DIMOSTRAZIONE DEL SE E SOLO SE

$\Leftarrow$:

> > *Tutti i poli di $G(s)$ con parte reale < 0 implica stabilità esterna [condizione sufficiente]*

Premessa:

- Consideriamo un ingresso u limitato

$$\exists M : \quad |u(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

- Consideriamo la corrispondente risposta forzata

$\tau \Rightarrow t-\tau$

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ &= \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

dove la seconda eguaglianza si ottiene con il cambio di variabile $\tau \to t-\tau$

- Devo dimostrare che
tutti i poli di $G(s)$ con parte reale $< 0 \quad \Rightarrow \quad y_f(t)$ limitata

Passiamo quindi alla dimostrazione vera e propria, cercando di maggiorare ciò che abbiamo con una costante:

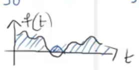
- Possiamo maggiorare il modulo della risposta forzata nel seguente modo

$|Du| = |D| \cdot |u|$

$$\begin{aligned} |y_f(t)| &= \left| \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t) \right| \\ &\leq \left| \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau \right| + |D| \cdot |u(t)| \\ &\leq \int_0^t \left|Ce^{A\tau}B\right| \underbrace{|u(t-\tau)|}_{M} d\tau + |D| \cdot \underbrace{|u(t)|}_{M} \\ &\leq M \left(\int_0^t \left|Ce^{A\tau}B\right| \cdot d\tau + |D| \right) \end{aligned}$$

disuguaglianza triangolare

$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \leq \int_0^t |f(\tau)|d\tau$



per ipotesi $|u(t-\tau)| \leq M$

dove la prima disequazione si ottiene sfruttando la diseguaglianza triangolare

- Ricordiamo ora che il segnale $Ce^{A\,t}B$ evolve secondo i modi corrispondenti ai poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (modi non nascosti del sistema)

- l'ipotesi di avere poli con parte reale minore di zero implica che $Ce^{At}B$ sia convergente a zero
  - Quindi nell'intervallo da zero a infinito l'area sottesa converge a una certa costante N
  - Poi ci rimane D che è una costante
- Si nota che la risposta forzata è limitata, con le ipotesi di avere un ingresso limitato (stabilità esterna $BIBO$)

- Rinominiamo poi $N + |D|$ con L che rapprsenta il *massimo guadagno* del sistema

$|Ce^{A\tau}B| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ esponenzialmente

- Tutti i poli di $G(s)$ con parte reale < 0
  - $\Rightarrow$ tutti i modi di $Ce^{A\,t}B$ sono covergenti
  - $\Rightarrow$ il segnale $Ce^{A\,t}B$ converge esponenzialmente a zero
- Di conseguenza

$$\int_0^t \left|Ce^{A\,\tau}B\right| \cdot d\tau \leq \int_0^{+\infty} \left|Ce^{A\,\tau}B\right| \cdot d\tau = N < +\infty$$

con N costante finita

- Di conseguenza possiamo maggiorare la risposta forzata come

$$|y_f(t)| \leq \underbrace{(N + |D|)}_{L} M \qquad \forall t \geq 0$$

- La quantità

$$L = N + |D|$$

rappresenta la massima amplificazione possibile dell'ingresso

---

$\Rightarrow$

> *Se vale la stabilità esterna, allora tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale < 0*

- Dimostriamo l'implicazione inversa, ovvero: $\overline{B} \implies \overline{A}$, quindi:
  - Se $G(s)$ ha almeno un polo con parte reale ≥ 0 esistono ingressi limitati che fanno divergere l'uscita
  Lo vediamo caso per caso (ovvero analizziamo gli scenari che rendono vera $\overline{B} \implies \overline{A}$ cioè i casi che ci vanno bene per dimostrare $A \implies B$)
- Nota: studiamo la posizione dei poli indipentemente dalla molteplicità

- Distinguiamo 3 casi (non mutuamente esclusivi):
  - CASO 1: $G(s)$ ha almeno un polo con parte reale > 0
  - CASO 2: $G(s)$ ha almeno un polo in 0
  - CASO 3: $G(s)$ ha almeno una coppia di poli puramente immaginari $\pm j\omega_0$

> *CASO 1: ingresso limitato porta uscita non limitata*

- CASO 1: qualunque ingresso limitato che non cancella il polo con parte reale > 0 fa divergere l'uscita
  Esempio: gradino unitario $u(t) = 1(t)$

