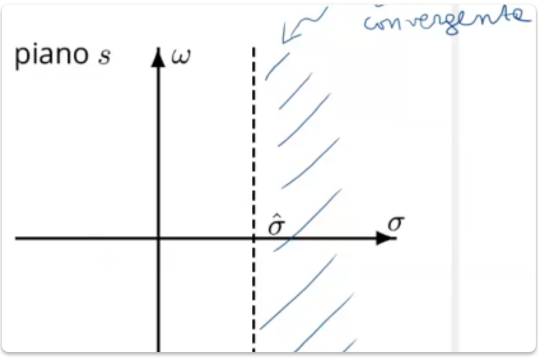
NOTA SULLA REGIONE DI CONVERGENZA

Viene indicata con σ che viene detta **ascissa di convergenza**



PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA

1) LINEARITA'

(già di per sé l'integrale è un operatore lineare)

Linearità: per ogni coppia di segnali causali $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e ogni coppia di costanti α_1 e α_2

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

+

Dimostrazione: dalla definizione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]\, e^{-st} dt = \\
&= \alpha_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \alpha_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\
&= \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)
\end{aligned}$$

2) TRASLAZIONE IN FREQUENZA

(compare un esponenziale nel tempo)

traslazione in frequenza: per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)$$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

Dimostrazione: dalla definizione

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$ $\quad s-\lambda$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} &= \int_0^\infty e^{\lambda t} f(t) e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty f(t)\, e^{-(s-\lambda)t} dt \\
&= \mathcal{L}\{f(t)\}\Big|_{s=s-\lambda} \\
&= F(s-\lambda)
\end{aligned}$$

$= \int_0^\infty f(t)\, e^{\lambda t - st} dt$

- moltiplicare per un esponenziale nel tempo causa una traslazione in frequenza

3) DERIVATA IN FREQUENZA

Prendendo t come costante quando facciamo la derivata rispetto a s e poi portando fuori dall'integrale:

- **Derivata in frequenza**:

$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Dimostrazione: dalla definizione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\, f(t)\} &= \int_0^\infty t f(t)\, e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)\, t e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{d}{ds} e^{-st}\right) dt \\
&= -\frac{d}{ds} \underbrace{\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt}_{F(s)} = -\frac{d}{ds}F(s)
\end{aligned}$$

$\frac{d}{ds} e^{-st} = -t\, e^{-st}$

guardo t come una costante

- moltiplicare per t nel tempo equivale a derivare nel dominio di Laplace

4) DERIVATA NEL TEMPO

- Proprietà duale (equivale a moltiplicare per s in frequenza, tenendo conto della condizione iniziale $f(0)$)
- Sfruttiamo alcune proprietà come la derivata del prodotto

La dimostrazione si esegue calcolando $\int_0^\infty (f(t)e^{-st})\, dt$ in due modi, e poi uguagliandoli

- il primo modo si fa sfruttando la derivata del prodotto
- il secondo modo si fa l'integrale della derivata

- **Derivata nel tempo**:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Dimostrazione: Notiamo preliminarmente che

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right) dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty = -f(0)$$

Notiamo anche che

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right) dt &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)\right) e^{-st} dt + \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right) dt \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} - sF(s)
\end{aligned}$$

$\int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}\, dt = -s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$

$\int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt \qquad g(t) = \frac{d}{dt}f(t)$

Eguagliando i due risultati

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} - sF(s) = -f(0)$$

Infatti:

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)dt = \boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} - sF(s)}$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(0)\overset{1}{e^{-s\cdot 0}} = -f(0) = \boxed{-f(0)}$$

0 nella regione di convergenza di $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} - sF(s)} = \boxed{-f(0)} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

- Nota: s funge da *operatore di derivazione*
  - Ci permette questa proprietà di passare dalle equazioni differenziali a equazioni algebriche nel dominio di Laplace

5) INTEGRAZIONE NEL TEMPO

Dalla 4, si può interpretare s come operatore di derivazione. Quindi per l'integrazione *prendiamo $1/s$* come operatore.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\,dt\right\} = sF(s) - f(0)$$
$+$

Integrazione nel tempo:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

- Dati due segnali causali $f(t)$ e $g(t)$ definiamo la loro convoluzione

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

6) CONVOLUZIONE

- vedi definizione di convoluzione in proprietà 5

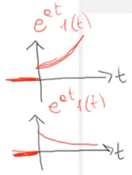
Convoluzione nel tempo:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)\,G(s)$$

- convoluzione nel tempo $\longleftrightarrow$ prodotto in Laplace
  - utile per la risposta forzata

