OSSERVATORE DELLO STATO E REGOLATORE

- Azione di controllo alla retroazione dinamica sull'uscita

RIEPILOGO: RETROAZIONE SULLO STATO

Essa era applicabile quando l'intero vettore di stato era accessibile (informazione completa) ed era della forma:

$$u(t) = -F\,x(t) + H\,y^o(t)$$

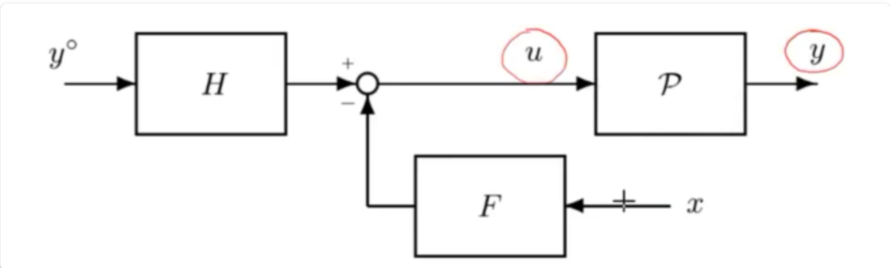
--> era progettabile F tale da rendere il sistema in ciclo chiuso stabilizzante (si arrivava a una situazione in cui si poteva scegliere autonomamente la posizione degli autovalori sul piano complesso, modificando i parametri f_i)

- si poteva anche garantire H per rispettare la specifica 2

In caso in cui non abbiamo informazione completa di x, era necessario applicare la retroazione dinamica (utilizzando cioè una funzione di trasferimento con ordine sufficientemente elevato che mi garantiva stabilità)

RETROAZIONE SULLO STATO STIMATO

Ci chiediamo ora: *se non abbiamo accesso x*, ovvero lo stato non è visibile, possiamo applicare un approccio simile per stabilizzare

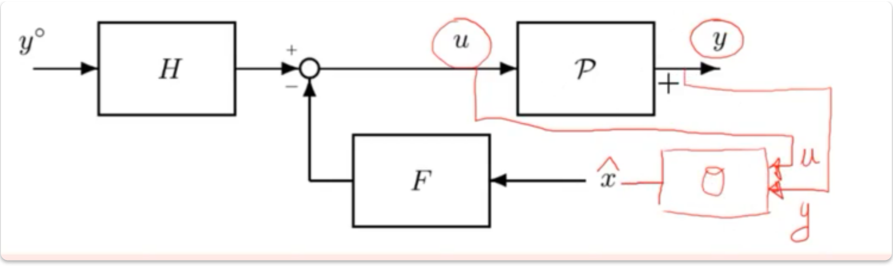


In questo caso si conoscono solo i parametri ingresso/uscita del sistema (ovvero solo u e y), non sappiamo come è fatto dentro $\mathcal{P}$
--> *informazione parziale*, x sconosciuto

Idea: progettare l'osservatore dello stato (nuovo blocco)

- riceve in ingresso i dati ingresso uscita del sistema
- elabora l'informazione in ingresso
- determina in tempo reale (per ogni istante) una **stima** dello stato $\hat{x}(t) \approx \dot{x}(t)$
- ci si applica sopra la retroazione

$$u(t) = -F\,\hat{x}(t) + H\,y^o(t)$$



- Il sistema di controllo composto da *osservatore + retroazione sullo stato stimato* è il cosiddetto **regolatore**

> *Metodo alternativo alla retroazione dinamica quando abbiamo informazioni parziali. Nota: quella dinamica è più utilizzata nei sistemi SISO; quando abbiamo invece più ingressi e uscite si verrebbe a formare una matrice di funzioni di trasferimento (potenzialmente complesse), quindi in quei casi è più utilizzato l'approccio della retroazione sullo stato stimato (certezza equivalente)*

L'obiettivo è ovviamente il seguente:

Obiettivo: Progettare l'osservatore $\mathcal{O}$ in modo tale che la stima $\hat{x}(t)$ converga allo stato vero $x(t)$, ovvero in modo tale che l'errore di stima $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converga a 0 per $t \to \infty$ (più rapidamente possibile).

