SEGNALI TEMPO DISCRETO

Definizione e caratteristiche

- Sequenze di numeri
- Indicate con $x[n], \quad n \in \mathbb{Z}$, che stabilisce l'ordine della variabile x

Esempi

- numero di auto che passano attraverso un casello autostradale [nasce discreto]
- segnale vocale [nasce analogico, lo analizzo come discreto (grazie al campionamento)]

Se nei segnali tempo continuo si cercava con l'analisi in frequenza di ricavare informazioni sulla *periodicità* del segnale, adesso coi segnali tempo discreto si cerca di estrarre un certo tipo di ***ciclicità***.

$$\underbrace{t.\,continuo}_{periodicita'} \iff \underbrace{t.\,discreto}_{ciclicita'}$$

Lo strumento per fare ciò rimarrà lo stesso, ovvero la *trasformata di Fourier*, anche se sarà applicata in modo diverso.

$$\boxed{x(t) \quad \underbrace{\rightarrow}_{Campionamento} \quad x[n] \quad \underbrace{\rightarrow}_{TDF} \quad X(f)}$$

dove $TDF = \text{trasformata discreta di Fourier}$

- Nota: il passaggio in frequenza è utile perché dallo spettro si ricavano numerosi informazioni (ad esempio lo spettro di un segnale vocale mostra dei picchi di risonanza che permettono di distinguere un fonema emesso da un altro).

CAMPIONAMENTO

Passaggio $x(t) \rightarrow x[n]$, dove:

$$\begin{cases} x[n] = x(t)|_{t=nT} \\ T = \text{passo di campionamento} \\ f_c = \text{frequenza di campionamento (\# campioni in un un sec.)} \end{cases}$$

Ricostruzione del segnale

Sotto opportune ipotesi, si può anche fare il passaggio inverso, ovvero

$$x[n] \rightarrow x(t),$$

ovvero si può ricostruire il segnale analogico a partire dai campioni
Per fare ciò:

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{ADC} \xrightarrow{x[n]} \boxed{DAC} \xrightarrow{x(t)}$$

> Dove: $ADC =$ Analog to Digital converter, $DAC =$ Digital to Analog converter

Teorema del Campionamento

Si vuole eseguire il passaggio:

$$x(t) \to x_c(t) \quad ,$$

dove $x_c(t)$ rappresenta il segnale analogico campionato. In particolare:

$$x_c(t) = x(t) \cdot p(t) \quad ,$$

con $p(t)$ *funzione pettine di Dirac*, così espressa:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Pertanto, svolgendo i conti:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

- Nota: il vantaggio di questa nuova formulazione sta ne fatto che $x_c(t)$ dipende soltanto dai campioni, mentre in quella precedente dipendeva dal segnale analogico $x(t)$.

Riassumendo quindi:

$$\boxed{x_c(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)}$$

Trasformata del segnale campionato

Ci chiediamo ora di trovare la relazione:

$$x_c(t) \iff X_c(f)$$

- Essendo $p(t)$ analogico e **periodico** di periodo **T**, posso rappresentarlo come *serie di Fourier*:

  $$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

  I coefficienti di Fourier c_k per definizione sono:

  $$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} \, dt$$

- Dalle proprietà della δ , sappiamo che dall'integrale di un segnale impulsivo moltiplicato per una funzione si ottiene il valore della funzione calcolata nel punto in cui è posizionata la δ.
  - δ è posizionata in $T = 0$
  - La funzione è l'esponenziale complesso (che per $T = 0$ vale 1)
  Quindi:

  $$c_k = \frac{1}{T}$$

  Da cui finalmente:

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{k}{T}t}}$$

Sostituendo questo nuovo risultato al posto di $x_c(t) = x(t) \cdot p(t)$ e portando $x(t)$ dentro la sommatoria, si ottiene:

$$x_c(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$$

Posso ora definire la **trasformata**, sfruttando la proprietà di linearità:

$$X_c(f) = \mathscr{F}\{x_c(t)\} = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}\{x(t) \cdot e^{j2\pi\frac{k}{T}t}\}$$

