ESERCIZI CALCOLO ANTITRASFORMATA

0) LINEE GUIDA + Applicazione teorema dei residui

Passi per l'antitrasformata:

- Rendo il denominatore monico (coefficiente grado più alto uguale a 1)
- Fattorizzo il denominatore ed eventualmente anche il numeratore
- Controllo eventuali semplificazioni
- Individuo esplicitamente i poli (radici di $a(s)$)
- Posiziono i poli sul piano complesso, così da capire e classificare i modi di evoluzione associati
- Fratti semplici (tanti quanti sono i poli)
- Esplicito la combinazione lineare tra i K_i e i modi di evoluzione associati ai poli p_i
- In certi casi semplici (vedi esercizio 3), si può concludere subito il calcolo dell'antitrasformata da tabellina, scomponendo $F(s)$ (capita quando ho poli puramente immaginari), altrimenti:
- Calcolo i residui applicando il teorema: $K_i = \lim_{s \to p_i}(s - p_i)F(s)$
  - compare una semplificazione: se non compare, fattorizzo il polinomio per farla comparire
  - scrivo parte reale e parte immaginaria α_i e β_i, stando attento nel caso della parte immaginaria a non scrivere anche j, ovvero scrivo solo: $\beta_i = numero$ e non $b_i = j\, numero$
- eventualmente faccio il grafico
  - Nota: avrò una somma di termini da plottare, se uno di questi diverge allora anche il grafico diverge

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 - s} = \frac{s+1}{s(s-1)}$$

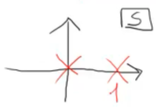
$b(s) := s+1$

$a(s) := s(s-1)$

$a(s) = s(s-1) = 0 \iff s=0 \quad s=1$

$p_1 = 0$

$p_2 = 1$



$p_1 = 0 \Rightarrow$ modo di evoluzione $e^{p_1 t}\,1(t) = 1(t)$ limitato non oscillante

$p_2 = 1 \Rightarrow e^{p_2 t}\,1(t) = e^{t}\,1(t)$ divergente non oscillante

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-1}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = K_1 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + K_2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = K_1 1(t) + K_2 e^{t} 1(t)$$

$$= -1(t) + 2e^{t} 1(t)$$

$$K_1 = \lim_{s \to p_1}(s - p_1)F(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{s+1}{\cancel{s}(s-1)} = -1$$

$$K_2 = \lim_{s \to p_2}(s - p_2)F(s) = \lim_{s \to 1} \cancel{(s-1)} \frac{(s+1)}{s\cancel{(s-1)}} = 2$$

1)

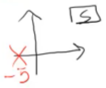
- Qui ci sono semplificazioni al denominatore quando lo fattorizzo
  - Un solo modo di evoluzione dovuto proprio alla semplificazione (apparentemente sembra ce ne

siano 2)

1) $F(s) = \frac{5-s}{2s^2-50} = \frac{-\frac{s}{2}+\frac{5}{2}}{s^2-25} = \frac{-\frac{1}{2}\cancel{(s-5)}}{\cancel{(s-5)}(s+5)} = \frac{-\frac{1}{2}}{s+5}$

$b(s) = -\frac{1}{2}$ $\quad a(s) = s+5$

$p_1 = -5$



$\Rightarrow$ modo di evoluzione $e^{p_1 t}1(t) = e^{-5t}1(t)$
convergente non oscillante

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2}e^{-5t}1(t)$

2)

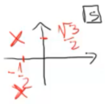
- Non ci sono semplificazioni
- Coppia di poli complessi coniugati
  - Convergente oscillante in questo caso perché parte reale minore di zero e parte immaginaria diversa da zero

2) $F(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ $\quad b(s)=1$ $\quad a(s) = s^2+s+1$

$a(s) = s^2+s+1 = 0 \iff s = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$



