Si possono esprimere poi tutte le equazioni di stato sotto forma *matriciale*:

$$x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{A}} x(t)$$

- *La matrice A quindi governa la transizione di stato*
- Il sistema è **TD TI** (no dipendenza dal tempo) e **autonomo** non essendo presenti ingressi esterni
- **ogni colonna ha somma** 1, perché in un certo istante discreto t dobbiamo trovarci in un certo stato --> matrice **stocastica**

Un esempio di simulazione del sistema è il seguente:

- Si parte da un evento certo, ad esempio *soleggiato*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_0}$$

> - A partire da qui, sfruttando la matrice A si può calcolare una distribuzione di probabilità e capire in generale come si evolverà il sistema
>   - Questo perché vale l'**ipotesi di Markov** (processo senza memoria, mi basta sapere com'è il modello al tempo t per capire in generale come potrebbe evolversi)
>   - Nel nostro caso abbiamo un *processo di Markov omogeneo*, in quanto le probabilità a_{ij} di transizione sono indipendenti dal tempo
>   - Se avessimo un ingresso che governa la transizione, si parlerebbe di *processo decisionale di Markov*, del tipo: $\mathrm{A}(u(t))$

MODELLO GENERALE

Troviamo una forma generale per il modello transizione di stato:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t+1) &= \alpha_{1i}x_1(t) + \alpha_{2i} + x_2(t) + \cdots + \alpha_{ni}x_n(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}x_j(t) \end{aligned}}$$

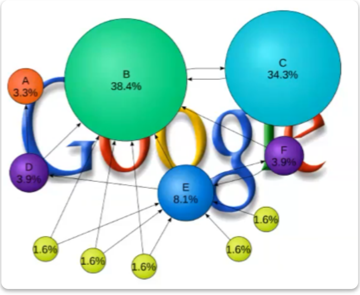
Dove:

- $x_i(t)$ è la prob. di trovarsi al tempo t nello stato i
- α_{ij} è la prob. di transizione dallo stato i allo stato j

Come già detto deve valere: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} = 1$ (matrice stocastica)

ESEMPIO: PAGE RANK

- Algoritmo che consente di associare un peso (che quantifica l'importanza) a ciascuna pagina web
- Applicabile su ogni grafo relazionale composto ovviamente da nodi



Si basa su un modello probabilistico caratterizzato da una *random walk* sul grafo (camminatore casuale)

- Si cerca la probabilità di trovarsi in un certo nodo dopo un certo periodo di tempo (idealmente all'infinito), eseguendo appunto una camminata aleatoria
  - In figura è più probabile che asintoticamente ci si trovi nel nodo B

FORMULAZIONE MATEMATICA

Ipotizzando che l'utente scelga i link a cui accedere in maniera casuale:

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} 1/L_j & \text{se } j \in N_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove:

- L_j sono i possibili link a cui accedere a partire da j
- N_i totale delle pagine che puntano a i
- α_{ji} è al solito la prob. di passare dalla pagina j alla pagina i

Si giunge in maniera semplice alla equazione di stato *calcolando la probabilità che l'utente si trovi a una pagina i al tempo $t+1$*:

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in N_i} x_j(t) \cdot \frac{1}{L_j} \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

- ovvero la somma di tutte le pagine che linkano a i moltiplicata per la probabilità di passare da j a i, che è appunto $1/L_j$. Rieseguo tutto per tutte le N pagine web

- stesso modello delle previsioni del tempo, solo che in quel caso avevo solo 3 stati

  Per simulare il modello, si parte da una condizione iniziale casuale, del tipo $x_i(0) = 1/n$

  - ovvero parto da una pagina a caso e faccio partire l'algoritmo

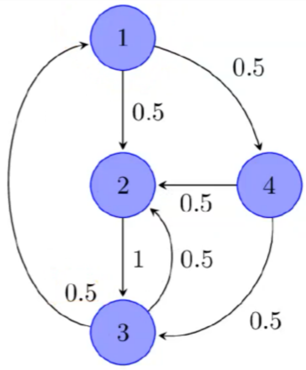
ESEMPIO

Nell'esempio:

- $L_1 = 2 \quad \mathcal{N}_1 = \{3\}$
- $L_2 = 1 \quad \mathcal{N}_2 = \{1, 3, 4\}$
- $L_3 = 2 \quad \mathcal{N}_3 = \{2, 4\}$
- $L_4 = 2 \quad \mathcal{N}_4 = \{1\}$

Di conseguenza

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$



Nota: per costruzione le colonne sommano a 1

L'elemento A_{ij} mi dice la probabilità di passare da j a i (si legge al "contrario")

- Ad esempio A_{23} mi dice la probabilità di passare dallo stato 3 allo stato 2.

CONVERGENZA E DAMPING FACTOR

Nel modello che abbiamo presentato *non* è garantita la convergenza. Infatti c'è la possibilità che si finisca in una pagina e che da lì non ci si muova più per com'è fatto il grafico (*nodo assorbente*).