- Eseguire la trasformata del prodotto tra un segnale $x(t)$ e l'esponenziale complesso comporta una *traslazione in frequenza* del valore di f_0, che vale nel nostro caso $\frac{k}{T}$. Ecco quindi che si ottiene **lo spettro del segnale campionato**:

$$\boxed{X_c(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})}$$

Analogamente:

$$X_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(f - kf_c\big)$$

Osservazioni

- $X_c(f)$ è una funzione **periodica** di periodo f_c
- $X_c(f)$ si costruisce partendo da $X(f)$ e sommando tutte le sue versioni traslate di multipli di f_c (a "destra e sinistra"). Ogni replica è moltiplicata per un valore f_c

Passaggio inverso

Il passaggio inverso (ovvero **ricostruire il segnale a partire dai campioni**), grazie a delle opportune osservazioni, si può eseguire solo se sono rispettate le seguenti **condizioni necessarie:**

$$\begin{cases} \text{Lo Spettro ha banda Limitata} \\ f_c \geq \frac{f_c}{2} \end{cases}$$

La seconda condizione è fondamentale per evitare *aliasing* (sovrapposizione) tra le repliche
Il mezzo con cui si ricostruisce il segnale è un filtro **passa-basso** con frequenza di taglio $f_c \geq \frac{f_c}{2}$ e guadagno $\frac{1}{f_c}$

Possiamo quindi enunciare il **teorema del campionamento**:

> ***Dato un segnale a banda limitata (ovvero $|X(f)| = 0$ per $f > B$) con $f_c > 2B$, allora***

> *è possibile ricostruire $x(t)$ dai campioni $x(nT) = x[n]$*

- Nota: $f_c = 2B$ viene detta *frequenza di Nyquist*

INTERPOLAZIONE CARDINALE

Abbiamo visto che:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{campionatore} \longrightarrow x(nT) = x[n] = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \delta(t - nT)\, dt$$

E il passaggio inverso:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{formatore\ di\ impulsi} \xRightarrow{x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot\delta(t-nT)} \boxed{filtro\ di\ ricostruzione} \longrightarrow x(t)$$

- Dove il $\text{filtro di ricostruzione}$ è un filtro **passa basso** ideale, che possiamo quindi esprimere così:

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_c} & 0 \leq |f| \leq \frac{f_c}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \frac{1}{f_c} \cdot rect\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

Possiamo quindi calcolarci l'antitrasformata, ottenendo:

$$h_{LP}(t) = sinc(t \cdot f_c) \quad ,$$

che è appunto una funzione $sinc$ che vale 1 in $t = 0$ e ha gli zeri nei multipli interi di $\frac{t}{f_c}$, ovvero nei multipli di T (cfr. relazione tra T e f_c).

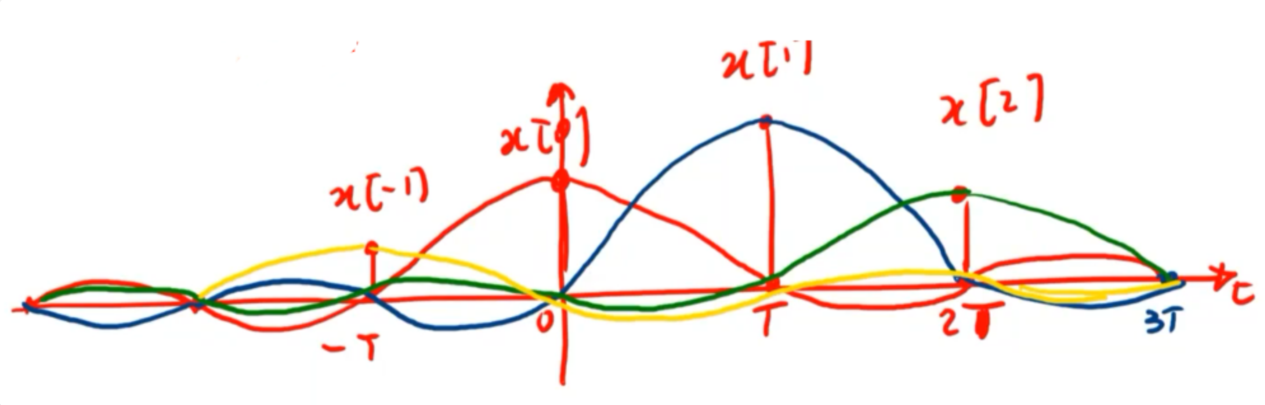
Come visto x_c va in ingresso al $\text{filtro di ricostruzione}$ e questo da luogo al segnale $x(t)$. Pertanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c(t) * h(t) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)\right) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \Big(\delta(t - nT) * h(t)\Big) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h(t - nT) \\ &= x[n] \cdot sinc\big(f_c \cdot (t - nT)\big) \end{aligned}$$

--> Dunque per ricostruire il segnale faccio le seguenti cose:

- Considero i vari campioni $\ldots, x[-1], x[0], x[1], x[2], \ldots$, che sono come detto posizionati nei multipli di T;
- Moltiplico ogni campione $n - esimo$ per un $sinc$, che ha gli zeri negli istanti di campionamento degli altri campioni (per come è definito) e vale 1 nel punto in cui è posizionato il campione

$n - esimo$ di riferimento. Reitero come detto per ogni campione.