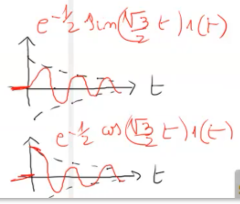
$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$

$p_2 = \sigma_1 - j\omega_1$

$\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ modi di evoluzione convergenti oscillanti $e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t)1(t)$, $e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t)1(t)$

$e^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)1(t)$, $e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)1(t)$



- Calcoliamo l'antitrasformata utilizzando la formula vista per i poli complessi coniugati
- Nota: scrivo β_1 (parte immaginaria) senza il j, perché deve rimanere un segnale reale alla fine

$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$

$k_1 = \alpha_1 + j\beta_1$

$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s-\bar{p}_1}$ $\quad p_2 = \bar{p}_1$

$\mathcal{L}^{-1}\downarrow$

$f(t) = 2[\alpha_1\cos(\omega_1 t) - \beta_1\sin(\omega_1 t)]e^{\sigma_1 t}1(t)$

$p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(t) = 2\left[\cancel{\alpha_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}^{\,0} - \beta_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}t}1(t) = +\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$

$k_1 = \lim_{s\to p_1}(s-p_1)F(s) = \lim_{s\to -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{s^2+s+1}$ $\quad (s-p_1)(s-p_2)$ $\quad (s-p_1)(s-\bar{p}_1)$

$= \lim_{s\to -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} \cancel{\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \frac{1}{\cancel{\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= \frac{1}{\cancel{-\frac{1}{2}}+j\frac{\sqrt{3}}{2}+\cancel{\frac{1}{2}}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{j\sqrt{3}} = \frac{j}{j^2\sqrt{3}} = -\frac{j}{\sqrt{3}} = -j\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha_1 = 0$ $\quad \beta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

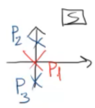
- Avevamo previsto due modi di evoluzione ma alla fine ne è presente uno solo. Questo può succedere quando abbiamo poli complessi coniugati (l'importante è che almeno uno ci sia)

3)

- Polo reale + poli complessi coniugati
  - polo reale? Modo esponenziale

- coppia poli complessi coniugati (immaginari)? Formula

3) $F(s) = \frac{2}{s^3+4s} = \frac{2}{s(s^2+4)}$ $\qquad b(s) = 2$, $\quad e(s) = s(s^2+4)$



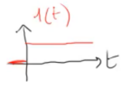
$e(s) = 0 \iff s(s^2+4) = 0 \iff \begin{matrix} s=0 \\ s^2=-4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} s=0 \\ s=\pm j2 \end{matrix}$

$p_1 = 0$

$p_2 = j2 \qquad p_2 = \sigma_2 + j\omega_2 \qquad \sigma_2 = 0 \quad \omega_2 = 2$

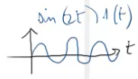
$p_3 = -j2 \qquad p_3 = \sigma_2 - j\omega_2$

$p_1 = 0 \Rightarrow$ modo di evoluzione $e^{p_1 t}\,1(t) = 1(t)$



limitato non oscillante

$\begin{matrix} p_2 = j2 \\ p_3 = -j2 \end{matrix} \Rightarrow$ modi di evoluzione $\begin{matrix} e^{\sigma_2 t}\cos(\omega_2 t)\cdot 1(t) = \cos(2t)\,1(t) \\ e^{\sigma_2 t}\sin(\omega_2 t)\cdot 1(t) = \sin(2t)\,1(t) \end{matrix}$



limitati oscillanti

$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{\bar{K}_2}{s-\bar{p}_2} \qquad K_2 = \alpha_2 + j\beta_2$

$f(t) = \left\{K_1 e^{p_1 t} + 2\left[\alpha_2 \cos(\omega_2 t) - \beta_2 \sin(\omega_2 t)\right] e^{\sigma_2 t}\right\} 1(t)$