- Per tale motivo si introduce il **Damping factor (d)** che garantisce che anche se giungiamo su un nodo assorbente, si passa comunque a un altro nodo (pagina), scegliendo se necessario quest'ultimo in modo casuale.
- Questo garantisce la convergenza, ovvero esiste sempre una possibilità di essere in una determinata pagina i dopo un certo periodo di tempo sufficiente, in generale:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \overline{x}_i$$

In particolare, con probabilità d si sceglie uno dei link possibili (come sempre - camminata casuale) e con probabilità $1-d$ si sceglie una pagina a caso invece di seguire i link, pertanto:

$$x_i(t+1) = \underbrace{d \sum_{n \in N_i} \frac{x_j(t)}{L_j}}_{\text{pagina linkata}} + \underbrace{(1-d) \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j(t)}{n}}_{\text{una pagina a caso}}$$

- scelta tipica del fattore: $d > 0 \quad , \quad d = 0.5$

L'esempio precedente diventa:

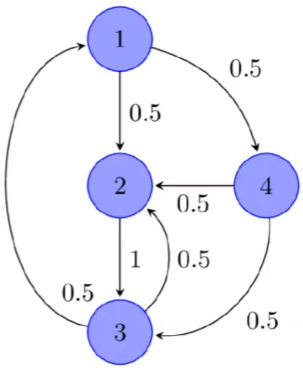
- PageRank con damping factor

$$x(t+1) = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1-d}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Per $d = 0.85$ le probabilità asintotiche sono:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1922 \\ 0.3246 \\ 0.3640 \\ 0.1192 \end{bmatrix}$$

- Di conseguenza l'ordine di importanza delle pagine web è $3, 2, 1, 4$.



- (rientra negli esempi di catena di Markov)

MODELLI DI INFLUENZA

In questi modelli vengono descritti i modi con cui una certa grandezza può *influenzare* un'altra grandezza.

- Più in generale studiano le *interazioni* tra varie grandezza

ESEMPIO: MODELLO PREDA-PREDATORE

Si studia come l'interazione tra *due animali* influenza l'*ecosistema*

- La prima popolazione è relativa alla preda ed è indicata con $x_1(t)$
- La seconda popolazione è relativa al predatore ed è indicata con $x_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & \overbrace{\alpha x_1(t)}^{\text{solo prede}} - \overbrace{\beta x_1(t) x_2(t)}^{\text{predatori}} \\ \dot{x}_2(t) & = & -\delta x_2(t) + \gamma x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

- Prima equazione: di per sè le prede tendono ad aumentare, ma la presenza di predatori fa ridurre questa crescita
- Seconda equazione: di per sè i predatori tendono a diminuire, ma la presenza di prede fa invertire questo trend

Ad esempio, si possono influenza in questo modo:
Un numero alto di predatori causa una riduzione della popolazione delle prede
Un numero basso di prede causa una riduzione della popolazione di predatori

Con riferimento al modello generale

- $f_1(x_1) = \alpha\, x_1$ $\alpha > 0$
  in **assenza di predatori** la popolazione delle prede **aumenta**
- $f_2(x_2) = -\delta\, x_2$
  in **assenza di prede** la popolazione dei predatori **diminuisce**
- $f_{21}(x_2, x_1) = -\beta\, x_1\, x_2$
  le prede diminuiscono proporzionalmente al **prodotto** $x_1\, x_2$
  (al crescere di $x_1\, x_2$ è più **probabile** che prede e predatori si incontrino)
- $f_{12}(x_1, x_2) = \gamma\, x_1\, x_2$
  i predatori aumentano proporzionalmente al prodotto $x_1\, x_2$.

Con $\alpha, \delta > 0$

MODELLO GENERALE

$$\text{(sistemi TC)} \qquad \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t))$$

$$\text{(sistemi TD)} \qquad x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t))$$

- $f_i(x_i)$ funzione che descrive la **dinamica locale** della grandezza i-esima
- $f_{ji}(x_j, x_i)$ funzione che descrive come la grandezza j-esima **influenza** la grandezza i-esima

- il secondo termine (addendo) è ciò che influenza la crescita/decrescita del modello

Qualora ci fossero degli ingressi il modello diventa il seguente:

$$\text{(sistemi TC)} \qquad \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(u_j(t), x_i(t))$$

$$\text{(sistemi TD)} \qquad x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(u_j(t), x_i(t))$$

- nel caso di preda/predatori potrebbe essere la caccia oppure un ripopolamento "artificiale" eseguito dall'esterno (dall'uomo)

ESEMPIO: DINAMICA DI OPINIONE

Si associa un opinione $x_i(t)$ a ogni utente i

- Se $x_i(t) = 0$ allora la valutazione è neutra (indifferente)
- Se $x_i(t) > 0$ allora la valutazione è positiva
- Se $x_i(t) < 0$ allora la valutazione è negativa

Ogni utente è influenzato da una cerchia di persone (amici, conoscenti etc...), che indichiamo con N_i

Si arriva a definire l'equazione del modello:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

- dove w_{ij} è il peso del nodo i sull'opinione di j (maggiore se è un conoscente stretto, parente etc..)
- Si esegue in pratica la differenza tra la mia opinione e quella di un mio amico
  - Se questo valore è positivo, allora il mio amico ha una opinione migliore della mia
    - Tende a influenzare positivamente la mia opinione (derivata positiva)
    - Se questo valore è negativo, allora il mio amico ha una opinione peggiore della mia
      - Tende a influenzare negativamente la mia opinione (derivata negativa)
  - Reitero poi questo per ogni mio amico (sommatoria Σ)