

NOTAZIONE VATTORIALE E MATRICI A,B,C

Il modello corso di laurea magistrale che abbiamo visto lo possiamo scrivere in forma vettoriale in questo modo:

- Consideriamo il vettore di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Le equazioni di transizione dello stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (1-\alpha)x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_1(t) + (1-\beta)x_2(t) \end{cases}$$

possono essere scritte in forma vettoriale

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t))$$

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$

- L'equazione di uscita

$$y(t) = \beta x_2(t)$$

può essere scritta in forma vettoriale

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = h(x(t))$$

$$y(t) = C x(t)$$

- Dove sono state individuate le matrici A e B, C sfruttando implicitamente il prodotto matrice per vettore (cfr. argomenti successivi)

NOTAZIONE GENERALE (TD)

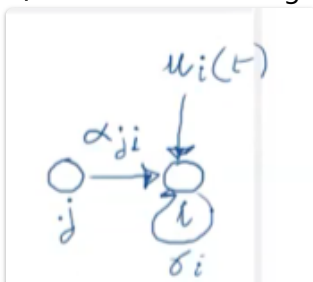
Un modello compartimentale TD si può descrivere in questo modo:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + f_i^{in}(t) - f_i^{out}(t)$$

Dove:

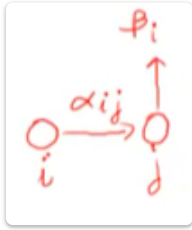
$$f_i^{in}(t) = u_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ji} x_j(t) + \gamma_i x_i(t)$$

- a_{ji} rappresenta la percentuale di risorse $x_j(t)$ che passano dal compartimento j a i .
- γ_i rappresenta la percentuale di risorse generate all'interno del compartimento i (come erano gli interessi nell'esempio della banca)
- u_i naturalmente sono gli ingressi esterni che vanno in i



$$f_i^{out}(t) = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_i(t) + \beta_i x_i(t)$$

- a_{ij} percentuale di risorse che vanno verso il compartimento j
- $\beta_i, x_i(t)$ sono le risorse che escono definitivamente dal sistema (vanno verso l'esterno)



Mettendo tutto insieme si giunge alla **equazione di stato**:

- Equazione di stato per il compartimento i :

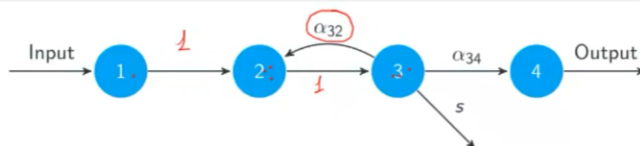
$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + f_i^{in}(t) - f_i^{out}(t) \\ &= x_i(t) + u_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji} x_j(t) + \gamma_i x_i(t) - \left(\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_i(t) + \beta_i x_i(t) \right) \\ &= \left(1 + \gamma_i - \beta_i - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \right) x_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji} x_j(t) + u_i(t) \end{aligned}$$

- Esistono ovviamente anche alcuni vincoli. Ad esempio: la somma delle risorse che escono dovrà essere inferiore o uguale alle risorse presenti in un compartimento

ESEMPIO: CATENA DI PRODUZIONE (TD)

Supponiamo che una catena di produzione abbia 4 stati collegati tra loro. Si può scrivere l'equazione di bilancio per ciascuno stato.

Guardando l'equazione per lo stato 2 (più ingressi):



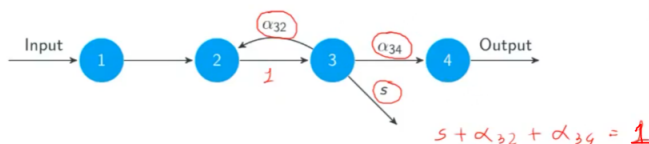
- Al secondo stadio abbiamo

$$f_2^{in}(t) = x_1(t) + \alpha_{32} x_3(t) \quad f_2^{out}(t) = x_2(t)$$

- Quindi

$$x_2(t+1) = x_2(t) + f_2^{in}(t) - f_2^{out}(t) = x_1(t) + \alpha_{32} x_3(t) + x_2(t) - x_2(t)$$

Per lo stadio 3 invece (più uscite):



