ESERCITAZIONI DI FINE CORSO

ESERCIZIO: PROGETTAZIONE DEL REGOLATORE

Dati del problema: A, B, C

- Verifica che il problema sia ben posto (autovalori nascosti con $\mathrm{Re} < 0$)
  - Autovalori non controllabili con $\mathrm{Re} < 0$ per capire F
  - Autovalori non osservabili con $\mathrm{Re} < 0$ per capire L
  - Attraverso il polinomio di controllo e il polinomio osservabile
  - $(sI - A)^{-1}B$ da cui si deriva $\varphi_c(s)$ e $\varphi_{nc}(s)$
  - $C(sI - A)^{-1}$ da cui si deriva $\varphi_o(s)$ e $\varphi_{no}(s)$
  - Quindi in ogni caso devo trovare $(sI - A)^{-1}$, poi vedo se moltiplicando per B o C si cancella qualche autovalore

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$$

$\exists\, F$ tale che $A - BF$ asintoticamente stabile $\iff$ tutti gli autovalori non controllabili hanno $\mathrm{Re} < 0$ $\quad \varphi_{nc}(s)$

$\exists\, L$ tale che $A - LC$ asintoticamente stabile $\iff$ tutti gli autovalori non osservabili hanno $\mathrm{Re} < 0$ $\quad \varphi_{no}(s)$

$\iff$ autovalori nascosti hanno $\mathrm{Re} < 0$ $\qquad \varphi_R(s) = \dfrac{\varphi(s)}{e(s)}$

devo studiare controllabilità e osservabilità

$$(sI - A)^{-1}B \rightsquigarrow \varphi_c(s) \rightsquigarrow \varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$$

$$C(sI - A)^{-1} \rightsquigarrow \varphi_o(s) \rightsquigarrow \varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

> *Nella moltiplicazione per B non ci sono semplificazioni (completamente controllabile quindi posso trovare F: andiamo a progettarla calcolando $A - BF$ e poi $\det(sI - A + BF)$)*

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix} s & 1\\ 1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s-1)}\\ \frac{s}{(s+1)(s-1)}\end{bmatrix}$$

$\varphi_c(s) = (s+1)(s-1)$ $\qquad \varphi_c(s)=\varphi(s)$ $\qquad \varphi_{mc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = 1$

sistema completamente controllabile $\Rightarrow \exists F$ tale che $A-BF$ asintoticamente stabile

$$A-BF = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1 & f_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ f_1 & f_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1-f_1 & -f_2\end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A+BF) = \det\begin{bmatrix}s & -1\\ -1+f_1 & s+f_2\end{bmatrix} = s(s+f_2) + f_1 - 1 = s^2 + f_2 s + f_1 - 1$$

al variare di f_1 e f_2 posso assegnare a piacere questo polinomio asintoticamente stabile

$f_2 > 0$
$f_1 > 1$

ad esempio posso porre $\det(sI-A+BF) = (s+1)(s+10) = s^2+11s+10$

$f_2 = 11 \qquad f_1 = 11$

- abbiamo scelto due valori di F casuali, purché rispettino le condizioni

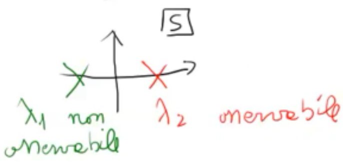
> *Nella moltiplicazione per C c'è una semplificazione (scompare l'autovalore in -1): controllo quindi che gli autovalori non osservabili hanno $\mathrm{Re} < 0$ per avere completa osservabilità e trovare quindi un possibile guadagno L: andiamo a progettarlo calcolando $A - LC$ e poi $\det(sI - A + LC)$, e verifico fattorizzando che la parte stabile di $\varphi(s)$ (che è non osservabile) rimane fissa. Si può modificare invece la parte instabile, e quindi regolando gli ℓ_i si può rendere stabile*

$\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix}s & 1\\ 1 & s\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix}s+1\\ s+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s-1}\\ \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}$$

$\varphi_o(s) = s-1 \qquad \varphi_{mo}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)} = \frac{(s+1)(s-1)}{s-1} = s+1$

