, infatti rimane soltanto la parte reale:

$$\left(K_i e^{p_i t} + \overline{K}_i e^{\overline{p}_i t}\right) \, 1(t) = \left[2\,\alpha_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) - 2\,\beta_i e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)\right] 1(t)$$

- quindi una volta calcolato il polo e il residuo, con questa formula *possiamo capire il modo di evoluzione* quando abbiamo appunto poli complessi

Quindi, a una coppia di poli complessi coniugati sono associati due modi di evoluzione, ovvero:

$$\underbrace{P_i \quad \overline{P_i}}$$
$$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t)$$
$$e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)$$

Ricordando che $p_i = \sigma_i + j\omega_i$:

- la parte reale contribuisce con un esponenziale
- la parte immaginaria contribuisce con una oscillazione (seno/coseno)

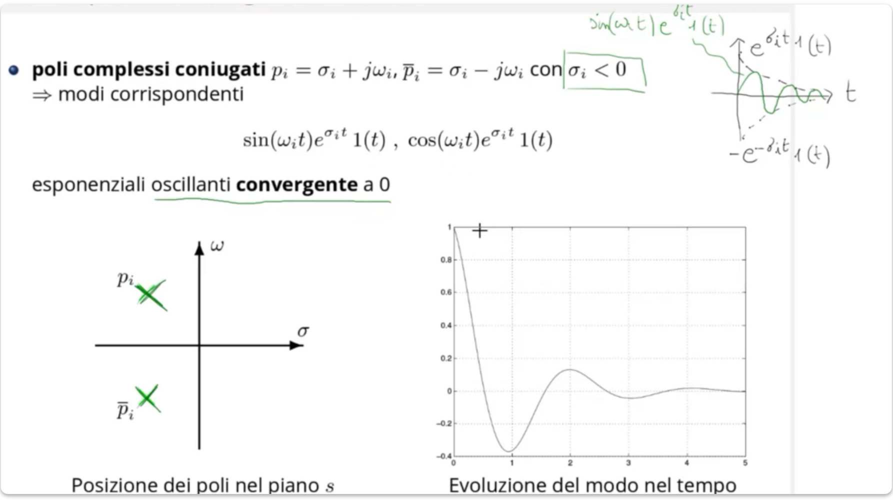
> > *Basta calcolare i poli per capire i modi di evoluzione. La differenza col caso reale è che compare anche un termine oscillatorio, introdotto dalla parte immaginaria*

POLI COMPLESSI CON PARTE REALE NEGATIVA

Consideriamo due poli complessi coniugati del tipo con $\sigma_i < 0$

- L'esponenziale per quanto già visto, *converge a zero*
- Mettendo insieme si giunge a un **esponenziale oscillante convergente a zero**, del tipo:

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}1(t) \quad , \quad \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}1(t)$$

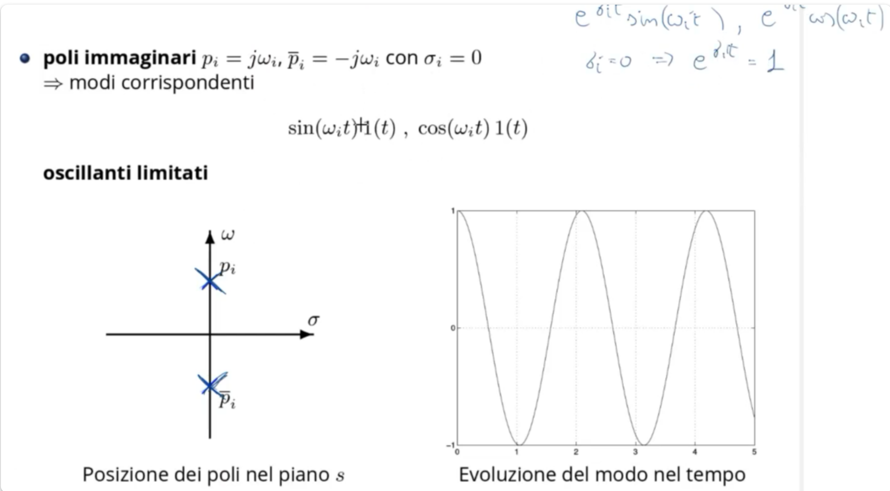


- dove in figura è mostrato l'andamento del coseno
  - Da notare che il grafico "va sotto zero" come ci può aspettare (anche se non è disegnata l'asse x)

