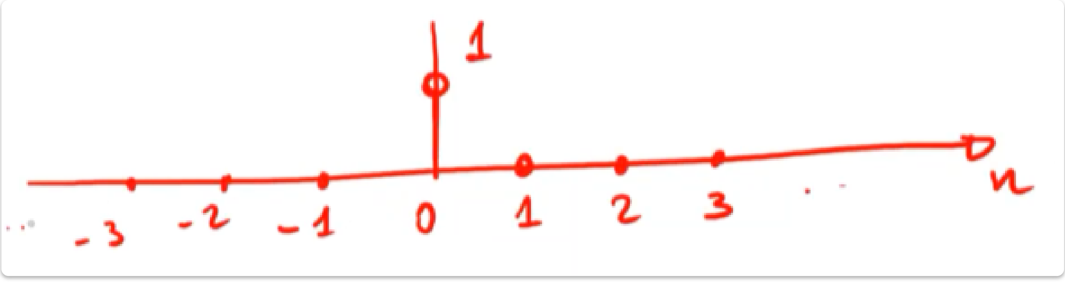
TRASFORMATE DI SEQUENZE FONDAMENTALI (parte1)

IMPULSO DISCRETO UNITARIO

E' una **sequenza** che indichiamo così:

$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}}$$



- Nonostante sia definita in modo semplice (a differenza della delta di Dirac che è una "astrazione matematica"), risulterà essere di fondamentale importanza.

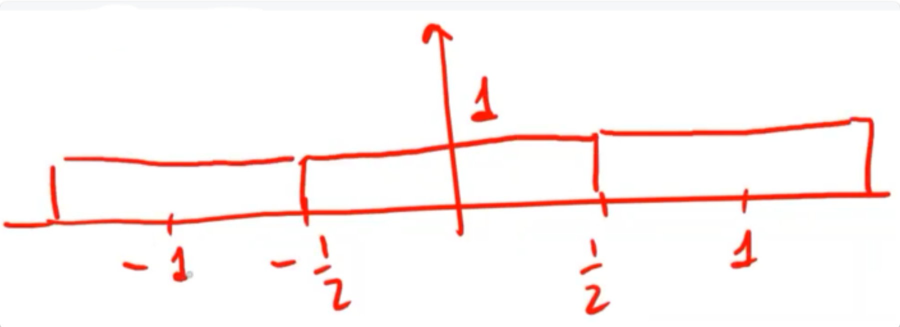
La sua **trasformata** è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{\delta[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi F n} \\ &= \delta[0] e^{-j2\pi F \cdot 0} \\ &= 1 \cdot e^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\boxed{\delta[n] \longleftrightarrow 1}$$

Vale quindi 1 nel periodo $\frac{-1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$ poi però si **ripete**, in questo modo:



SEQUENZA COSTANTE $x[n] = 1$

- Questa sequenza non soddisfa la condizione sufficiente che abbiamo visto per la convergenza, dato che **non vale**:

$$\cancel{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty}$$

> *Cioè la sequenza non è assolutamente sommabile*

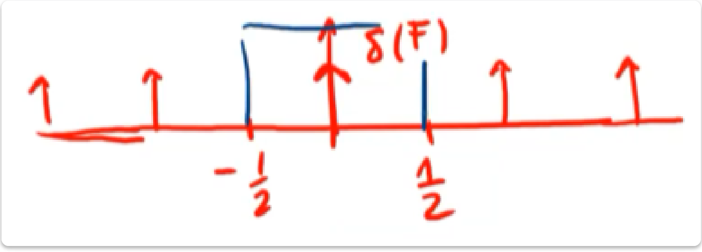
Tuttavia è comunque possibile trovare la trasformata, che è la seguente:

$$\mathscr{F}\{x[n]\} = \overline{X}(f) = \delta(F)$$

Ovvero in altre parole:

$$\boxed{x[n] = 1 \longleftrightarrow \delta(F)}$$

- Dato che è periodica, otteniamo un **pettine di Dirac** (in blu un singolo periodo):



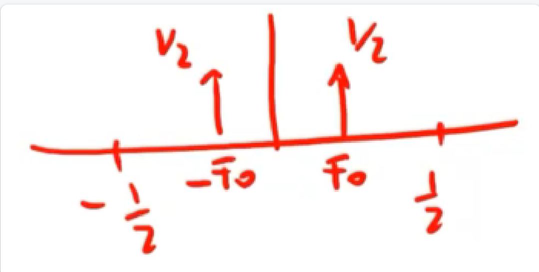
Abbiamo ottenuto quindi un risultato utile ma siamo stati *costretti* a introdurre delle *funzioni impulsive* (questo perché non è rispettata la condizione sufficiente).