- Si esegue quindi la somma di tutti i $sinc$ costruiti per ogni istante T.
  - Tale somma rappresenta proprio la **ricostruzione del segnale**.
  - Viene denominata *interpolazione cardinale*.

Nota: è un caso ideale, perché abbiamo utilizzato un filtro LP ideale.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEQUENZE

Intro

Andiamo a ottenere **in un modo alternativo** la trasformata $X_c(f)$

- Il significato finale è lo stesso, ma la forma è alternativa rispetto a quella calcolata precedentemente

Sappiamo che:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{x_c(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT) \right) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft}\, dt}_{} \end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere, per le propietà della δ:

$$\boxed{X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{j2\pi fnT}}$$

- Posso con questa formula calcolare la **trasformata a partire dai campioni**.
- Useremo sempre questa per calcolare lo spettro di un segnale campionato.
  - Con l'altra formula, ovvero $X_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - f_c)$ dovrei partire dalla trasformata del segnale analogico e quindi sommare le versioni traslate dello spettro (come visto) :(

Con una notazione alternativa (più comune):

$$\overline{X(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f n T}$$

E' ancora periodica di periodo f_c.

Basta mostrare che:

$$\begin{aligned}\overline{X(f+f_c)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f n T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f n T} \cdot e^{-j2\pi f_c n T} \\ &\text{dato che } f_c \cdot T = 1 \text{ (il } 2^\circ \text{ esponenziale viene } 1) \\ &= \overline{X(f)} \qquad C.V.D.\end{aligned}$$

Frequenze Normalizzate

Spesso è più comodo utilizzare al posto della variabile "fisica" f una *variabile normalizzata F*, ovvero:

$$f \longrightarrow f\,T = \frac{f}{f_c} = \boxed{F}$$

- Tale F viene detta appunto **frequenza normalizzata**.
- Ne consegue quindi la seguente definizione alternativa della trasformata:

$$\boxed{\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi F n}}$$

- E' ancora un segnale **periodico** di periodo **1**
- Essendo soltanto un modo differente di esprimere lo stesso concetto di **trasformata di Fourier per sequenze**, si può passare da una forma all'altra senza problemi con i soli cambi di variabile necessari, cioè "riscalando" gli assi (se necessario: vedi esempi lezione 28/04 - 2:06:00)

ANTITRASFORMATA DI FOURIER PER SEQUENZE

Intro

Calcolare la sequenza $x[n]$ a partire dalla funzione "normalizzata" $\overline{X}(F)$, cioè:

$$\overline{X}(F) \longrightarrow x[n]$$

.

Cambiando solamente l'indice ($n \to m$), sappiamo che:

$$\overline{X}(F) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{j2\pi Fm}$$

Se adesso a $\overline{X}(F)$:

- moltiplichiamo $e^{j2\pi Fn}$
- integriamo tra $\frac{-1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

  Si ottiene:

$$\Bigg(\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{j2\pi Fm}\, dF}_{\overline{X}(F)}\Bigg) \cdot e^{j2\pi Fn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi F(m-n)}\, dF}_{\bigstar}$$

- $$\bigstar = \int_{-1/2}^{1/2} cos(2\pi F(m-n))\, dF - j\int_{-1/2}^{1/2} sin 2\pi F(m-n)\, dF$$
  $$= \begin{cases} \text{rimane } \int e^0 dF \quad \text{e quindi 1} & \text{se } m = n \\ \int (\text{coseno e seno per un certo numero intero di periodi}) & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

- Da cui, finalmente:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } \ m = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In conclusione (*prendendo in considerazione solo quando $x[n] = 1$*):

$$\boxed{x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F) \cdot e^{j2\pi FN}\, dF}$$

è **l'antitrasformata per sequenze della funzione $\overline{X}(F)$**;
- E' la somma (integrale) di tanti esponenziali complessi ognuno a frequenza normalizzata F, la cui ampiezza è infinitesima e vale $\overline{X}(f) \cdot dF$ (peso in fase di ricostruzione).
- Stessa visione della espansione in serie/trasformata di Fourier

> **Frequenze Fisiche**
>
> Per le frequenze fisiche, ricordando che $f = F \cdot f_c$, si dimostra analogamente che:
>
> $$x[n] = T\int_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} x[n] \cdot e^{j2\pi fnT}\, df$$
>
> .

