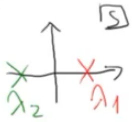
ESERCIZIO: STUDIO CONTROLLABILITA'/STABILITA'

- Trovo il polinomio caratteristico $\varphi(s)$
- Calcolo matrice inversa $(sI - A)^{-1}$
- Calcolo i polinomi:
  - Di controllo: $(sI - A)^{-1}B$
    - Trovo $\varphi_c(s)$ facendo il m.c.m degli elementi al denominatore nella matrice ottenuta
      - concludo sulla completa controllabilità o meno esplicitando eventualmente $\varphi_{nc}(s)$
  - Di osservabilità: $C(sI - A)^{-1}$
    - Trovo $\varphi_o(s)$ facendo il m.c.m degli elementi al denominatore nella matrice ottenuta
      - concludo sulla completa controllabilità o meno esplicitando eventualmente $\varphi_{no}(s)$
- Osservo le posizioni sul piano complesso di tutti gli autovalori ottenuti (di controllo e di osservabilità)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = ? \qquad \varphi_o(s) = ?$$



$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = \boxed{(s-1)}\boxed{(s+1)}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI-A) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ \cancel{1} + s - \cancel{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{s}{(s-1)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = (s-1)(s+1) \qquad \varphi_{nc}(s) = 1 \qquad \text{comp. contr.}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_o(s) = s-1 \qquad \varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)} = \frac{(s-1)(s+1)}{s-1} = s+1$$

- Controllo che effettivamente gli autovalori non osservabili sono tali, calcolando $Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$ e poi antitrasformando per vedere i modi naturali osservabili
  - In questo caso si vede solo il modo e^t associato a un autovalore osservabile $\lambda_1 = 1$
- Se calcoliamo la funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, rimangono solo gli autovalori sia osservabili che controllabili (in questo caso $\lambda_1 = 1$)

autovalori — modi naturali

$$\varphi(s) = (s-1)(s+1) \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \qquad e^t \quad e^{-t}$$

$$Y_\ell(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{x_1(0)}{s-1}$$

$$y_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_\ell(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x_1(0)}{s-1}\right\} = x_1(0)\, e^t\, 1(t)$$

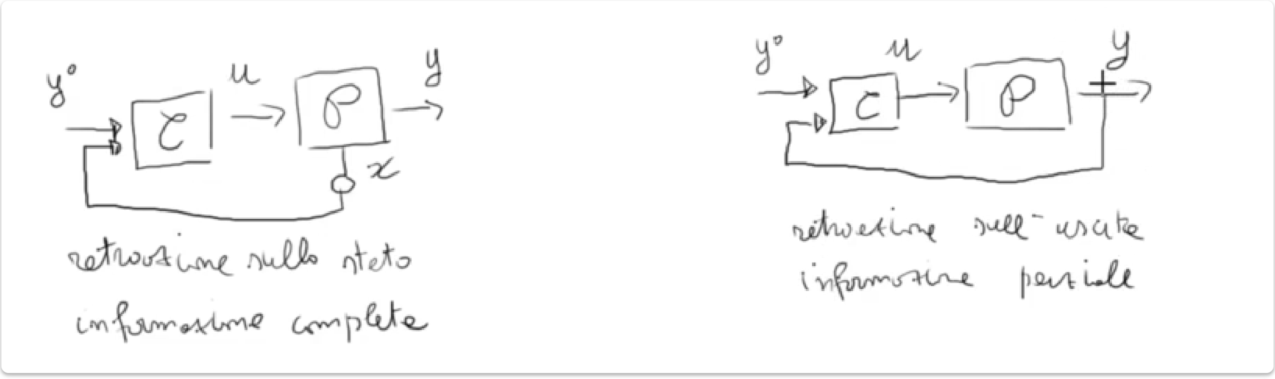
NB: nella risposta libera è presente solo il modo e^t associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$ osservabile