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = (e^t - 1)\,1(t)$$

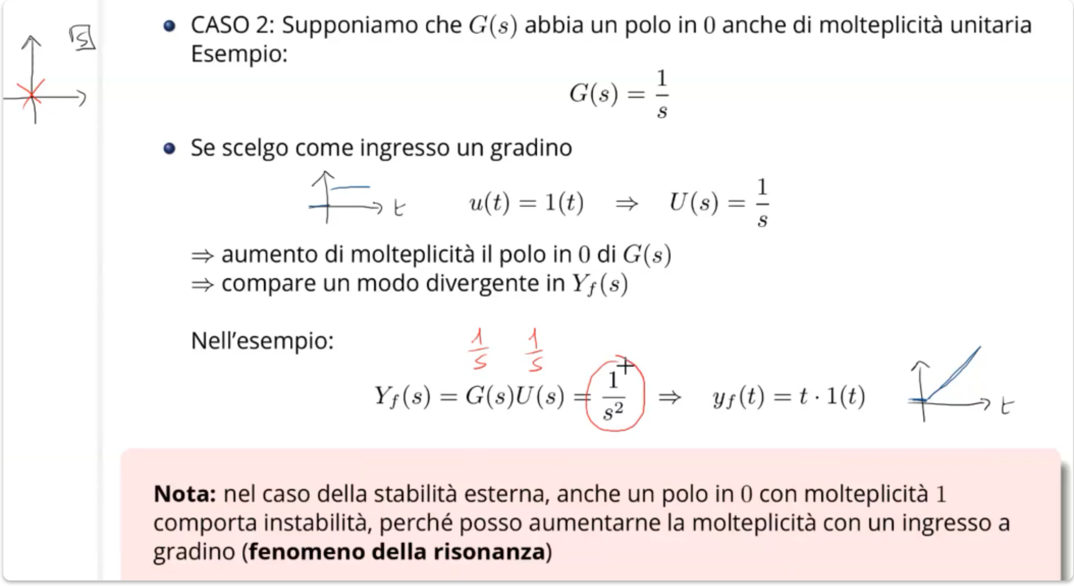
49 / 7

- Perché abbiamo un polo con parte reale maggiore di zero (e questo implica stabilità esterna)

> *CASO 2: polo in zero porta instabilità esterna scegliendo opportuni ingressi*

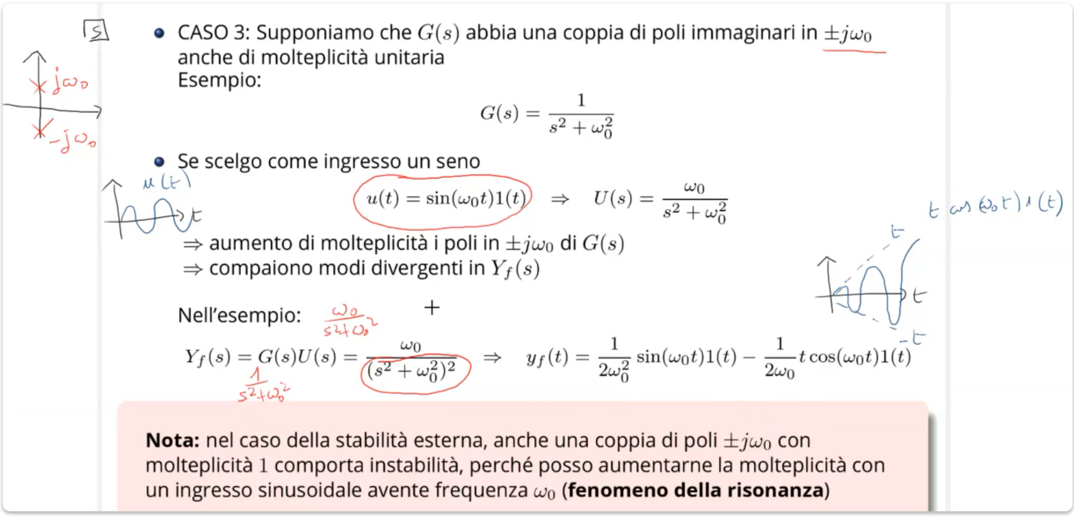
- Prendo ancora come ingresso limitato il gradino: $u(t) = 1(t)$

- Stesso polo della $G(s) \rightarrow \mathrm{risonanza!}$



> *CASO 3: Poli puramente immaginari fanno divergere l'uscita scegliendo opportuni ingressi*

- sollecito ancora il sistema con un ingresso che ha gli stessi poli di $G(s)$. In particolare con un ingresso sinusoidale che oscilla con la stessa pulsazione naturale dei modi del sistema
- ancora fenomeno della risonanza



