MATRICE DI RAGGIUNGIBILITA' (finita)

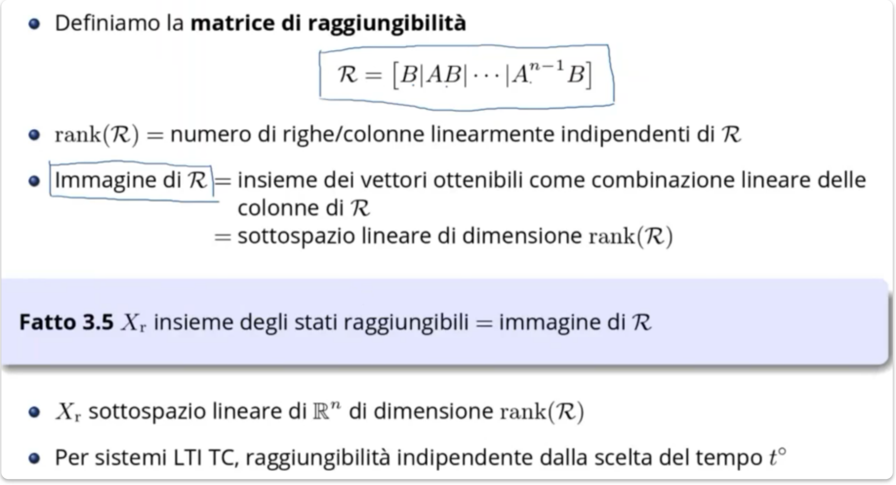
Mettiamo insieme tutti i vettori si costruisce come detto la *matrice di raggiungibilità*, così definita:

$$\mathcal{R} = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B]$$

Immagine di una matrice: lo span delle sue colonne, ovvero i vettori generati combinando linearmente le colonne della matrice

- Essa coincide proprio con $\mathcal{R}$ insieme degli spazi raggiungibili
  - Per capire gli stati raggiungibili quindi basta costruire $\mathcal{R}$ e trovare l'immagine
  In altre parole:

$$X_r = \text{immagine di } \mathcal{R}$$



- Definiamo la **matrice di raggiungibilità**

$$\boxed{\mathcal{R} = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B]}$$

- $\text{rank}(\mathcal{R})$ = numero di righe/colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$
- $\boxed{\text{Immagine di } \mathcal{R}}$ = insieme dei vettori ottenibili come combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{R}$
  = sottospazio lineare di dimensione $\text{rank}(\mathcal{R})$

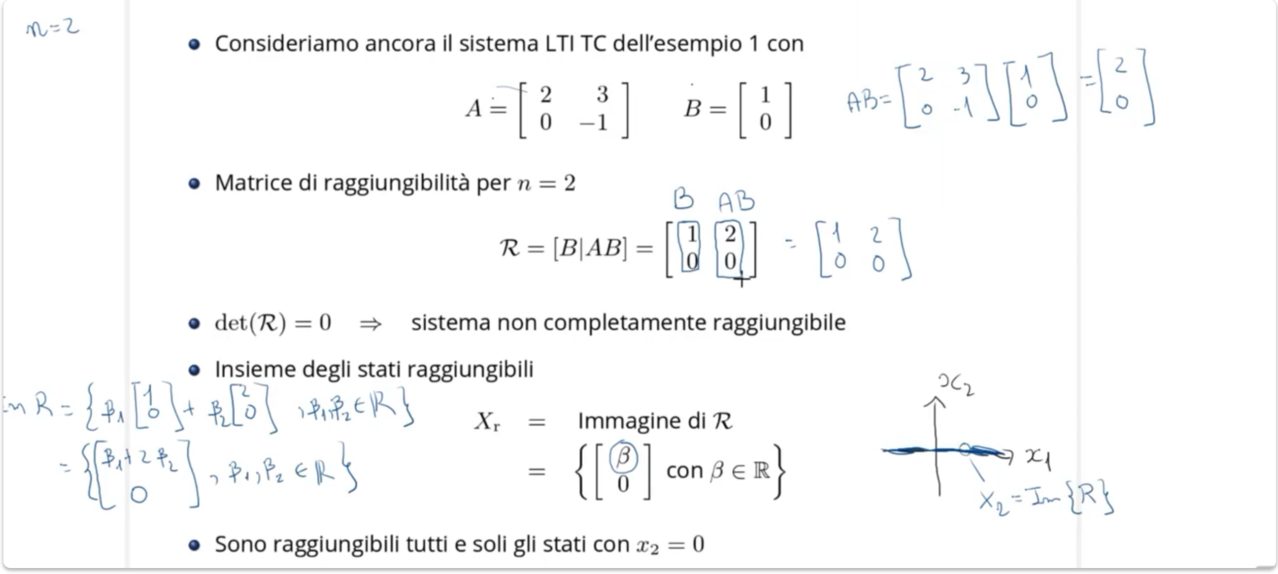
Fatto 3.5 X_r insieme degli stati raggiungibili = immagine di $\mathcal{R}$

- X_r sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $\text{rank}(\mathcal{R})$
- Per sistemi LTI TC, raggiungibilità indipendente dalla scelta del tempo t°