Possiamo calcolare l'antitrasformata e poi confrontare il risultato con l'impulso discreto unitario:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(f) e^{j2\pi Fn}\, dF = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(F) e^{j2\pi Fn}\, dF \underbrace{=}_{proprieta'\ \delta} 1 \quad \forall n \text{ della sequenza}$$

Esempio: dimostriamo che $\boxed{x[n] = \cos 2\pi F_0 n \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]}$

Supponendo $|F_0| < \frac{1}{2}$, ci aspettiamo il seguente spettro:



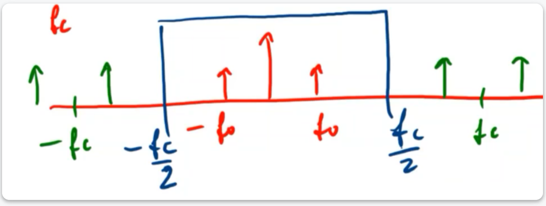
La trasformata inversa è:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\frac{1}{2}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]}_{\overline{X}(f)} e^{j2\pi Fn}\, dF$$

Da cui, sfruttando le proprieta della δ e le formule di Eulero:

$$\frac{1}{2}(e^{j2\pi F_0 n} + e^{-j2\pi F_0 n}) = cos 2\pi F_0 n \qquad \checkmark$$

Ci potevamo aspettare questo risultato. Infatti la trasformata del coseno porta a due delta di Dirac: se campioniamo questo risultato, otteniamo una ripetizione di tali delte, in questo modo:



Un'altra trasformata notevole

In maniera duale, vale anche la seguente:

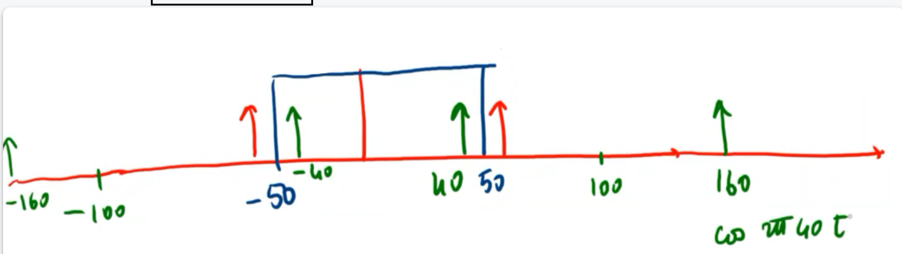
$$\boxed{x[n] = \sin 2\pi F_0 n \longleftrightarrow \frac{1}{2j}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]}$$

.

Esempio particolare: $x(t) = cos 2\pi 60t$

Rappresentabile graficamente in questo modo:>

Scegliendo $\boxed{f_c = 100Hz}$, si ottiene il seguente spettro (frecce verdi):



Ovvero abbiamo ottenuto lo stesso spettro se avessi campionato il segnale $\cos 2\pi 40t$ alla stessa frequenza di campionamento f_c .

> Basta osservare che le due delta di Dirac sono posizionate in -40 e $+40$ nel periodo di riferimento (blu)

Questo è accaduto perché abbiamo "violato" che condizioni necessarie del Teorema del Campionamento: **infatti la frequenza di campionamento scelta non è superiore di due volte la banda del segnale, ovvero:**

$$\cancel{f_c \geq 2B}$$

Il segnale è cioè **affetto da aliasing**.

TEOREMI DELLA TRASFORMATA DI FOURIER PER SEQUENZE

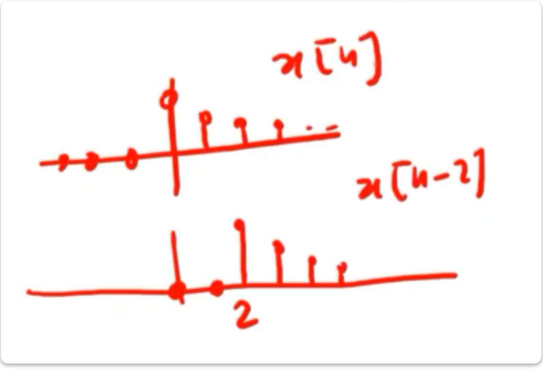
1) LINEARITA'

2) RITARDO

- Un ritardo nel tempo, introduce un **ritardo dei campioni**. Nella pratica questa operazione corrispone a fare uno *shift* a desra o sinistra l'intera sequenza di un valore intero.

> *Significa cioè eseguire il passaggio* $x[n] \longrightarrow x[n-n_0]$

Ad esempio, ponendo $n_0 = 2$ al segnale $x[n] = a^n \cdot u[n]$ si ottiene :



Si ottiene che:

$$\boxed{\begin{array}{c} x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(f) \\ x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j2\pi F n_0} \cdot \overline{X}(f) \end{array}}$$

Dimostrazione:

$$\mathscr{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j2\pi Fn}$$

- Ponendo $m = n - n_0$, si ottiene:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{j2\pi F(m+n_0)} = e^{-j2\pi F n_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi Fm}}_{\overline{X}(f)}$$

> *Traslare nel tempo quindi introduce* ***un termine esponenziale complesso in frequenza*** *(si altera solo lo spettro di fase, l'ampiezza rimane la stessa)*

3) MODULAZIONE

Cosa si ottiene nel tempo quando si trasla in frequenza.

- E' perciò duale del teorema del ritardo.

$$\boxed{\overline{X}(F-F_0) \longleftrightarrow x[n]e^{j2\pi F_0 n}}$$

Nota: a sinistra abbiamo la situazione in frequenza per comodità di lettura e spiegazione del teorema

Dimostrazione:

$$\mathscr{F}\{x[n]e^{j2\pi F_0 n}\} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi F_0 n}\right)e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi \underbrace{(F-F_0)}\, n} = \overline{X}(F-F_0)$$

4) CONIUGAZIONE

Sia

$$x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(f)$$

Allora

$$\mathscr{F}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j2\pi F_n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi Fn}\right)^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi(-F)n}\right)^* = X^*(-F)$$

SIMMETRIA HERMITIANA

$$\begin{aligned} x[n] \text{ e' Reale} \quad &\longrightarrow \quad x[n] = x^*[n] \\ \text{Allora} \quad &\overline{X}(F) = \left(\overline{X}(-F)\right)^* \end{aligned}$$

Ne deriva che:

$$|\overline{X}(F)| = |\overline{X}(-F)| \qquad \text{il modulo ha } \textbf{simmetria pari}$$

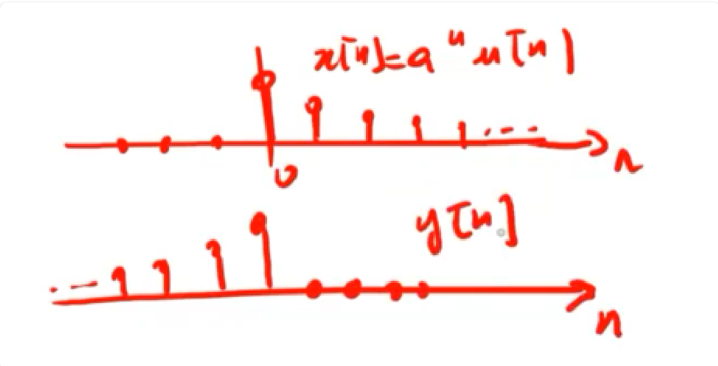
$$\angle\overline{X}(F) = \angle\overline{X}(-F) \qquad \text{la fase ha } \textbf{simmetria dispari}$$

5) INVERSIONE TEMPORALE

Passaggio

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[-n]$$

Nell'esempio del segnale esponenziale, si ottiene:



Nel dominio di Fourier, invece:

$$\overline{Y}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j2\pi Fn} \underbrace{=}_{m=-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{j2\pi Fm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi(-F)m} = X(-F)$$

Pertanto, riassumendo:

$$\begin{aligned} x[n] &\longrightarrow y[n] = x[-n] \\ X[-F] &\longrightarrow Y[f] \end{aligned}$$

COROLLARIO

Si può dimostrare che con un ribaltamento nel tempo si ottiene coniugazione in frequenza

$$x[n] \text{ e' reale} \longrightarrow Y(F) = X^*(F)$$

6) CONVOLUZIONE

Siano $x[n]$ e $y[n]$ due sequenze
Si definisce la convoluzione tra le due, come:

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k]$$

Il teorema afferma che:

$$\boxed{\overline{W}(F) = \overline{X}(F)\overline{Y}(F)}$$

Dimostrazione:

$$\overline{W}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] e^{k2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \right) \cdot e^{-k2\pi Fn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi Fn}}_{\overline{Y}(F) \cdot e^{-j2\pi Fk}}$$

Si conclude quindi:

$$\overline{W}(F) = \overline{Y}(F) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi Fk}}_{\overline{X}(f)} = \overline{Y}(F)\overline{X}(f), \qquad \text{C.V.D.}$$

7) PRODOTTO

Duale rispetto al precedente:
Siano $x[n]$ e $y[n]$ due sequenze
Si definisce il prodotto tra le due, come:

$$w[n] = x[n] \cdot y[n]$$

Il teorema afferma che:

$$\boxed{\overline{W}(F) = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \cdot \overline{X}(F-\theta)\, d\theta}$$

Dimostrazione:

$$\overline{W}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n] y[n]}_{w[n]} e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\overline{Y}(\theta) e^{j2\pi\theta n}}_{\text{antitrasf.}}\, d\theta\; e^{-j2\pi Fn}$$

Scambiando i due operatori lineari:

$$\overline{W}(F) = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi(F-\theta)n}}_{\overline{X}(F-\theta)}\, d\theta = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \cdot \overline{X}(F-\theta)\, d\theta$$

Note: abbiamo ottenuto ancora una volta una convoluzione come nel caso tempo continuo, però qui non è più esteso da $-\infty$ a $+\infty$, ma è limitato in un periodo (nel caso di frequenze normalizzate da $-1/2$ a $1/2$).

8) PARSEVAL

Il teorema mostra la relazione tra una sequenza $x[n]$ e il coniugato di una sequenza complessa $y[n]$, in questo modo

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F)\overline{Y^*}(F)\, dF}$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(F)\cdot e^{j2\pi Fn}\,dF\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y^*}(F)\cdot e^{-j2\pi Fn}\,dF$$

Scambiando i due operatori:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y^*}(F)\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi Fn}}_{\overline{X}(F)}\,dF = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F)\overline{Y^*}(F)\,dF \quad ,\text{C.V.D.}$$

RELAZIONE DI PARSEVAL

Supponendo

$$y[n] = x[n]$$

e andando a sostituire nella relazione data dal teorema ($\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\cdot y^*[n] = \int_{-1/2}^{1/2}\overline{X}(F)\overline{Y^*}(F)\,dF$), si ottiene la **Relazione di Parseval**:

$$\underbrace{\overbrace{\sum_{-\infty}^{\infty}|x[n]|^2}^{\text{energia nel tempo}}}_{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\cdot\underbrace{x^*[n]}_{y^*[n]}} = \underbrace{\overbrace{\int_{-1/2}^{1/2}|\overline{X}(F)|^2\,dF}^{\text{energia dalla trasformata}}}_{\int_{-1/2}^{1/2}\overline{X}(F)\underbrace{\overline{X^*}(F)}_{\overline{Y^*}(F)}\,dF}$$

9) INCREMENTO (derivata)

Cerchiamo di trovare una alternativa al calcolo della derivata, che nel caso delle sequenze *non si può calcolare*.
Inoltre non è possibile nemmeno "avvicinare" i campioni tra loro perché la *distanza è stabilita dalla frequenza di campionamento*.

- La cosa che più si avvicina "al calcolo di una derivata" $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)$ è la seguente:

$$\frac{x[n]-x[n-1]}{T}$$

- Questa relazione è descritta in modo riassuntivo dall'**operatore incremento**, che descrive la differenza tra due campioni adiacenti. È definito come segue:

$$\boxed{\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]}$$

Trasformata di $\Delta x[n]$.

$$\mathscr{F}\{\Delta x[n]\} = \overline{X}(F) - \underbrace{\overline{X}(F)e^{-j2\pi F}}_{\text{teo ritardo}} = \overline{X}(F)\cdot\left(1-e^{-j2\pi F}\right)$$

Riassumendo:

$$\boxed{\Delta x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(F)\cdot\left(1-e^{-j2\pi F}\right)}$$

.

10) SEQUENZA SOMMA (integrale)

Sappiamo dall'analisi nel tempo che:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha = x(t) * u(t)$$

Ancora una volta, non riusciamo a definire nel modo "classico" un integrale per una sequenza, però posso trovare un parallelo definendo una **sequenza somma**, in questo modo:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}$$

Trasformata di $\Delta y[n]$.

$$\Delta y[n] = y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \underbrace{=}_{\text{un termine}} x[n]$$

Facendo la trasformata a destra e sinistra si ottiene:

$$\overline{Y}(F)\left(1 - e^{-j2\pi F}\right) = \overline{X}(F)$$

Da cui:

$$\overline{Y}(F) = \frac{\overline{X}(F)}{1 - e^{-j2\pi F}}$$

NOTA BENE: questa relazione **vale soltanto se**, per $F = 0$ allora $\overline{X}(F) = 0$, ovvero:

$$\overline{X}(F)|_{F=0} = 0$$

(infatti per $F = 0$ il termine $\overline{Y}(F)\left(1 - e^{-j2\pi F}\right) = \overline{X}(F)$ vale sempre 0).
La condizione è quindi verificata se:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^{-j2\pi F}|_{F=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$$

Vale quindi se la media dei campioni vale 0 (cfr. con teorema integrazione tempo continuo) .
Riassumendo:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{\overline{X}(F)}{1 - e^{-j2\pi F}}} \qquad \text{se } \overline{X}(F) = 0 \text{ per } F = 0$$