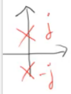
- $t\cos(\omega_0 t)1(t)$ diverge (linearmente ma diverge)

OSSERVAZIONI

Anche se il sistema è esternamente instabile, possono esistere ingressi per cui la risposta forzata non diverge!
Vediamo un esempio con poli puramente immaginari, provando dopo a prendere come ingresso un segnale sinusoidale con pulsazione diversa (poli non coincidenti)

- nel primo caso invece andiamo in risonanza (che confermano che il sistema è esternamente instabile)

Nota: Per un sistema esternamente instabile la risposta forzata non diverge sempre (dipende dal particolare ingresso)!



- Considerismo ad esempio un sitema con funzione di trasferimento
$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$
- Due poli puramente immaginari in $\pm j$ $\Rightarrow$ sistema esternamente instabile
- Infatti per un ingresso del tipo $u(t) = \sin(t)\,1(t)$ si ha **divergenza**
$$Y_f(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = \frac{1}{2}\sin(t)\,1(t) - \frac{1}{2}\,t\,\cos(t)\,1(t)$$
$\Rightarrow$ l'ingresso va in risonanza con i modi naturali del sistema aumentandone la molteplicità
- Tuttavia se cambiamo la frequenza dell'ingresso $u(t) = \sin(2t)\,1(t)$ l'uscita **non** diverge
$$Y_f(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = \frac{2}{3}\sin(t)\,1(t) - \frac{1}{3}\sin(2\,t)\,1(t)$$

$U(s) = \frac{2}{s^2+4}$
poli in $\pm 2j$

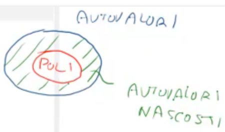
STABILITA' - RIASSUNTOZZO

STABILITÀ	Quantità di interesse	Condizione
Asintotica	Polinomio caratteristico $\varphi(s)$	Re$(\lambda_i) < 0$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$
Marginale	Polinomio minimo $m(s)$	Re$(\lambda_i) \leq 0$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$ & $m_i = 1$ nel caso in cui Re$(\lambda_i) = 0$
Esterna	Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$	Re$(\lambda_i) < 0$ per ogni λ_i tale che $a(\lambda_i) = 0$

> *Per la stabilità interna devo guardare $\varphi(s)$ ed eventualmente $m(s)$ (non basta $G(s)$, perché potrebbero esserci poli nascosti)*

> *Per la stabilità esterna mi basta vedere $G(s)$ (funzione di trasferimento), senza interessi circa la molteplicità, a differenza della stabilità interna*

Inoltre, vale anche la seguente importante relazione:



- Ricordiamo che
$$\{\text{ poli del sistema }\} \subseteq \{\text{ autovalori del sistema }\}$$
$$\{\text{ autovalori del sistema }\} - \{\text{ poli del sistema }\} = \{\text{ autovalori nascosti }\}$$
- Di conseguenza autovalori con parte reale < 0 $\Rightarrow$ poli con parte reale < 0
stabilità asintotica — stabilità esterna

Tra stabilità interna ed esterna vale la relazione

STABILITÀ ASINTOTICA $\Longrightarrow$ **STABILITÀ ESTERNA**

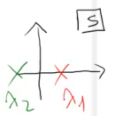
Nota: L'implicazione inversa in generale **non** vale! Ci possono essere sistemi stabili esternamente (tutti poli con Re < 0) ma non asintoticamente stabili. Questo succede quando ci sono autovalori nascosti con Re ≥ 0!

ESEMPIO: STUDIO STABILITÀ INTERNA E STABILITÀ ESTERNA

- Calcolo $\varphi(s)$
- Osservo i poli e concludo sulla stabilità interna
  - Se il sistema è internamente stabile allora posso concludere anche sulla stabilità esterna dicendo che è stabile anche esternamente, ma non è questo il caso dell'esercizio
- Se necessario procedo con lo studio di $G(s)$ per studiare la stabilità esterna
  - Cerco di calcolare il prodotto tra matrici nell'ordine più comodo
- Cerco i poli di $G(s)$, notando eventuali poli nascosti
  - Se i poli di $G(s)$ sono tutti negativi allora il sistema è esternamente stabile (BIBO)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [0 \;\; 1]$ $D = 0$ studiare stabilità interna e esterna