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA

Vogliamo ottenere per la convergenza:

$$\boxed{|\overline{X}(f)| < \infty}$$

- Si dimostra che questo vale quando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
|\overline{X}(f)| &= |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |\underbrace{e^{-j2\pi Fn}}_{1}| \qquad \text{(disuguaglianza triangolare)} \\
&= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|}
\end{aligned}$$

$$\text{se essa è limitata, allora anche } \overline{X}(F) \text{ lo e' e quindi converge}$$

Quindi: *assoluta sommabilità di $x[n]$ implica la convergenza della trasformata di Fourier per sequenze*.

Nota: esistono altre condizioni per la convergenza *meno forti* (vedi sequenza costante 2. 2 Maggio)

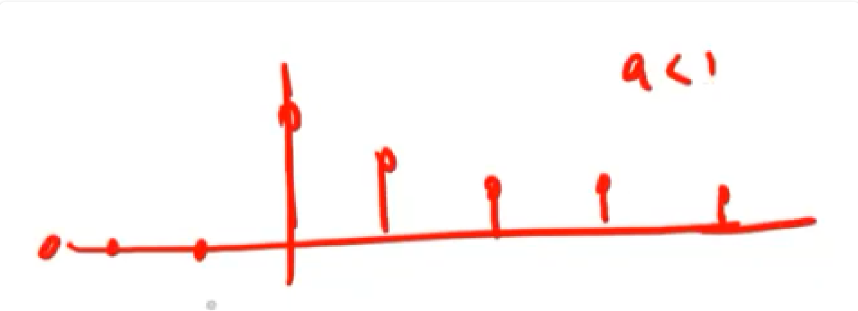
ESEMPI

Calcolo di $\overline{X}(f)$ della sequenza $x[n] = a^n \cdot u[n]$

- dove

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Supponendo $\boxed{a < 1}$ si ha:



$$\begin{aligned}
\overline{X}(F) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j2\pi Fn} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{a e^{-j2\pi F}}_{q})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q|<1
\end{aligned}$$

(serie geometrica di ragione q)

Quindi, sostituendo il segnale al posto di q, otteniamo la trasformata:

$$\overline{X}(F) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi F}}$$

SPETTRO DELLA SEQUENZA $x[n]$

Anche in questo caso la trasformata è una funzione **complessa** della variabile F, pertanto si può espimere/rappresentare in **modulo** e **fase**, coi relativi *spettri* di *ampiezza e fase*.

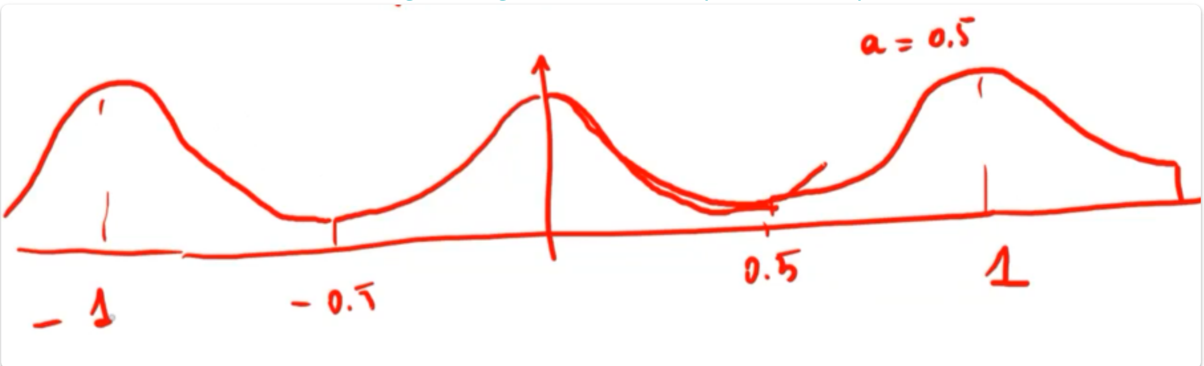
Partiamo a calcolare lo **spettro di ampiezza**:

- Separiamo parte reale e parte immaginaria, sfruttando le formule di Eulero:

$$\overline{X}(f) = \frac{1}{1 - a\cos 2\pi F \quad + \quad ja\sin 2\pi F}$$

- Troviamo il **modulo**:

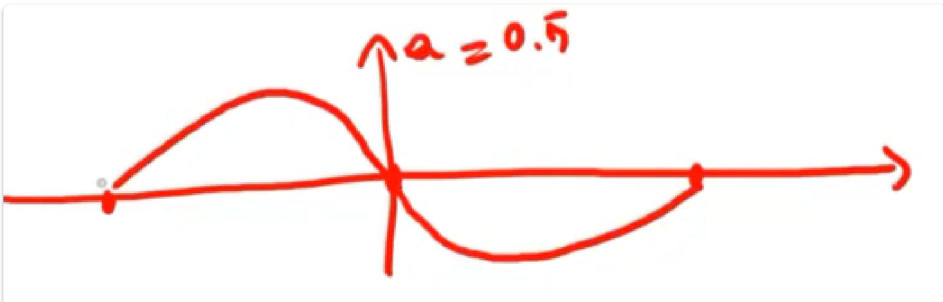
$$|\overline{X}(f)| = \frac{1}{\sqrt{(Re)^2 + (Im)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos 2\pi F)^2 + (ja\sin 2\pi F)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2\cos 2a\pi}}$$

> *Ponendo $a = 0.5$, otteniamo il seguente grafico (essendo periodica di periodo 1):*
>
> 
>

Proseguiamo con il calcolo della **fase**:

$$\overline{X}(f) = \underbrace{\frac{1 - a\cos 2\pi F - ja\sin 2\pi F}{|1 - a\cos 2\pi F + ja\sin 2\pi F|^2}}_{Razionalizzazione}$$

$$\angle\overline{X}(f) = \arctan\left(\frac{Re}{Im}\right) = \arctan\left(\frac{-a\sin 2\pi F}{1 - a\cos 2\pi F}\right) \underbrace{=}_{dispari} - \arctan\left(\frac{a\sin 2\pi F}{1 - a\cos 2\pi F}\right)$$



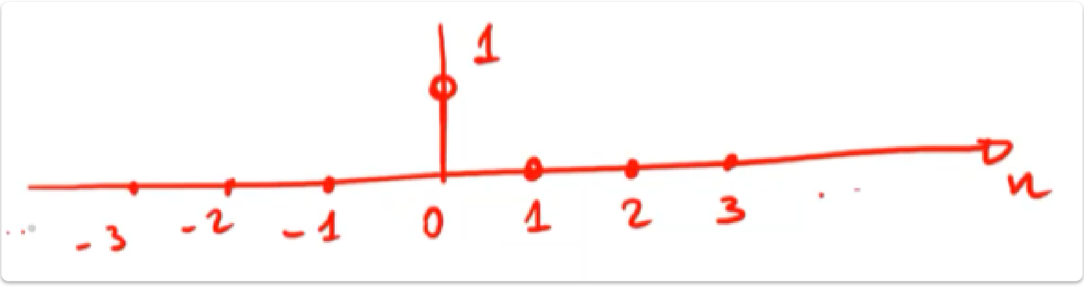
$\checkmark$ *Dispari*

SEQUENZE FONDAMENTALI

IMPULSO DISCRETO UNITARIO

E' una **sequenza** che indichiamo così:

$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}}$$

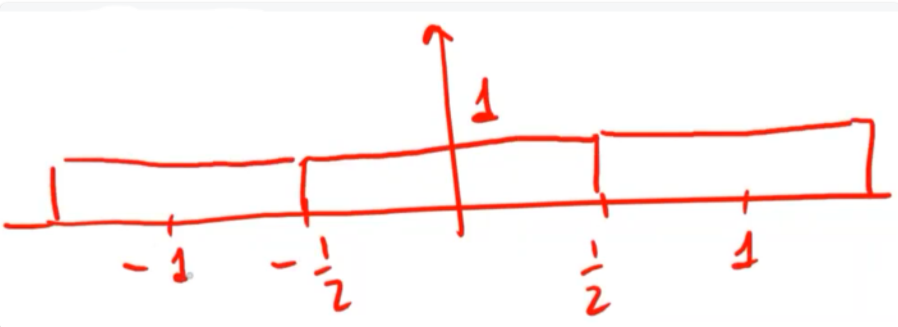


- Nonostante sia definita in modo semplice (a differenza della delta di Dirac che è una "astrazione matematica"), risulterà essere di fondamentale importanza.