$\lambda_1 = -1$ autovalore non osservabile
$\lambda_2 = 1$ autovalore osservabile



autovalore non osservabile con $\mathrm{Re} < 0 \Rightarrow \exists L$ tale che $A-LC$ asintoticamente stabile

$$A-LC = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\ell_1 & \ell_1\\ \ell_2 & \ell_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\ell_1 & 1-\ell_1\\ 1-\ell_2 & -\ell_2\end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A+LC) = \det\begin{bmatrix}s+\ell_1 & -1+\ell_1\\ -1+\ell_2 & s+\ell_2\end{bmatrix} = (s+\ell_1)(s+\ell_2) - (\ell_1-1)(\ell_2-1)$$

$$= s^2 + (\ell_1+\ell_2)s + \cancel{\ell_1\ell_2} - \cancel{\ell_1\ell_2} + \ell_1 + \ell_2 - 1 = s^2 + (\ell_1+\ell_2)s + (\ell_1+\ell_2-1)$$

$$= (s+1)(s+\ell_1+\ell_2-1)$$

- si rende quindi anche il secondo fattore con radice con $\mathrm{Re} < 0$, scegliendo ad esempio $\begin{cases}\ell_1 = 100\\ l_2 = 1\end{cases}$
  - In questo modo si rende l'errore di stima tendente a 0 e quindi $\hat{x} \approx x$

$$\varepsilon = x - \hat{x}$$
$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\,\varepsilon$$

$$\det(sI - A + LC) = (s+1)(s + l_1 + l_2 - 1)$$

asintoticamente stabile per $l_1 + l_2 - 1 > 0$

ad esempio

$$\det(sI - A + LC) = (s+1)(s+100) \qquad l_1 + l_2 - 1 = 100 \qquad l_1 = 100,\ l_2 = 1$$

Mettendo tutto insieme (esplicitando $\varphi^*(s)$ [polinomio caratteristico in ciclo chiuso]):

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)\,\det(sI - A + LC) = (s+1)(s+10)\,(s+1)(s+100)$$

Calcolo infine **la funzione di trasferimento in ciclo chiuso** (che non dipende dal regolatore):

- E quindi poi si trova anche H per soddisfare la specifica 2

$$G_{y^\circ y}(s) = \frac{z(s)}{\det(sI - A + BF)}\,H$$

$$z(s) = C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s+1$$

$$G_{y^\circ y}(s) = \frac{\cancel{s+1}}{(\cancel{s+1})(s+10)}\,H = \frac{H}{s+10}$$

Per soddisfare la specifica 2 $\quad G_{y^\circ y}(0) = 1 \qquad G_{y^\circ y}(0) = \frac{H}{10} = 1 \qquad H = 10$

Studia anche sul perché si fanno le procedure (per parte orale)

- Anche come son fatte le strutture di controllo (schemi, proprietà etc..)

ESERCIZIO: RETROAZIONE SULLO STATO

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\,x_2 + 2\,u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \alpha\,u \\ y = x_2 \end{cases}$$

a. Determinare il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b. Dire per quali valori di α lo stato $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ è raggiungibile;
c. Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile;
d. Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da posizionare gli autovalori in ciclo chiuso entrambi in -10;
e. Per $\alpha = 0$ progettare, se possibile, una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ che assegni il polinomio caratteristico in ciclo chiuso in $\varphi^*(s) = s^2 + s + 1$ e garantisca inseguimento perfetto di un riferimento costante y°;
f. Fissati F e H come al punto precedente, tracciare (anche in modo qualitativo) l'andamento nel tempo della risposta forzata in ciclo chiuso per un riferimento a gradino $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$.

0)

- Scrivo le matrici di stato A, B, C (la riga i-esima di ciascuna è legata alla riga i-esima equazione di stato)

A)

> *$\varphi_c(s)$ a variare di α*

- Cerco subito di vedere se esistono α guardando la matrice $\mathcal{R}$ di raggiungibilità (perché completa controllabilità $\iff$ completa raggiungibilità)
  - Accade quando $\det\{\mathcal{R}\} \neq 0$ (rango massimo)
  - In questo modo abbiamo in generale la coincidenza tra $\varphi_c(s)$ e $\varphi(s)$, così che devo studiare solo alcuni caso particolari in cui perdo di controllabilità

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \alpha u \\ y = x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

a) $\varphi_c(s)$ al variare di α

Posso sfruttare il fatto che completa contr. $\iff$ completa ragg.