[...] TRASFORMATE FONDAMENTALI

ESPONENZIALE CAUSALE



- Considero l'esponenziale causale $a \in \mathbb{R}$

$$f(t) = e^{at}1(t)$$

- Applicando la proprietà 2

$$\mathcal{L}\{e^{at}\,1(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\}\Big|_{s=s-a} = \frac{1}{s}\Big|_{s=s-a} = \frac{1}{s-a}$$

$f(t) = e^{at}\, g(t)$

$g(t) = 1(t)$

Proprietà 2 :

$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} g(t)\} = G(s)\big|_{s=s-\lambda} = G(s-\lambda)$

$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}$

> **Nota:** moltiplicare per il gradino $1(t)$ rende il segnale causale perché $f(t) = 0$ per $t < 0$

SENO

Sfruttando le formule di Eulero e le proprietà appena descritte:

$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{at}1(t)$	$\frac{1}{s-a}$

Proprietà 1 $\quad \mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$

Proprietà 2 $\quad \mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)$

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)\,1(t) \underset{\text{formula di Eulero}}{=} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\,1(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\,1(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}}{2j}\,1(t) - \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j}\,1(t)\right\}$$

proprietà 1

$$= \frac{1}{2j}\,\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}\,1(t)\} - \frac{1}{2j}\,\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0 t}\,1(t)\}$$

proprietà 2 con $\lambda = j\omega_0$

$$= \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s}\Big|_{s=s-j\omega_0} - \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s}\Big|_{s=s+j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s+j\omega_0}$$

Riscrivendo:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\cdot 1(t)\} = \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2j}\,\frac{\cancel{s}+j\omega_0 - \cancel{s}+j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{1}{\cancel{2j}}\,\frac{\cancel{2j}\,\omega_0}{s^2-(j\omega_0)^2}$$

$$= \frac{\omega_0}{s^2 - j^2\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

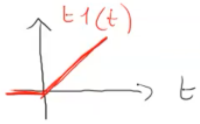
POLINOMI

RAMPA UNITARIA

Rampa unitaria: $f(t) = t \cdot 1(t)$

- moltiplicazione per $t \longrightarrow$ proprietà 3

$f(t) = t \cdot 1(t)$ rampa unitaria



$f(t) = t \; g(t)$ $\qquad G(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$

$g(t) = 1(t)$

Proprietà 3 $\quad \mathcal{L}\{t \; g(t)\} = -\frac{d}{ds} G(s)$

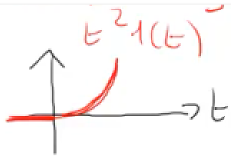
$$\mathcal{L}\{t \; 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = -\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

RAMPA PARABOLICA

Rampa parabolica: $f(t) = t^2 \cdot 1(t)$

- Posso riscrivere evidenziando la moltiplicazione per t

$f(t) = t^2 \, 1(t)$ rampa parabolica



$= t \cdot t \, 1(t)$ $\qquad$ con $g(t) = t \, 1(t)$

$= t \; g(t)$

Da cui:

$$\mathcal{L}\{t^2 \, 1(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t \, 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t \, 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2} = -\left(-\frac{2}{s^3}\right) = \frac{2}{s^3}$$

RAMPA DEL K-ESIMO ORDINE

Vale, per induzione:

$$t^k \cdot 1(t) \longleftrightarrow \frac{k!}{s^{k+1}}$$

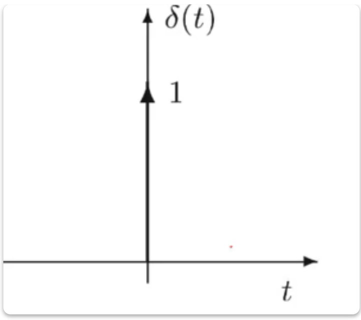
- partendo da $t^{k+1} = t \cdot \underbrace{t^k \cdot 1(t)}_{g(t)}$

IMPULSO DI DIRAC

- Area rettangolo unitaria avente base infinitesima (astrazione)

- Matematicamente: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$ (tutta l'energia concentrata in 0)
  - Eseguendo la trasformata:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = e^{-st}|_{t=0} = 1$$



- in maniera sempre astratta [funzioni generalizzate], può essere interpretato come la derivata dei gradini $1(t)$ (incremento infinito)

Abbiamo quindi 3 modi di vedere l'impulso di Dirac

TABELLA TRASFORMATE

SEGNALE	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Gradino unitario	$1(t)$	$1/s$
Rampa unitaria	$t \cdot 1(t)$	$1/s^2$
Rampa parabolica unitaria	$(t^2/2)1(t)$	$1/s^3$
Esponenziale	$e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)$
Sinusoide	$\sin(\omega_0 t)\ 1(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$
Cosinusoide	$\cos(\omega_0 t)\ 1(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$
Esponenziale$\times$monomio	$(t^\ell/\ell!)\ e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)^{\ell+1}$

Tutte le funzioni elementari hanno come trasformate delle **funzioni razionali**