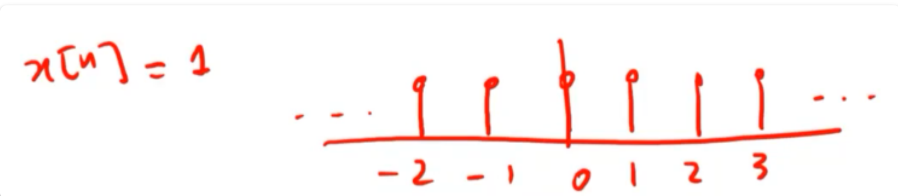
La sua **trasformata** è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{\delta[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi F n} \\ &= \delta[0] e^{-j2\pi F \cdot 0} \\ &= 1 \cdot e^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vale quindi 1 nel periodo $\frac{-1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$ poi però si **ripete**, in questo modo:



SEQUENZA COSTANTE $x[n] = 1$



- Questa sequenza non soddisfa la condizione sufficiente che abbiamo visto per la convergenza, dato che **non vale**:

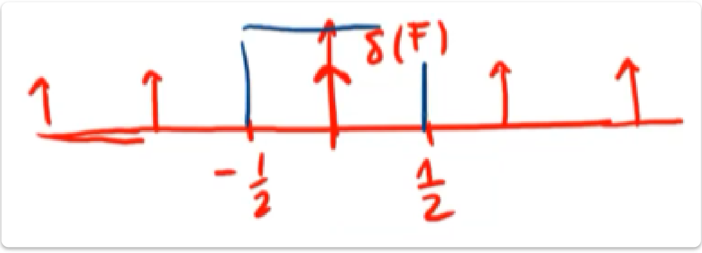
$$\cancel{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty}$$

> *Cioè la sequenza non è assolutamente sommabile*

Tuttavia è comunque possibile trovare la trasformata, che è la seguente:

$$\mathscr{F}\{x[n]\} = \overline{X}(f) = \delta(F)$$

- Dato che è periodica, otteniamo un **pettine di Dirac** (in blu un singolo periodo):



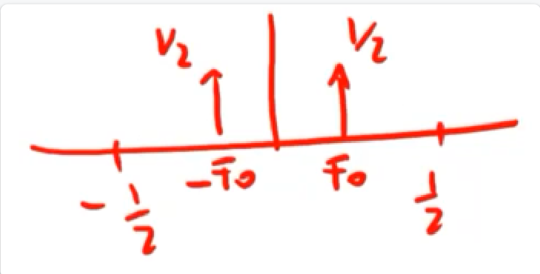
Abbiamo ottenuto quindi un risultato utile ma siamo stati *costretti* a introdurre delle *funzioni impulsive* (questo perché non è rispettata la condizione sufficiente).

Possiamo calcolare l'antitrasformata e poi confrontare il risultato con l'impulso discreto unitario:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(f) e^{j2\pi Fn}\, dF = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(F) e^{j2\pi Fn}\, dF \underbrace{=}_{proprieta'\ \delta} 1 \quad \forall n \text{ della sequenza}$$

Esempio: dimostriamo che $x[n] = \cos 2\pi F_0 n \iff \frac{1}{2}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]$

Supponendo $|F_0| < \frac{1}{2}$, ci aspettiamo il seguente spettro:



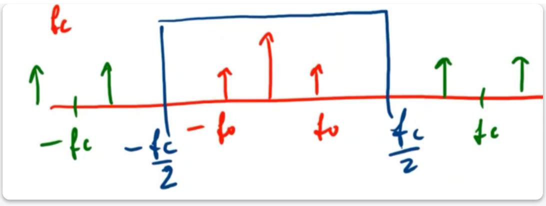
La trasformata inversa è:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\frac{1}{2}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]}_{\overline{X}(f)} e^{j2\pi Fn}\, dF$$

