PROPRIETÀ (RIASSUNTO)

1. **Linearità**:
$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$
2. **Traslazione in frequenza**:
$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)$$
3. **Derivata in frequenza**:
$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$
4. **Derivata nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$
5. **Integrazione nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$
6. **Convoluzione nel tempo**:
$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$$

- $s \longleftrightarrow$ derivazione
- $\dfrac{1}{s} \longleftrightarrow$ integrazione

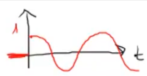
ESERCIZI: CALCOLO DI TRASFORMATE

1) $f(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$

- metodo 1: vedere il coseno come la derivata del seno e applicare la P4
- metodo 2: sfruttare le formule di Eulero

1) $f(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$

$$= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\, 1(t)$$



$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\cdot 1(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t} 1(t)\} + \frac{1}{2}\{e^{-j\omega_0 t} 1(t)\}$$

$\lambda = j\omega_0$ $\qquad$ $\lambda = -j\omega_0$

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} 1(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s+\cancel{j\omega_0}+s-\cancel{j\omega_0}}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

- nota: era già presente nella tabella delle trasformate

2) $f(t) = 2(1 - e^{-3t})\, 1(t)$

- Si sfrutta la prop. distributiva e la linearità

$$2)\quad f(t) = 2\left(1 - e^{-3t}\right) 1(t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{2\left(1-e^{-3t}\right)1(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{2\, 1(t) - 2\, e^{-3t}\, 1(t)\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}\left\{1(t)\right\} - 2\,\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\, 1(t)\right\} \qquad \lambda = -3$$

$$= 2\,\frac{1}{s} - 2\,\frac{1}{s+3} = 2\,\frac{s+3-s}{s(s+3)} = \frac{6}{s(s+3)}$$

- Nota: abbiamo ancora una funzione razionale nel dominio s perché abbiamo fatto una combinazione lineare di funzioni elementari
  - Questo sarà comodo poi per l'antitrasformata

3) $F(T) = [2\,\mathrm{SIN}(3T) + 4\,\mathrm{COS}(3T)]\ 1(T)$

- linearità per isolare seno e coseno e applicare le formule in tabella delle trasformate fondamentali

$$3)\quad f(t) = \left[2 \sin(3t) + 4 \cos(3t)\right] 1(t)$$

$$F(s) = 2\,\mathcal{L}\left\{\sin(3t)\, 1(t)\right\} + 4\,\mathcal{L}\left\{\cos(3t)\, 1(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin(\omega_0 t)\, 1(t)\right\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathcal{L}\left\{\cos(\omega_0 t)\, 1(t)\right\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\omega_0 = 3$$

$$F(s) = 2\,\frac{3}{s^2+9} + 4\,\frac{s}{s^2+9} = \frac{4s+6}{s^2+9}$$

4) $E^{-2T}\,\mathrm{SIN}(T)\ 1(T)$

- metodo 1: Eulero per riscrivere seno e coseno
- metodo 2: traslazione in frequenza - perché abbiamo un esponenziale a moltiplicare (vediamo questo)

$$4)\quad f(t) = e^{-2t} \sin(t)\, 1(t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-2t} \sin(t)\, 1(t)\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\, g(t)\right\} \quad \text{con } g(t) = \sin(t)\, 1(t)$$

$$G(s) = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad \text{con } \omega_0 = 1$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\, g(t)\right\} = G(s+2) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$e^{\alpha t}\, g(t) \qquad \alpha = -2$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+5}$$

RISPOSTA LIBERA E FORZATA NEL DOMINIO DI LAPLACE

Abbiamo un sistema LTI TC del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

STATO

Possiamo calcolare la trasformata dello stato $\dot{x}(t)$, sfruttando le proprietà 1 (linearità, utile per il membro di destra) e 4 (operatore s derivata, utile per $\dot{x}(t)$):

- Definiamo

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \qquad \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) \qquad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

- Applicando le proprietà 1 e 4 della trasformata di Laplace

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} & = & \mathcal{L}\{Ax(t) + Bu(t)\} \\ & \Downarrow & \\ sX(s) - x(0) & = & AX(s) + BU(s) \end{array}$$

- **Equazione differenziale $\longleftrightarrow$ equazione algebrica**

- con la trasformata abbiamo ottenuto una *equazione algebrica*
  - $X(s)$ è il vettore delle trasformate

Da cui:

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

Riscrivendo $X(s)$ (sfruttando le proprietà della matrice identica):

$$s\ I\ X(s) - AX(S) = x(0) + BU(s)$$

Raccogliendo:

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Ecco che abbiamo la soluzione:

$$\boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}\left[x(0) + BU(s)\right]}$$

Distribuendo il prodotto, si evince al meglio il parallelo con l'evoluzione libera nel dominio del tempo:

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}\ x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{X_f(s)}$$

- $X_\ell(s)$ viene detta **risposta libera**
- $X_f(s)$ viene detta **risposta forzata**

USCITA

In maniera del tutto equivalente:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \longleftrightarrow Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

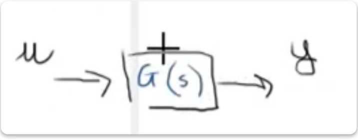
Riscrivendo, sfruttando il fatto che $X(s)$ lo abbiamo già calcolato precedentemente:

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}\ x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)}_{X_f(s)}$$

Dove dal secondo addendo si ricava la **funzione di trasferimento** :

$$\underbrace{C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)}_{X_f(s)} = \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]}_{G_s = \text{funzione di trasferimento}} \cdot U(s)$$

- essa contiene tutte le informazioni *ingresso-uscita* del sistema



RIASSUNTO E PARAGONE TEMPO-LAPLACE

	Tempo	Laplace
Evoluzione libera nello stato $x_\ell(t)$	$e^{At}x(0)$	$(sI-A)^{-1}x(0)$
Evoluzione forzata nello stato $x_f(t)$	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$
Risposta libera $y_\ell(t)$	$C\,e^{At}\,x(0)$	$C(sI-A)^{-1}\,x(0)$
Risposta forzata $y_f(t)$	$C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau+Du(t)$	$[C(sI-A)^{-1}B+D]\,U(s)$

- nel tempo abbiamo l'esponenziale di matrice e^{At} oppure un integrale (di convoluzione) che in generale sono complicati da calcolare.
  - In Laplace invece abbiamo soltanto da calcolare l'**inversa di una matrice**: $(sI-A)^{-1}$ oppure un **prodotto** $(sI-A)^{-1}BU(s)$

CALCOLO DELL'ESPONENZIALE DI MATRICE CON LAPLACE

Sappiamo che:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$$

Generalizzando all'esponenziale di matrice:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\}=(sI-A)^{-1}$$

Quindi **per calcolare l'esponenziale di matrice**:

- 1. Calcolo della matrice inversa $(sI-A)^{-1}$
- 2. **antitrasformata** di quanto trovato per tornare nel dominio del tempo

$$\boxed{e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}}$$

ESEMPIO: CARRELLO

Calcoliamo l'esponenziale di matrice senza sapere che la matrice è diagonalizzabile, e quindi attraverso la trasformata (nelle precedenti lezioni lo abbiamo fatto con l'altro metodo perché sapevamo che era diagonalizzabile)

> **Inversa matrice** 2×2

(inverso del determinante per matrice aggiogata)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\text{inverso del determinante}} \underbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{\text{matrice aggiugata}}$$

[vedi poi caso generale]

$b=1 \quad M=1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

con $\varphi(s) = \det(sI-A) = s(s+1) - 0(-1) = s(s+1)$

Da cui:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\right\}$$

$t \geq 0$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(t) & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ 0 & e^{-t}\,1(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{e^{at}\,1(t)\right\} = \frac{1}{s-a} \qquad a=-1}$$

Ci rimane un solo termine da antitrasformare, che è $1/s(s+1)$. Per farlo sfruttiamo la scomposizione in fratti semplici (somma di due frazioni):

Per antitrasformare $\frac{1}{s(s+1)}$ $\Rightarrow$ scomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} = \frac{k_1(s+1) + k_2 s}{s(s+1)}$$

$$= \frac{k_1 s + k_1 + k_2 s}{s(s+1)}$$

$$1 = k_1 s + k_2 s + k_1$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases} \qquad \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} \underset{\text{linearità}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = 1(t) - e^{-t}1(t)$$

E quindi **finalmente** abbiamo:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 1(t) & 1(t) - e^{-t}1(t) \\ 0 & e^{-t}1(t) \end{bmatrix}$$

INVERSA MATRICE

$$\boxed{(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \, Adj(sI - A)}$$

- gli elementi della matrice inversa sono **funzioni razionali tali che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore**

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

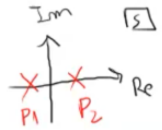
- Per il tempo discreto avremo invece la trasformata

DEFINIZIONE (APPROFONDIMENTO)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \to \infty} \int_{\gamma - jT}^{\gamma + jT} F(s) e^{sT} ds$$

- POCO PRATICA
- Per questo andremo a scomporre la $F(s)$ (razionale) in una combinazione lineare di **funzioni elementari** e poi andremo ad antitrasformare ciascun termine elementare (con la tabellina)

ESEMPIO



$e(s) = s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$

$P_1 = -1 \qquad P_2 = 1$

- Consideriamo la funzione razionale

$$F(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

$$\frac{1}{s-e} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{et}\, 1(t)$$

- Scomponendo in fratti semplici

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-1}$$

- Per la linearità

$e = -1 \qquad e = 1$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\right\} = K_1\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + K_2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-1}\right\} = K_1\, e^{-t}\, 1(t) + K_2\, e^{t}\, 1(t)$$

Solo dopo (per comodità) calcoliamo K_1 e K_2:

- Per calcolare le costanti K_1 e K_2

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-1} \\ &= \frac{K_1(s-1) + K_2(s+1)}{s^2-1} = \frac{(K_1+K_2)s + K_2 - K_1}{s^2-1} \end{aligned}$$

- Eguagliando i numeratori

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 0 \\ K_2 - K_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -K_2 \\ K_2 + K_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 = -1/2 \\ K_2 = 1/2 \end{cases}$$

- Complessivamente

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\right\} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t}\,1(t) + \frac{1}{2}e^{t}\,1(t) \end{aligned}$$