TRASFORMATA Z

INTRODUZIONE

Si vuole eseguire un filtraggio di un segnale.
Nel mondo tempo continuo, abbiamo visto che esistono *filtri analogici* che permettono di produrre in uscita appunto un filtraggio del segnale di partenza (uscite diverse a seconda del filtro utilizzato).

- Nel mondo tempo discreto, ci chiediamo se esiste un *filtro alternativo* (ancora in generale analogico) che avviene su una sequenza ottenuta dal campionamento ma che produce **la stessa uscita** (che sarà da ricostruire: passaggio sequenza $\longrightarrow$ segnale analogico)

In generale quindi lo schema di riferimento è il seguente (dove il filtro H è l'equivalente di un sistema LTI tempo discreto che poi approfondiremo):

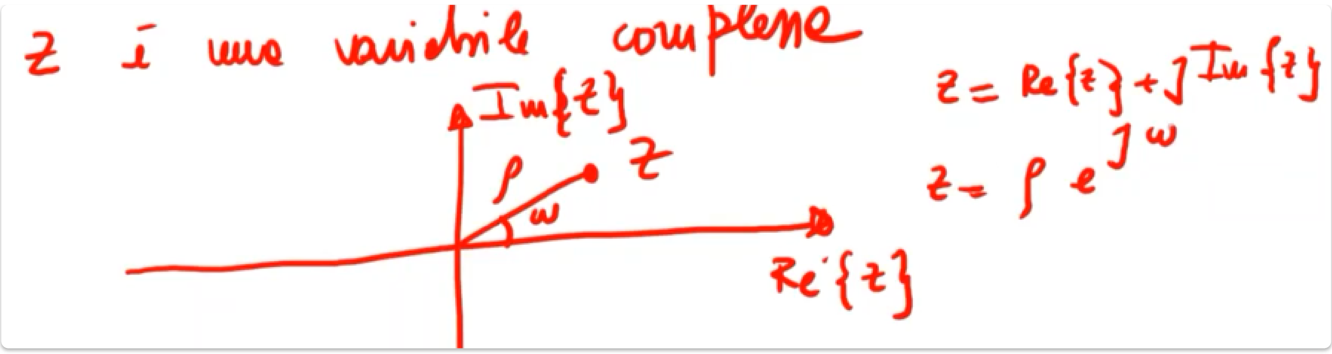
- Abbiamo prodotto $y(t)$ che equivale allo stesso segnale che potevamo filtrare senza passare dalla sequenza, ma come vedremo la procedura appena vista porterà dei vantaggi
- Rimane da capire come costruire H e come si comporta

DEFINIZIONE

Sia $x[n]$ una sequenza.
Si definisce:

$$\boxed{X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot Z^{-n}} \qquad , Z\in\mathbb{C}$$

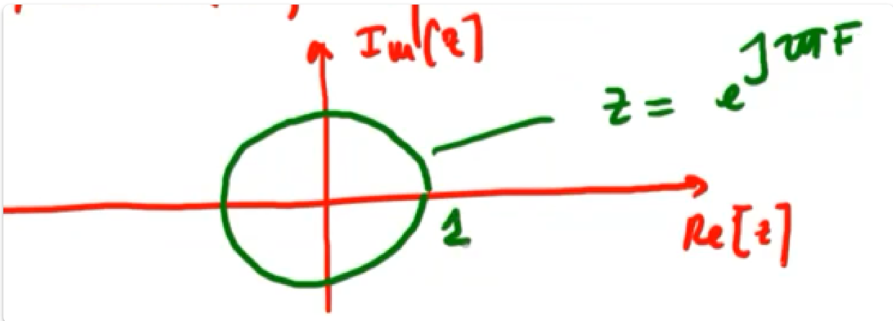
- Z sarà indicata come un *punto nel piano complesso*
- $X(Z)$ è una funzione complessa di variabile complessa Z



COLLEGAMENTO CON LA TRASFORMATA DI FOURIER

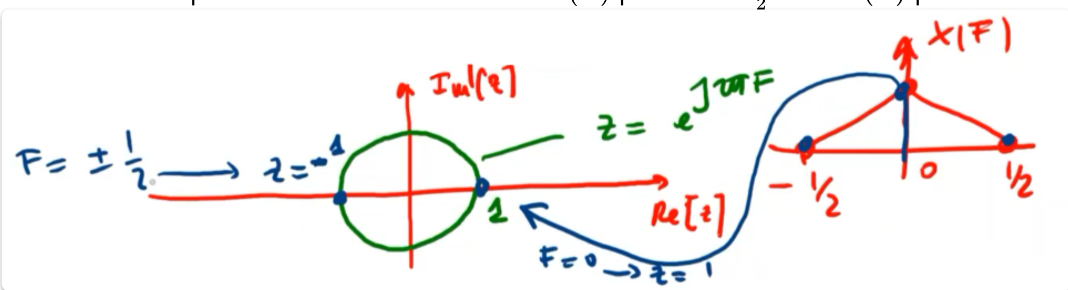
La trasformata Z e quella di Fourier sono collegate tra loro. Infatti posso passare dalla Z a quella di Fourier scegliendo $z = e^{j2\pi F}$, ovvero i punti sulla circonferenza di raggio unitario nel piano complesso. In altre parole:

$$\underbrace{\sum_{=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}}_{X(Z)} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi Fn}}_{X(F)} \qquad \text{, quando } Z = e^{j2\pi F}$$



Dato che tutti i valori della trasformata di Fourier sono i valori della trasformata Z calcolati sul cerchio unitario, posso associare e individuare tutti i punti di uno spettro $X(F)$ sulla circonferenza unitaria.
In particolare, mostriamo alcuni valori *notevoli*:

- Valore in continua: $X(F)$ per $F = 0 \longrightarrow \ Z(F)$ per $Z = 1$
- Gli estremi del periodo: Valore in continua: $X(F)$ per $F = \pm\frac{1}{2} \longrightarrow \ Z(F)$ per $Z = -1$



PRIMO ESEMPIO

Sia $x[n] = 2^n \cdot u[n]$

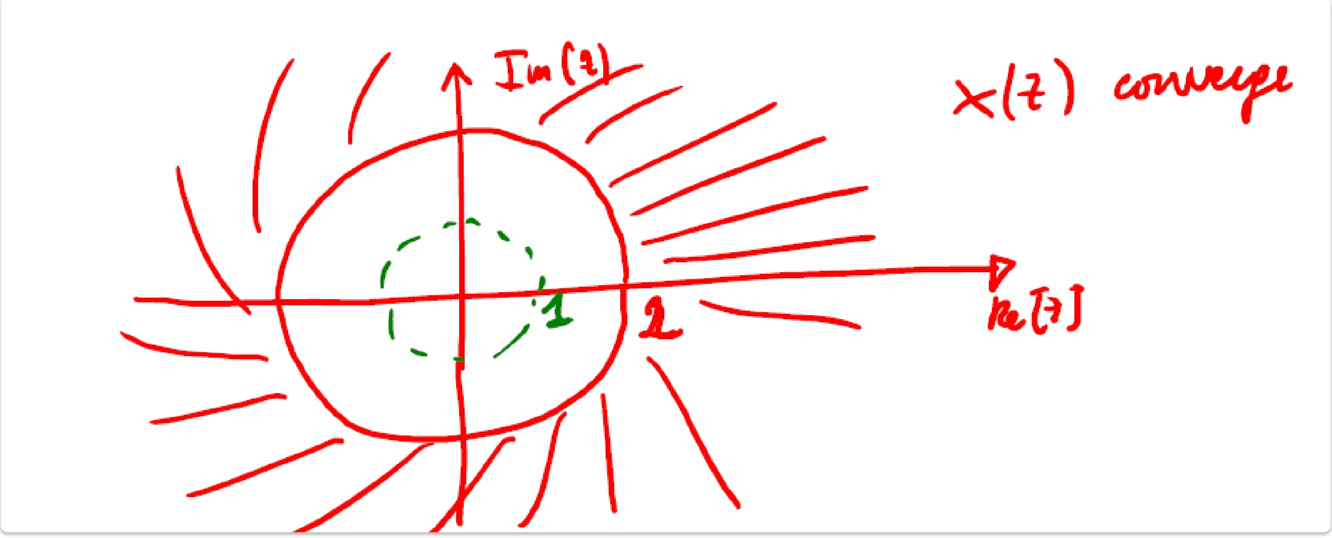
> **Quanto vale $X(Z)$?**

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \cdot u^n \cdot Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n \underbrace{=}_{q=2z^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad se\ |q| < 1$$

Quindi:

$$X(Z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}, \quad se\ |2z^{-1}| > 1 \rightarrow |z| > 2$$

Ciò significa che la trasformata **converge** per tutti i valori che in modulo sono maggiori di 2, ovvero nella regione esterna alla circonferenza di raggio 2 sul piano complesso:



Osservazioni:

- Se applichiamo la definizione di trasformata di Fourier, ci si accorge che $x[n]$ non converge (in nessun modo, nemmeno utilizzando funzioni impulsive come la δ di Dirac):

$$x[n] = 2^n \cdot u[n] \longleftrightarrow X(F) \quad \boxed{\text{non è convergente}}$$

> > *Questo si può notare anche graficamente perché la zona di convergenza della trasformata Z non appartiene alla circonferenza di raggio unitario caratteristica per la correlazione tra trasformata di Fourier e trasformata Z (non abbiamo cioè convergenza sul cerchio unitario)*

- La trasformata Z invece converge per valori di $|Z| > 2$

VANTAGGI

Quello che abbiamo appena visto è il **primo vantaggio di utilizzo della trasformata Z**: converge (in regioni particolari da calcolare) in cui non esiste la trasformata di Fourier
- Viene per questo definita come generalizzazione della trasformata di Fourier
- (è l'analogo della trasformata di Laplace ma in tempo discreto)

Un altro **vantaggio è relativo alla forma di** $X(Z)$, infatti essa è una funzione *razionale*:

$$X(Z) = \frac{z}{z-2}$$

Nota: TUTTE le sequenze che vedremo hanno trasformate Z razionali
- (ciò porta dei vantaggi anche ad esempio sul calcolo dell'inversa)

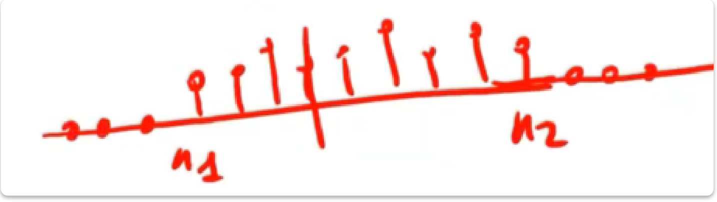
La trasformata Z risulta quindi adatta per la rappresentazione e lo studio dei segnali tempo discreto

ROC DI SEQUENZE FONDAMENTALI

Ci chiediamo cosa possiamo dire circa la convergenza della Trasformata Z a priori, con la sola osservazione cioè della sequenza di partenza. Vediamo alcuni esempi.

1) SEQUENZA FINITA

- Sequenza con numero finito di campioni (ad esempio da n_1 a n_2 e vale 0 altrove)



REGIONE CONVERGENZA

Ovvero dobbiamo capire *dove converge*:

$$X(Z) = \sum_{n_1}^{n_2} x[n] \cdot z^{-n}$$

- Dato che sto sommando un *numero finito* di campioni, essa **converge ovunque**
  - Nota 1: Per $n_1 < 0$ bisogna escludere $Z = \infty$ (un punto) dalla regione di convergenza
  - Nota 2: Per $n_2 > 0$ bisogna escludere $Z = 0$ (un punto) dalla regione di convergenza

2) SEQUENZA MONOLATERA DESTRA

- Sequenza che ha un numero di valori infinito tutti con indici maggiori di un certo n_1. Vale 0 altrove (cioè prima di n_1)
  - $n_1 \in \mathbb{Z}$, quindi può essere positivo o negativo
  Due esempi sono i seguenti:

REGIONE CONVERGENZA

Ha come ROC l'esterno di un cerchio
DIM:

Supponiamo che $X(Z)$ converge per $z = z_1$

- Ovvero converge se:

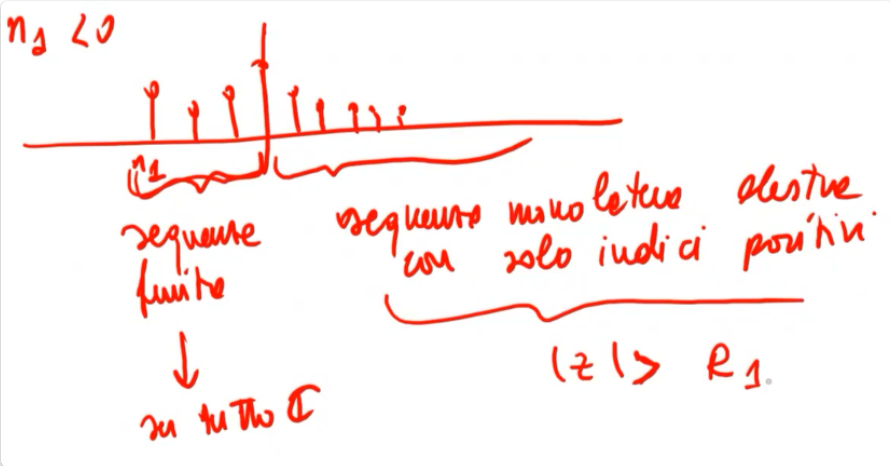
$$|X(Z)| = |\sum_{n_1}^{n_2} x[n] \cdot z^{-n}| \leq \underbrace{\sum_{n_1}^{n_2} |x[n]| \cdot |z^{-n}|}_{\text{converge se: } < \infty}$$

- Quindi la convergenza come si nota *dipende da z*: ci saranno dei punti in cui converge e altri per cui la condizione non è soddisfatta e quindi non converge
  - Dal momento in cui dico che $X(Z)$ converge per $z = z_1$ (supposizione iniziale), allora:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |z_1^{-n}| < \infty \implies |X(z)| < \infty \implies \boxed{\text{converge anche } \forall z : |z| > |z_1|}$$

Vediamo perché:
Caso $n_1 > 0$ (campioni della sequenza con indici positivi):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |z|^{-n} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot \underbrace{|z_1|^{-n}}_{<\infty \implies \text{converge anche in z=0}}$$



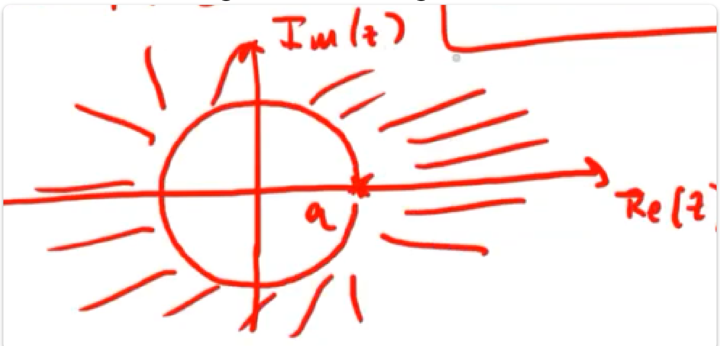
(rivedi dim 12 maggio 55min. circa)

ESEMPIO GENERALIZZATO (MONOLATERA DESTRA)

Sia $x[n] = a^n \cdot u[n]$
Calcoliamo la relativa trasformata Z:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \cdot u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\, z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad se\ |a\, z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

- Ovvero ha una regione di convergenza che è l'esterno di un cerchio.



- **Inoltre** i punti di "confine" (ovvero quelli sulla circonferenza, che non fanno convergere il tutto), sono i punti tali che:

$$z = a$$

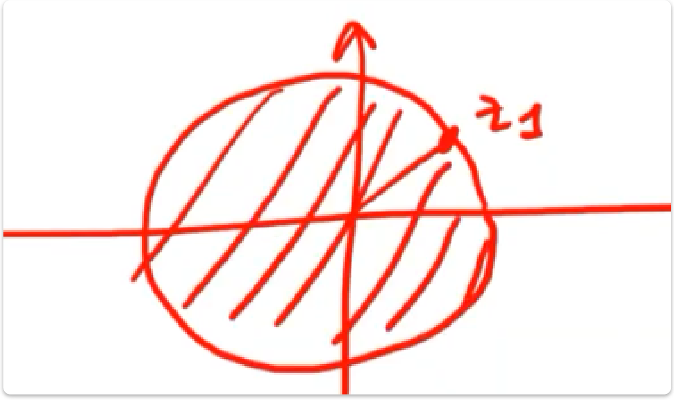
, ovvero i **poli** della funzione $X(Z)$ delimitano la regione di convergenza

3) SEQUENZA MONOLATERA SINISTRA

- Sequenza che ha un certo numero finito di campioni diversi da 0 fino a un certo indice $n_2 \in \mathbb{Z}$. Dopodiché ha tutti i valori che valgono 0. (in totale: ∞ campioni)

Si dimostra volendo che se $X(Z)$ converge per $z = z_1$, allora $\Rightarrow X(Z)$ converge anche $\forall Z$ t.c. $|Z| < |Z_1|$

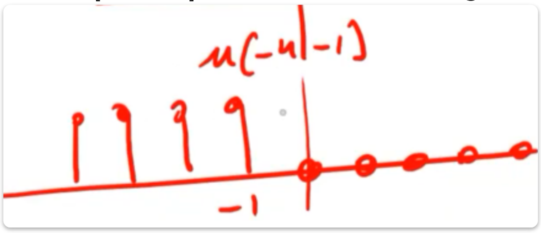
- Ha quindi come ROC l'interno di un cerchio:



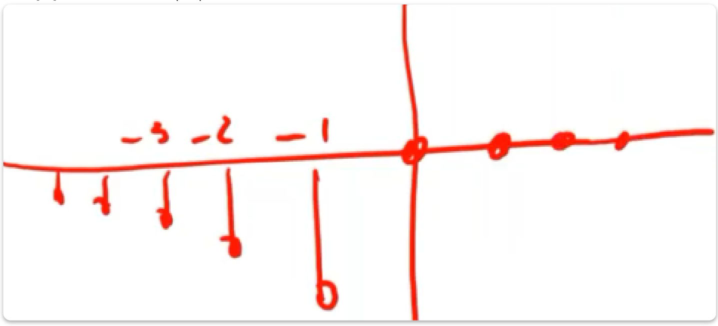
ESEMPIO

Sia $x[n] = -a^n \cdot u[-n-1]$

- Dove $u[-n-1]$ è il ribaltamento del gradino con anticipo di 1:



- Supponendo $|a| > 1$ si ottiene:



Calcoliamo ora la trasformata Z

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] \cdot z^{-n}$$

Da cui:

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$$

Cambiando la variabile:

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} (az^{-1})^{-m} = -\sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m$$

Riconosco una serie geometrica, basta sistemare l'indice di partenza della sommatoria: lo facciamo quindi partire da 0 (cioè aggiungiamo un membro della sommatoria) e poi lo togliamo:

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1}z)^m + 1$$

Da cui, riconoscendo la serie geometrica adesso:

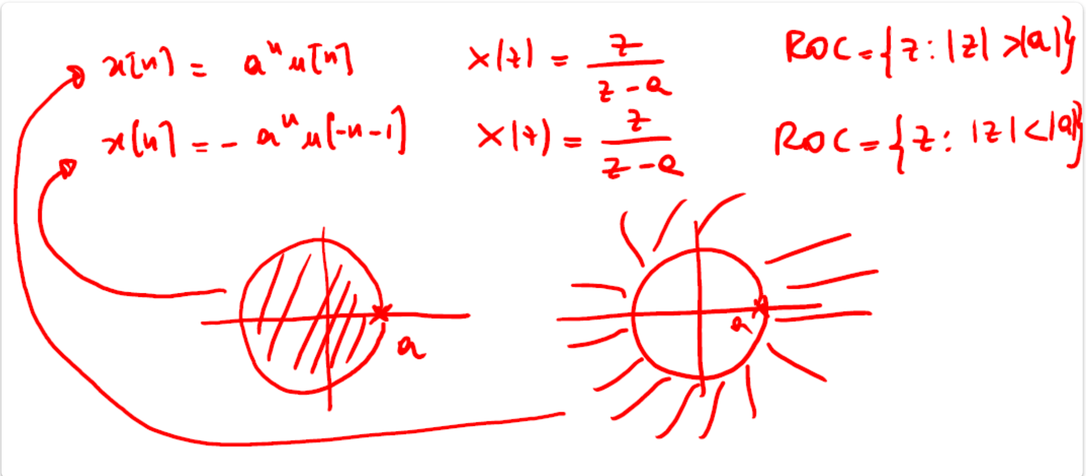
$$X(F) = [\dots] = -\frac{1}{1-a^{-1}z} + 1, \qquad per\ |a^{-1}z| < 1 \Rightarrow \boxed{|z| < |a|}$$

Riscrivendo:

$$X(F) = -\frac{a}{a-z} + 1 \qquad converge\ per\ |z| < a$$

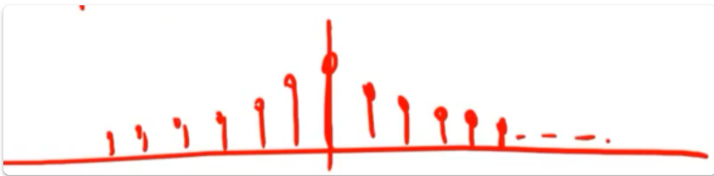
Da cui:

$$X(F) = -\frac{z}{z-a}$$

> *Ovvero, **la stessa trasformata Z** di $a^n u[n]$*
> *Questo capita **perché hanno diversa regione di convergenza ROC***
> *Infatti riassumendo le due trasformate:*
>
> 
>
>
> *Dove le frecce che collegano il grafico alle sequenze indicano le relative antitrasformate: ad esempio, se abbiamo una ROC interna al cerchio, allora la sua antitrasformata è $x[n] = a^n u[n]$. Si replica lo stesso ragionamento (duale) anche per l'altro caso*

4) SEQUENZA BILATERA

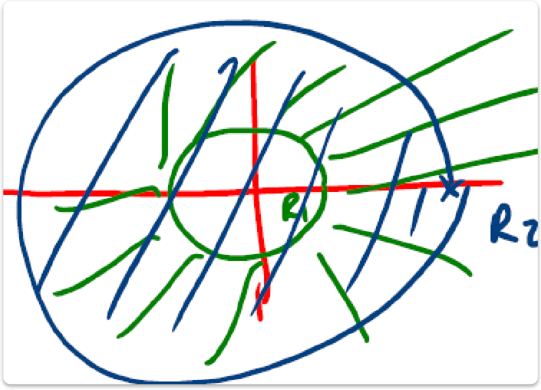
- Sequenza che ha infiniti campioni per indici positivi e infiniti campioni per indici negativi (la sequenza non si annulla mai): è la somma della monolatera sinistra con quella destra.



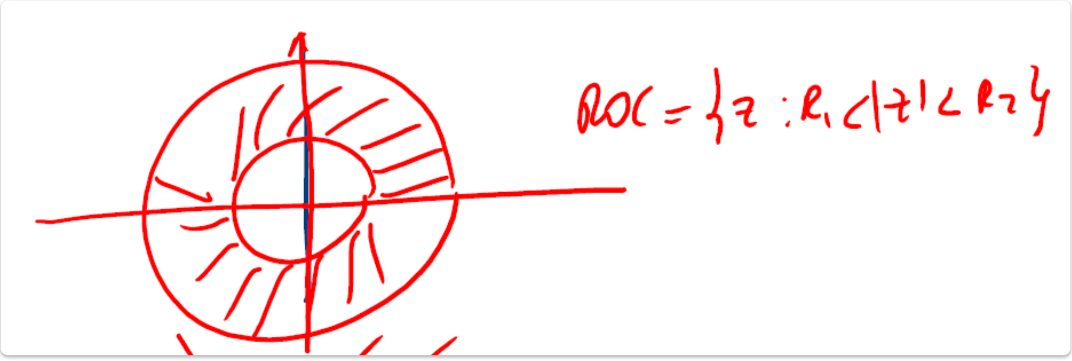
La relativa trasformata è la seguente (dividendo parte sinistra con parte destra):

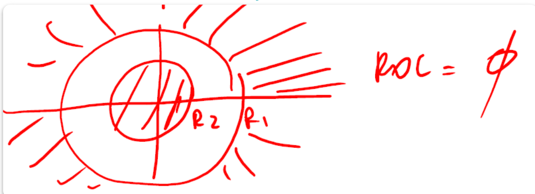
$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n}}_{\text{converge con ROC } z:|z|<R_2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}}_{\text{converge con ROC } z:|z|>R_1}$$

Graficamente la situazione è la seguente:



Facendo quindi l'intersezione si ottiene una regione anulare (con l'ipotesi $r_1 < r_2$):



> *Se avessimo avuto l'ipotesi $r_1 > r_2$*
>
> 
>

ESEMPIO

Sia $x[n] = \rho^{|n|}$
Ha trasformata:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \rho^{-n} z^{-n}}_{\text{monol. sinistra}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} z^{-n}}_{\text{monol. destra}}$$

Sostituendo n con $-n$ si ha:

$$X(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n} z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} z^{-n}$$

Aggiustando il primo addendo per ottenere una serie geometrica:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} z^{n} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} z^{-n}$$

Da cui:

$$X(Z) = \underbrace{\frac{1}{1-\rho z}}_{per\ |\rho z|<1} + \underbrace{\frac{1}{1-\rho z^{-1}}}_{per\ |\rho| z^{-1}|<1}$$

> > *Dobbiamo adesso trovare un intervallo in cui valgono contemporaneamente entrambe le condizioni*
> > *La prima:* $|z| < \frac{1}{\rho}$
> > *La seconda:* $|\rho| < |z|$
> > ***Quindi:*** $|\rho| < |z| < \frac{1}{\rho}$

Graficamente si ottiene la seguente regione anulare **se** $|\rho| < 1$**:**

(Per $|\rho| > 1$ la trasformata non converge in nessun punto [no intersezione])

5) SEQUENZA IMPULSO DISCRETO UNITARIO

Sia $x[n] = \delta[n]$
Allora:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, z^{-n} = \delta[0]\, z^{-0} = 1 \cdot 1 = 1$$

- E' una sequenza finita quindi la ROC coincide con tutto il piano complesso:

$$ROC = \mathbb{C}$$

6) SEQUENZA GRADINO

Sia $x[n] = u[n]$
Allora, ricordando che è un caso particolare di monolatera destra $(a^n \cdot u^n)$, per $a = 1$. Pertanto:

$$X(Z) = \frac{z}{z-1} = \underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}_{\text{forma alternativa}}$$

La ROC essendo una monolatera destra è l'esterno di un cerchio di raggio 1 (perchè ha un polo in $z = 1$) , quindi:

$$ROC = \{z : |z| > 1\}$$

TRASFORMATA INVERSA Z (ANTITRASFORMATA)

La definizione formale è la seguente:

$$X(Z) \longleftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z)\, z^{n-1}\, dz$$

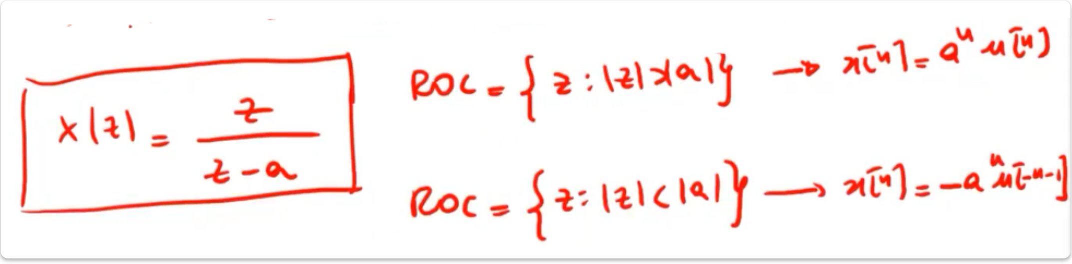
- Nota: **non useremo questa antitrasformata**

Per noi sarà sufficiente capire che:
Sia $X(Z)$ è razionale, chi è $x[n]$ che ha generato la precedente funzione razionale?

- Equivale per noi a trovare la trasformata Z inversa
- Però è più semplice perché ci limitiamo appunto alle funzioni *razionali*
    - Saranno sufficienti i concetti che abbiamo già visto per dimostrare il tutto

In particolare, sarà necessario data $X(Z)$ razionale, eseguire una combinazione lineare dei termini della forma $\frac{z}{z-a}$ utilizzando la **scomposizione in fratti semplici**

- Questo perché se abbiamo $X(Z) = \frac{z}{z-a}$ conosciamo subito la sequenza $x[n]$ a seconda della ROC di riferimento



Ora, per comodità conviene scomporre $\frac{X(Z)}{Z}$ invece che $X(Z)$, ovvero avremo il seguente scenario:

$$\frac{X(Z)}{Z} = \frac{N(Z)}{\underbrace{z \cdot D(Z)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}}$$

Dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono i *poli* del denominatore $z \cdot D(Z)$
Eseguire la scomposizione in fratti semplici (per poli semplici, ovvero con molteplicità 1) significa trovare $A_1, A_2, \ldots, A_n$ t.c. la seguente uguaglianza sia verificata:

$$\frac{X(Z)}{Z} = \boxed{A_1 \frac{1}{z-a_1} + A_2 \frac{1}{z-a_2} + \cdots + A_n \frac{1}{z-a_n}}$$

Portando Z a destra si ha:

$$X(Z) = \boxed{A_1 \frac{z}{z-a_1} + A_2 \frac{z}{z-a_2} + \cdots + A_n \frac{z}{z-a_n}}$$

I coefficienti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ si determinano nel seguente modo (se il polo è semplice):

$$A_i = \left[\frac{X(Z)}{z} \cdot (z - a_i) \right] |_{z=a_i}$$

L'ultimo ingrediente necessario per eseguire l'antitrasformata è la ROC

Una volta che conosciamo tutto ciò, si può fare la trasformata inversa: in particolare, ogni addendo della scomposizione in fratti semplici darà un contributo del tipo:

$$a_i^n \cdot u[n] \quad oppure \quad -a_i^n \cdot u[-n-1]$$

a seconda della regione di convergenza ROC

ESEMPIO

Calcolo di $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$, $X(z) = \dfrac{3z+2}{3z^2-7z+2}$

1) Scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3z+2}{z\,3(z-\frac{1}{3})(z-2)}$$

che ha radici (3): $\begin{cases} z = \frac{1}{3} \\ z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ $z = \frac{1}{3}$, $z = 2$ } funzione originale; $z = 0$ } aggiunto

$$= A_1 \frac{1}{z} + A_2 \frac{1}{z-\frac{1}{3}} + A_3 \frac{1}{z-2}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{X(z)}{z}\cdot z \Big|_{z=0} = \dots = 1$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{X(z)}{z}\left(z-\frac{1}{3}\right)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \dots = -\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{X(z)}{z}(z-2)\Big|_{z=2} = \dots = \frac{4}{5}$$

Pertanto: $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{9}{5}\dfrac{1}{z-\frac{1}{3}} + \dfrac{4}{5}\dfrac{1}{z-2}$

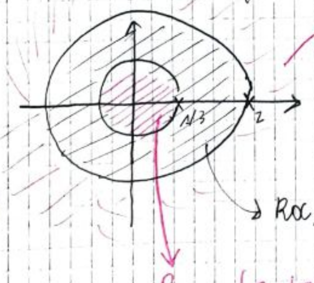
quindi: $X(z) = 1 - \dfrac{9}{5}\underbrace{\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}} + \dfrac{4}{5}\underbrace{\dfrac{z}{z-2}}$

di cui conosco l'antitrasformata della forma: $\dfrac{z}{z-a}$

$\Rightarrow$ Dobbiamo ora determinare le ROC: questo si può fare osservando i poli

$\hookrightarrow z = \frac{1}{3}$, $z = 2$ ← (poli originali)

$\Rightarrow$ Nota: Le Regioni sono connesse → No poli al suo interno



$\mathrm{ROC}_1 = \{z : |z| > 2\}$

$\mathrm{ROC}_2 = \{z : |z| \in (\frac{1}{3}, 2)\}$

$\mathrm{ROC}_3 = \{z : |z| < \frac{1}{3}\}$

→ 3 ROC e 3 possibili antitrasformate!

Scegliendo $\mathrm{ROC}_1 = \{z : |z| > 2\}$

$\Rightarrow$ trasformo tutti gli addendi di $X(z)$ assumendo la ROC sopra citata

$$\Rightarrow x[n] = \delta[n] - \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{4}{5}2^n u[n]$$

Scegliendo $\mathrm{ROC}_2 = \{z : \frac{1}{3} < |z| < 2\}$

← monol. sinistra

$$\Rightarrow x[n] = \delta[n] - \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{4}{5}2^n u[-n-1]$$

Scegliendo $ROC_3: \{z : |z| < \frac{1}{3}\}$

$$\Longrightarrow x[n] = \delta[n] + \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \frac{4}{5}\, 2^n u[-n-1]$$

TEOREMI

1) LINEARITA'

(Dalla definizione)

2) RITARDO

Sia $x[n] \longleftrightarrow X(Z)$
Allora,

$$\boxed{x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}\, X(Z)}$$

Dimostrazione:

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} \underbrace{=}_{m=n-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m-n_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m} \cdot z^{-n_0} = z^{-n_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot z^{-m}}_{X(Z)}$$

Si può mostrare inoltre che la ROC non varia:

$$ROC_{x[n-n_0]} = ROC_{x[n]}$$

3) PRODOTTO PER ESPONENZIALE

Sia $x[n] \longleftrightarrow X(Z)$, con $ROC = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ (forma generale, r_1 e r_2 arbitrari)

Allora ci chiediamo quanto vale la trasformata della stessa sequenza moltiplicata per un esponenziale:

$$y[n] = a^n x[n]$$

Si dimostra che:

$$\boxed{a^n x[n] = y[n] \longleftrightarrow Y(Z) = X(a^{-1}z)}$$

Dimostrazione

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](a^{-1}z)^{-n}}_{X(a^{-1}z)}$$

Inoltre abbiamo convergenza se:

$$r_1 < |a^{-1}| < r_2$$

Da cui quindi si giunge alla formula relativa a *come varia la regione di convergenza a seguito di una moltiplicazione per un esponenziale*:

$$ROC_y = \{|a|r_1 < |z| < |a|r_2\}$$

4) CONIUGAZIONE

Sia $y[n] = x^*[n]$
Allora,

$$\boxed{x^*[n] = y[n] \longleftrightarrow Y(Z) = \Big(X(z^*)\Big)^*}$$

Dimostrazione:

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{*[n]} z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n}\right)^* = \Big(X(z^*)\Big)^*$$

Si può dimostrare anche che la ROC rimane la stessa, ovvero:

$$ROC_Y = ROC_X$$

5) INVERSIONE TEMPORALE

Sia $y[n] = x[-n]$
Allora,

$$\boxed{x[-n] = y[n] \longleftrightarrow Y(Z) = X(Z^{-1})}$$

Dimostrazione:

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]\, z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, (z^{-1})^{-m} = X(Z)|_{z=z^{-1}} = X(Z^{-1})$$

Inoltre abbiamo convergenza nella seguente regione:

$$ROC_Y = \{r_1 < |z^{-1}| < r_2\} \Rightarrow \boxed{\{\frac{1}{r_1} < z < \frac{1}{r_2}\}}$$

6) DERIVAZIONE IN Z

Sia $x[n] \longleftrightarrow X(Z)$
Allora,

$$\boxed{n \cdot x[n] = y[n] \longleftrightarrow Y(Z) = \; - z \, \frac{dX(Z)}{dz}}$$

Dimostrazione:
Effettuiamo la derivata ambo i membri della definizione:

$$\frac{d}{dt}\Big(X(Z)\Big) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \; z^{-n}\right)\frac{d}{dt}$$

Da cui:

$$\frac{d \; X(Z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \; \underbrace{\frac{d}{dt}(z^{-n})}_{-n \; z^{-n-1}}$$

$$\frac{d \; X(Z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n \; x[n] \; \underbrace{z^{-n-1}}_{z^{-n} \cdot z^{-1}}$$

Porto fuori il meno e z^{-1}:

$$\frac{d \; X(Z)}{dz} = -z^{-1} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \; x[n] \; z^{-n}}_{Y(Z)}$$

Da cui appunto isolando $Y(Z)$ si ottiene il valore ricercato.

ESERCIZIO

Trova la trasformata Z di $y[n] = n \; x[n]$, con $x[n] = a^n \; u[n]$, ovvero:

$$y[n] = n \; a^n \; u[n]$$

Sappiamo che

$$a^n \; u[n] = x[n] \longleftrightarrow X(Z) = \frac{z}{z-a}$$

Allora

$$Y(Z) = -z\frac{dX(Z)}{dz} = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = a \cdot \frac{z}{(z-a)^2}$$

Nota: *Abbiamo individuato un elemento della trasformata che ha un polo di molteplicità* 2

Infatti, se avessimo reiteriamo lo stesso ragionamento con una sequenza che ha n^2 come termine a moltiplicare l'esponenziale a^n e quindi il gradino $u[n]$ si ottiene una trasformata che ha al denominatore un termine (polo) con molteplicità 3:

$$y[n] = n^2 a^n u[n] = n\, v[n]$$

$$v[n] = n\, a^n u[n] \longleftrightarrow V(z) = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$y[n] = n\, v[n]$$

$$\hookrightarrow Y(z) = -z \frac{dV(z)}{dz} = -z \frac{d}{dz} \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$= \dots = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}$$

- L'unico problema come si nota è il numeratore, che si complica man mano che cambiano le sequenze
  - Dovremmo cercare quindi un modo di ottenere qualcosa del tipo

$$\frac{z}{(z-a)^m}$$

, che sono proprio i termini "notevoli" coinvolti nella scomposizione in fratti semplici e che sappiamo trattare con più facilità (questo sarà approfondito più avanti).

7) CONVOLUZIONE

Sia $w[n] = x[n] * y[n]$
Allora,

$$\boxed{x[n] * y[n] = w[n] \longleftrightarrow W(Z) = x[n] \cdot y[n]}$$

Dimostrazione:

TEOREMA DI CONVOLUZIONE

$$w[n] = x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} W(z) = X(z) \cdot Y(z)$$

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]}_{w[n]} \Big) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]\, z^{-n}}_{\mathcal{Z}\{y[n-k]\}}$$

$$= \sum^{\infty} x[k]\, z^{-k}\, Y(z) = Y(z)\, X(z)$$

- Inoltre, per quanto riguarda le regioni di convergenza:

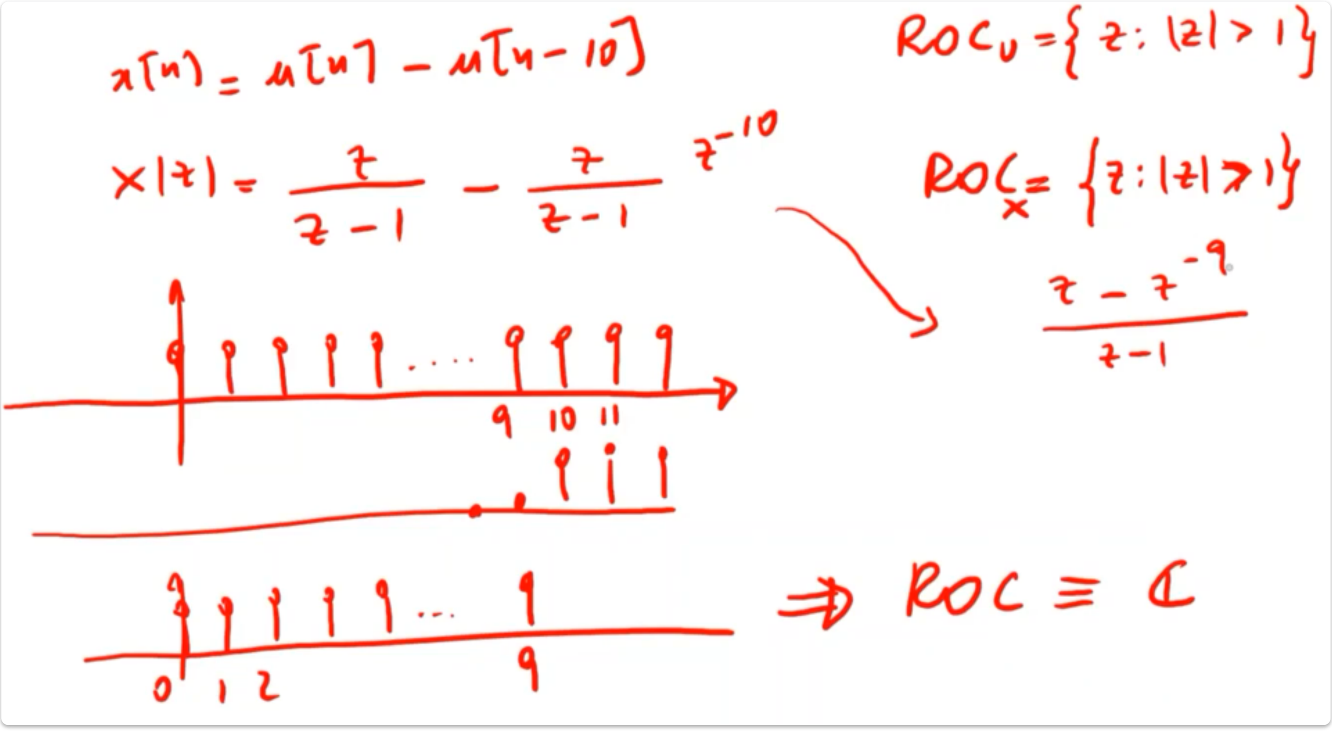
$$ROC_W = ROC_X \cap ROC_Y$$

ESERCIZI

1) SEQUENZA CON REGIONE FINITA

Notiamo come in questo esercizio si vada a sottrarre un gradino ritardato a un gradino "standard" $u[n]$. Ciò provoca una sequenza di 10 campioni consecutivi (da 0 a 9) e pertanto essendo in numero finito, la ROC è l'intero piano complesso

Ce ne potevamo accorgere anche mettendo tutto a fattore comune e notando che:
- esiste un polo in 1 (denominatore), ma al *contempo* esiste anche uno *zero* (numeratore) per lo stesso valore 1

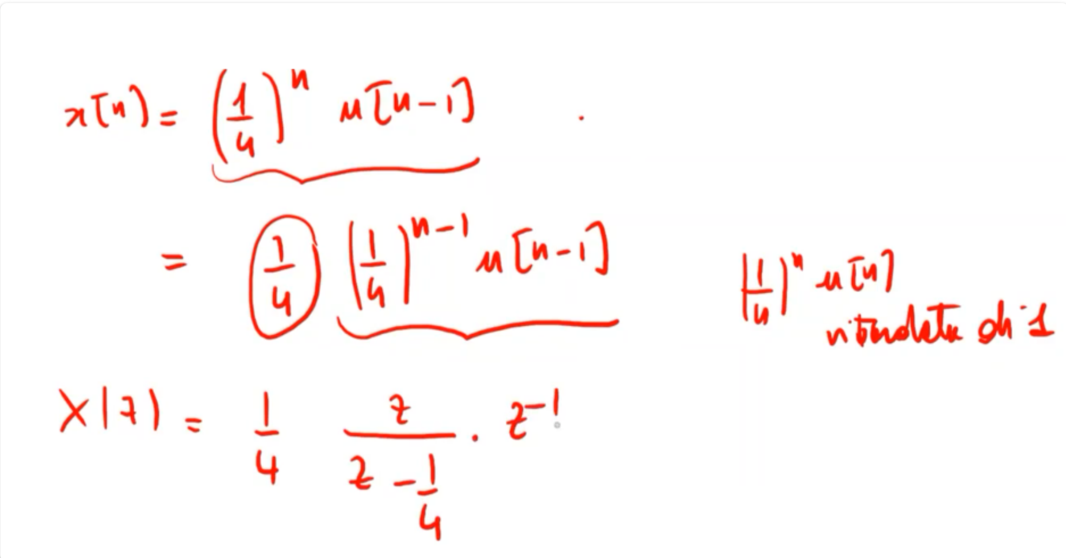


Il calcolo della trasformata è standard, basta ricordare i teoremi fatti

2) APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEL RITARDO

Per utilizzare il teorema del ritardo, devo riadattare la sequenza.
- Infatti il termine $n-1$ non basta che compaia nell'argomento del gradino, ma deve esserci anche nel resto della sequenza, in questo caso deve comparire anche all'esponente di $\frac{1}{4}$

(nota: z^{-1} a moltiplicare alla fine è dovuto all'effetto del ritardo nel dominio Z)



3) SEQUENZA (con) COSENO

Sia $x[n] = r^n \cos(2\pi F_0 n) \cdot u[n]$
Notiamo già come:

- r^n modifica l'ampiezza del coseno a seconda del valore di r, in particolare:

- La sequenza è monolatera destra perché moltiplicata per $u[n]$. Pertanto, *la ROC sarà necessariamente l'esterno di un cerchio* (di un certo raggio da trovare)

Sfruttando le formule di Eulero:

$$x[n] = r^n \, \frac{e^{j2\pi F_0 n} + e^{-j2\pi F_0 n}}{2} \, u[n]$$

Da cui:

$$x[n] = \frac{1}{2} \underbrace{(r \, e^{j2\pi F_0 n})^n}_{a^n} \, u[n] + \frac{1}{2} \underbrace{(r \, e^{-j2\pi F_0 n})^n}_{b^n} \, u[n]$$

Dato che:

$$u[n] \longleftrightarrow U(Z) = \frac{z}{z-1} \quad , \quad ROC = \{z : |z| > 1\}$$

Allora si ottiene, applicando il teorema della moltiplicazione per un esponenziale:

$$\frac{1}{2} U(r^{-1} e^{-j2\pi F_0} z) + \frac{1}{2} U(r^{-1} e^{j2\pi F_0} z)$$

Eseguendo i passaggi di calcolo rimanenti (ad esempio sostituire quanto detto della trasformata del gradino e poi mettendo tutto insieme) si ottiene:

$$X(Z) = \cdots = \frac{z^2 - zr\cos(2\pi F_0)}{z^2 - 2r\cos(2\pi F_0 z + r^2)}$$

Che, dal teorema dell'esponenziale ha ROC:

(teo esponenziale):

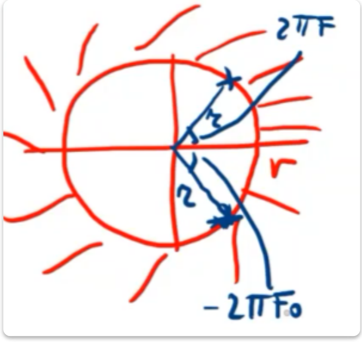
$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$

$$a^n x[n] \longleftrightarrow X(a^{-1} z)$$

$ROC = \{z : |z| > |r|\}$, ovvero l'esterno di un cerchio di raggio r (ovvero la base dell'esponenziale)

- Nota: $X(F)$ ha due **poli complessi coniugati** di modulo r:

$$z_{1,2} = r \, e^{\pm j2\pi F_0}$$



4) SEQUENZA (con) SENO

Sia: $x[n] = r^n \sin(2\pi F_0 n) \cdot u[n]$

Applicando Eulero e mettendo insieme (caso simile al precedente), si ottiene:

$$X(Z) = \cdots = \frac{z\, r \sin(2\pi F_0)}{z^2 - 2r\cos(2\pi F_0 z + r^2)}$$

- che ha ancora due poli complessi coniugati (stesso denominatore del precedente)

$X(Z)$ RAZIONALE AVENTE POLI CON $\mu > 1$

Sia $X(Z)$ con molteplicità P (nota: $D_1(Z)$ ha molteplicità 1):

$$X(Z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(D)}{\underbrace{D_1(Z)}_{(z-a_1)\ldots(z-a_n)} \quad (z-a_0)^P}$$

Nota:
In generale come già detto in precedenza conviene scomporre invece di solo $X(Z)$:

$$\frac{X(Z)}{Z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(D)}{z \cdot D_1(Z) \cdot (z-a_0)^P}.$$

(comparirà quindi un polo in $z = 0$ salvo semplificazioni)

Ci chiediamo quale sia il *contributo per i fratti semplici del termine di molteplicità P del polo in a_0*

- Sappiamo già il contributo del polo semplice: $\frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-a_n} + \frac{A}{\underbrace{z}_{\text{polo in } 0}}$

  Si può dimostrare che il contributo dei termini con molteplicità multipla danno il seguente contributo:

$$A_{01}\frac{1}{(z-a_0)^1} + A_{02}\frac{1}{(z-a_0)^2} + A_{0P}\frac{1}{(z-a_0)^P}$$

Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$\frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-a_n} + \frac{A}{\underbrace{z}_{\text{polo in } 0}} + A_{01}\frac{1}{(z-a_0)^1} + A_{02}\frac{1}{(z-a_0)^2} + A_{0P}\frac{1}{(z-a_0)^P}$$

Dove i coefficienti si trovano con la seguente formula:

$$A_{0j} = \frac{1}{(p-j)!}\frac{d^{P-j}}{z^{P-j}}\left(\frac{X(Z)}{z} \cdot (z-a_0)^P\right)|_{z=a_0} \quad , \quad \text{per } j = 1, 2, \ldots, P$$

