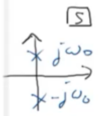
SINUSOIDE

- Leggermente più complesso perché abbiamo poli puramente immaginari nella trasformata
  - Facendo il prodotto per calcolare $Y_f(s)$ otteniamo una funzione che va poi separata coi fratti semplici. In particolare ancora una volta, mi interessa solo l'addendo relativo all'ingresso ovvero $Y_f^U(s)$
    - Siccome l'ingresso ha due poli, abbiamo due addendi e quindi due residui $\tilde{K}_1$ e $\tilde{K}_2$
- Per trovare il regime permanente faccio l'antitrasformata dei due fratti semplici che mi interessano, così da ottenere appunto $y_f^U(s)$
- Basta trovare uno dei due residui perché sono l'uno il complesso coniugato dell'altro
  Tutto questo vale se $G(s)$ non ha poli in $\pm j\omega_0$ (sennò entra in risonanza)
  - Ad esempio il primo residuo si calcola come: $\tilde{K}_1 = \lim_{s \to j\omega_0}(s - j\omega_0)Y_f(s)$ e invece l'altro è il realtivo coniugato appunto

- Consideriamo un **ingresso sinusoidale** di ampiezza U_0 e frequenza ω_0

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)1(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(s) = \frac{U_0\,\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{a}(s)}$$

$\tilde{a}(s) = s^2 + \omega_0^2 = (s+j\omega_0)(s-j\omega_0)$



- Consideriamo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{U_0\,\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{b(s)}{a(s)}\,\frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{a}(s)}$$

- Supponendo che $G(s)$ non abbia poli in $\pm j\omega_0$

$$Y_f(s) = Y_f^G(s) + \underbrace{\frac{\tilde{K}_1}{s-j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s+j\omega_0}}_{Y_f^U(s)}$$

con $\tilde{K}_2$ complesso coniugato di $\tilde{K}_1$

$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{K}_1}{s-j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s+j\omega_0}\right\}$

> > *Otteniamo come regime permanente ancora una sinusoide di frequenza ω_0*

CALCOLIAMO IL RESIDUO

- Fattorizziamo il denominatore $U(s) = s^2 + \omega_0^2$ in relazione ai poli di ciò che moltiplica $Y_f(s)$, ovvero $s - j\omega_0$, così da ottenere le (necessarie) semplificazioni
- Riscrivo poi in termini di parte reale e parte immaginaria di $G(s)$, con $s = j\omega_0$ così da capire come sono fatte parte reale e immaginaria del residuo
  - Viene $-$ all'ultimo passaggio perché $\frac{1}{j} = -j$

- Notiamo che il residuo dipende dalla funzione di trasferimento

$$\tilde{K}_1 = \lim_{s \to j\omega_0} (s - j\omega_0) Y_f(s) = \lim_{s \to j\omega_0} (s - j\omega_0)\, G(s) \underbrace{\frac{U_0\,\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}}_{U(s)}$$

$$= \lim_{s \to j\omega_0} \cancel{(s - j\omega_0)}\, G(s) \frac{U_0\,\omega_0}{\cancel{(s - j\omega_0)}(s + j\omega_0)}$$

$$= G(j\omega_0) \frac{U_0\,\cancel{\omega_0}}{2j\,\cancel{\omega_0}}$$

$$G(j\omega_0) = Re\{G(j\omega_0)\} + j\, Im\{G(j\omega_0)\} \qquad \frac{1}{j} = -j$$

$$\tilde{K}_1 = Re\{G(j\omega_0)\} \frac{U_0}{2j} + \cancel{j}\, Im\{G(j\omega_0)\} \frac{U_0}{2\cancel{j}} \qquad +$$

$$= \frac{U_0}{2} Im\{G(j\omega_0)\} - \frac{U_0}{2} Re\{G(j\omega_0)\}$$

- $\tilde{K}_2$ come detto di ottiene facendo il coniugato di quanto appena ottenuto
  Infine si va a sostituire tutto in $Y_f(s)$ e poi si *antitrasforma* per tornare nel dominio del tempo

Dalle formule in tabellina per le antitrasformate

- Regime permanente in Laplace

$$Y_f^U(s) = \frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0}$$

- Regime permanente nel tempo

$$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0}\right\}$$

vedi slides sull'antitrasformata di Laplace

$$= 2\left[\mathrm{Re}\{\tilde{K}_1\}\cos(\omega_0 t) - \mathrm{Im}\{\tilde{K}_1\}\sin(\omega_0 t)\right] 1(t)$$

$$= \left[\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}\, U_0 \sin(\omega_0 t) + \mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}\, U_0 \cos(\omega_0 t)\right] 1(t)$$

$$\tilde{K}_1 = Im\{G(j\omega_0)\} \frac{U_0}{2} - j\, Re\{G(j\omega_0)\} \frac{U_0}{2} = \tilde{\alpha}_1 + j\tilde{\beta}_1$$

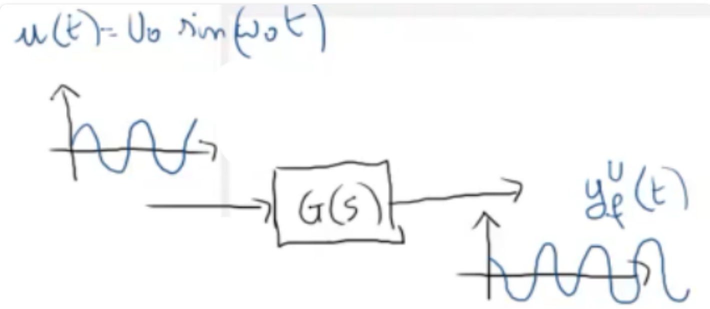
$$\tilde{\alpha}_1 = Re\{\tilde{K}_1\} = Im\{G(j\omega_0)\} \frac{U_0}{2}$$

$$\tilde{\beta}_1 = Im\{\tilde{K}_1\} = -Re\{G(j\omega_0)\} \frac{U_0}{2}$$

Quindi, sollecitando in ingresso il sistema con un ingresso sinusoidale si ottiene come regime permanente in uscita un segnale che ha lo stesso tipo di andamento, per essere precisi è una combinazione (lineare) di seno e coseno della stessa frequenza ω_0 dove il $\sin$ è moltiplicato per la parte reale di $j\omega_0$ mentre il $\cos$ è moltiplicato per la parte immaginaria di $j\omega_0$

- Quindi stessa frequenza (e diversa ampiezza)

Ingresso sinusoidale di frequenza ω_0 e ampiezza U_0	$\Rightarrow$	Regime permanente combinazione lineare di sinusoide e cosinusoide di frequenza ω_0 e ampiezze $\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}\, U_0$ e $\mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}\, U_0$



- Essendo G un segnale reale, poi la j va tolta dall'argomento!
  Comoda la formula finale perché per calcolare il regime permanente con ingresso sinusoidale mi basta applicare quella, senza calcolare esplicitamente l'antitrasformata

- In particolare quella vista riguarda la risposta di $G(s)$ con ingresso un $\sin$
  - Se avessimo il $\cos$ sarebbe:

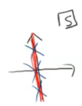
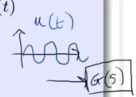
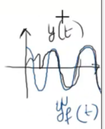
$$y_f^U(t) = \left[\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}\, U_0\, \cos(\omega_0 t) - \mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}\, U_0\, \sin(\omega_0 t)\right] 1(t)$$

Nota: $G(j\omega_0)$ viene detta *risposta in frequenza* o risposta armonica

> **Approfondimento: Formula equivalente per sistemi SISO**
>
> La stessa formula per sistemi SISO si piò riscrivere come modulo e fase
>
> $$\begin{aligned} y_f^U(t) &= \left[\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}\, U_0\, \sin(\omega_0 t) + \mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}\, U_0\, \cos(\omega_0 t)\right] 1(t) \\ &= U_0\, |G(j\omega_0)|\, [\cos(\angle G(\omega_0)) \sin(\omega_0 t) + \sin(\angle G(\omega_0)) \cos(\omega_0 t)]\ 1(t) \end{aligned}$$
>
> - Ricordando che $\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$
>
> $$\boxed{y_f^U(t) = U_0\, |G(j\omega_0)|\, \sin\left[\omega_0 t + \angle G(j\omega_0)\right] 1(t)}$$

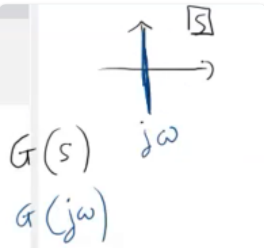
TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA (RIASSUNTIVO)

- $G(s)$ priva di poli sull'asse immaginario perché così abbiamo poli distinti di sicuro (ipotesi fondamentale)
- Stabilità esterna: poli con $\mathrm{Re} < 0$

> > *Se il sistema lineare è asintoticamente stabile e riceve un ingresso sinusoidale, allora la risposta permanente è ancora sinusoidale e la risposta complessiva converge al regime permanente (ci sarà all'inizio un transitorio che poi converge al permanente)*
> >
> > 
> >
> > **Teorema 26 (teorema della risposta in frequenza).** Per un sistema LTI TC con funzione di trasferimento $G(s)$ priva di poli sull'asse immaginario
> >
> > 1. Regime permanente in risposta a un ingresso a gradino $u(t) = U_0\, 1(t)$
> >
> > $$\to\ y_f^U(t) = G(0)\, U_0\, 1(t)$$
> >
> > 2. Regime permanente in risposta a un ingresso sinusoidale $u(t) = U_0\, \sin(\omega_0\, t) 1(t)$
> >
> > $$\to\ y_f^U(t) = \left[\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}\, U_0\, \sin(\omega_0 t) + \mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}\, U_0\, \cos(\omega_0 t)\right] 1(t)$$
> >
> > 
> >
> >
> > 
> >
> >
> > 3. Stabilità esterna $\Rightarrow$ risposta forzata converge al regime permanente
> >
> > $$\to\ \lim_{t\to+\infty} [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$$
> >
> > 4. Stabilità asintotica $\Rightarrow$ risposta complessiva converge al regime permanente
> >
> > $$\to\ \lim_{t\to+\infty} [y(t) - y_f^U(t)] = 0$$

Quindi la funzione di trasferimento calcolata in 0 (ovvero $G(0)$) ci dà in qualche modo informazioni sul gradino, invece la stessa calcolata in $j\omega_0$ (ovvero $G(j\omega_0)$ ci dà informazioni sul regime permanente in risposta a un ingresso sinusoidale

- In particolare, $G(j\omega_0)$ viene detto **risposta in frequenza**
  - Quindi è la restrizione di s in $G(s)$ esclusiva all'asse immaginario $j\omega$



Le formule scritte valgono anche per segnali multi ingresso e multi uscite

> *Se abbiamo un segnale che è la somma di tanti contributi a frequenza diverse, per il principio di sovrapposizione degli effetti si può calcolare il regime permanente in risposta a ciascuna frequenza e poi il regime permanente complessivo come somma dei vari contributi*
> *L'esempio al limite è il caso delle serie di Fourier in cui abbiamo infinite sinusoidi*

ESEMPIO: CALCOLO REGIME PERMANENTE IN RISPOSTA A UNA COMBINAZIONE LINEARE

Calcoliamo il regime permanente in risposta all'ingresso

$$u(t) = [3 + \sin(2t)]\,1(t)$$

Con funzione $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 2}$

PASSI

- Controllo che il denominatore non abbia poli sull'asse immaginaria $j\omega$
  - Addirittura qui si conclude che è esternamente stabile perché ha tutti poli con $\mathrm{Re} < 0$ (da Cartesio)
  - In questo modo posso applicare il teorema della risposta in frequenza
- Scompongo l'ingresso come somma di contributi e nomino ciascuno con un nome $u_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ contributi}$
  - Così che il regime permanente è la somma dei singoli contributi: $y_f^U(t) = \sum_{i=1}^{n \text{ contributi}} y_f^{U_i}(t)$
- Calcolo quindi i singoli regimi permanenti (a seconda se abbiamo in ingresso gradino o sinusoidi)
  - Ricordandosi di non includere j per la risposta a un segnale sinusoidale perché $G(\dots)$ è un segnale reale!
- Metto insieme tutti i contributi come detto

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+2}$$

$$u(t) = [3 + \sin(2t)]\,1(t) = \underbrace{3 \cdot 1(t)}_{u_1(t)} + \underbrace{\sin(2t)\cdot 1(t)}_{u_2(t)}$$

$$y_f^U(t) = \underbrace{y_f^{U_1}(t)}_{\text{regime permanente in risposta a } u_1(t)} + \underbrace{y_f^{U_2}(t)}_{\text{regime permanente in risposta a } u_2(t)}$$

$+$

NB: $G(s)$ ha tutti poli con $Re < 0$
$\Rightarrow$ $G(s)$ non ha poli sull'asse immaginario
$\Rightarrow$ possiamo applicare il teorema della risposta in frequenza
$\Rightarrow$ esiste il regime permanente

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+2} \qquad u_1(t) = 3\cdot 1(t) = U_0 \cdot 1(t), \quad U_0 = 3$$

$+$

$$y_f^{U_1}(t) = G(0)\, U_0\, 1(t) = \frac{3}{2}\cdot 1(t)$$

$$G(0) = \left.\frac{1}{s^2+s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$u_2(t) = \sin(2t)\cdot 1(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)\, 1(t), \quad U_0 = 1, \quad \omega_0 = 2$$

$$y_f^{U_2}(t) = \Big[\overset{-\frac{1}{4}}{Re\{G(j\omega_0)\}} \sin(\omega_0 t) + \overset{-\frac{1}{4}}{Im\{G(j\omega_0)\}} \cos(\omega_0 t)\Big]\, U_0\, 1(t)$$

$$G(j\omega_0) = G(j2) = \left.\frac{1}{s^2+s+2}\right|_{s=j2} = \frac{1}{(j2)^2 + j2 + 2} = \frac{1}{-4+j2+2}$$

$$= \frac{1}{-2+2j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1+j} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\underbrace{-1+j}_{(-1)^2-(j)^2}}\,\frac{-1-j}{-1-j} = \frac{1}{2}\,\frac{-1-j}{1+1} = -\frac{1}{4} - \frac{j}{4}$$

Mettendo insieme:

$$y_f^U(t) = [\underbrace{3\,G(0)}_{y_f^{U_1}(t)} + \underbrace{Re\{G(j\,2)\}\,\sin(2\,t) + Im\{G(j\,2)\}\cos(2\,t)}_{y_f^{U_2}(t)}]\,1(t)$$

$$= \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\,t) - \frac{1}{4}\cos(2\,t)\right] 1(t)$$

ANALISI TD (TEMPO DISCRETO)

INTRO

- Abbiamo equazioni alle differenze
- Sappiamo già le soluzioni, ovvero l'evoluzioni nel tempo dello stato e dell'uscita
  - *Stato*: Al posto dell'esponenziale di matrice abbiamo una potenza di matrice A^t (che sarà da trovare ovviamente) per l'evoluzione libera e invece abbiamo una serie al posto dell'integrale nell'evoluzione forzata
  - *Uscita*: Matrice C che moltiplica lo stato nell'evoluzione libera e una sommatoria al posto

dell'integrale per l'evoluzione forzata

- Consideriamo un sistema LTI TD

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D u\,(t) \end{aligned}$$

- Forma della soluzione nel dominio del tempo

$$x(t) = \underbrace{A^t\,x(0)}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau)}_{x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{C\,A^t\,x(0)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u(\tau) + D\,u(t)}_{y_f(t)}$$

TRASFORMATA Z

- Nei sistemi TC per capire l'evoluzione del sistema era necessario studiare l'esponenziale di matrice. Questo lo facevamo grazie alla trasformata di Laplace
- Analogamente, in tempo discreto TD, procediamo analogamente utilizzando la **trasformata Zeta** (generalizza la trasformata di Fourier discreta)

Definizione (dato segnale $f(t)$ causale):

$$\boxed{f(t) \longleftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} = F(z)}$$

con z variabile complessa

PROPRIETA'

- nota: in Laplace l'operatore di riferimento (s), equivaleva a un operatore di derivazione/integrazione. In Zeta invece l'operatore (z) è associato al ritardo/anticipo

1. **Linearità:** per ogni coppia di segnali causali $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e ogni coppia di costanti α_1 e α_2

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z)$$

2. **Anticipo di tempo**: $\mathcal{Z}\{f(t+1)\} = zF(z) - z f(0)$

$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = sF(s) - f(0)$

3. **Ritardo di tempo**: $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \dfrac{F(z)}{z}$

- z può essere interpretato simbolicamente come un operatore di **anticipo unitario** nel tempo
- $1/z$ può essere interpretato simbolicamente come un operatore di **ritardo unitario** nel tempo

- torna perché in tempo continuo abbiamo $\dot{x}(t)$, adesso invece $x(t+1)$
  Quindi la trasformata Z serve per passare dalle equazioni alle differenze a equazioni algebriche

RISPOSTA LIBERA E FORZATA IN Z

Applicando le proprietà appena viste, si giunge facilmente alle soluzioni generali del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \end{array}\right. \qquad t \geq 0$$

- Definiamo

$$\mathcal{Z}\{x(t)\} = X(z) \qquad \mathcal{Z}\{u(t)\} = U(z) \qquad \mathcal{Z}\{y(t)\} = Y(z)$$

- Applicando le proprietà 1 e 2 della trasformata Zeta

per la proprietà 2 (anticipo nel tempo)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}\{x(t+1)\} & = & \mathcal{Z}\{Ax(t)+Bu(t)\} \\ & \Downarrow & \\ zX(z) - z\,x(0) & = & AX(z) + BU(z) \end{array}$$

per la linearità

- **Equazione alle differenze $\longleftrightarrow$ equazione algebrica**

Basta risolvere l'equazione algebrica ottenuta, isolando $X(z)$

z X(z) - A X(z) = z x(

$$\begin{array}{rcl} zX(z) - z\,x(0) & = & AX(z) + BU(z) \\ & \Downarrow & \\ (zI-A)X(z) & = & z\,x(0) + BU(z) \\ & \Downarrow & \\ X(z) & = & \underbrace{(zI-A)^{-1} z\,x_0}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI-A)^{-1}BU(z)}_{X_f(z)} \\ Y(z) & = & \underbrace{C(zI-A)^{-1}\,z\,x_0}_{Y_\ell(z)} + \underbrace{C(zI-A)^{-1}BU(z) + DU(z)}_{Y_f(z)} \end{array}$$

Vale, ancora una volta la seguente:

- Anche nel dominio Zeta: evoluzione/risposta complessiva = evoluzione/risposta **libera** + evoluzione/risposta **forzata**

$$\begin{array}{rcl} X(z) & = & X_\ell(z) + X_f(z) \\ Y(z) & = & Y_\ell(z) + Y_f(z) \end{array}$$

- ovvero si può distinguere evoluzione libera e forza di ingresso e uscita, e la loro somma porta proprio a l'evoluzione complessiva

PARALLELO TEMPO-Z

	Tempo	Zeta
Evoluzione libera nello stato $x_\ell(t)$	$A^t\,x(0)$	$(zI-A)^{-1} z\,x(0)$
Evoluzione forzata nello stato $x_f(t)$	$\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)$	$(zI-A)^{-1}B\,U(z)$
Risposta libera $y_\ell(t)$	$C\,A^t\,x(0)$	$C(zI-A)^{-1}\,z\,x(0)$
Risposta forzata $y_f(t)$	$\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu(\tau) + Du(t)$	$\left[C(zI-A)^{-1}B + D\right] U(z)$

- Potenza di matrice $A^t \longleftrightarrow$ inversa $(zI-A)^{-1}\,z$
- Convoluzione discreta $\longleftrightarrow$ prodotto $(zI-A)^{-1}B\,U(z)$
- Funzione di trasferimento TD

$$G(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$$

- l'evoluzione forzata è come quella del tempo continuo solo che al posto di s abbiamo z

- l'evoluzione libera invece è la stessa solo che devo moltiplicare per z, questo per come è stata definita tale trasformata