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha \\ \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

completa ragg. $\iff$ $\det \mathcal{R} \neq 0$

$$\det \mathcal{R} = 2(2-\alpha) - 2\alpha^2 = 4 - 2\alpha - 2\alpha^2$$

$$\det \mathcal{R} = 0 \iff 4 - 2\alpha - 2\alpha^2 = 0 \iff \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

$$\iff \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$

$\det \mathcal{R} \neq 0 \Rightarrow$ completa ragg. e completa contr. $\Rightarrow \varphi_c(s) = \varphi(s)$

- per quei valori di α particolari, il sistema è non completamente controllabile
  - Quindi devo calcolare $\varphi_c(s)$ attraverso il passaggio lungo, ovvero tramite $(sI - A)^{-1}B$
  - Calcolo intanto $\varphi(s)$ e poi derivo $\varphi_c(s)$ per i casi particolari
  - (ci saranno semplificazioni perché si perde di controllabilità)

$\alpha = 1$, $\alpha = -2$ sistema non completo contr. perché $\det \mathcal{R} = 0$

$\rightarrow$ per calcolare $\varphi_c(s)$ devo calcolare $(sI-A)^{-1}B$

$$\varphi(s) = \det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = s(s+1) - 2 = s^2 + s - 2$$
$$= (s-1)(s+2)$$

$\boxed{\alpha \neq 1 \text{ e } \alpha \neq -2}$

$$\varphi_c(s) = \varphi(s) = (s-1)(s+2) \qquad \varphi_{mc}(s) = 1$$

$\boxed{\alpha = 1}$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI-A)B = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ +1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+1)2+2 \\ +2+s \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2s+4 \\ s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s-1 \qquad \varphi_{mc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = s+2$$

Faccio lo stesso per l'altro valore particolare di α, ovvero $\alpha = -2$

$\boxed{\alpha = -2}$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI-A)B = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+1)2-4 \\ 2-2s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2s-2 \\ -2s+2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2(s-1) \\ -2(s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} \\ \frac{-2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s+2 \qquad \varphi_{mc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = s-1$$

B)

> *α tali che lo stato $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ è raggiungibile*

- Si calcola la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$ (già fatto ✓)
  - Verifico che lo stato è ottenibile come combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{R}$
  - Sappiamo dall'esercizio A) che in molti casi abbiamo completa raggiungibilità, quindi possiamo portare lo stato dove vogliamo. Dobbiamo studiare solo i casi particolari di α (in questo caso $\alpha \neq 1, -2$)

b) Per quali α lo stato $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ è raggiungibile?

x° è raggiungibile $\iff$ appartiene all'immagine di $\mathcal{R}$

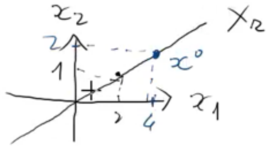
$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ $\det \mathcal{R} \neq 0 \Rightarrow$ completa ragg. $\rightarrow$ tutti gli stati sono raggiungibili

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ è raggiungibile

Studio quei due casi particolari:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha \\ \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

$\alpha = 1$ $\qquad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

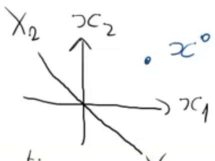


$x^\circ = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ è raggiungibile

infatti $X_R = \left\{ \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2(\beta_1+\beta_2) \\ \beta_1+\beta_2 \end{bmatrix} \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \end{bmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R} \right\}$

- non abbiamo completa raggiungibilità ma quello specifico stato è raggiungibile
  Altro caso:



$\alpha = -2 \qquad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$x^\circ = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ non è raggiungibile perché non appartiene a X_R

$X_R = \left\{ \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ -(2\beta_1 - 4\beta_2) \end{bmatrix} \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R} \right\}$

- X_r composto da vettori in cui la seconda componente è uguale alla prima cambiata di segno
  - Si nota che lo stato richiesto non è raggiungibile

C)

> *α per avere F tale che l'azione di controllo in retroazione sullo stato è stabilizzante*

- Sappiamo che esiste F stabilizzante se abbiamo autovalori non controllabili con $\mathrm{Re} < 0$
  - Facile nei casi generici
  - Nei casi particolari devo vedere $\varphi_c(s)$ attraverso il passaggio lungo, ovvero tramite $(sI - A)^{-1}B$ ma è già stato calcolato nell'esercizio A) ✓

c) Per quali α esiste F tale che $u = -Fx + Hy^\circ$ è stabilizzante

$\exists F$ stabilizzante $\Longleftrightarrow$ tutti autovalori non contr. con $\mathrm{Re} < 0$