Nota: il tempo t° non compare, il che significa che dal momento che uno stato è raggiungibile, si può giungere a esso in un qualsiasi tempo (corto, lungo) a seconda dell'ingresso per il controllo

ESEMPIO: sistema non completamente raggiungibile/controllabile

- Abbiamo un sistema di ordine $n = 2$ quindi mi fermo dopo due termini
- Comodo perché scrivo la matrice senza passare dalle equazioni di stato (come avevamo già fatto con questo sistema)



$n=2$

- Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 1 con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice di raggiungibilità per $n = 2$

$$\mathcal{R} = [B|AB] = \begin{bmatrix} \overset{B}{\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}} & \overset{AB}{\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\det(\mathcal{R}) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ sistema non completamente raggiungibile
- Insieme degli stati raggiungibili

$$\text{Im } R = \left\{ \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{aligned} X_r &= \text{Immagine di } \mathcal{R} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

- Sono raggiungibili tutti e soli gli stati con $x_2 = 0$

Abbiamo semplicemente:

- Costruito la matrice di raggiungibilità
- Calcolato e osservato la relativa immagine
- Concluso sugli stati raggiungibili

COMPLETA RAGGIUNGIBILITA'

Per sistemi SISO abbiamo n vettore di dimensione n, quindi viene una matrice di raggiungibilità quadrata e di dimensione $n \times n$

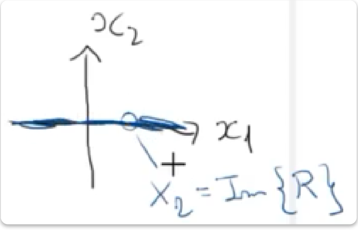
- Tutti gli stati devono essere raggiungibili per avere un sistema completamente raggiungibile, quindi quando il rango della matrice di raggiungibilità vale n

Sistema completamente raggiungibile $\Leftrightarrow$ $X_r = \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(x)$
$\Leftrightarrow$ $\text{rank}(\mathcal{R}) = n$

- Cioè quando ha rango massimo
  - Combinando opportunamente le colonne posso raggiungere tutti gli stati
  - Il rango lo vedo guardando le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$
    - L'insieme degli stati raggiungibili è un sottospazio lineare dello spazio di stato che ha una dimensione pari al rango della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$
    - Se il rango ha dimensione n allora è completamente raggiungibile perché i due spazi di riferimento sono equi dimensionali
    - Altrimenti non è completamente raggiungibile
- Nell'esempio precedente avevamo:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} \$\$, cheharango\$1\$, quindinonècompletamenteraggiungibile$$

- Il sottospazio in particolare avendo dimensione $\text{rank}(\mathcal{R}) = 1$ è una retta (se avesse avuto dimensione 2 sarebbe stato un piano e così via)



Nota: *per sistemi SISO*,

$$\text{rank}(\mathcal{R}) = n \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

- Quindi una volta che si costruisce $\mathcal{R}$ **basta guardare il determinante** per capire la raggiungibilità (invece di studiare l'immagine tramite tutte le definizioni date)

RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA'

Sappiamo che un sistema generico può essere diviso in $\mathcal{S}_c$ e $\mathcal{S}_{\text{nc}}$

- dove possiamo assegnare lo stato come vogliamo solo per $\mathcal{S}_c$ perché è l'unica parte che è influenzata dal controllo
  - $\mathcal{S}_{\text{nc}}$ invece evolve liberamente

Quindi dal punto di vista della raggiungibilità possiamo dire che una parte dello stato può essere gestita dalla raggiungibilità stesse a un'altra no

- Quindi raggiungibilità e controllabilità sono concetti legati tra loro

In particolare vale la relazione

$$\boxed{\text{sistema completamente raggiungibile} \iff \text{sistema completamente controllabile}}$$

- Controllabilità: ci chiediamo come possiamo modificare gli autovalori --> dominio s
- Raggiungibilità: ci chiediamo come possiamo modificare lo stato --> dominio dello spazio di stato (esempio: tempo)

Quindi tipo negli esercizi a volte conviene passare da una piuttosto che l'altra

---

Inoltre, sappiamo che:

$$\varphi(s) = \varphi_{\text{c}}(s)\,\varphi_{\text{nc}}(s)$$

Possiamo dire che:

- $\varphi_{\text{c}}(s)$ è un polinomio che contiene gli autovalori controllabili del sistema. Indichiamo con n_c il numero di questi autovalori
  - Quindi $\varphi_{\text{c}}(s)$ è un polinomio di grado n_c

Allora, *il numero di autovalori controllabili n_c coincide con la dimensione dello spazio degli stati raggiungibili X_r*, ovvero:

$$\text{rank}\{\mathcal{R}\} = \dim\{X_r\} = n_c$$

- quindi guardando il rango della matrice di raggiungibilità si capisce il numero di autovalori controllabili del sistema

Possiamo estendere la precedente relazione:

$$\boxed{\text{completamente raggiungibile} \iff \text{completamente controllabile} \iff \text{rank}\{\mathcal{R}\} = n}$$