Da cui, sfruttando le proprieta della δ e le formule di Eulero:

$$\frac{1}{2}(e^{j2\pi F_0 n} + e^{-j2\pi F_0 n}) = cos 2\pi F_0 n \qquad \checkmark$$

Ci potevamo aspettare questo risultato. Infatti la trasformata del coseno porta a due delta di Dirac: se campioniamo questo risultato, otteniamo una ripetizione di tali delte, in questo modo:



Un'altra trasformata notevole

In maniera duale, vale anche la seguente:

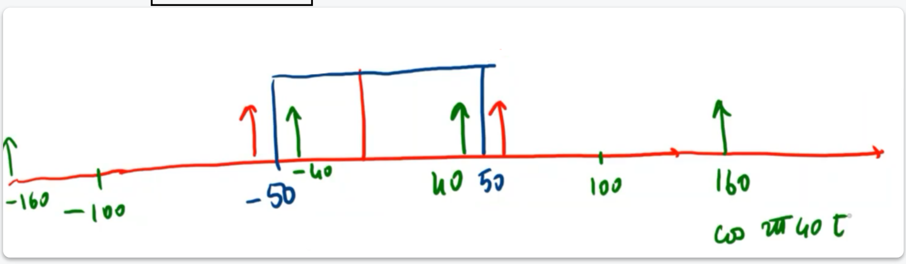
$$x[n] = \sin 2\pi F_0 n \iff \frac{1}{2j}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]$$

.

Esempio particolare: $x(t) = cos 2\pi 60t$

Rappresentabile graficamente in questo modo:>

Scegliendo $\boxed{f_c = 100Hz}$, si ottiene il seguente spettro (frecce verdi):



Ovvero abbiamo ottenuto lo stesso spettro se avessi campionato il segnale $\cos 2\pi 40t$ alla stessa frequenza di campionamento f_c .

> Basta osservare che le due delta di Dirac sono posizionate in -40 e $+40$ nel periodo di riferimento (blu)

Questo è accaduto perché abbiamo "violato" che condizioni necessarie del Teorema del Campionamento**: infatti la frequenza di campionamento scelta non è superiore di due volte la banda del segnale, ovvero:**

$$\cancel{f_c \geq 2B}$$

Il segnale è cioè **affetto da aliasing**.

TEOREMI DELLA TRASFORMATA DI FOURIER PER SEQUENZE

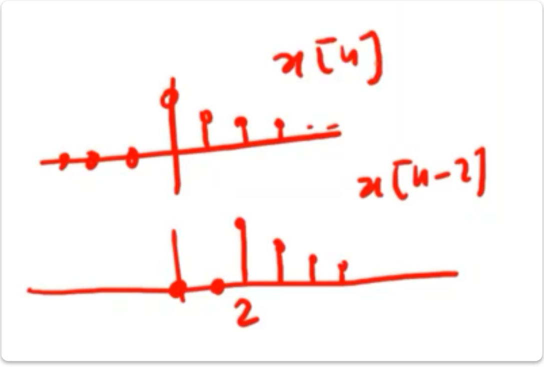
1) LINEARITA'

2) RITARDO

- Un ritardo nel tempo, introduce un **ritardo dei campioni**. Nella pratica questa operazione corrispone a fare uno *shift* a desra o sinistra l'intera sequenza di un valore intero.

> *Significa cioè eseguire il passaggio $x[n] \longrightarrow x[n-n_0]$*

Ad esempio, ponendo $n_0 = 2$ al segnale $x[n] = a^n \cdot u[n]$ si ottiene :



Si ottiene che:

$$\boxed{\begin{array}{c} x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(f) \\ x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j2\pi F n_0} \cdot \overline{X}(f) \end{array}}$$

Dimostrazione:

$$\mathscr{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] e^{-j2\pi F n}$$

- Ponendo $m = n - n_0$, si ottiene:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{j2\pi F(m+n_0)} = e^{-j2\pi F n_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi F m}}_{\overline{X}(f)}$$

> *Traslare nel tempo quindi introduce* ***un termine esponenziale complesso in frequenza*** *(si altera solo lo spettro di fase, l'ampiezza rimane la stessa)*

3) MODULAZIONE

Cosa si ottiene nel tempo quando si trasla in frequenza.