- (arriveremo negli esercizi fino a poli con molteplicità 2)
- La cosa più pesante è il calcolo della derivata

Isolando $X(Z)$ (moltiplicando per z) si ottiene:

$$X(Z) = A_1 \frac{z}{z-a_1} + A_2 \frac{z}{z-a_2} + \cdots + A_n \frac{z}{z-a_n} + \underbrace{A}_{\text{polo in } 0} + A_{01} \frac{z}{(z-a_0)^1} + A_{02} \frac{z}{(z-a_0)^2} + A_{0P} \frac{z}{(z-a_0)^P}$$

> *Da ciò si deduce che sarebbe possibile antitrasformare una qualsiasi funzione razionale se conoscessimo come antitrasformare qualcosa del tipo*
>
> $$\frac{z}{(z-a)^k} \quad , \quad k \text{ intero} \geq 2$$
>
> *(maggiore uguale a 2 perché se $k = 1$ sappiamo già com'è fatta)*

Cosa sappiamo per ora

Abbiamo dimostrato tempo fa che:

$$n\, a^n\, u[n] \longleftrightarrow \frac{a\, z}{(z-a)^2}$$

Se dividiamo entrambi i membri per a, si ottiene:

$$\boxed{n\, a^{n-1}\, u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}}$$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{\boxed{\binom{n}{m} a^{n-m}\, u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}}}}$$

Vale per

$$ROC = \{z : |z| > |a|\}$$

, ovvero l'esterno del cerchio di raggio $|a|$.

Dimostrazione:

$$x[n] = a^n\, u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)}$$

Quindi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\, z^{-n} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad \text{identità nel parametro } a$$

Proviamo quindi a derivare *rispetto ad a* ambo i membri:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, a^{n-1}\, z^{-n} = \frac{+z}{(z-a)^2}$$

Quindi, come già sapevamo (*ma ci siamo arrivati in un altro modo*):

$$n\ a^{n-1}\ u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}$$

Reiterando, cioè derivando nuovamente si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ a^{n-2}\ z^{-n} = \frac{2z}{(z-a)^3}$$

Portando il 2 all'altro membro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2}\ a^{n-2}\ z^{-n} = \frac{z}{(z-a)^3}$$

Pertanto in generale:

$$\frac{n(n-1)}{2}\ a^{n-2}\ u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^3}$$

Continuando ancora con le iterazioni, invece di 2, verrà $1 \cdot 2 \cdot 3$ e così via, ovvero comparirà sempre il fattoriale di m. Allora generalizzando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdot(n-m+1)\ a^{n-m} z^{-n} = \frac{m! \cdot z}{(z-a)^{m+1}}$$

Con la relativa sequenza (ovvero la formula generale):

$$\boxed{\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-m+1)}{m!}}_{\binom{n}{m}}\ a^{n-m} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}}$$

$$-----------$$

- Nota: se $m=1$ siamo nel caso precedente appena visto

Se $m=2$, risulta:

$$\boxed{\underbrace{\binom{n}{2}\ a^{n-2}\ u[n]}_{\frac{n(n-1)}{2!}\ a^{n-2}\ u[n]} \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+3}}}$$

[CASO DUALE] Si può dimostrare che:

$$\boxed{\boxed{-\binom{n}{m}\ a^{n-m}\ u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}}}}$$

Vale per

$$ROC = \{z : |z| < |a|\}$$

, ovvero l'INTERNO del cerchio di raggio $|a|$.

Con quanto detto è possibile antitrasformare tutte le funzioni razionali.

ESERCIZIO (polo con $\mu = 2$)

Antitrasformiamo:

$$X(Z)=\frac{z+1}{(z-1)\,(z-2)^2}$$

- Non è indicata la $ROC \quad \Rightarrow \quad \exists$ più sequenze che possono essere abbinate a tale trasformata $X(Z)$.
  - Ognuna avrà la sua ROC
    - Cerchiamo quindi tutte le possibili antitrasformate Z

Primi passaggi (fratti semplici. Nota: ci sono tre poli di cui uno produce due fratti semplici perché ha molteplicità 2)

$$\frac{X(z)}{Z}=\frac{z+1}{z\,(z-1)\,(z-2)^2}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{A_3}{z-2}+\frac{A_4}{(z-2)^2}$$

Da cui i coefficienti:

$$A_1=\frac{X(Z)}{z}\cdot z\Big|_{z=0}=[\ldots]=-\frac{1}{4}$$

$$A_2=\frac{X(Z)}{z}\cdot(z-1)\Big|_{z=1}=[\ldots]=2$$

$$A_4=\frac{X(Z)}{z}\cdot(z-2)^2\Big|_{z=2}=[\ldots]=\frac{3}{2}$$

```
(semplice perché non son comparse le derivate)
```

$$A_4=\frac{d}{dz}\left[\frac{X(Z)}{z}\cdot(z-2)^2\right]\Bigg|_{z=2}=[\ldots]=-\frac{7}{4}$$

```
più complesso perché compaiono le derivate
```

In particolare durante i calcoli di A_4 ci sarà da calcolare la seguente derivata:

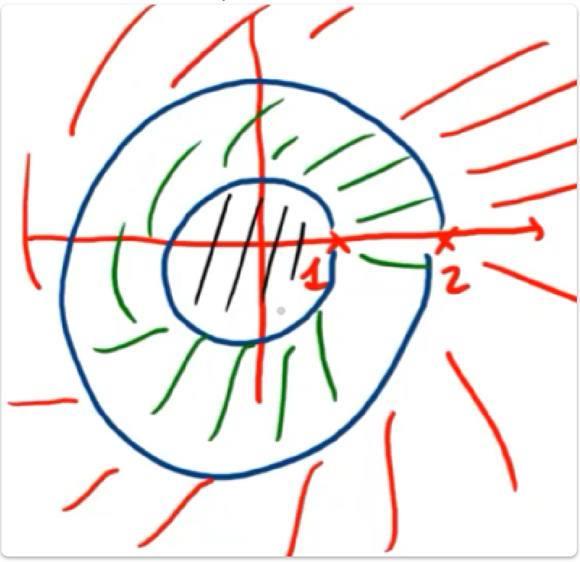
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z(z-1)}\right)\Bigg|_{z=2}$$

In conclusione, moltiplicando per Z per isolare $X(Z)$ e sostituendo quanto trovato si ottiene:

$$\boxed{X(Z)=\frac{-1}{4}+2\frac{z}{(z-1)}+\frac{3}{2}\frac{z}{(z-2)^2}-\frac{7}{4}\frac{z}{z-2}}$$

- Da cui sappiamo calcolare la trasformata inversa di ogni addendo
  - **Bisogna prestare attenzione a come scegliere la ROC**

Ricordando che i poli sono in 1 e in 2:



Scegliendo **per esempio** la regione anulare compresa tra 1 e 2:

$$ROC = \{z : 1 < |z| < 2\}$$

Allora (stando attenti alle sequenze da scegliere, ad esempio a volte bisogna scegliere la monolatera sinistra per la ROC che abbiamo appena scritto):

$$x[n] = \frac{-1}{4}\delta[n] + 2\,u[n] + \frac{3}{2}(-2^{n-1} \cdot n \cdot u[-n-1]) - \frac{7}{4}(-2^n\,u[-n-1])$$