- utile negli esercizi parametrici

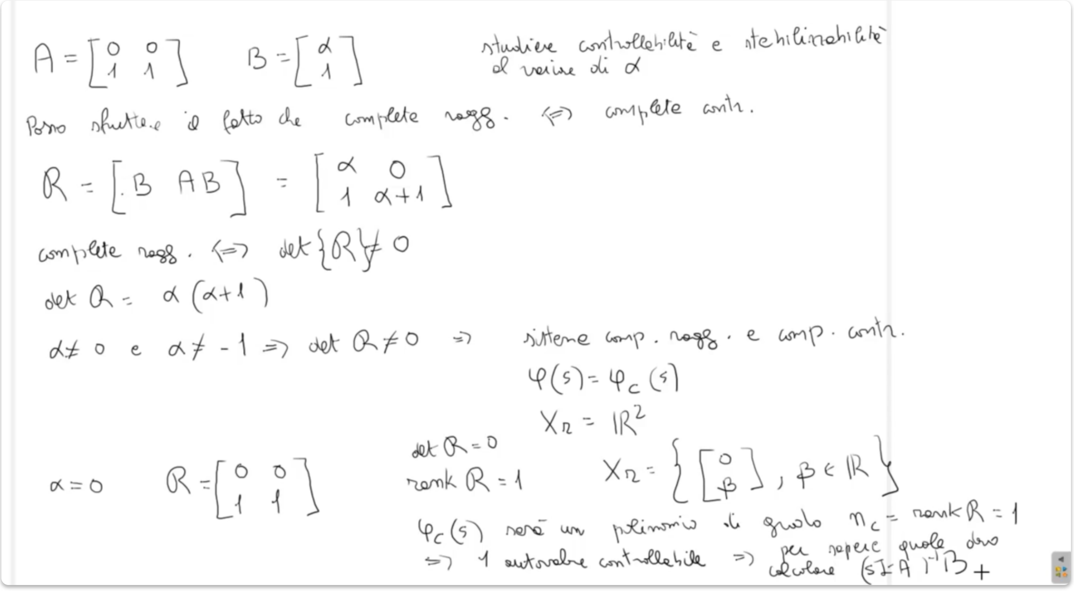
ESEMPIO: studio di controllabilità e stabilizzabilità al variare del parametro

- Dovrei calcolare il polinomio caratteristico e vedere quando ci sono semplificazioni
  - Dato che non è sempre facile vedere le semplificazioni, sfruttiamo le relazioni viste per semplificare:

$$\text{completamente raggiungibile} \iff \text{completamente controllabile} \iff \text{rank}\{\mathcal{R}\} = n$$

- Calcolo allora $\mathcal{R}$
- Guardo il rango [massimo] (ovvero il determinante [diverso da zero] se la matrice è quadrata)
- Trovo i valori per cui $\det \neq 0$, così da trovare i valori di α per la completa raggiungibilità e quindi completa controllabilità
  - Esplicito dimensione di X_r e il fatto che $\varphi(s) = \varphi_{\text{c}}(s)$
- Guardo i comportamenti per valori particolari di α (ovvero quando non è garantita completa raggiungibilità)
  - Esplicito dimensione di X_r (combinando linearmente le colonne)
  - Cerco di capire com'è grado di $\varphi_{\text{c}}(s)$, ovvero $n_c = \text{rank}\{\mathcal{R}\}$
  - E quindi quanti autovalori controllabili abbiamo

- Per capire qual è questo autovalore devo calcolare $(sI - A)^{-1}B$



$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ studiare controllabilità e stabilizzabilità al variare di α

Posso sfruttare il fatto che complete ragg. $\Leftrightarrow$ complete contr.

$R = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$

complete ragg. $\Leftrightarrow$ $\det\{R\} \neq 0$

$\det R = \alpha(\alpha+1)$

$\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1 \Rightarrow \det R \neq 0 \Rightarrow$ sistema comp. ragg. e comp. contr.

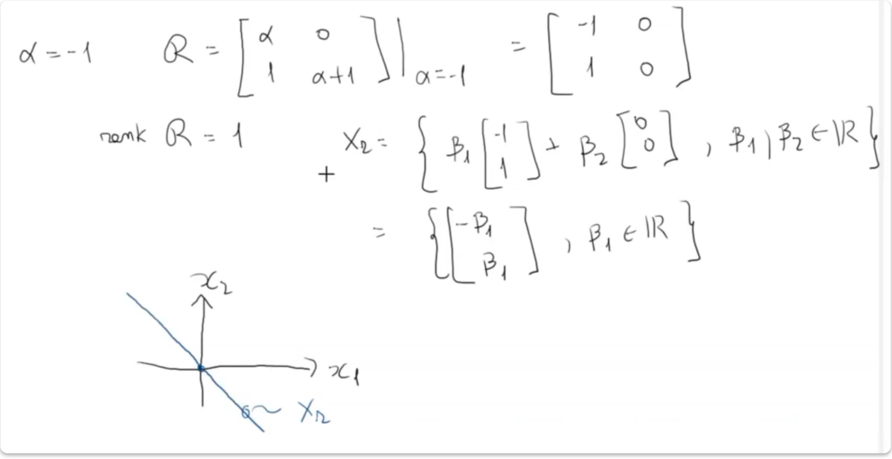
$\varphi(s) = \varphi_c(s)$

$X_R = \mathbb{R}^2$

$\alpha = 0$ $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det R = 0$ rank $R = 1$ $X_R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$\varphi_c(s)$ sarà un polinomio di grado $n_c = \text{rank} R = 1$