POLI COMPLESSI CONIUGATI PURAMENTE IMMAGINARI

- Poli con parte reale uguale a zero, cioè: $\sigma_i = 0$
- I poli sono della forma: $p_i = j\omega_i \quad , \quad \overline{p_i} = -j\omega_i$
  Si ottengono **modi completamente oscillanti e limitati**, della forma:

$$\sin(\omega_i t) \quad , \quad \cos(\omega_i t)1(t)$$



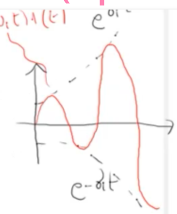
POLI COMPLESSI CONIUGATI CON PARTE REALE POSITIVA

- Ragionando come nei casi precedenti si arriva a:

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}1(t) \quad , \quad \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}1(t)$$

Con $\sigma_i > 0$.

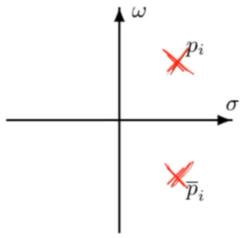
- **Oscillanti (perché c'è la parte immaginaria) e divergenti (esponenziale positivo)**



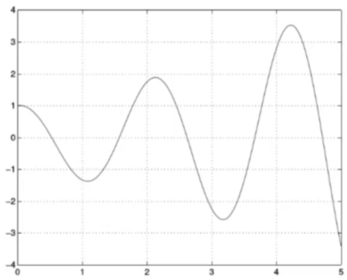
- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i > 0$
  $\Rightarrow$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}1(t)\ ,\ \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

esponenziali **oscillanti divergenti**

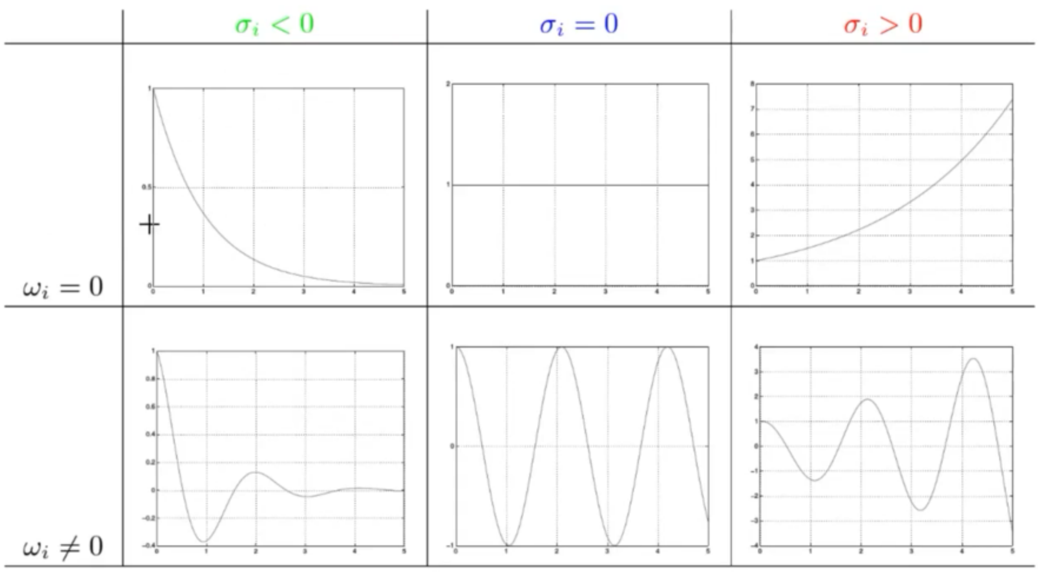


Posizione dei poli nel piano s



Evoluzione del modo nel tempo

RIASSUMENDO



	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\omega = 0$	convergente non oscillante	limitato non oscillante	divergente non oscillante
$\omega_i \neq 0$	convergente oscillante	limitato oscillante	divergente oscillante

- **Parte reale** $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\}$ determina la **convergenza/divergenza**
- **Parte immaginaria** $\omega_i = \mathrm{Im}\{p_i\}$ determina la presenza o meno di **oscillazioni**

Nota: Per conoscere l'andamento qualitativo di $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ è sufficiente guardare la **posizione dei poli** nel piano s (non è necessario calcolare i residui)