- si inizia da una stima di tentativo e col crescere del tempo si cerca di *sincronizzare* $\hat{x}(t)$ con $x(t)$

OSSERVATORE DI LUENBERGER

Modalità di progetto più semplice per l'osservatore

- Ma sufficientemente complessa per risolvere il problema

Si vuole stimare

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} , \quad \text{dove lo stato } x \text{ non si conosce}$$

Prima idea:

- dato che u, A, B si conoscono, potrei avere la stessa dinamica, ovvero

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

> - Funzionerebbe se si conoscessero le condizioni iniziali (ma lo stato non si conosce, non si sa all'inizio com'è)
> - In più in questa forma non si considerano segnali di disturbo che nella realtà ci sono

Ora, potremmo anche continuare con questo approccio, magari supponendo delle condizioni iniziali, ma poi la predizione iniziale andrebbe via via corretta.

Infatti, si definisce:

- **Termine di predizione:** $A\,\hat{x} + B\,u$ che simula la dinamica del sistema $\dot{x} = A\,x + B\,u$
- **Termine di correzione:** che corregge la simulazione sulla base della differenza tra uscita effettiva $y = C\,x$ e uscita predetta sulla base della simulazione $C\,\hat{x}$

Quindi all'idea di base *dobbiamo aggiungere un nuovo elemento correttivo* che appunto aggiusta man mano la mira alla mia predizione iniziale

---

FORMULA

Si ottiene così l'osservatore di Luenberger

$$\mathcal{O} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{predizione}} + \underbrace{L(y - C\hat{x})}_{\text{correzione}}$$

TERMINE DI CORREZIONE

Dipende da:

- **Guadagno dell'osservatore L**: è un parametro di progetto (matriciale)
- **Differenza uscita e uscita predetta $y - C\hat{x}$**, detta *innovazione*
  - Dato che al tempo t abbiamo una stima dello stato detta $\hat{x}$, possiamo predire quale sarà il valore dell'uscita sfruttando l'equazione di uscita classica $y = Cx$, quindi $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$
    - Si osserva quindi la differenza tra l'uscita vera y e l'uscita predetta $\hat{y}(t)$
      - Vorremmo stimare lo stato vero con lo stato stimato, ma il primo non lo conosciamo!
    - Quindi:

      $$y - \hat{y}(t) = Cx(t) - C\hat{x}(t)$$

      , ovvero:

      $$y - \hat{y}(t) = C[x(t) - \hat{x}(t)]$$

    - Quindi abbiamo una equivalenza tra due membri, di cui uno (la differenza tra gli stati, che vorrei calcolare) non la conosco, però è uguale a un'altra cosa (differenza tra le uscite) che si conosce, quindi riusciamo a trovare ciò che vogliamo
    - Nota: se $x(t) = \hat{x}(t)$ allora la stima è corretta al 100% e quindi anche il termine di correzione è nullo, cioè $y(t) - \hat{y}(t)$
      - Altrimenti se la stima non coincide, dovremo *correggere*
    - In altre parole, $y - C\hat{x}$ serve per vedere se la stima che facciamo è appurata oppure no: se la differenza non viene zero, allora dobbiamo correggere

PROGETTARE IL GUADAGNO L

Si vuole sincronizzare lo stato dell'osservatore con lo stato del processo $\mathcal{P}$, ovvero, rendere lì errore ci stima asintoticamente a zero:

$$\text{Vogliamo: } \hat{x} \approx \dot{x} \implies \lim_{t\to\infty} e = x(t) - \hat{x}(t) \approx 0$$

Si studia come varia nel tempo l'errore di stima (facendo la derivata), possiamo farlo perché sappiamo come varia lo stato (ovvero $\dot{x} = Ax + Bu$) e abbiamo anche un modello per la stima $\dot{\hat{x}}$

Quindi:
(calcoliamo la derivata dell'errore, per sapere cioè come sarà l'immediato futuro per ogni istante t, cioè avere una stima sufficientemente precisa dell'evoluzione)

$$P: \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{Ax + Bu} \\ y = Cx \end{cases} \qquad O: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})} \end{cases}$$