$\Rightarrow$ 1 autovalore controllabile $\Rightarrow$ per sapere quale devo calcolare $(sI - A)^{-1}B$ +



$\alpha = -1$ $R = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \Big|_{\alpha=-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

rank $R = 1$

$X_R = \left\{ \beta_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}$ +

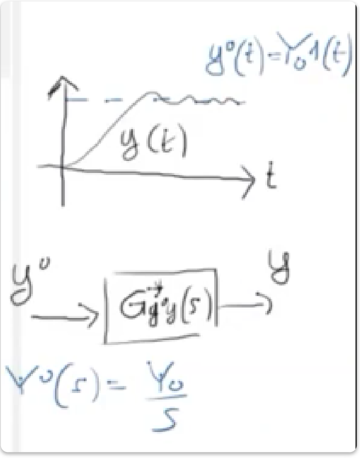
$= \left\{ \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \beta_1 \in \mathbb{R} \right\}$

RISPOSTA AL GRADINO

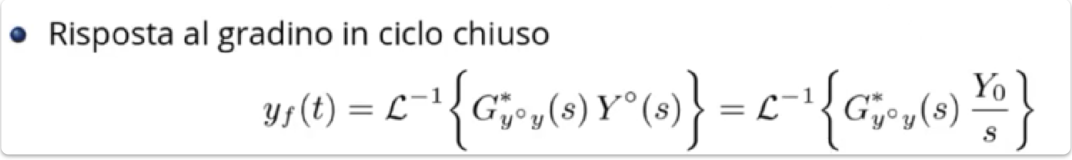
INTRO

Sappiamo che per garantire la *specifica* 3 bisogna mantenere una transitorio rapido e con escursioni/oscillazioni limitate il più possibile

- Queste sono espresse in termini di risposta al gradino in ciclo chiuso, infatti abbiamo questa situazione:



Per ottimizzare al meglio il fenomeno, si deve studiare (dal punto di vista soprattutto algebrico) com'è fatta la risposta al gradino in ciclo chiuso, ovvero:



- Risposta al gradino in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^o y}(s)\, Y^o(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^o y}(s)\, \frac{Y_0}{s}\right\}$$

Dove:

$$G^*_{y^o\,y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)}$$

- $r(s)$ è un polinomio dato dipendente da A, B, C e che quindi non si può modificare
- H è un guadagno garantire la specifica2, quindi anch'esso non va toccato
- *Posso agire solo su $\varphi^{*}(s)$ per garantire alla risposta al gradino un comportamento desiderato nel transitorio
  *- in particolare i relativi zeri che poi diventano i poli di $G_{y^{o}\ y}^{*}(s)$

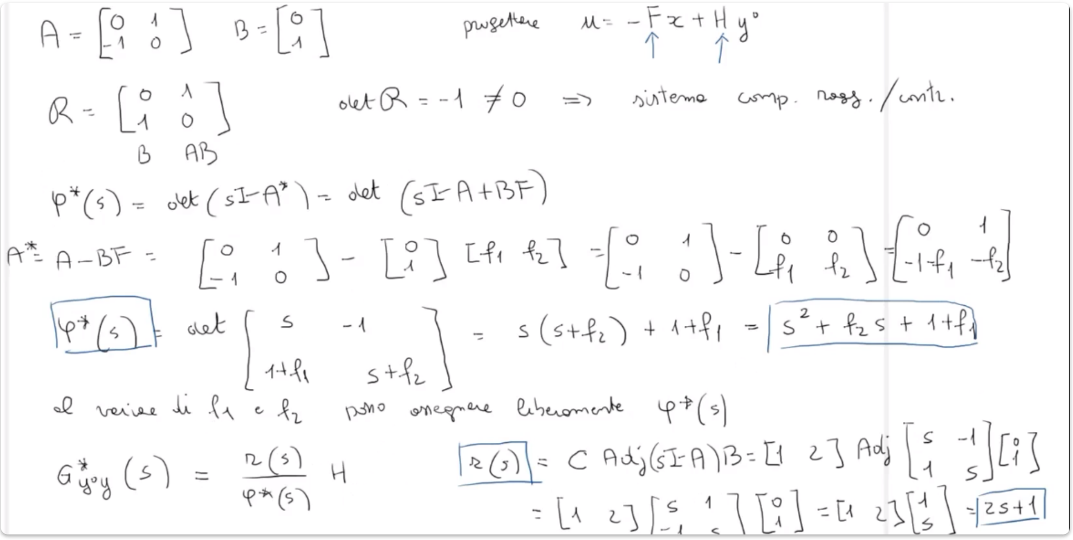
Ricordiamo

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

- Come si nota **dipende da** F, quindi dobbiamo scegliere un adeguato valore del guadagno in feedback per garantisce un transitorio come desideriamo (asintoticamente stabile e rapido)