$= \left\{K_1 + 2\left[\alpha_2 \cos(2t) - \beta_2 \sin(2t)\right]\right\} 1(t)$

- calcolo i residui (teorema - formula)
  - fattorizzo il denominatore nel calcolo del secondo residuo per eseguire la semplificazione

$K_1 = \lim_{s \to p_1} (s-p_1) F(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{2}{\cancel{s}(s^2+4)} = \frac{1}{2}$

$p_1 = 0$

$K_2 = \lim_{s \to p_2} (s-p_2) F(s) = \lim_{s \to j2} (s-j2) \frac{2}{s(s^2+4)} = \lim_{s \to j2} \cancel{(s-j2)} \frac{2}{s\,\cancel{(s-j2)}(s+j2)}$

$= \frac{\cancel{2}}{j\cancel{2} \cdot j4} = \frac{1}{4j^2} = -\frac{1}{4}$

$p_2 = j2$

$K_2 = \alpha_2 + j\beta_2 \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{4} \qquad \beta_2 = 0$

$f(t) = \left\{K_1 + 2\left[\alpha_2 \cos(2t) - \cancelto{0}{\beta_2} \sin(2t)\right]\right\} 1(t)$

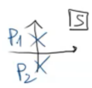
$f(t) = \frac{1}{2}\,1(t) \quad -\frac{1}{2}\cos(2t)\,1(t)$

3)

- poli puramente immaginari $\Rightarrow$ modi evoluzione "puramente" oscillatori
- non applico il teorema dei residui, perché scomponendo $F(s)$ si trova da tabellina le antitrasformate relative

4) $F(s) = \frac{5s+2}{s^2+1} \qquad b(s) = 5s+2, \quad e(s) = s^2+1$

$e(s) = 0 \iff s^2+1 = 0 \iff s^2 = -1 \iff p_{1,2} = \pm j \qquad \begin{matrix} \sigma_1 = 0 \\ \omega_1 = 1 \end{matrix}$



modi di evoluzione $e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t)\,1(t)$, $e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t)\,1(t)$

$\sin(t)\,1(t)$, $\cos(t)\,1(t)$

limitati oscillanti

$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$F(s) = \frac{5s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$

$f(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$

$= 5\cos(t)\,1(t) + 2\sin(t)\,1(t)$

- entrambi i modi presenti (seno e coseno)
- sennò coi residui tornava uguale

POLI CON MOLTEPLICITA' MAGGIORE DI UNO

Partendo da:

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

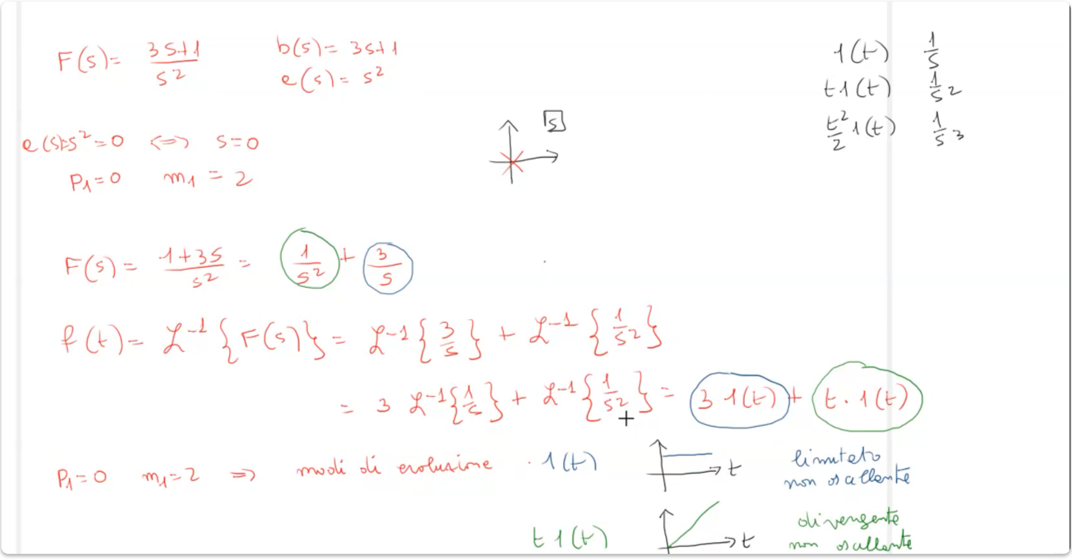
Se un polo p_i ha molteplicità m_i, possiamo riscrivere, fattorizzando quando necessario:

$$F(s) = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s - p_i)^{m_i}}$$

Ricordando anche che la somma delle molteplicità deve essere uguale al grado "totale" n: $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

ESEMPIO

- Polo p_1 con molteplicità $2 \Rightarrow 2$ radici coincidenti (in questo caso) in 0
- abbiamo due termini associato al polo in 0
  - Questo perché abbiamo molteplicità 2, ovvero **abbiamo tanti modi di evoluzione quanto è la molteplicità**
  - in generale aumentando la molteplicità si va incontro a una divergenza del grafico relativo al modo di evoluzione



TEOREMA DEI RESIDUI - CASO GENERALE

- **Associati a ogni polo abbiamo tanti termini e residui quanto è molteplicità del polo stesso**
  - Esempio: molteplicità 5 allora ho 5 termini con associati altrettanti residui

- Siano $p_1, \dots, p_k$ i poli di $F(s)$ (radici di $a(s)$) con le loro molteplicità $m_1, \dots, m_k$ e scriviamo

$$F(s) = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s-p_i)^{m_i}} = \frac{b(s)}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_k)^{m_k}}$$

Fatto 2.5 Si consideri una funzione razionale **strettamente propria**. Allora $F(s)$ ammette un'espansione in fratti nella forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{K_{i1}}{s-p_i} + \frac{K_{i2}}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{K_{im_i}}{(s-p_i)^{m_i}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i}\frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{\ell}} \end{aligned}$$

$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}$

$K_{11} = 3 \quad K_{12} = 1$

dove $K_{i\ell}$ è detto **residuo di ordine** ℓ associato al polo p_i e si calcola come

$$K_{i\ell} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(m_i-\ell)!}\frac{d^{(m_i-\ell)}}{ds^{m_i-\ell}}\left[(s-p_i)^{m_i}F(s)\right]$$

- non faremo esercizi di calcolo di residui con molteplicità maggiore di 1
- però è necessario sapere i modi di evoluzione e l'antitrasformata dei singoli termini (da tabellina)

$p_i \quad m_i$

- Consideriamo il segnale

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

- Dalla scomposizione in fratti semplici, nel caso generale

$$F(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i}\frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{\ell}} = \sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{K_{i1}}{s-p_i} + \frac{K_{i2}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{K_{im_i}}{(s-p_i)^{m_i}}\right\}$$

e dalla linearità dell'antitrasformata di Laplace, abbiamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i}\frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{\ell}}\right\} \qquad + \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i}K_{i\ell}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p_i)^{\ell}}\right\} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i}\frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!}t^{\ell-1}e^{p_i t}1(t) \end{aligned}$$

A un polo p_i di molteplicità m_i sono associati i **modi**

$$e^{p_i t}1(t),\ t\,e^{p_i t}1(t),\ \dots,\ t^{m_i-1}e^{p_i t}1(t)$$

Ciascun termine $\frac{k_{i\ell}}{(s-p_i)^{\ell}}$ ha associato un modo di evoluzione $t^{\ell-1}e^{p_i t}1(t)$

- conoscendo un polo con la sua molteplicità, posso scrivere i relativi modi, che sono tanti esponenziali quanto è la molteplicità e ciascuno di essi è pre-moltiplicato per $1, t, t^2, \dots, t_i^m - 1$
  - se il polo è complesso prenderemo ciascun modo "a coppie", come visto finora