ESERCIZI di PASSAGGIO ALLE EQ. DI STATO

1)

$y(t) = 2y(t-1)y(t-2)u(t-1)$
Avremo quindi:

$$\begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

Lo stato $x(t)$ ha dimensione $m + n = 3$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Da cui si può trovare una equazione di stato per ogni variabile:

- basta scorrere di un indice temporale

$$\begin{aligned} &x_1(t+1) = y(t) = 2\,\overbrace{y(t-1)}\,\overbrace{y(t-2)}\,\overbrace{u(t-1)} = 2x_1(t)x_2(t)x_3(t) \\ &x_2(t+1) = y(t-1) = x_1(t) \\ &x_3(t+1) = u(t) \end{aligned}$$

Riscrivendo:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t)x_2(t)x_3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = u(t) \end{cases} \quad , \quad y(t) = 2x_1(t)x_2(t)x_3(t)$$

2)

$$y(t) - 3y(t-2) = u(t)u(t-1)$$

Riscrivo in forma normale, cioè $y(t) = \text{tutto il resto}$

$$y(t) = +3y(t-2) + u(t)u(t-1)$$

Abbiamo: $\begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^3$
Infatti (scrivendo anche $y(t-1)$ anche se non compare esplicitamente):

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Posso scrivere le equazioni di stato, *traslando di 1* al solito:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) = 3y(t-2) + u(t)u(t-1) = 3x_2(t) + u(t)x_3(t) \\ x_2(t+1) = y(t-1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = y(t-2) = u(t) \end{cases}$$

Avente uscita:

$$y(t) = 3x_2(t) + u(t)x_3(t)$$

3) VEDI LEZIONE 7

TEMPO CONTINUO (TC)

La rappresentazione ingresso uscita è data da una equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t))$$

Quindi la forma normale dice che:

- la derivata di ordina massimo dell'uscita (ovvero $y^{(n)}(t)$) è una funzione di tutte le derivate dell'uscita, dell'ingresso $u(t)$ e di tutte le sue derivate

Dove n e m sono in questo caso *il massimo ordine di derivazione* rispettivamente degli ingressi e uscite.
Vale il vincolo:

$$m \leq n$$

(nota: se il sistema è autonomo non compaiono $u(t)$ e le derivate)

ESEMPIO: SISTEMA MECCANICO (CARRELLO)

Se abbiamo (dalle equazioni di Newton): $M\ddot{y}(t) = u(t) - b\dot{y}(t)$
Allora la rappresentazione è

$$\ddot{y}(t) = -\frac{b}{M}\dot{y}(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

Infatti in generale: $y(t) = g(\dot{y}(t), y(t), u(t))$
Quindi:

$$\begin{cases} n = 2 \\ m = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Troviamo le equazioni di stato, ricordando di mettere come uscite $y(t)$ e le sue derivate:

- Scegliendo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\frac{b}{M}\dot{y}(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

PASSAGGIO ALLE EQUAZIONI DI STATO

CASO IMMEDIATO: $m = 0$ (il caso più complesso lo vediamo nei sistemi lineari)

- ovvero il caso in cui il sistema è **autonomo** oppure compare *l'ingresso non derivato*
  Si ha un collegamento uno a uno tra le derivate dell'uscita e le variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- cfr. Esempio del carrello

E poi riscrivo le equazioni di stato come $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), etc.$.

- Data una rappresentazione ingresso uscita

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u(t))$$

- Scegliamo come stato

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \cdots & y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

- dinamica dello stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = g(t, x_n(t), \ldots, x_2(t), x_1(t), u(t)) \end{cases}$$

- equazione di uscita

$$y(t) = x_1(t)$$

ESEMPIO

5)

$$y^{(3)} = -2\ddot{y} - \dot{y}u \qquad y^{(3)}(t) = -2\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\,u(t)$$

$n = 3$

$m = 0$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= y^{(3)}(t) = -2\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\,u(t) = -2x_3(t) - x_2(t)\,u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_3(t) - x_2(t)\,u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

6) (NON IN FORMA NORMALE)

- nota: si scrive anche $\dot{y}(t)$ anche se non compare esplicitamente

$$2\ddot{y} + 4y = u \qquad \ddot{y} = -2y + \frac{1}{2}u \leftarrow$$

$n = 2$

$m = 0$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -2y(t) + \frac{1}{2}u(t) = -2x_1(t) + \frac{1}{2}u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

SISTEMI LINEARI

FUNZIONI LINEARI

Definizione: una funzione $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è **lineare** se valgono

$$+$$

Additività: $J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2) \quad \forall x_1,\, x_2$

Omogeneità: $J(\alpha x) = \alpha\, J(x) \quad \forall x,\, \alpha \ (\alpha \text{ scalare})$

- si può cioè "portare fuori" dall'operatore i termini $+$ e α

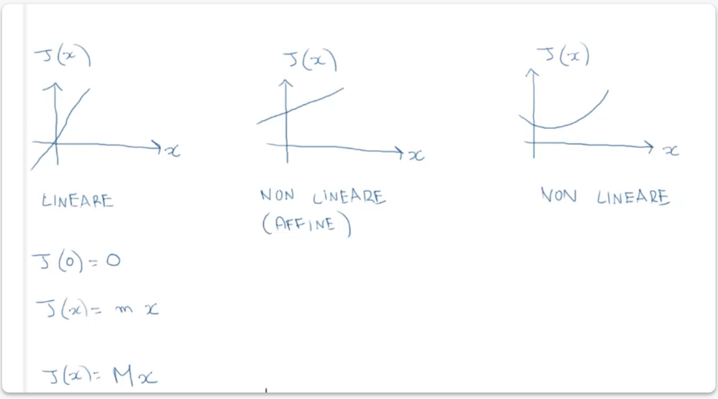
In generale quindi vale:

$$J(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1 J(x_1) + \alpha_2 J(x_2)$$

- Vantaggio principale: *ogni funzione lineare può essere riscritta come matrice $m \times n$*, ovvero:

$$J(x) = M\, x$$

Esempi di grafici lineari



SISTEMI LINEARI E MATRICI A,B,C,D

$$\left.\begin{array}{ll} (TC) & \dot{x}(t) \\ (TD) & x(t+1) \end{array}\right\} = f(x(t), u(t)) \quad , \quad y(t) = h(x(t), u(t))$$

Un sistema TI di questo tipo è **lineare** se **f e h sono lineari** rispetto ai loro argomenti (x e u), ovvero:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x,u) = A\, x + B\, u & \longleftrightarrow \text{associata alla eq. di stato} \\ h(x,u) = C\, x + D\, u & \longleftrightarrow \text{associata all'uscita} \end{array}}$$

Con A, B, C, D di dimensioni opportune

- A matrice quadrata, di dimensioni pari a quella dello stato. Ovvero $\dim(x) \times \dim(x)$
- B esegue il passaggio da ingresso a stato, quindi $\dim(x) \times \dim(u)$
- C esegue il passaggio da stato a uscita, quindi $\dim(y) \times \dim(x)$
- D esegue il passaggio da ingresso a uscita, quindi $\dim(y) \times \dim(u)$

> > *Se consideriamo sistemi $SISO$, allora $\dim(u) = \dim(y) = 1$, quindi molte dimensioni delle matrici diventano vettori, verticali o orizzontali a seconda del caso.*

- È utile studiare i sistemi lineari anche per capire il comportamento dei sistemi non lineari, perlomeno in una zona "locale"
- Se le variazioni temporali sono lente, studieremo tali sistemi come TI (tempo invarianti).
  - In questi casi si parla di **sistemi** LTI.
  - Nei sistemi TV, le matrici dipendono e quindi variano nel tempo, avremo in questi casi:
    - $f(t, x(t), u(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad , \quad y(t) = h(t, x(t), u(t)) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$
      - In cui appunto compare la t del tempo