ESEMPIO: soddisfare la specifica nel transitorio

- Progettiamo l'intero progetto per soddisfare le 3 specifiche ($u = -Fx + Hy^o$)
- Verifichiamo se posso farlo calcolando $\mathcal{R}$ e il relativo determinante per capire se è completamente raggiungibile e controllabile. Se questo è possibile mediante F possiamo assegnare tutti gli autovalori come vogliamo
- Calcolo $\varphi^*(s)$
  > - Quindi devo trovare A^*
  > - Si nota se abbiamo fatto i conti giusti che il polinomio finale dipende dai parametri f_i, quindi possiamo agire sui relativi autovalori
- Calcolo $G^*_{y^o\,y}(s)$ per poi garantirli una forma desiderata
  - In particolare devo calcolare $r(s)$



$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ progettare $u = -\underset{\uparrow}{F}x + \underset{\uparrow}{H}y^o$

$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det \mathcal{R} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ sistema comp. ragg./contr.
$\quad B \quad AB$

$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$

$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-f_1 & -f_2 \end{bmatrix}$

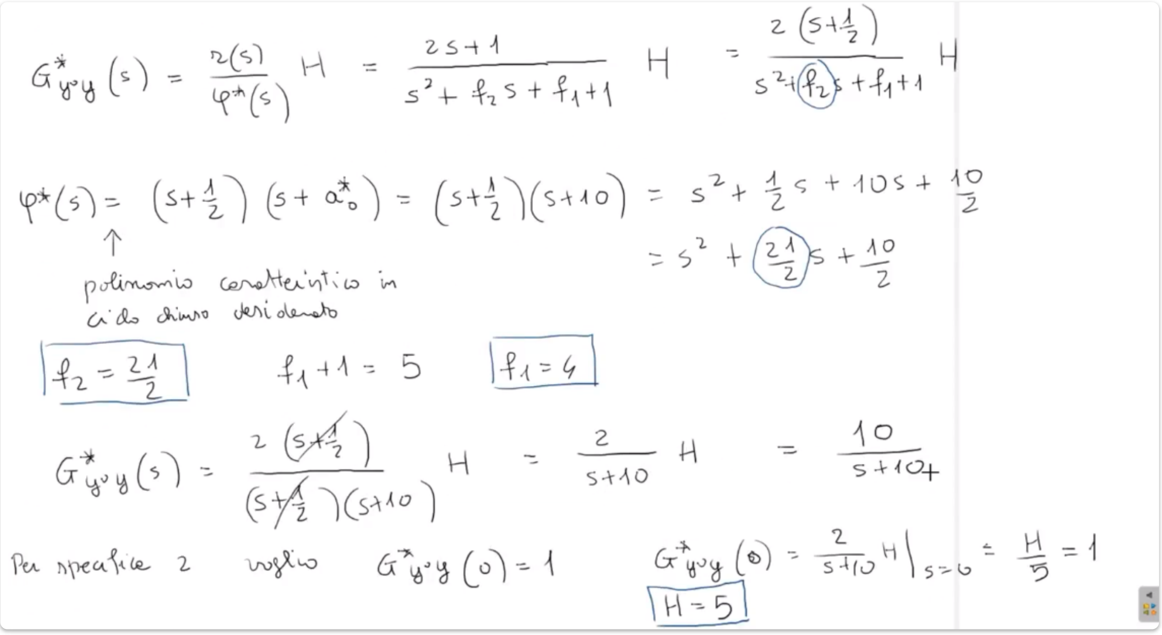
$\boxed{\varphi^*(s)} = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1+f_1 & s+f_2 \end{bmatrix} = s(s+f_2) + 1 + f_1 = \boxed{s^2 + f_2 s + 1 + f_1}$

al variare di f_1 e f_2 posso assegnare liberamente $\varphi^*(s)$

$G^*_{y^o y}(s) = \dfrac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$

$\boxed{r(s)} = C\,\mathrm{Adj}(sI - A)B = [1 \ \ 2]\ \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$= [1 \ \ 2]\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ \ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \boxed{2s+1}$

- Fattorizzo se possibile
- Il numeratore a differenza del denominatore non si può scegliere come si vuole, però se riesco a fattorizzare il denominatore in modo adeguato, magari riesco a fare una semplificazione tra numeratore e denominatore per rendere poi lo studio più leggero
  - Per fare ciò, fattorizzo il denominatore per garantire semplificazioni (tanto gli f_i li posso scegliere)
    - In particolare, dato che il polinomio è personalizzabile, scelgo autonomamente le radici (una di queste mi permette la semplificazione), assegnando un valore che voglio a a_0^* (in questo esempio 10) --> si fa tanti fattori quanto è il grado del denominatore (in questo caso due)
      - Se facciamo il prodotto, si evince quanto valgono f_i
- Riscrivo $G^*_{y^o\,y}(s)$ ora semplificata
- Rimane solo il termine H che lo scelgo appositamente per avere un guadagno in continua unitario (specifica 2: $G^*_{y^o\,y}(0) = 1$)



$$G^*_{y^o y}(s) = \frac{n(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{2s+1}{s^2 + f_2 s + f_1 + 1} H = \frac{2\left(s+\frac{1}{2}\right)}{s^2 + \textcircled{f_2} s + f_1 + 1} H$$

$$\varphi^*(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s + a_0^*\right) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+10\right) = s^2 + \frac{1}{2}s + 10s + \frac{10}{2}$$