- Al terzo stadio abbiamo

$$f_3^{in}(t) = x_2(t) \quad f_3^{out}(t) = \alpha_{32} x_3(t) + \alpha_{34} x_3(t) + s x_3(t)$$

$$\text{con } s = 1 - \alpha_{32} - \alpha_{34}$$

- Quindi

$$x_3(t+1) = x_3(t) + f_3^{in}(t) - f_3^{out}(t) = x_2(t)$$

Si possono riscrivere tutte le equazioni di stato anche in forma matriciale, ottenendo:

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_1(t+1) = 0 \cdot u_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + \alpha_{32} x_3(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \\ x_4(t+1) = x_4(t) + \alpha_{34} x_3(t) - u_2(t) \end{cases} \\ \\ x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 1 \end{bmatrix}}_{4 \times 4} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{4 \times 2} u(t) \\ \\ x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- In x_1 non compare nessuno stato, quindi la prima riga è composta da tutti 0. Compare invece l'ingresso $u_1(t)$ e vale 1, quindi questo lo scriviamo nella matrice B degli ingressi $u(t)$
 - si ripete questo ragionamento per ciascuna equazione di stato
- Abbiamo riscritto il problema quindi nella forma generale:

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$

- dove A e B rappresentano in modo univoco il mio sistema
 - Lo studio di queste matrici sarà l'elemento centrale per lo studio del sistema dinamico

NOTAZIONE GENERALE (TC)

Un modello compartimentale TD si può descrivere in questo modo:

$$\dot{x}_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$

- abbiamo quindi delle variazioni istantanee (tassi) in ingresso e in uscita
- È analogo al caso TC, dato che:

$$\underbrace{x_i(t+1) - x_i(t)}_{\dot{x}_i} = f_i^{\text{in}} - f_i^{\text{out}}$$

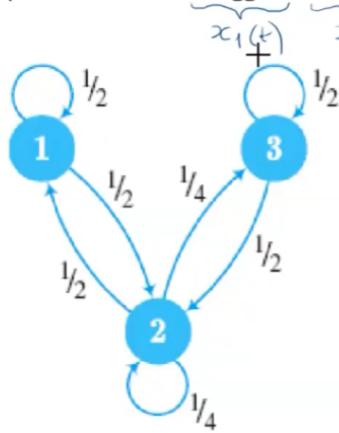
MODELLO DI TRANSIZIONE DI STATO

Abbiamo ancora un modello con n stati. Tra uno stato e l'altro non vengono più trasferite risorse, bensì, *attributi (o qualità)*, solitamente di tipo **probabilistico**

- Indicano la *probabilità di trovarsi in un certo stato* $x_i(t)$

ESEMPIO: PREVISIONI DEL TEMPO

- Un modello semplice che descrive l'evoluzione delle condizioni metereologiche prevede tre stati: soleggiato, nuvoloso e piovoso.



- Gli stati evolvono secondo la seguente regola:
 - se il giorno è soleggiato, allora il giorno successivo sarà soleggiato o nuvoloso con la stessa probabilità del 50%
 - se il giorno è nuvoloso, al 50% il giorno successivo sarà soleggiato, al 25% nuvoloso e al 25% piovoso
 - se il giorno è piovoso, il giorno successivo sarà nuvoloso o piovoso con la stessa probabilità del 50%

- si descrive *come si passa da uno stato all'altro*, tenendo conto della probabilità di passaggio da uno stato all'altro
 - si studia quindi la probabilità di trovarsi in uno stato, tenendo conto della probabilità di transizione tra gli stati

Sfruttando la teoria della probabilità condizionata, si può calcolare ad esempio:

La probabilità di trovarsi nello stato piovoso al tempo $t + 1$ è la seguente:

$$\begin{aligned}
 &(\text{probabilità giorno } t + 1 \text{ piovoso}) = \\
 &(\text{probabilità di transizione da piovoso a piovoso}) \times (\text{probabilità giorno } t \text{ piovoso}) \\
 &+ (\text{probabilità di transizione da nuvoloso a piovoso}) \times (\text{probabilità giorno } t \text{ nuvoloso}) \\
 &x_3(t + 1) = \frac{1}{2} x_3(t) + \frac{1}{4} x_2(t)
 \end{aligned}$$