$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\right) = (s-1)(s+1)$



$\boxed{\lambda_1 = 1}$ nascosto

autovalore con $\mathrm{Re} > 0 \Rightarrow$ internamente instabile

$\boxed{\lambda_2 = -1} \rightarrow$ non nascosto

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \dfrac{1}{\varphi(s)}\, n(s)$ con $n(s) = C \,\mathrm{Adj}(sI - A) B$

$n(s) = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \;\; s-1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = s-1$

$G(s) = \dfrac{n(s)}{\varphi(s)} = \dfrac{\cancel{s-1}}{(\cancel{s-1})(s+1)} = \dfrac{1}{s+1}$

$\boxed{P_1 = -1}$ polo con $\mathrm{Re} < 0 \Rightarrow$ esternamente stabile

CRITERI ALGEBRICI PER LA STABILITA'

Utili perché non è sempre facile determinare tutte le radici di un polinomio $p(s)$

- Non esistono formule analitiche per polinomi di grado molto elevato (e spesso anche gli algoritmi iterativi non bastano)

Cerchiamo quindi dei criteri per rispondere alla domanda: *dato un polinomio, le sue radici hanno tutte parte reale minore di 0 oppure no?*. In altre parole, le radici di un generico polinomio $p(s)$ appartengono tutte alla regione di stabilità interessata?

$$\mathbb{C}_s = \{s \in \mathbb{C} \text{ tali che } \mathrm{Re}[s] < 0\}$$

- senza calcolare esplicitamente le radici

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA STABILITA'

Preso un polinomio "completo" avente tutti i coefficienti (moltiplicati da s con potenze da 0 a n) non nulli e dello stesso segno, allora le radici hanno tutte parte reale minore di 0

- Questa è una *condizione necessaria per la stabilità*

- Per $n > 2$ possiamo usare la condizione necessaria per una prima verifica
  - almeno uno dei coefficienti è nullo **OR** almeno una variazione di segno $\Rightarrow$ non tutte radici con Re < 0
  - tutti coefficenti non nulli **AND** con lo stesso segno $\Rightarrow$ non possiamo concludere nulla

ESEMPI

Pertanto, se ho un cambio di segno tra un addendo e l'altro si può subito concludere che **non** tutte le radici hanno $\mathrm{Re} < 0$. Lo stesso se manca un termine

- Esempio 2:

$$p(s) = s^3 + s^2 - s - 1$$ non soddisfa

variazione di segno $\Rightarrow$ **non** tutte radici con Re< 0

- Esempio 3:

$$p(s) = s^3 + s + 1$$ non soddisfa

manca un termine $\Rightarrow$ **non** tutte radici con Re< 0

Invece nel caso in cui la condizione necessaria è soddisfatta, non posso concludere sulla stabilità perché non è una condizione sufficiente per $p(s)$ con grado > 2. Mi serviranno metodo più avanzati per farlo

- Esempio 1 :

$$p(s) = s^3 + s^2 + s + 1$$ soddisfa la condizione necessaria

tutti coefficienti con lo stesso segno $\Rightarrow$ non possiamo concludere

REGOLA DI CARTESIO

In caso di polinomi con grado al più 2, la condizione necessaria sopra descritta **è anche sufficiente**

> Per polinomi fino al secondo grado vale il se e solo se (**Regola di Cartesio**):
> Tutte le radici di $p(s)$ con $n \leq 2$ hanno parte reale < 0
> $\Leftrightarrow$ tutti i coefficienti sono non nulli e hanno lo stesso segno.

ESEMPI

- Per $n = 2$

$$p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

possiamo usare la regola di Cartesio per concludere sulla stabilità

- Esempio 1:

$$p(s) = s^2 + s + 1$$

tutti coefficienti con lo stesso segno $\Rightarrow$ tutte radici con Re< 0

- Esempio 2:

$$p(s) = s^2 - s - 1$$

variazione di segno $\Rightarrow$ **non** tutte radici con Re< 0

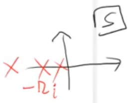
- Esempio 3:

$$p(s) = s^2 + 1$$

manca un termine $\Rightarrow$ **non** tutte radici con Re< 0

s

DIMOSTRAZIONE



- Date le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $p(s)$, possiamo scrivere $P(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$

$$p(s) = a_n \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$$

- Supponiamo, per semplicità, che tutte le radici siano reali e < 0

$$\boxed{\lambda_i = -r_i} \quad \text{con } r_i > 0$$

⇒ Possiamo scrivere

$r_i > 0$

$$p(s) = a_n \prod_{i=1}^{n} (s + r_i) = a_m (s + r_1)(s + r_2) \cdots (s + r_m)$$

- Tutti gli $r_i > 0$
  ⇒ la produttoria dà luogo a un polinomio con tutti coefficienti > 0
  ⇒ tutti i coefficienti di $p(s)$ hanno lo stesso segno (quello di a_n)
- La dimostrazione può essere estesa al caso di radici complesse con Re < 0
- Il criterio di Cartesio può essere facilmente verificato scrivendo le radici del polinomio per $n = 2$

TABELLA DI ROUTH

Nel caso in cui sia verificata la condizione necessaria per polinomi di grado maggiore di 2, come detto non possiamo dire niente sulla stabilità (perché la condizione proposta è necessaria ma non sufficiente).