$e = x - \hat{x}$ errore di stima

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \qquad \frac{d}{dt} e(t) = \frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} \hat{x}(t)$$

$$\dot{e} = \underbrace{Ax + Bu} - \underbrace{\left[A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})\right]}$$

$$\dot{e} = Ax - A\hat{x} + \cancel{Bu} - \cancel{Bu} - L(y - C\hat{x})$$

la dinamica di $e(t)$ non dipende da $u(t)$

- La dinamica (evoluzione) della stima $e(t)$ non dipende dall'ingresso $u(t)$

Possiamo riscrivere y in termini di uscita e poi osservare in ciò che ci rimane l'errore di stima:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) - L(Cx - C\hat{x})$$

$$\dot{e} = A\underbrace{(x - \hat{x})}_{e} - LC\underbrace{(x - \hat{x})}_{e} = Ae - LCe$$

$$\dot{e} = (A - LC)\, e$$

Abbiamo ottenuto **la dinamica dell'errore di uscita**, ovvero come evolve nel tempo l'errore di stima (cioè la differenza tra stato vero e stato stimato supponendo che quello vero evolva con la dinamica $Ax + Bu$ e che quello stimato sia generato con l'osservatore $\mathcal{O}$):

$$\dot{e} = (A - Lc)\; e$$

- Che è un **sistema LTI autonomo** con matrice della dinamica $A - LC$

Quindi il modo formale per vedere se il sistema funziona, è andare a vedere come varia l'errore di stima

IDEA

Ci rimane da scegliere L (parametro di progetto) apposito tale da rendere la matrice della dinamica $A - LC$ **asintoticamente stabile** (tutti gli autovalori con $\mathrm{Re} < 0$)

- Se lo facciamo, allora *l'errore di stima* tende a zero
- Quindi dobbiamo trovare la soluzione del sistema LTI autonomo che viene qualcosa del tipo:

$$\exp[(A - LC)t]\; e(0) \to \underbrace{e^{(A-LC)t}}_{\text{esponenziale}} \quad \underbrace{e(0)}_{\text{errore iniziale}}$$

- ovvero: esponenziale di matrice per condizione iniziale (data dall'errore di stima al tempo zero essendo un sistema TI)

Fatto 3.13 Se guadagno L dell'osservatore progettato in modo tale che $A - LC$ con tutti autovalori con Re < 0+

$\Rightarrow$ errore di stima $e(t)$ converge a 0 per $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

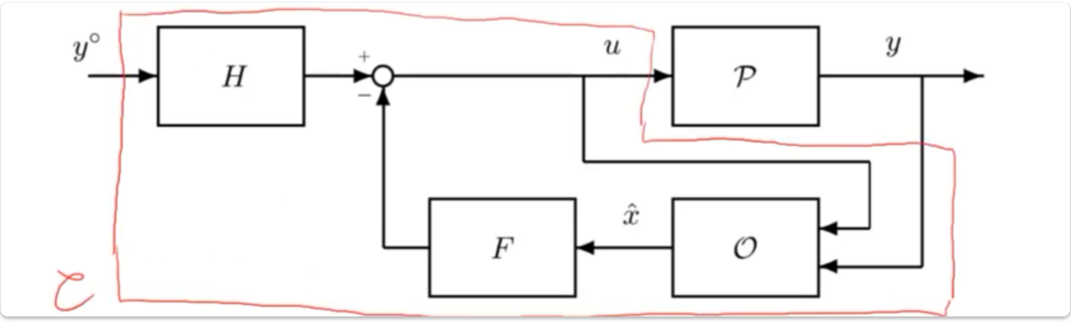
$\Rightarrow$ stato $\hat{x}(t)$ dell'osservatore si sincronizza con lo stato vero $x(t)$

Nota:
Situazione simile alla retroazione sullo stato in cui avevamo $A - BF$ e dovevamo trovare F

- Qui invece abbiamo $A - LC$ e dobbiamo trovare L, che in generale ha dimensione $\dim(x) \times \dim(y)$, in caso SISO: $\dim(x) \times 1$

REGOLATORE

È un sistema di controllo formato dalla combinazione dell'osservatore dello stato e una retroazione sullo stato stimato



Quindi:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} u = -F\,\hat{x} + H\,y^o \\ \dfrac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \end{cases}$$

Con i parametri da trovare che sono (caso SISO):