- E' perciò duale del teorema del ritardo.

$$\boxed{\overline{X}(F-F_0) \longleftrightarrow x[n] e^{j2\pi F_0 n}}$$

Nota: a sinistra abbiamo la situazione in frequenza per comodità di lettura e spiegazione del teorema

Dimostrazione:

$$\mathscr{F}\{x[n] e^{j2\pi F_0 n}\} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi F_0 n} \right) e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi \underbrace{(F-F_0)} n} = \overline{X}(F-F_0)$$

4) CONIUGAZIONE

Sia

$$x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(f)$$

Allora

$$\mathscr{F}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j2\pi F_n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi Fn}\right)^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi(-F)n}\right)^* = X^*(-F)$$

SIMMETRIA HERMITIANA

$$\begin{gathered} x[n] \text{ e' Reale} \quad \longrightarrow \quad x[n] = x^*[n] \\ \text{Allora} \quad \overline{X}(F) = \left(\overline{X}(-F)\right)^* \end{gathered}$$

Ne deriva che:

$$|\overline{X}(F)| = |\overline{X}(-F)| \qquad \text{il modulo ha } \textbf{simmetria pari}$$

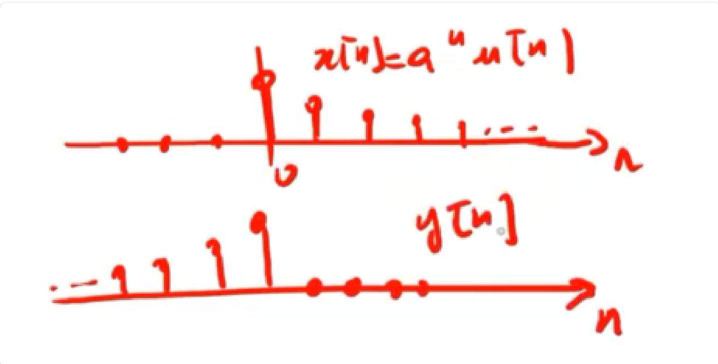
$$\angle\overline{X}(F) = \angle\overline{X}(-F) \qquad \text{la fase ha } \textbf{simmetria dispari}$$

5) INVERSIONE TEMPORALE

Passaggio

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[-n]$$

Nell'esempio del segnale esponenziale, si ottiene:



Nel dominio di Fourier, invece:

$$\overline{Y}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j2\pi Fn} \underbrace{=}_{m=-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{j2\pi Fm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi(-F)m} = X(-F)$$

Pertanto, riassumendo:

$$\begin{gathered} x[n] \longrightarrow y[n] = x[-n] \\ X[-F] \longrightarrow Y[f] \end{gathered}$$

COROLLARIO

Si può dimostrare che con un ribaltamento nel tempo si ottiene coniugazione in frequenza

$$x[n] \text{ e' reale} \longrightarrow Y(F) = X^*(F)$$

6) CONVOLUZIONE

Siano $x[n]$ e $y[n]$ due sequenze
Si definisce la convoluzione tra le due, come:

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k]$$

Il teorema afferma che:

$$\boxed{\overline{W}(F) = \overline{X}(F)\overline{Y}(F)}$$

Dimostrazione:

$$\overline{W}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]e^{k2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \right) \cdot e^{-k2\pi Fn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j2\pi Fn}}_{\overline{Y}(F)\cdot e^{-j2\pi Fk}}$$

Si conclude quindi:

$$\overline{W}(F) = \overline{Y}(F) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi Fk}}_{\overline{X}(f)} = \overline{Y}(F)\overline{X}(f), \qquad \text{C.V.D.}$$

7) PRODOTTO

Duale rispetto al precedente:
Siano $x[n]$ e $y[n]$ due sequenze
Si definisce il prodotto tra le due, come:

$$w[n] = x[n] \cdot y[n]$$

Il teorema afferma che:

$$\boxed{\overline{W}(F) = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \cdot \overline{X}(F-\theta)\, d\theta}$$

Dimostrazione:

$$\overline{W}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta)e^{j2\pi\theta n}\, d\theta\; e^{-j2\pi Fn}$$

Scambiando i due operatori lineari:

$$\overline{W}(F) = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi(F-\theta)n}}_{\overline{X}(F-\theta)}\, d\theta = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \cdot \overline{X}(F-\theta)\, d\theta$$

Note: abbiamo ottenuto ancora una volta una convoluzione come nel caso tempo continuo, però qui non è più esteso da $-\infty$ a $+\infty$, ma è limitato in un periodo (nel caso di frequenze normalizzate da $-1/2$ a $1/2$).