- Per questo utilizziamo un semplice algoritmo, detto *tabella di Routh*
  - **Tabella di Routh:** $n + 1$ righe (numerate in ordine decrescente) in cui
    - prime 2 righe costruite mettendo a zig-zag i coefficienti del polinomio e completando con degli 0
    - righe successive costruite iterativamente a partire dalle prime 2: riga ℓ costruita partendo dalle righe $\ell + 1$ e $\ell + 2$
    - man mano che si costruisce la tabella il numero di elementi non nulli di ciascuna riga diminuisce

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\
n-2 & E_{n-2,1} & E_{n-2,2} & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & E_{0,1} & 0 & & &
\end{array}$$

  Una volta costruita la tabella, osserviamo il **segno della prima colonna**, in particolare ogni variazione di segno corrisponde a una radine con parte reale maggiore di zero mentre ogni permanenza di segno corrisponde a una radice con parte reale minore di zero.
- Se tutti i coefficienti sono diversi da zero e hanno lo stesso segno allora il polinomio è stabile

- Se c'è un coefficiente è zero o c'è una variazione di segno allora il polinomio non è stabile
  - Consideriamo la tabella di Routh del polinomio $p(s)$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\
n-2 & E_{n-2,1} & E_{n-2,2} & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & E_{0,1} & 0 & & &
\end{array}
$$

  - variazione di segno nella prima colonna $\Rightarrow$ radice con Re > 0
  - permanenza di segno nella prima colonna $\Rightarrow$ radice con Re < 0

  Fatto 2.14 (Criterio di Routh-Hurwitz)
  Tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale < 0
  $\Leftrightarrow$ la tabella di Routh è regolare (tutti gli elementi della prima colonna $\neq 0$)
  AND tutti gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno

  - Criterio di Routh-Hurwitz: generalizza regola di Cartesio a n generico

ESEMPIO: POLINOMIO DI TERZO GRADO (usato negli esercizi)

- Consideriamo un polinomio di terzo grado

$$p(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$+$

- Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|ccc}
3 & a_3 & a_1 & 0 \\
2 & a_2 & a_0 & 0 \\
1 & E_{1,1} & 0 & \\
0 & a_0 & 0 &
\end{array}
$$

con

$$E_{1,1} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

CASO GENERALE

- Metto al denominatore il primo elemento della riga precedente e poi si moltiplica per il determinante della matrice composta nella prima colonna dagli elementi della prima colonna e poi gli elementi della colonna successiva rispetto all'elemento di riferimento
  - Consideriamo un polinomio di grado n
  - Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|ccccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\
n-2 & E_{n-2,1} & E_{n-2,2} & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & E_{0,1} & 0 & & &
\end{array}
$$

$+$

$\ell+1$ $E_{\ell+1,1}$

ℓ

$-\frac{1}{e_{n-1}} \det \begin{bmatrix} e_n & e_{n-2} \\ e_{n-1} & e_{n-3} \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{e_{n-1}} \det \begin{bmatrix} e_n & e_{n-4} \\ e_{n-1} & e_{n-5} \end{bmatrix}$

  dove

$$E_{n-2,1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} \qquad E_{n-2,2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}$$

  e in generale

$$E_{\ell,i} = -\frac{1}{E_{\ell+1,1}} \det \begin{bmatrix} E_{\ell+2,1} & E_{\ell+2,i+1} \\ E_{\ell+1,1} & E_{\ell+1,i+1} \end{bmatrix}$$

  Nota: la costruzione della tabella non può essere continuata quando per una certa riga ℓ il primo elemento $E_{\ell,1}$ risulta nullo.
  In questo caso si dice che la tabella è **non regolare**.

- negli esercizi al massimo avremo il grado 3

CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ

Fatto 2.14 (Criterio di Routh-Hurwitz)
Tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale < 0
$\Leftrightarrow$ la tabella di Routh è regolare (tutti gli elementi della prima colonna $\neq 0$)
AND tutti gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno