ESERCIZIO 2) (PENDOLO)

Applichiamo il criterio della linearizzazione al problema del pendolo già visto, che aveva due punti di equilibrio (a seconda della parità di $k\pi$).
Partiamo dunque dalle equazioni di stato e dai punti di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{c}{M} x_2 \end{cases} \qquad \dot{x} = f(x)$$

equilibri $\quad x_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$

Dove $f(x)$ si può esplicitare facilmente:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{c}{M} x_2 \end{bmatrix}$$

Costruiamo la matrice Jacobiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

Troviamo ora la matrice della dinamica linearizzata, che cambia come già visto a seconda del punto di equilibrio di riferimento

- Primo equilibrio: k pari (verticale in basso)
- Secondo equilibrio: k dispari (verticale in alto)

PRIMO EQUILIBRIO

2 tipi di equilibrio

1 $\quad k$ pari

$$A_e = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}\right|_{x_1 = x_{e1},\ x_2 = x_{e2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(k\pi) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

Da cui posso calcolare tutti gli oggetti necessari per calcolare la stabilità (ovvero $\varphi_e(s)$):

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_e(s) = \det(sI - A_e) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{\ell} & s + \frac{c}{M} \end{bmatrix} = s\left(s + \frac{c}{M}\right) + \frac{g}{\ell}$$

$$= s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{g}{\ell}$$

Dalla fisica $c > 0$ $g > 0$ $M > 0$ $\ell > 0$

Per Cartesio il polinomio $\varphi_e(s) = s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{g}{\ell}$ ha entrambe le radici con $Re < 0$ perché i coefficienti sono tutti non nulli e di segno concorde

$\Rightarrow$ Siamo nel caso a) A_c con autovalori tutti a $Re < 0$

$\Rightarrow$ Punto di equilibrio localmente asintoticamente stabile

SECONDO EQUILIBRIO

Analogamente al caso precedente (cambia solo il segno del coseno)

② k dispari !

$$A_e = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(x_1) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}\right|_{x_1 = k\pi,\ x_2 = 0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(k\pi) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_e(s) = \det(sI - A_e) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -\frac{g}{\ell} & s + \frac{c}{M} \end{bmatrix} = s\left(s + \frac{c}{M}\right) - \frac{g}{\ell} = s^2 + \frac{c}{M}s - \frac{g}{\ell}$$

Ho una variazione di segno nei coefficienti

$\Rightarrow$ Per Cartesio il polinomio $\varphi_e(s) = s^2 + \frac{c}{M}s - \frac{g}{\ell}$ ha una radice con $Re > 0$

$\Rightarrow$ Siamo nel caso b (A_e ha almeno un autovalore con $Re > 0$)

$\Rightarrow$ equilibrio instabile internamente

RISPOSTA IN CONTINUA E IN FREQUENZA

Utile per capire *in modo immediato l'uscita* ovvero la risposta dei sistemi LTI con in ingresso dei *segnali tipici (gradino [risposta in continua] e sinusoide [risposta in frequenza])*

Partiamo dalle seguenti (classiche) considerazioni:

- Consideriamo un sistema LTI TC SISO con funzione di trasferimento

s)U(s)

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

- Consideriamo un segnale di ingresso $u(t)$ con trasformata di Laplace razionale

$$U(s) = \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{a}(s)} = \frac{\tilde{b}(s)}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}}(s-\tilde{p}_i)}$$

con grado $\tilde{b}(s) \; < \;$ grado $\tilde{a}(s)$

Nota: segnali di ingresso con trasformata di Laplace razionale includono molti segnali di interesse (polinomi, sinusoidi, esponenziali, combinazioni lineari e prodotti di questi)

Facciamo anche le seguenti ipotesi, così da poter scomporre in fratti semplici:

Ipotesi: supponiamo per semplicità che

- tutti i poli della $G(s)$ siano distinti, ossia $p_i \neq p_\ell$ per ogni $i \neq \ell$
- tutti i poli della $U(s)$ siano distinti, ossia $\tilde{p}_i \neq \tilde{p}_\ell$ per ogni $i \neq \ell$
- i poli di $U(s)$ e $G(s)$ sino distinti, ossia $p_i \neq \tilde{p}_\ell$ per ogni i, ℓ

- Consideriamo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)\,U(s) = \frac{b(s)\,\tilde{b}(s)}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}_{a(s)}\;\underbrace{\prod_{i=1}^{\tilde{n}}(s-\tilde{p}_i)}_{\tilde{a}(s)}}$$

- Scomponendo in fratti semplici

$$Y_f(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{K}_i}{s-\tilde{p}_i}$$

- dove il primo addendo riguarda i termini relativi ai poli della funzione di trasferimento (in particolare $a(s)$)
- dove il secondo addendo riguarda i termini relativi ai poli dell'ingresso (in particolare $b(s)$)
  Abbiamo così scomposto la risposta forzata

Rinominiamoli così:

$$Y_f(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}}_{Y_f^G(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{K}_i}{s-\tilde{p}_i}}_{Y_f^U(s)} = Y_f^G(s) + Y_f^U(s)$$

- nelle *ipotesi di poli distinti tra funzione di trasferimento e ingresso*
  - (indipendentemente dalla stabilità anche se sarà utile il calcolo in caso di stabilità. In particolare il regime permanente ci fornisce informazioni utili quando il sistema che stiamo studiando è stabile. Vedi dopo)

Per linearità, posso calcolare i due contributi nel tempo tramite l'antitrasformata

- Si ottiene così:
  - una parte di *regime transitorio* (parte di risposta forzata che dipende dalla funzione di trasferimento)
  - una parte di *regime permanente* (parte di risposta forzata che dipende dall'ingresso)
  Quindi:

  - Scomposizione della risposta forzata nel tempo

  $$y_f(t) = \underbrace{y_f^G(t)}_{\text{transitorio}} + \underbrace{y_f^U(t)}_{\text{regime permanente}}$$

    - **Transitorio** parte di $y_f(t)$ dipendente dai poli di $G(s)$

    $$y_f^G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f^G(s)\}$$

    - **Regime permanente** parte di $y_f(t)$ dipendente dai poli di $U(s)$

    $$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y_f^U(s)\right\}$$

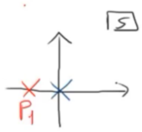
- transitorio perché se il sistema è esternamente stabile allora la $G(s)$ avrà poli < 0 e quindi antitrasformando vengono modi convergenti (e quindi tende a 0)

ESEMPIO:

- notando che il polo in -1 viene dalla funzione di trasferimento $G(s)$ e il polo in 0 viene dall'ingresso $U(s)$

  - Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

  $$G(s) = \frac{2}{\underbrace{s+1}_{e(s)}} \qquad P_1 = -1$$

  - Consideriamo un ingresso a gradino

  $$U(s) = \frac{1}{\underbrace{s}_{\tilde{e}(s)}} \qquad \tilde{P}_1 = 0$$

  $$Y_f(s) = \frac{2}{(s+1)s} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{\tilde{k}_1}{s}$$

  - Risposta forzata in Laplace

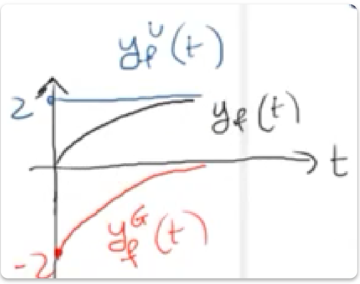
  $$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{2\cdot}{\underbrace{(s+1)}_{e(s)}\underbrace{s}_{\tilde{e}(s)}} = \underbrace{\frac{-2}{s+1}}_{Y_f^G(s)} + \underbrace{\frac{2}{s}}_{Y_f^U(s)}$$

  $$k_1 = \lim_{s\to -1} (s+1) Y_f(s) = \lim_{s\to -1} \cancel{(s+1)} \frac{2}{\cancel{(s+1)}s} = -2$$

  $$\tilde{k}_1 = \lim_{s\to 0} s Y_f(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{2}{(s+1)\cancel{s}} = 2$$