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$$

$$e(s) = s-1 \qquad \varphi_R(s) = \frac{\varphi(s)}{e(s)} = s+1$$

RETROAZIONE ALGEBRICA SULL'USCITA

- Finora abbiamo visto solo il controllo relativo alla retroazione sullo stato, che ci fornisce una informazione completa del sistema
  Adesso invece cerchiamo una informazione *parziale*, perché supponiamo di osservare solo i dati d'ingresso e uscita (e che quindi sia visibile in generale solo y)



- si può già intuire che la parte non osservabile non può essere modificata con il controllo in retroazione, perché non è presente in uscita
  - con il controllo in uscita quindi potremmo agire solo su ciò che è sia controllabile che osservabile (*ciò che è nascosto è incontrollabile*)
    - questo perché abbiamo accesso solo ad alcune variabili del sistema (di uscita)

LEGGE DI CONTROLLO

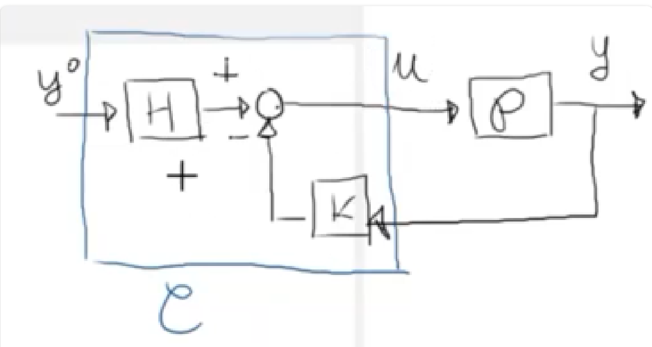
Utilizziamo in maniera duale rispetto a quanto visto sullo stato, una *funzione lienare sull'uscita*:

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -K\, y(t) + H\, y^{o}(t)$$

Molto simile a quella dello stato: $u(t) = -F\, x(t) + H\, y^{o}(t)$, dove come si vede avevamo informazioni dell'intero stato $x(t)$; adesso invece conosciamo solo l'uscita $y(t)$

- **Controllo in feedback**: $-Ky(t)$
  con F **guadagno in feedback** (retroazione)
- **Controllo in feedforward**: $Hy^{\circ}(t)$
  con H **guadagno in feedforward**
- **Informazione parziale**: non abbiamo accesso allo stato x ma solo all'uscita y

- a livello di notazione cambia lettera da stato a uscita: $F \to K$; perché adesso la retroazione è sull'uscita (quindi moltiplicata per y)



- esistono anche altri tipi di retroazione (questo è il caso più semplice di funzione lineare)

GUADAGNO IN FEEDBACK E IN FEEDFORWARD

Per soddisfare le specifiche di controllo dovremo specificare K e H
In generale: $\dim(K) = \dim(H) = \dim(u) \times \dim(y)$

Per sistemi **SISO**, u e y non sono vettori ma sono scalari:

$$K \text{ e } H \text{ sono scalari}$$

A differenza delle equazioni dello stato in cui $F = [f_1, \ldots, f_n]$ aveva dimensione vettoriale riga $1 \times n$, dove n sono le variabili di stato

- Adesso invece **abbiamo meno gradi di libertà**, perché K non è più un vettore (con cui potevo un po' gestirmi i valori), ma è **uno scalare** (cioè un singolo numero / parametro)
- Scelte vincolate
  - Nello retroazione dello stato invece i poli controllabili potevo posizionarli come volevo e se il sistema era completamente controllabile potevo scegliere e personalizzare il polinomio in ciclo chiuso
  - Quindi la *retroazione sull'uscita è una particolare retroazione sullo stato in cui abbiamo fissata una direzione del guadagno* (quindi abbiamo un F prefissato)

$$\mathcal{C}: \; u = -Ky + Hy^\circ \qquad \mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$u = -\underbrace{KC}_{F}\,x + Hy^\circ$$