- F: vettore riga
- H: scalare
- L: vettore colonna

> *In generale quindi prima si stima uno stato con l'osservatore $\mathcal{O}$, in modo tale da avere un vettore $\hat{x}$ sufficientemente buono su cui accedere; e poi appunto applichiamo la retroazione su tale stato stimato*

Possiamo quindi analizzare il sistema di controllo per capire l'effetto sul sistema (dinamica in ciclo chiuso - polinomio caratteristico, funzione trasferimento)

DINAMICA IN CICLO CHIUSO

Studio cosa succede interconnettendo $\mathcal{P}$ con $\mathcal{C}$

- Riscrivo tutto in termini di errori di stima (quindi anche la retroazione sarà imprecisa se progettiamo male il sistema - ma in generale se l'errore di stima è nullo allora abbiamo asintoticamente lo stesso risultato)
  - Riscrivere in termini di errore di stima è più comodo per l'analisi

Infatti:

- **Processo:**

$$\mathcal{P}:\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & Ax+Bu\\ y & = & Cx\end{array}\right.$$

- **Regolatore:**

$$\mathcal{C}:\left\{\begin{array}{lcl}u & = & -F\,\hat{x}+H\,y^\circ\\ \frac{d\hat{x}}{dt} & = & A\,\hat{x}+B\,u+L\,(y-C\,\hat{x})\end{array}\right.$$

- Legge di controllo può essere scritta in termini di stato x ed errore di stima $e=x-\hat{x}$

$$u=-F\,\hat{x}+H\,y^\circ=-F\,(x-e)+H\,y^\circ$$

- Dinamica complessiva in ciclo chiuso

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & (A-B\,F)x+B\,F\,e+B\,H\,y^\circ\\ \dot{e} & = & (A-L\,C)\,e\\ y & = & C\,x\end{array}\right.$$

- Dinamica in ciclo chiuso

$$\left\{\begin{array}{lcl}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}A-BF & B\,F\\ 0 & A-L\,C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\,H\\ 0\end{bmatrix}y^\circ\\ y & = & \begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

MATRICE DELLA DINAMICA

Dove si individua **la matrice della dinamica in ciclo chiuso A^***:

$$A^*=\begin{bmatrix}A-BF & B\,F\\ 0 & A-L\,C\end{bmatrix}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO IN CICLO CHIUSO

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è $\varphi^*(s)=\det(sI-A^*)$

- Essendo A^* triangolare a blocchi basta fare il prodotto dei determinanti dei blocchi diagonali, ovvero

$$\varphi^*(s)=\det(sI-A+B\,F)\cdot\det(sI-A+L\,C)$$

- il primo blocco lo avevamo già quando si applicava la retroazione sullo stato, e dipende da F
- il secondo blocco invece è nuovo, ed è dovuto alla presenza dell'osservatore, e dipende da L

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Si può dimostrare che è la stessa della retroazione sullo stato

Quindi,

RIASSUMENDO:

Fatto 3.14 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo con regolatore (osservatore dello stato $+$ retroazione sullo stato stimato)

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \underbrace{\det(sI - A + BF)}_{\text{associato al controllo in retroazione nello stato}} \overbrace{\det(sI - A + LC)}^{\text{associato alla dinamica dell'errore di stima}}$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\det(sI - A + BF)} H$$

con $r(s) = C\text{Adj}(sI - A)B$

- L e F si possono progettare indipendentemente! (grazie al **principio di separazione**)
    - uno mi serve per rendere stabile una parte (retroazione sullo stato), l'altro mi serve per rendere stabile un'altra parte (dinamica errore di stima tendente a zero dopo un certo tempo)
    - infatti anche la funzione di trasferimento rimane la stessa in quando dipende solo da F (e H)
- Quindi ci rimane da capire solo come progettare L
    - La vera differenza in fase di progetto è proprio il secondo blocco di $\varphi^*(s)$

PROGETTO DEL REGOLATORE

Progetto di un sistema di controllo con regolatore

1. Scegliere F guadagno in *feedback* tale che la matrice $A - BF$ sia asintoticamente stabile (specifica 1) e la funzione di trasferimento in ciclo chiuso garantisca un transitorio soddisfacente (specifica 3)
2. Scegliere H guadagno in *feedforward* tale che $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2)
3. Scegliere L guadagno dell'*osservatore* tale cha la matrice $A - LC$ sia asintoticamente stabile (specifica 1)

