RIASSUNTO E LINEE GUIDA

Specifiche di progetto

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$
- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$

- Guadagno in continua in ciclo chiuso

$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{q(s)\,b(s)}{p(s)\,a(s) + q(s)\,b(s)} H_f$

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{q(0)b(0)}{p(0)a(0) + q(0)b(0)} H_f$$

$\Rightarrow$ per soddisfare la specifica 2 dobbiamo porre

$b(0) \neq 0$

$\boxed{q(0) \neq 0}$

$$H_f \stackrel{!}{=} \frac{p(0)a(0) + q(0)b(0)}{q(0)\,b(0)}$$

LINEE GUIDA:

1. capisco se il problema è ben posto o meno
2. se è ben posto scelgo controllore con $n_K \underbrace{\geq}_{=} \text{grado } a(s) - 1$
3. scelgo H_f applicando la formula

$\varphi^*(s) = a^*(s)\,\varphi_R(s)$

$= [a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)]\,\varphi_R(s)$

Progetto di un sistema di controllo in retroazione dinamica sull'uscita

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$
   If $\varphi_h(s)$ asintoticamente stabile (non ci sono autovalori nascosti instabili)
   il problema di controllo è *ben posto* e si va al passo 2
   else il problema di controllo *non* è ben posto
   Il progetto non può essere concluso e l'algoritmo termina
2. Si prende un controllore di ordine $n_K \geq \text{grado } a(s) - 1$
   Si fissano $p(s)$ e $q(s)$ per soddisfare specifica 1 e 3 con il vincolo $q(0) \neq 0$
   (per evitare problemi nel soddisfacimento della specifica 2)
3. **If** $b(0) \neq 0$
   si pone $H_f = \frac{p(0)a(0)+q(0)b(0)}{q(0)\,b(0)}$ (per avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante)
   else non è possibile inseguire un riferimento costante
   si pone ad esempio $H_f = 1$

$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$

$G^*_{y^\circ y}(0) = 1$

COSA VUOL DIRE APPLICARE UNA RETROAZIONE DINAMICA SULL'USCITA

- Cerchiamo di capire **nel dominio del tempo** cosa stiamo facendo

Supponendo $K(s)$ rapporto di polinomi di primo grado

$$U(s) = K(s)\left[H_f Y^o(s) - Y(s)\right] \qquad K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}$$

$$U(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}\left[H_f Y^o(s) - Y(s)\right]$$

$$(s + p_0)\, U(s) = (q_1 s + q_0)\left[H_f Y^o(s) - Y(s)\right]$$

$$s\, U(s) + p_0 U(s) = q_1 s\left[H_f Y^o(s) - Y(s)\right] + q_0\left[H_f Y^o(s) - Y(s)\right]$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

Andiamo quindi ad **antritrasformare**:

- moltiplicare per s in Laplace equivale a derivare nel tempo (se avessimo un controllore di ordine 100 allora avrei la derivata centesima)
- applico linearità

$$\frac{d}{dt} u(t) + p_0\, u(t) = q_1 \frac{d}{dt}\left[H_f\, y^o(t) - y(t)\right] + q_0\left[H_f\, y^o(t) - y(t)\right]$$

- cambiando la notazione per la derivata, si giunge all'equazione differenziale:

$$\dot{u}(t) + p_0\, u(t) = q_1\, H_f\left[\dot{y}^o(t) - y(t)\right] + q_0\left[H_f\, y^o(t) - y(t)\right]$$

Quindi il segnale di controllo viene calcolato risolvendo una equazione differenziale. In altre parole:

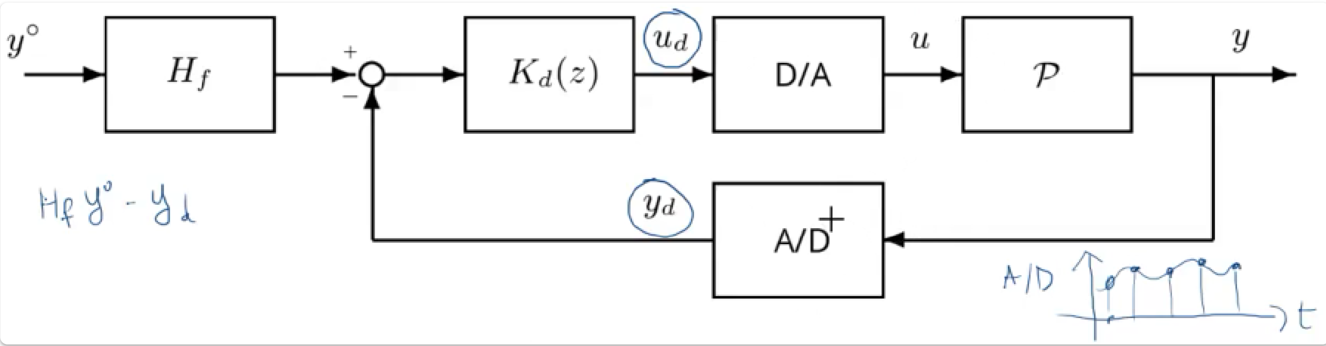
> *il segnale di controllo è l'uscita di un sistema dinamico avente una relazione ingresso-uscita definita da una equazione differenziale i cui coefficienti dipendono dai parametri di progetto e sono* $p_0, q_0, q_1, \ldots, H_f$

COME SI RISOLVE?

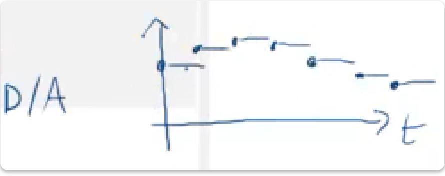
Si discretizza il sistema:

- Convertiamo l'equazione differenziale in una equazione alle differenze (ad esempio applicando il Metodo di Eulero come abbiamo visto)
  - oppure si possono utilizzare delle funzioni in MATLAB/Python che eseguono la conversione con un certo passo di campionamento che diamo in ingresso

Quindi ci basiamo su una **conversione** da analogico a digitale (per poter implementare il problema ad esempio sul computer) dell'uscita y e poi eseguiamo una conversione da digitale ad analogico solo dopo aver fatto tutte le operazioni per avre un ingresso u da dare a $\mathcal{P}$



Per eseguire D/A si utilizza nei casi base il mantenitore a tempo discreto (a zero)



CONTROLLORI PID

- "Proporzionale Integrale Derivata"
- Utilizzati in ambito industriale (struttura semplice)

Sia

$$U(s) = K(s)\left[Y^o(s) - Y(s)\right]$$

la legge di controllo in retroazione dinamica
Andiamo a **scegliere $K(s)$ in modo prefissato**, invece di sceglierlo col metodo visto fin ora (rapporto di polinomi di grado sufficientemente elevato)

- scegliamo dei parametri che mi garantiscono un comportamento soddisfacente (*tecniche di taratura*)
- Legge di controllo *semplice* (anche se non funziona sempre, ma in casi semplici funziona e in casi semplici si applica bene)

La *struttura prefissata* è dipendente da **3 parametri** di progetto (che dobbiamo scegliere noi):

- K_P
- K_I
- K_D

NEL TEMPO

Nella forma più semplice il PID ha un *solo grado di libertà* (quindi l'azione di controllo dipende dall'errore d'inseguimento $y^o(t) - y(t)$)
Il PID è dato dalla *combinazione* di 3 *azioni*:

- Proporzionale (tanto più grande quanto mi allontano dal valore di riferimento)
- Integrale (integrale valore di riferimento)

- Derivata (derivata valore di riferimento)

Controllo PID (proporzionale-integrale-derivativo)

$$u(t) = \underbrace{K_P\Big(y^\circ(t) - y(t)\Big)}_{P} + \underbrace{K_I\int_0^t \Big(y^\circ(\tau) - y(\tau)\Big)d\tau}_{I} + \underbrace{K_D\frac{d}{dt}\Big(y^\circ(t) - y(t)\Big)}_{+\ D}$$

- Controllo $=$ combinazione di 3 azioni:
  - **Azione proporzionale:**
    $$K_P\,(y^\circ(t) - y(t))$$
  - **Azione integrale:**
    $$K_I \int_0^t (y^\circ(\tau) - y(\tau))d\tau$$
  - **Azione derivativa:**
    $$K_D\,\frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$$
- 3 parametri di progetto: guadagno proporzionale K_P, guadagno integrale K_I e guadagno derivativo K_D

IN LAPLACE

In maniera equivalente, il PID si può vedere anche nel dominio di Laplace
(integrare: dividere per s || derivare: moltiplicare per s)

$$u(t) = k_P\,[y^\circ(t) - y(t)] + k_I \int_0^t [y^\circ(\tau) - y(\tau)]\,d\tau + k_D \frac{d}{dt}[y^\circ(t) - y(t)]$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$U(s) = k_P[Y^\circ(s) - Y(s)] + k_I\,\frac{1}{s}\,[Y^\circ(s) - Y(s)] + k_D\,s\,[Y^\circ(s) - Y(s)]$$

$$U(s) = \underbrace{\left(k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s\right)}_{K(s)}\,[Y^\circ(s) - Y(s)]$$

retroazione dinamica sull' uscita con

$H_f = 1$

$$K(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_P s + k_I + k_D s^2}{s}$$

$$K(s) = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}$$

Dove nell'ultimo passaggio è stata evidenziata quella che è la **funzione di trasferimento $K(s)$**, che successivamente è stata riscritta in modo più semplice facendo il mcm:

$$\boxed{K(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}}$$

, che rappresenta il **PID ideale**, perché è una funzione *impropria* (grado num $>$ grado den)

- *Non è possibile realizzare nella realtà tale $K(s)$ ideale*
  - Il problema è causato dall'azione derivativa K_D che porta un termine di grado più elevato. Inoltre è irrealizzabile la derivata perché dovremmo conoscere l'immediato futuro per esplicitarla correttamente..

PID REALE

Nella pratica si implementa il **PID reale**

- Si aggiunge un polo al denominatore

$$\boxed{K(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(1+s\tau)}} \quad , \quad \tau > 0$$

- in questo modo: grado numeratore $=$ grado denominatore
  - Nella pratica
    - prima si progettano i guadagni K_P, K_I, K_D considerando un PID ideale
    - poi si sceglie $\tau \ll 1$ in modo da non modificare in modo sostanziale le proprietà del sistema di controllo
      (polo in $-1/\tau$ con Re $\ll 0 \quad \Rightarrow$ transitorio molto rapido)
- Prima si progetta come se avessimo il caso ideale, poi si aggiunge un polo con τ sufficientemente piccolo così da soddisfare le specifiche di controllo
  - τ piccolo $\equiv$ avere un polo posizionato "lontano" dall'asse immaginario e sul semipiano sinistro così da avere un transitorio rapido (che asintoticamente non influenza il controllore)

RUOLO DELLE 3 AZIONI

AZIONE PROPORZIONALE

Si cerca di *correggere* il segnale di controllo limitando l'errore d'inseguimento

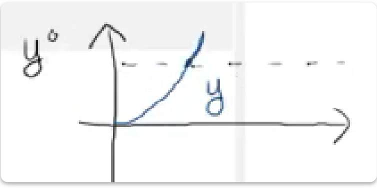
- Nota: se l'errore d'inseguimento è 0, allora $K_P = 0$ (no azione proporzionale)

$$K_P\,(y^\circ(t) - y(t))$$

corrisponde a una retroazione algebrica sull'uscita con $K = H = K_P$

AZIONE DERIVATIVA

Si cerca di *anticipare* il trend, ovvero prevedere quello che succede sull'uscita



Se abbiamo una situazione del genere, y una volta raggiunto y^o continua a crescere se non abbiamo una azione di controllo derivativa, che appunto interviene cercando di adattarsi alla situazione:

- Quando y arriva a y^o si corregge, perché in prospettiva l'uscita tende a crescere
  - Nella realtà come detto non è del tutto realizzabile perché appunto dovremmo cercare di prevedere il (prossimo) futuro
- Nota: l'azione proporzionale non mi aiuta perché mi fa crescere y prima di y^o, ma una volta raggiunto tale valore, l'azione proporzionale vale 0

$$K_D\,\frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$$

serve per

- rendere l'azione di controllo più pronta (prevede il trend di evoluzione dell'errore di inseguimento)
- migliorare la stabilità in ciclo chiuso

AZIONE INTEGRALE

Utile per garantire la specifica 2 (inseguimento perfetto del riferimento costante), senza la necessità di avere un (pre)filtro H_f, che impostiamo a 1

- Non c'è bisogno del filtro perché la specifica 2 è già garantita dalla sola azione integrale
  Inoltre, se il sistema è affetto da *disturbi costanti*, allora l'azione integrale va ad annullare tali effetti

$$K_I \int_0^t (y^\circ(\tau) - y(\tau))d\tau$$

serve per

- inseguimento perfetto di riferimenti y° costanti anche in assenza del prefiltro ($H_f = 1$)
- reiezione perfetta di disturbi costanti

LEGGE DI CONTROLLO CON AZIONE INTEGRALE

L'azione integrale introduce un polo in 0 nella funzione di trasferimento del controllore (cfr. conti d'introduzione)
Quindi in generale:

Definizione: un controllore in retroazione dinamica sull'uscita presenta **azione integrale** quando $K(s)$ ha almeno un polo in 0, ossia

$$p(0) = 0$$

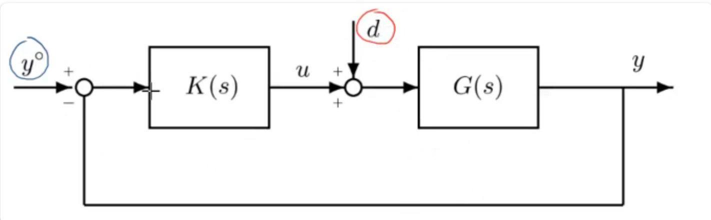
Questo perché

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_{nk}s^{nK} + \cdots + q_1 s + q_0}{s^{nK} + \cdots + p_1 s}$$

, quindi per avere un polo il denominatore si deve annullare in zero (vero quando il polinomio al denominatore non ha il termine noto)

Andiamo a capire qual è l'effetto dell'azione integrale sul sistema.

EFFETTO DI UN DISTURBO SUL SISTEMA IN CICLO CHIUSO



- Il disturbo d agisce in ingresso. Cosa cambia nel sistema?

  > *Avere un disturbo significa avere nel sistema un* ***nuovo ingresso***

- L'ingresso classico è corrotto da un disturbo d

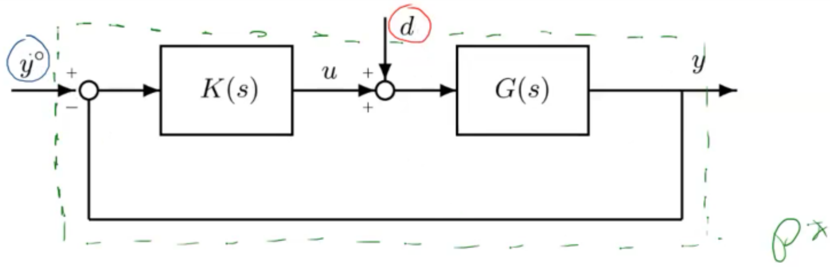
Quindi il sistema in ciclo chiuso ora ha 2 ingressi:

- Il riferimento y° e il disturbo d

Si cerca di capire l'evoluzione dell'uscita per il sistema in ciclo chiuso

- Si aggiunge il disturbo ai conti già fatto

$H_f = 1$



- Consideriamo un disturbo d sull'ingresso
- Equazioni del processo e del controllore

$$
\begin{aligned}
P \to Y(s) &= G(s)\,[U(s) + D(s)] \\
C \to U(s) &= K(s)\,[Y^o(s) - Y(s)]
\end{aligned}
$$

$Y(s) + G(s)K(s)Y(s) = G(s)K(s)Y^o(s) + G(s)D(s)$

- Interconnessione in retroazione tra processo e controllore

$Y(s)(1 + G(s)K(s)) = G(s)K(s)Y^o(s) + G(s)D(s)$

$$
\begin{aligned}
P^*: \; Y(s) &= G(s)\,\{K(s)\,[Y^o(s) - Y(s)] + D(s)\} \\
&\Downarrow \qquad + \\
Y(s) &= \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}\,Y^o(s) + \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)}\,D(s)
\end{aligned}
$$

Si sono ottenute 2 **funzioni di trasferimento**, perché ci sono due ingressi e una uscita:

- Una è quella già vista (con $H_f = 1$)
- L'altra invece è la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita: ovvero come il disturbo agisce sull'uscita, che chiamiamo G^*_{dy}

$$
Y(s) = \underbrace{\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}}_{G^*_{y^o y}(s)}\,Y^o(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)}}_{G^*_{dy}(s)}\,D(s)
$$

Le possiamo riscrivere in termini di **polinomi** come segue:

- In termini di polinomi $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, $K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ e quindi

$$
G^*_{y^o\,y}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)}
$$

$$
+ \quad G^*_{d\,y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)}
$$

- cambia solo il numeratore (in un caso abbiamo $q(s)$ e in un caso $p(s)$)
  - Questo causa dei cambiamenti per la risposta in ciclo chiuso

REGIME PERMANENTE

- Vediamo come varia la risposta in ciclo chiuso

Supponiamo riferimento e disturbo costanti (a gradino)

$$
y^o(t) = Y_0\,1(t) \quad , \quad d(t) = D_0\,1(t)
$$

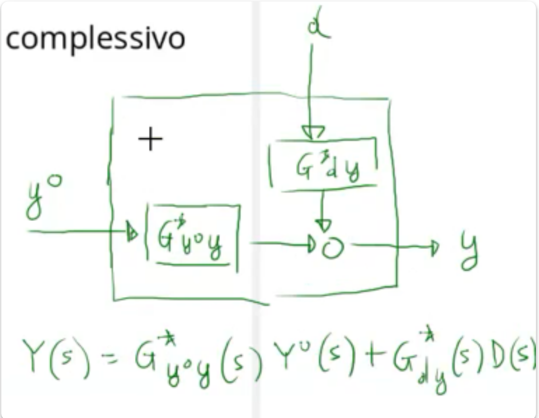
Se abbiamo stabilità asintotica in ciclo chiuso del controllore, allora sappiamo che il sistema a ciclo chiuso converge al regime permanente, che provo a calcolare ricordando che:

- dato che il sistema è lineare, il regime permanente complessivo è la somma dei singoli regimi (sovrapposizione degli effetti), quindi

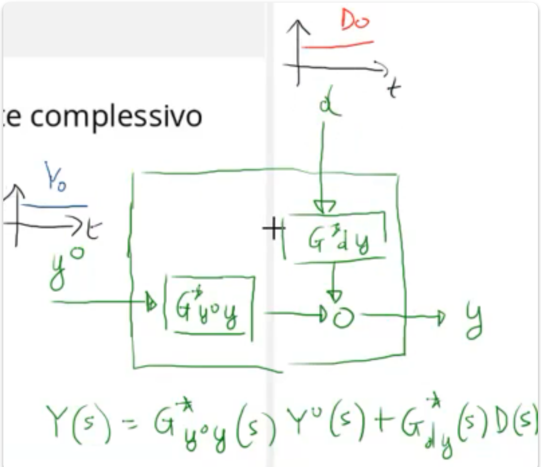
$$t_f^{RP}(t) = t_f^{Y^\circ}(t) + y_f^{D}(t)$$

  - $t_f^{Y^\circ}(t)$ regime permanente in risposta al riferimento y°
  - $t_f^{D}(t)$ regime permanente in risposta al disturbo d

La situazione che abbiamo come schema a blocchi è la seguente:



Quindi (dato che in ingresso abbiamo segnali costanti):



Dal teorema della risposta in frequenza (ingresso costante: allora il regime permanente è ancora un segnale a gradino pari al segnale d'ingresso per un guadagno in continua)

$$y_f^{\mathrm{RP}}(t) = [\underbrace{G^*_{y^\circ y}(0)\, Y_0} + \underbrace{G^*_{dy}(0)\, D_0}_{+}]\, 1(t)$$

con

$$\begin{aligned} G^*_{y^\circ y}(0) &= \frac{b(0)\, q(0)}{a(0)\, p(0) + b(0)\, q(0)} \\ G^*_{dy}(0) &= \frac{b(0)\, p(0)}{a(0)\, p(0) + b(0)\, q(0)} \end{aligned}$$

- dove in blu abbiamo la parte relativa al riferimento e che avevamo già calcolato (per la specifica 2)
- in rosso invece abbiamo la parte "nuova" relativa al disturbo d

> *Questa forma qui vale sempre quando abbiamo un sistema a ciclo chiuso su cui agisce un disturbo costante. Permette di misurare l'effetto del disturbo a regime.*

PROPRIETA' AZIONE INTEGRALE

Vediamo cosa comporta avere un polo in 0 sul regime permanente. Calcoliamo quindi i guadagni in continua (con $p(0) = 0$):

- Il guadagno in continua in ciclo chiuso *diventa unitario*, infatti

$$\boxed{G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{b(0)\,q(0)}{a(0)\,\cancel{p(0)} + b(0)\,q(0)} = 1 +}$$

  - Quindi l'azione integrale va a soddisfare automaticamente la specifica 2

- il guadagno in continua a ciclo chiuso tra disturbo e uscita si *annulla*, infatti:

$$G^*_{dy}(0) = \frac{\cancel{b(0)}\,p(0)}{a(0)\,p(0) + \cancel{b(0)}\,q(0)} = 0$$

  - Quindi l'azione integrale fa sì che l'effetto del disturbo (costante) sparisce (quindi *non ha effetto sull'uscita*)

Pertanto, in termini di **regime permanente**:

- Regime permanente complessivo

$$y_f^{\mathrm{RP}}(t) = [\underbrace{G^*_{y^\circ y}(0)}_{1}\,Y_0 + \underbrace{G^*_{dy}(0)}_{0}\,D_0]\,1(t) = Y_0\,1(t)$$

- Quindi l'azione integrale mi permette di avere un *regime permanente coincidente con il set-point*, ovvero di raggiungere l'obiettivo del progetto

Quindi con l'azione integrale sono garantite:

- specifica 2
- annullamento del disturbo (reiezione perfetta)

RIASSUMENDO

- Un grado di libertà $\rightarrow H_f = 1$

  Fatto 3.11 Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita a 1 grado di libertà

$$U(s) = K(s)[Y^\circ(s) - Y(s)]$$

  con azione integrale e tale che $\varphi^*(s)$ sia asintoticamente stabile.
  Allora tale controllore garantisce

  - inseguimento perfetto di un riferimento costante perché $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$
  - reiezione perfetta di un disturbo costante perché $G^*_{dy}(0) = 0$

+

- In presenza di azione integrale, il prefiltro non è necessario per soddisfare la specifica 2 (inseguimento perfetto)
  $\Rightarrow$ per questo motivo si pone $H_f = 1$ considerando un sistema di controllo a 1 grado di libertà
- Questo approccio può essere applicato anche ad altri tipi di riferimenti/disturbi [esempio: inserendo un doppio integratore, ossia un polo doppio in 0 in $K(s)$, si ottiene inseguimento perfetto di riferimenti a rampa $y^\circ(t) = Y^\circ \cdot t \cdot 1(t)$]

COME SI MODIFICA IL PROGETTO

Il polinomio deve annullarsi in zero al denominatore, quindi non metto il termine noto al denominatore, pertanto:

- con l'azione integrale i parametri liberi calano da $2n_K + 1$ a $2n_K$

- Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con funzione di trasferimento

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_{n_K} s^{n_K} + \dots + q_1 s + q_0}{s^{n_K} + \dots + p_1 s}$$

$n_K + 1$ parametri liberi

$n_K - 1$ parametri liberi

con grado $q(s) =$ grado $p(s) = n_K$ **ordine del controllore**

Quindi, **devo aumentare l'ordine del controllore**

- si chiede che $n_K \geq \text{grado } a(s)$

- Imponiamo che il controllore abbia azione integrale ossia $\boxed{p(0) = 0}$
  $\Rightarrow$ rimangono $2n_K$ parametri liberi

Fatto 3.12 Consideriamo un processo tale che $b(0) \neq 0$ e un controllore con azione integrale. Se ordine del controllore n_K tale che $\boxed{n_K \geq \text{ grado } a(s)}$, allora i coefficienti di $a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$ possono essere scelti in modo arbitrario al variare di $p(s)$ e $q(s)$
$\Rightarrow$ i poli in ciclo chiuso possono essere posizionati a piacere

Quindi le buone proprietà dell'azione integrale le pago nella realizzazione del progetto nell'essere costretto a scegliere n_K con un grado un po' più alto rispetto al progetto senza azione integrale

- In questo modo però posso posizionare i poli a mio piacimento (come volevamo)

Nota: inoltre deve valere anche $b(0) \neq 0$, infatti:

Perché $b(0) \neq 0$?

$\varphi(s) = \varphi_R(s)\, e^*(s)$

$e^*(s) = e(s)\, p(s) + b(s)\, q(s)$

suppongo azione integrale $p(0) = 0$

se fosse $b(0) = 0$ allora avrei

$e^*(0) = e(0)\, \underbrace{p(0)}_{0} + \underbrace{b(0)}_{0}\, q(0) = 0$

$\Rightarrow$ $e^*(s)$ si annulla in $s = 0$

$\Rightarrow$ il sistema in ciclo chiuso ha un polo in 0

$\Rightarrow$ il sistema in ciclo chiuso non asintoticamente stabile

Se avessi $b(0) = 0$ non posso stabilizzare con l'azione integrale