$$F = KC = k\,[c_1 \cdots c_n]$$

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = \det(sI - A + BKC)$$

unico parametro a disposizione per ottenere $\varphi^*(s)$

SISTEMA IN CICLO CHIUSO $\mathcal{P}^*$

- Processo

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Controllore

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -K\,y(t) + H\,y^\circ(t)$$

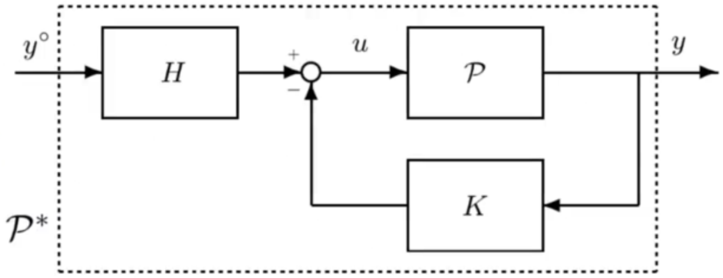
- Sostituendo la legge di controllo nell'equazione del processo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + B\left[-Ky(t) + Hy^\circ(t)\right] = \underbrace{(A - BKC)}_{A^*}\,x(t) + \underbrace{BH}_{B^*}\,y^\circ(t) \\ &= Ax + B[-KCx + Hy^\circ] \end{aligned}$$

- **Sistema in ciclo chiuso**

$$\mathcal{P}^*: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B\,K\,C)x(t) + B\,Hy^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Dove KC è l'equivalente di F per lo stato



Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BKC$ e $B^* = BH$

- Sistema in ciclo chiuso: sistema LTI TC con ingresso y° e uscita y
- Matrice della **dinamica in ciclo chiuso** $A^* = A - BKC$ dipende dal guadagno

- **Polinomio caratteristico in ciclo chiuso**

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BKC)$$

- **Funzione di trasferimento in ciclo chiuso**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C(sI - A^*)^{-1}B^* = C(sI - A + BKC)^{-1}BH$$

Nota: al variare del guadagno K possiamo **spostare gli autovalori** nel piano s
$\Rightarrow$ possiamo utilizzare K per modificare il comportamento dinamico e in particolare le proprietà di stabilità del sistema

Nota: Queste sono formule generali, poi noi ci concentreremo sui sistemi SISO che hanno formule più semplici

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CICLO CHIUSO

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \mathcal{C} : \begin{cases} u = -Ky + Hy^{\circ} \end{cases}$$

obiettivo: calcolare $G^*_{y^{\circ}y}(s)$

$\boxed{\text{Poniamo } x(0) = 0}$ (posso farlo perché mi interessa solo la risposta forzata)

$$y(t) = y_f(t)$$

$$Y(s) = Y_f(s) = G(s)U(s) \qquad Y(s) = C(sI-A)^{-1}\cancel{x(0)}^{\,0} + G(s)U(s)$$

$$C(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$\boxed{\mathcal{P}: \; Y(s) = G(s)U(s)} \qquad \boxed{\mathcal{C}: \; U(s) = -K\,Y(s) + H\,Y^{\circ}(s)}$$

$$\mathcal{P}^*: \; Y(s) = G(s)\left[-K\,Y(s) + H\,Y^{\circ}(s)\right] = -K\,G(s)\,Y(s) + G(s)\,H\,Y^{\circ}(s)$$

risolvo rispetto a $Y(s)$

$$Y(s) + K\,G(s)\,Y(s) = G(s)\,H\,Y^{\circ}(s) \qquad [1 + K\,G(s)]\,Y(s) = G(s)\,H\,Y^{\circ}(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)\,H}{1 + K\,G(s)}}_{G^*_{y^{\circ}y}(s)}\,Y^{\circ}(s)$$

Quindi:

Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^{\circ}y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}\,H$$

Che si può riscrivere in termini di polinomi, ricordando che $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$:

$$G^*_{y^{\circ}y}(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)}\,H \qquad G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = C(sI-A)^{-1}B$$

$$G^*_{y^{\circ}y}(s) = \frac{\frac{b(s)}{a(s)}}{1 + K\frac{b(s)}{a(s)}}\,H = \frac{\cancel{a(s)}\,\frac{b(s)}{\cancel{a(s)}}}{\frac{a(s) + K\,b(s)}{\cancel{a(s)}}\,\cancel{a(s)}}\,H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}\,H$$

Quindi:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \qquad G^*_{y^{\circ}y}(s) = \frac{b(s)}{\underbrace{a(s) + K\,b(s)}_{a^*(s)}}\,H = \frac{b(s)}{a^*(s)}\,H$$

$$+ \quad a^*(s) = a(s) + K\,b(s)$$

- dove i poli $a(s)$ sono quelli relativi prima di applicare il controllo sull'uscita
- dopo il controllo invece abbiamo al denominatore un nuovo polinomio che definisce i poli dopo il controllo, che denominiamo $a^*(s)$ [polinomio dei poli in ciclo chiuso]
  - Gli zeri rimangono gli stessi perché c'è sempre $b(s)$

Pertanto, **la retroazione algebrica di uscita modifica gli zeri ma non i poli**

MODO ALTERNATIVO PER POLINOMIO CARATTERISTICO A CICLO CHIUSO

Sappiamo che possiamo fattorizzare $\varphi(s)$ in anello aperto come: $\varphi(s) = a(s)\varphi_h(s)$
Applicando la retroazione algebrica si ottiene:

$$\varphi^*(s) = a^*(s)\;\varphi_h(s) = [a(s) + k\,b(s)]\;\varphi_h(s)$$

- questo perché con la retroazione algebrica sull'uscita si può modificare solo quello che è sia controllabile che osservabile
  - Quindi dopo il controllo i poli cambiano perché si esegue il passaggio $a(s) \to a^*(s)$ applicando il controllo, invece la parte nascosta non varia, quindi $\varphi_h(s) \to \varphi_h(s)$ applicando il controllo

  $\varphi(s) = a(s)\,\varphi_h(s)$ $\qquad$ $\varphi^*(s) = a^*(s)\,\varphi_h(s) = [a(s) + kb(s)]\,\varphi_h(s)$

  $u = -Fy + Hy^\circ$

- quindi per sistemi **SISO** abbiamo formule più semplici

RIASSUMENDO

Fatto 3.8 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita $u = -Ky + Hy^\circ$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\,a^*(s) = \varphi_h(s)\,[a(s) + K\,b(s)]$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

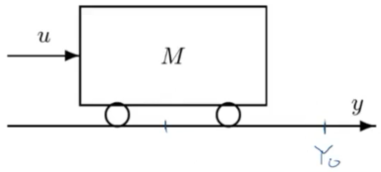
$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}H$$

- dove abbiamo visto per bene solo la dimostrazione della funzione di trasferimento (il polinomio caratteristico invece abbiamo solo l'idea di dimostrazione)
  Inoltre:
  - La retroazione algebrica sull'uscita modifica i poli ma **non** modifica gli zeri di $G^*_{y^\circ y}(s)$
  - Poiché abbiamo solo il parametro scalare K a disposizione, i poli in ciclo chiuso non possono essere scelti liberamente, ma ci sono dei vincoli!

ESEMPIO: CARRELLO

Portare il carrello in posizione Y_0 (setpoint) misurando solo la posizione y (tramite il contorollo u)

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



Obiettivo: portare il carrello in una posizione desiderata Y_0 tramite il controllo u misurando solo la posizione y

- Problema di controllo con riferimento costante

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

- Retroazione algebrica sull'uscita

$$u = -K\,y + H\,y^\circ$$

- calcolo il polinomio caratteristico $\varphi(s)$
- calcolo la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$
- fattorizzo il polinomio caratteristico (con la parte nascosta) $\varphi(s) = a(s)\varphi_h(s)$
- posso scrivermi sia $\varphi^*(s)$ che $G^*_{y^\circ y}(s)$
- faccio il progetto (specifiche $1, 2, 3$)

> - *calcolo il polinomio caratteristico $\varphi(s)$*
> - *calcolo la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$*
> - *fattorizzo il polinomio caratteristico (con la parte nascosta) $\varphi(s) = a(s)\varphi_h(s)$*
>
> - Equazioni di stato per $M = 1$ e $b = 1$
>
> $$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$
>
> $$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$
>
> - Polinomio caratteristico
>
> $$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = s\,(s+1)$$
>
> - Funzione di trasferimento
>
> $$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s\,(s+1)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$
>
> - Entrambi gli autovalori sono poli di $G(s)$
> $\Rightarrow$ non ci sono autovalori nascosti (sistema completamente controllabile e osservabile)
>
> $$a(s) = s\,(s+1) \qquad b(s) = 1 \qquad \varphi_h(s) = 1 \quad + \quad \varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)} = 1$$

> *posso scrivermi sia $\varphi^*(s)$ che $G^*_{y^\circ y}(s)$*

Da cui, applicando le formule:
(notiamo come su $a^*(s)$ posso modificare un solo parametro K)

$$a(s) = s(s+1) \qquad b(s) = 1 \qquad \varphi_R(s) = 1$$

$$a^*(s) = a(s) + K\,b(s) = s(s+1) + K = s^2 + s + K$$

$$\varphi^*(s) = a^*(s)\,\varphi_R(s) = s^2 + s + K$$

$$G^{*\,+}_{y^o y}(s) = \frac{b(s)}{a^*(s)} H = \frac{1}{s^2+s+K} H$$

> *faccio il progetto (specifiche $1, 2, 3$)*

Proseguo con le specifiche:

specifica 1 : stabilità asintotica in ciclo chiuso

Per Cartesio $\varphi^*(s)$ ha entrambe le radici con Re < 0 $\iff$ $\boxed{K > 0}$

specifica 2 : guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^o y}(0) = 1$

$$G^*_{y^o y}(0) = \frac{1}{K} H = 1 \qquad \boxed{H = K}$$

Per la specifica 3 notiamo come la funzione di trasferimento sia del II ordine!

- Solo che $a^*(s)$ non possiamo crearlo personalizzato (quindi non potrò scegliere la posizione di tutti i poli). Si nota bene osservando $a^*(s)$ in cui compare K una sola volta in questo esercizio
  - Devo trovare il cosiddetto *luogo delle radici*

  - Poli in ciclo chiuso

  $$p^*_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

  Nota: al variare di K i poli in ciclo chiuso non posso essere assegnati liberamente ma seguono un percorso prestabilito sul piano complesso detto **luogo delle radici**

- dove è stata applicata la formula: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si nota che i poli in ciclo chiuso variano al variare di K

LUOGO RADICI PER $K < 0$

$\varphi(s) = a(s) = s(s+1)$

$p_1 = -1$

$p_2 = 0$

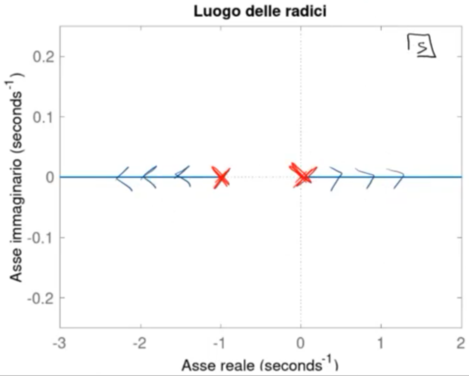
- Poli in ciclo chiuso

$$p^*_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- Per $K < 0$ $\Rightarrow$ 2 poli reali

$$p_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4K}}{2} \qquad p_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

$k=0$ $p_1=-1$ $\qquad$ $k=0$ $p_2=0$



- Luogo delle radici per $K < 0$
- Per $K = 0$ si parte dai poli in anello aperto $p_1 = -1$ e $p_2 = 0$
- p_1 tende a $-\infty$ per $K \to -\infty$
- p_2 tende a $+\infty$ per $K \to -\infty$

25 / 68

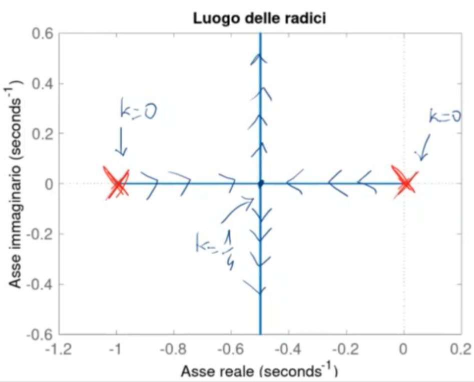
- grafico che ci dice come si muovono i poli sul piano s applicando il controllo
  - Se $K = 0$ non abbiamo il controllo
  - Se $K < 0$ (vincolo) i poli cambiano i posizione
- L'insieme di tutti i possibili poli è il *luogo dei poli*

LUOGO RADICI PER $K > 0$

- Poli in ciclo chiuso

$$p^*_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- Per $0 < K \leq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 2 poli reali
- Per $K > \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 2 poli complessi coniugati



- Luogo delle radici per $K > 0$
- Per $K = 0$ si parte dai poli in anello aperto $p_1 = -1$ e $p_2 = 0$
- Per $K = \frac{1}{4}$ abbiamo 2 poli coincidenti in $-\frac{1}{2}$
- Per $K \to +\infty$ abbiamo 2 poli complessi coniugati con parte reale $-\frac{1}{2}$ e parte immaginaria tendente a $\pm\infty$

Si vede che i poli con il controllo si muovono ma non completamente in modo arbitrario, perché abbiamo dei vincoli

NOTA:

- non è richiesto questo grafico all'esame

ALTRO ESEMPIO: STABILITA' NON POSSIBILE

Nota: se viene data la funzione di trasferimento $G(s)$ allora è *sottinteso* che non c'è la parte di autovalori nascosta, quindi $\varphi_h(s) = 1$

- Manca un termine in s quindi non riesco ad applicare la regola di Cartesio (per avere radici minori di zero di $\varphi^*(s)$)

- non riesco variando K a rendere entrambi i poli $p^*_{1,2}$ con parte $\mathrm{Re} < 0$
  - Quindi $u = -Ky + Hy^o$ non è una legge sufficiente per poter stabilizzare
  - (Ci saranno leggi di controllo più generali per farlo lo stesso)

$G(s) = \frac{1}{s^2-1}$ $\quad e(s) = s^2 - 1$ $\quad b(s) = 1$ $\quad \varphi_R(s) = 1$

$\varphi(s) = e(s)\ \varphi_R(s) = s^2 - 1$ $\qquad u = -Ky + Hy^o$

$\varphi^*(s) = e^*(s)\ \varphi_R(s) = [e(s) + K\,b(s)]\ \varphi_R(s)$

$$\varphi^*(s) = s^2 - 1 + K$$

Non esiste K stabilizzante perché $\varphi^*(s)$ non ha il termine s

$p^*_{1,2} = \pm\sqrt{K-1}$

$K > 1$ coppia di poli reali di segno opposto

$K < 1$ coppia di poli immaginari

$s^2 - 1 + K = 0 \qquad s^2 = K - 1$

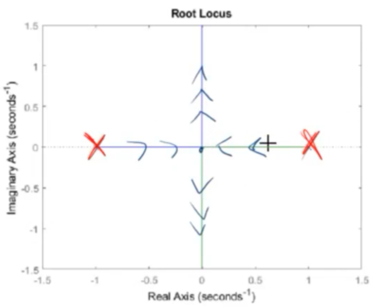
Infatti, si nota che non si stabilizza tracciando il luogo delle radici:

- non riesco a portare entrambi i poli sul semipiano sinistro

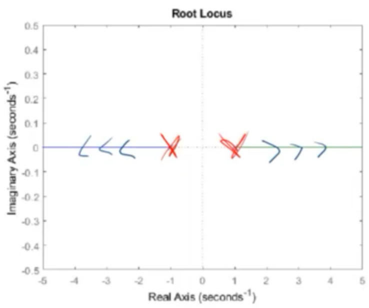
- Poli in ciclo chiuso $\qquad \varphi(s) = e(s) = s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$

  $p^*_{1,2} = \pm\sqrt{1-K}$

- Dal tracciamento del luogo delle radici si vede che per ogni K ho sempre almeno un polo con Re≥ 0



Luogo delle radici per $K > 0$



Luogo delle radici per $K < 0$