  - Risposta forzata nel tempo

  $$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \underbrace{-2\,e^{-t}\,1(t)}_{y_f^G(t)} + \underbrace{2\cdot 1(t)}_{y_f^U(t)}$$

STABILITÀ E REGIME PERMANENTE

Considerazioni importanti che mettono in collegamento quanto visto adesso con la stabilità.

$y_f(t) = \cancel{y_f^G(t)}^{0} + y_f^U(t)$

- Risposta complessiva

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f^G(t) + y_f^U(t)$$

con

$$y_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}x(0)\} \qquad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\,U(s)\}$$

- Stabilità esterna
  - $\Rightarrow$ tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale < 0
  - $\Rightarrow$ transitorio $y_f^G(t)$ converge a 0 $\Rightarrow \lim_{t \to 0} y_f^G(t) = 0$
  - $\Rightarrow$ $\lim_{t\to\infty} [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$ risposta forzata converge a $y_f^U(t)$
- Stabilità asintotica
  - $\Rightarrow$ tutti autovalori di A con parte reale < 0
  - $\Rightarrow$ risposta libera $y_\ell(t)$ e transitorio $y_f^G(t)$ convergono a 0
  - $\Rightarrow$ $\lim_{t\to\infty} [y(t) - y_f^U(t)] = 0$

Stabilità esterna	$\Rightarrow$	**risposta forzata** converge al regime permanente
Stabilità asintotica	$\Rightarrow$	**risposta complessiva** converge al regime permanente

Basta osservare il $\lim_{t\to 0} y_f(t)$:

- Nel caso di **stabilità esterna abbiamo**: $y_f(t) = \cancel{y_f^G(t)}^{0} + y_f^U(t)$ >> la *risposta forzata* tende al regime permanente (dato che ci rimane: $y_{(t)} = y_\ell(t) + y_f^U(t)$)
- Nel caso di **stabilità asintotica** invece: $y_{(t)} = \cancel{y_\ell(t)}^{0} + \cancel{y_f^G(t)}^{0} + y_f^U(t)$ >> la *risposta complessiva* tende al regime permanente
  - Perché se è stabile asintoticamente è anche stabile esternamente
  - In più la risposta libera $\cancel{y_\ell(t)}^{0}$

> > *Il regime permanente dà informazioni circa l'andamento asintotico di un sistema stabile.*

REGIME PERMANENTE PER SEGNALI D'INGRESSO TIPICI

GRADINO

RISPOSTA IN CONTINUA

- DEFINIZIONE: Regime permanente in risposta a un ingresso costante a gradino

Si suppone che $G(s)$ non abbia poli in 0 così da avere poli distinti e rientrare nelle ipotesi e fare la scomposizione in fratti semplici

- In particolare, la scomposizione di $Y_f^G(s)$ non mi interessa per il momento; invece la scomposizione di $Y_f^U(s)$ è $\tilde{K}/s$ perché abbiamo un unico polo dell'ingresso (in 0)
  - Mi focalizzo soltanto su com'è fatto il regime permanente (che è quello che mi interessa)

- $\tilde{K}$ è al solito calcolabile con la formula dei residui

- Consideriamo un ingresso a gradino di ampiezza U_0

$$u(t) = U_0 \cdot 1(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(s) = \frac{U_0}{s}$$

$U_0 \cdot 1(t)$ → $G(s)$ → $y_f^U(t)$, $G(0) \cdot U_0 \cdot 1(t)$

$y_f^U(t)$ se $G(s)$ esternamente stabile

- Consideriamo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{U_0}{s} = \frac{b(s)}{a(s)} \frac{U_0}{s}$$