$$\uparrow$$

polinomio caratteristico in ciclo chiuso desiderato

$$= s^2 + \textcircled{\frac{21}{2}} s + \frac{10}{2}$$

$$\boxed{f_2 = \frac{21}{2}} \qquad f_1 + 1 = 5 \qquad \boxed{f_1 = 4}$$

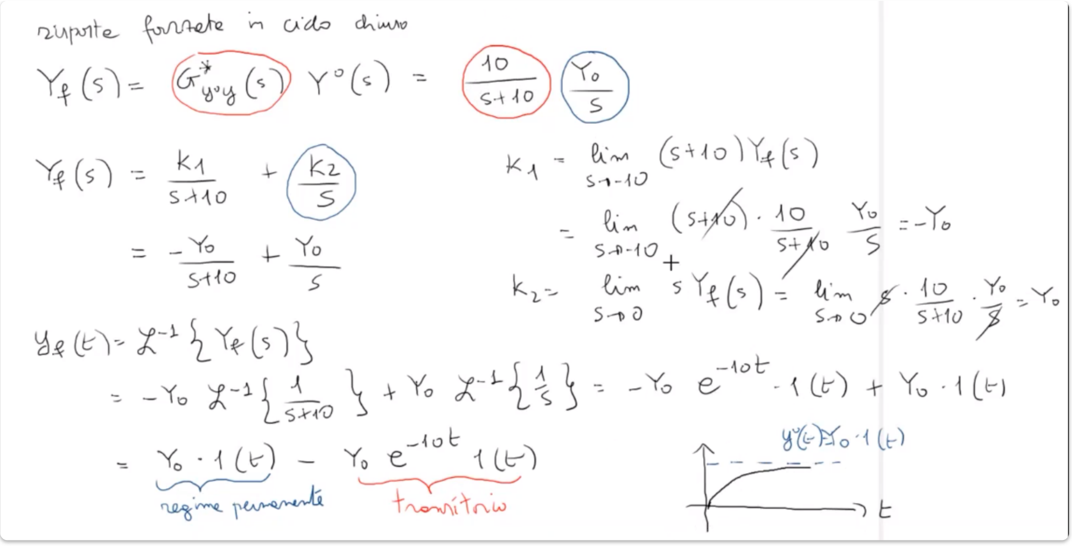
$$G^*_{y^o y}(s) = \frac{2\cancel{\left(s+\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{\left(s+\frac{1}{2}\right)}(s+10)} H = \frac{2}{s+10} H = \frac{10}{s+10}$$

Per specifica 2 voglio $G^*_{y^o y}(0) = 1$ $\qquad G^*_{y^o y}(0) = \left.\frac{2}{s+10} H\right|_{s=0} = \frac{H}{5} = 1$

$$\boxed{H = 5}$$

Abbiamo inoltre anche la risposta forzata in ciclo chiuso

- Facendo la scomposizione in fratti semplici e la antitrasformata per tornare nel dominio del tempo (e capire l'evoluzione nel tempo)
  - Posso poi individuare il regime permanente e il transitorio (osservando a cosa sono associati i poli)
- Grafico (osservando che il regime permanente coincide col gradino e il transitorio ha un andamento come desiderato)



risposta forzata in ciclo chiuso

$$Y_f(s) = \boxed{G^*_{y^\circ y}(s)}\, Y^\circ(s) = \boxed{\frac{10}{s+10}}\,\boxed{\frac{Y_0}{s}}$$

$$Y_f(s) = \frac{k_1}{s+10} + \boxed{\frac{k_2}{s}}$$

$$= -\frac{Y_0}{s+10} + \frac{Y_0}{s}$$

$$k_1 = \lim_{s\to-10} (s+10)\,Y_f(s)$$

$$= \lim_{s\to-10} \cancel{(s+10)} \cdot \frac{10}{\cancel{s+10}}\,\frac{Y_0}{s} = -Y_0$$

$$k_2 = \lim_{s\to 0} s\,Y_f(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{10}{s+10} \cdot \frac{Y_0}{\cancel{s}} = Y_0$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\}$$

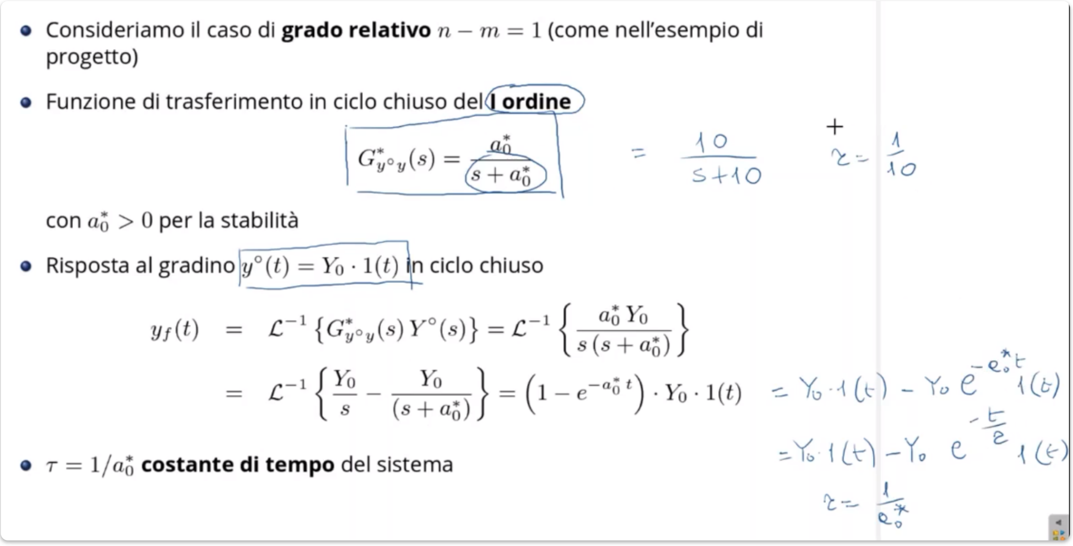
$$= -Y_0\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\} + Y_0\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = -Y_0\,e^{-10t}\cdot 1(t) + Y_0\cdot 1(t)$$

$$= \underbrace{Y_0\cdot 1(t)}_{\text{regime permanente}} - \underbrace{Y_0\,e^{-10t}\,1(t)}_{\text{transitorio}}$$

CASO POSITIVO (come nell'esercizio)

Transitorio esponenziale che evolve secondo una costante di tempo a_0^* relativa al polo di $G^*_{y^\circ y}(s)$ che abbiamo scelto/ottenuto

- In particolare la durata di tempo del transitorio è $\tau = 1/(a_0^*)$



- Consideriamo il caso di **grado relativo** $n - m = 1$ (come nell'esempio di progetto)
- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso del **I ordine**

$$\boxed{G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{a_0^*}{s + a_0^*}} = \frac{10}{s+10} \qquad \tau = \frac{1}{10}$$

con $a_0^* > 0$ per la stabilità

- Risposta al gradino $y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ in ciclo chiuso

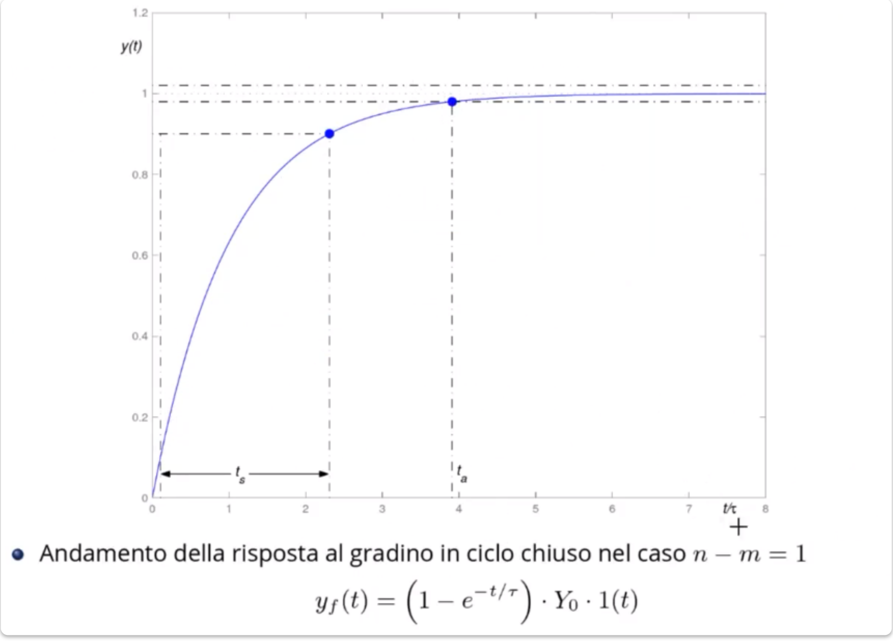
$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G^*_{y^\circ y}(s)\,Y^\circ(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_0^*\,Y_0}{s\,(s+a_0^*)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y_0}{s} - \frac{Y_0}{(s+a_0^*)}\right\} = \left(1 - e^{-a_0^*\,t}\right)\cdot Y_0 \cdot 1(t) \end{aligned}$$

$$= Y_0\cdot 1(t) - Y_0\,e^{-a_0^* t}\,1(t)$$

$$= Y_0\cdot 1(t) - Y_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,1(t)$$

$$\tau = \frac{1}{a_0^*}$$

- $\tau = 1/a_0^*$ **costante di tempo** del sistema

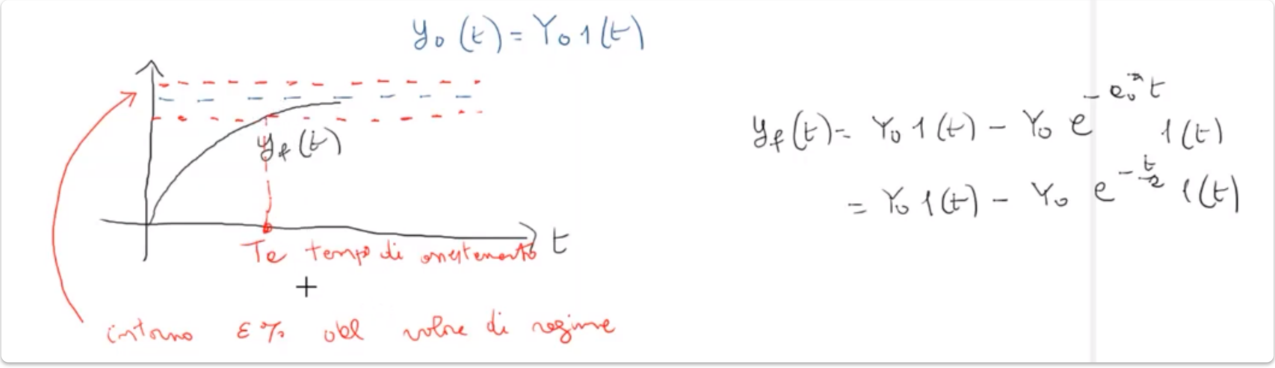


- Andamento della risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 1$

$$y_f(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\cdot Y_0 \cdot 1(t)$$

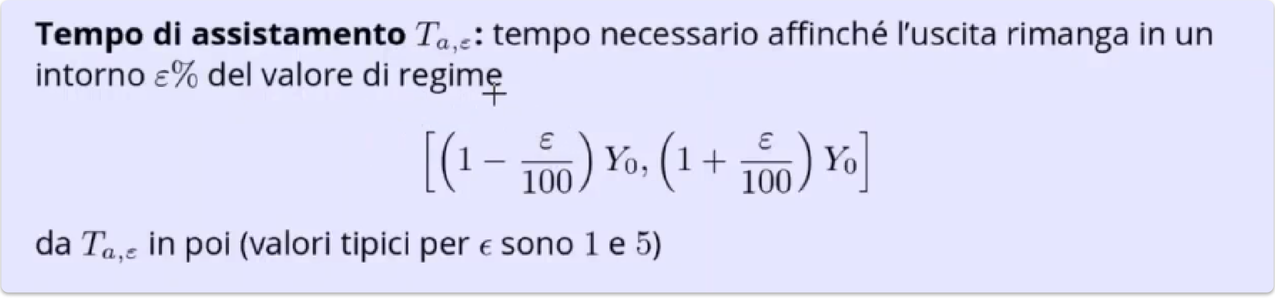
Quindi il polo di $G^*_{y^\circ y}(s)$ denominato a_0^* determina la velocità di convergenza del transitorio a 0

- Quindi tale velocità posso sceglierla a seconda delle esigenze del *tempo di assestamento* (ovvero un intorno del valore di regime - perché l'assestamento è asintotico)
  - L'intorno può essere espresso ad esempio in percentuale



$$y_f(t) = Y_0 1(t) - Y_0 e^{-a_0^* t} 1(t)$$
$$= Y_0 1(t) - Y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} 1(t)$$

Formalmente:

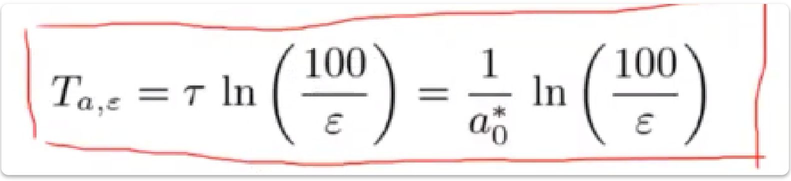


Tempo di assistamento $T_{a,\varepsilon}$: tempo necessario affinché l'uscita rimanga in un intorno $\varepsilon\%$ del valore di regime

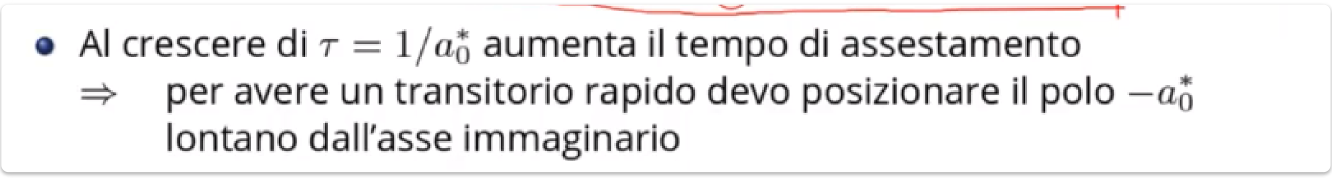
$$\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{100}\right)Y_0, \left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)Y_0\right]$$

da $T_{a,\varepsilon}$ in poi (valori tipici per ϵ sono 1 e 5)

La formula per capire il tempo è il seguente:



$$\boxed{T_{a,\varepsilon} = \tau \ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{a_0^*} \ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right)}$$



- Al crescere di $\tau = 1/a_0^*$ aumenta il tempo di assestamento
  $\Rightarrow$ per avere un transitorio rapido devo posizionare il polo $-a_0^*$ lontano dall'asse immaginario

- tanto più portiamo a sinistra il polo a_0^* tanto più l'esponenziale è rapida e quindi tanto meno è il tempo per arrivare a regime
  - ε è una specifica in percentuale data dal problema
  - viene dato anche il tempo di assestamento
  - Risolvendo l'equazione $T_{a,\varepsilon}$ quindi si ricava facilmente anche a_0^*