- Progetto di F e H come nel caso di retroazione algebrica sullo stato (possiamo far finta che l'osservatore non ci sia)
- Tipicamente si cerca di posizionare gli autovalori di $A - LC$ nel semipiano sinistro molto lontane dall'asse immaginario per garantire che l'errore di stima converga rapidamente a 0

- la parte nuova è la 3)
- e magari si cerca di porre molto lontano dall'asse immaginario gli autovalori di $A - LC$ per avere errore di stima che converge rapidamente a 0

PROGETTO DI L

Duale al caso per il guadagno F, in cui di diceva che $A - BF$ era asintoticamente stabile $\iff$ tutti gli autovalori di φ_{nc} (non *controllabili*) avevano $\text{Re} < 0$ (perché avevamo una moltiplicazione per la matrice B)

Per progettare L si osservano gli autovalori *osservabili* (perché abbiamo una moltiplicazione per C). Essendo non modificabili (perché non compaiono in uscita), allora si richiede che abbiano $\text{Re} < 0$ (ovvero siano già stabili, perché non posso modificarli appunto)

- se rientro in queste ipotesi riesco a *stimare lo stato*
- viceversa possiamo modificare a piacere gli autovalori osservarbili di φ_o

$(sI-A)^{-1}B$

- Nella matrice $A - B\,F$, al variare del guadagno F:
  - autovalori non controllabili del sistema, radici di $\varphi_{\mathrm{nc}}(s)$, non possono essere modificati
  - controllabili del sistema, radici di $\varphi_{\mathrm{c}}(s)$, possono essere spostati liberamente nel piano complesso
- Esiste F tale che $A - B\,F$ asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori non controllabili del sistema, radici di $\varphi_{\mathrm{nc}}(s) = \varphi(s)/\varphi_{\mathrm{c}}(s)$, hanno Re < 0
- Analogamente, nella matrice della dinamica dell'osservatore $A - L\,C$ al variare del guadagno L:
  - autovalori **non osservabili** del sistema, radici di $\varphi_{\mathrm{no}}(s)$, **non** possono essere modificati
  - autovalori **osservabili** del sistema, radici di $\varphi_{\mathrm{o}}(s)$, possono essere spostati **liberamente** nel piano complesso (nel rispetto del vincolo che autovalori complessi sono sempre in coppie coniugate)

$C(sI-A)^{-1}$

Esiste L tale che $A - L\,C$ asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori non osservabili del sistema, radici di $\varphi_{\mathrm{no}}(s) = \varphi(s)/\varphi_{\mathrm{o}}(s)$, hanno Re < 0

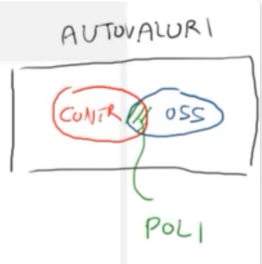
- ecco perché si parla di *osservatore*

BUONA POSIZIONE DEI PROBLEMI DI CONTROLLO E REGOLATORE

Mettiamo tutto insieme

Dato che:

- $$\{\text{poli del sistema}\} = \{\text{poli di } G(s) = b(s)/a(s)\} = \{\text{autovalori osservabili}\} \cap \{\text{autovalori controllabili}\}$$
- $$\{\text{autovalori nascosti}\} = \{\text{radici di } \varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)\} = \{\text{autovalori non osservabili e/o non controllabili}\}$$



Allora:

Fatto 3.15 È possibile scegliere F e L in modo tale che la matrici $A - B\,F$ e $A - L\,C$ siano asintoticamente stabili
$\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori nascosti, radici di $\varphi_h(s)$, hanno Re < 0
(problema di controllo in retroazione sull'uscita ben posto)

Quindi per avere un progetto con il **regolatore completo** (con F e L adatti), devo controllare che *tutti gli autovalori nascosti siano stabili*

- Analogamente (in altre parole), tutti gli autovalori instabili ($\mathrm{Re} \geq 0$) devono comparire come poli di $G(s)$ perché devono essere sia controllabili che osservabili

È una condizione necessaria e sufficiente (se rispettata, riesco a muovere gli autovalori come voglio)