- Supponendo che $G(s)$ non abbia poli in zero

$$Y_f(s) = Y_f^G(s) + Y_f^U(s) = Y_f^G(s) + \frac{\tilde{K}}{s}$$

dove il residuo $\tilde{K}$ vale

$$\tilde{K} = \lim_{s \to 0} s Y_f(s) = \lim_{s \to 0} G(s)\, U_0 = G(0)\, U_0$$

$$\tilde{K} = \lim_{s \to 0} s Y_f(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\, G(s) \frac{U_0}{\cancel{s}} = G(0) U_0$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f^G(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{K}}{s}\right\} = y_f^G(t) + \underbrace{G(0) U_0 1(t)}_{y_f^U(t)}$$

Mandando in ingresso al sistema un gradino, abbiamo in uscita come regime permanente ancora un gradino di ampiezza originale U_0 moltiplicata per $G(0)$ (infatti antitrasformando $\tilde{K}/s$ è $G(0)U_0\, 1(t)$)

- Questo nelle ipotesi che l'ingresso non abbia poli in zero
- In altre parole come detto, la risposta forza tenderà a un regime permanente che è ancora un gradino nelle ipotesi fatte
- Ci sarà all'inizio anche un po' di transitoria ma poi svanisce a zero e rimane solo la permanente

$G(0)$ viene detto *guadagno in continua*

Ingresso a gradino di ampiezza U_0 $\Rightarrow$ regime permanente a gradino di ampiezza $G(0)\, U_0$

$$Y_f^U(s) = \frac{\tilde{K}}{s} = \frac{G(0)\, U_0}{s} \quad \Rightarrow \quad y_f^U(t) = G(0)\, U_0\, 1(t)$$

- Ingresso amplificato/attenuato di un fattore $G(0)$ detto **guadagno in continua** del sistema
- Il guadagno in continua è ben definito quando $G(s)$ non ha poli in 0
- Per sistemi SISO, $G(0)$ è uno scalare
- Per sistemi con più ingressi e più uscite, $G(0)$ matrice costante di dimensione $\dim(y) \times \dim(u)$

Quindi per calcolare il guadagno per sistemi SISO (quelli degli esercizi), una volta ottenuta $G(s)$ basta calcolarla per $s = 0$, ovvero: $\boxed{G(s)|_{s=0} = G(s)}$

ESEMPIO DI CALCOLO DEL GUADAGNO IN CONTINUA

- Controllo che $G(s)$ non abbia poli in zero
- Eseguo eventuali semplificazioni
- Se sono arrivato fin qui, allora conosco già la forma del regime permanente: $y_f^U(t) = G(0)U_0 1(t)$
- Calcolo $G(s)|_{s=0}$
  - Se viene > 0 abbiamo un guadagno, altrimenti una attenuazione
- Controllo se il sistema è esternamente stabile
  - Ad esempio con i metodi algebrici oppure calcolando i poli di $G(s)$

- Posso scrivere eventualmente l'evoluzione asintotica della risposta forzata $\lim_{t\to\infty} y_f(t)$

  - Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2s+5}{s^2+3s+4}$$

NB: Per Cartesio $e(s) = s^2 + 3s + 4$ ha radici con $Re < 0$
$\Rightarrow G(s)$ esternamente stabile

  - Consideriamo un ingresso a gradino di ampiezza U_0

$$U(s) = \frac{U_0}{s}$$

  - $G(s)$ non ha poli in zero $\quad\Rightarrow\quad$ regime permanente

$$\boxed{y_f^U(t) = G(0)\, U_0\, 1(t)} \quad = \frac{5}{4} U_0\, 1(t)$$

    con guadagno in continua pari a

$$G(0) = G(s)|_{s=0} = \frac{5}{4}$$

  - Sistema esternamente stabile $\quad\Rightarrow\quad y_f(t)$ converge al regime permanente

$$\lim_{t\to\infty} y_f(t) = G(0)\, U_0 = \frac{5}{4}\, U_0$$

$y_f^U(t) = \frac{5}{4} U_0$