Sistemi lineari TC

	Autonomo	Non autonomo
TI	$\dot{x}(t) = A\,x(t)$ $y(t) = C\,x(t)$	$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ $y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$
TV	$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ $y(t) = C(t)\,x(t)$	$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ $y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$

Sistemi lineari TD

	Autonomo	Non autonomo
TI	$x(t+1) = A\,x(t)$ $y(t) = C\,x(t)$	$x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t)$ $y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$
TV	$x(t+1) = A(t)\,x(t)$ $y(t) = C(t)\,x(t)$	$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ $y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$

ESERCIZIO: CLASSIFICARE I SISTEMI

Classificare il sistema in riferimento a dominio temporale, linearità, tempo invarianza e dipendenza da ingressi:

1. $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

   TC non autonomo
   non lineare
   TI

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - \sin(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = t^2\,x_1(t) \end{cases}$$

   TC non autonomo

   $$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(t)} u(t)$$

   lineare TV

   $$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} t^2 & 0 \end{bmatrix}}_{C(t)} x(t)$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1^2(t) \end{cases}$$

   TC autonomo
   non lineare
   TI

4. $$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + cos(\pi/4)\,x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

   TD autonomo
   lineare
   TI

   $$x(t+1) = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}} x(t)$$

   $$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

SISTEMI LINEARI IN RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-USCITA

SISTEMA TD

Se il sistema è TD, TI in rappresentazione ingresso-uscita, allora esso è lineare quando la funzione g è lineare

- Considerando il caso $SISO$

- Si può cioè riscrivere l'uscita $y(t) = g(y(t-1), \dots, y(t-n), u(t), \dots, u(t-m))$ autoregressiva come combinazione lineare degli argomenti con opportuni coefficienti a_i per le uscite e per gli ingressi b_i. In generale

  $$y(t) = a_1\, y(t-1) + \cdots + a_n\, y(t-n) + b_0\, u(t) + \cdots + b_m\, u(t-m)$$

  Nota: diventa TV se almeno uno dei coefficienti dipende dal tempo (ovvero tipo $a_1(t)$)

SISTEMA TC

Analogamente (solo che si tratta con le derivate):

Definizione: Un sistema dinamico TC TI in rappresentazione ingresso-uscita

$$y^{(n)}(t) = g(y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, u(t)) \qquad m \leq n$$

si dice **lineare** quando g è una funzione lineare dei suoi argomenti

$$\rightarrow\ y^{(n)}(t) = a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) + b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

- Nel caso autonomo

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0\, y(t)$$

- Se **almeno uno** dei coefficienti $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_m$ dipende dal tempo
  $\Rightarrow$ sistema lineare TV

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\, y(t) + b_m(t)\, u^{(m)}(t) + \ldots + b_0(t)\, u(t)$$

Nota: come già detto, i sistemi lineari si possono riscrivere in equazioni di stato secondo la formalità matrici (A,B,C,D) $\times$ vettore

ESERCIZIO: CLASSIFICARE I SISTEMI

Classificare il sistema in riferimento a dominio temporale, linearità, tempo invarianza e dipendenza da ingressi:

1. $\dot{y}(t) = \sin(u(t))$ — TC non autonomo TI non lineare
2. $y(t) = y(t-1)u(t)$ — TD non autonomo TI non lineare
3. $\ddot{y}(t) = 3\cos(t)y(t)$ — TC autonomo TV lineare
4. $\ddot{y}(t) = 2\dot{y}(t)y(t) + y(t)$ — TC autonomo TI non lineare
5. $y(t+2) = y(t+1) - e^3 u(t)$ — TD non autonomo TI

$n=2 \quad \ddot{y}(t) = a_1\, \dot{y}(t) + a_0\, y(t) \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = 3\cos(t)$

$y(t) = y(t-1) - e^3\, u(t-2)$

$y(t) = a_1\, y(t-1) + b_0\, u(t) + b_1\, u(t-1) + b_2\, u(t-2) \qquad a_1 = 1 \quad b_1 = 0 \qquad b_0 = 0 \quad b_2 = e^3$

103 / 110