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$

$\varphi_c(s) = \varphi(s) = (s-1)(s+2) \qquad \varphi_{nc}(s) = 1$

completa controllabilità $\Rightarrow$ stabilizzabilità

$\alpha = 1$

$\varphi_c(s) = s-1 \qquad \varphi_{nc}(s) = s+2$

$\varphi_{nc}(s) = s+2$ con radici e $\mathrm{Re} < 0$ $\Rightarrow$ stabilizzabilità

$\alpha = -2$

$\varphi_c(s) = s+2 \qquad \varphi_{nc}(s) = s-1$

$\varphi_{nc}(s) = s-1$ ha una radice con $\mathrm{Re} > 0$ $\Rightarrow$ non stabilizzabile

$\lambda_1 = 1$ autovalore non controllabile instabile

$\exists F$ stabilizzante per $\alpha \neq -2$

D)

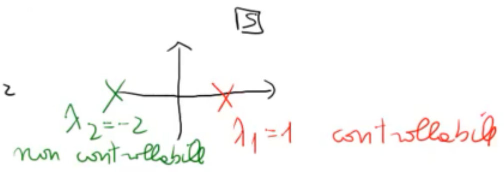
> *α per avere F per posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in -10 (attraverso il controllo in retroazione sullo stato)*
>
> d) Per quali α esiste F tale che
> $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = (s+10)^2$ con entrambe le radici in -10

- Quindi non voglio solo stabilizzare, ma voglio anche mettere (entrambe per l'ordine del sistema è 2) le radici in -10
- Facile se abbiamo completa controllabilità (lo possiamo fare sicuro)
  - Devo verificare invece nei casi particolari $\alpha = 1, -2$
- Per $\alpha = 1$ abbiamo un autovalore non controllabile in -2, quindi non si possono mettere *entrambe* le radici in -10
- Stesso ragionamento per $\alpha = -2$

d) Per quali α esiste F tale che
$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = (s+10)^2$ con entrambe le radici in -10

✓ $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$
$\varphi(s) = \varphi_c(s) = (s-1)(s+2)$
completa contr. $\Rightarrow$ possiamo assegnare $\varphi^*(s)$ a piacere

✗ $\alpha = 1$
$\varphi_c(s) = (s-1)$ $\quad \varphi_{nc}(s) = s+2$



$+$

non posso assegnare entrambe le radici di $\varphi^*(s)$ in -10
perché ho un autovalore non controllabile in -2 che non può essere modificato

✗ $\alpha = -2$
$\varphi_c(s) = s+2$ $\quad \varphi_{nc}(s) = s-1$
Come sopra

E) [TODO]

> *$\alpha = 0$ progettare F e H*
>
> e) $\alpha = 0$ Progettare F e H in modo che
>
> $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = s^2 + s + 1 \rightsquigarrow F$
>
> $G^*_{y^o y}(0) = 1$
>
> $G^*_{y^o y}(s) = \dfrac{z(s)}{\varphi^*(s)} H \rightsquigarrow H$

(vedi prima parte di lezione)
Soluzione della funzione di trasferimento:

$$G^*_{y^oy}(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

F)

> *Andamento nel tempo della risposta forzata con riferimento $y^o(t)$ a gradino (si deve tracciare $y_f(t)$)*

- Modo 1: antitrasformata [metodo lungo :( ]

$$Y_f(s) = G^*_{y^oy}(s)\, Y^o(s) = \frac{1}{s^2+s+1}\cdot\frac{2}{s}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\cdot\frac{2}{s}\right\}$$

- Modo 2: sappiamo l'andamento della risposta forzata per segnali tipici per sistemi di I e II ordine

noto che $G^*_{y^oy}(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ è un sistema del II ordine con polinomio $\varrho^*(s) = s^2+s+1 = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$

$\omega_n = 1$
$\boxed{\xi = \frac{1}{2}}$
caso sottosmorzato (poli complessi coniugati)

- caso sottosmorzato (oscilla)
- posso calcolare i parametri tipici utilizzando le formule

Grafico (indicativo):