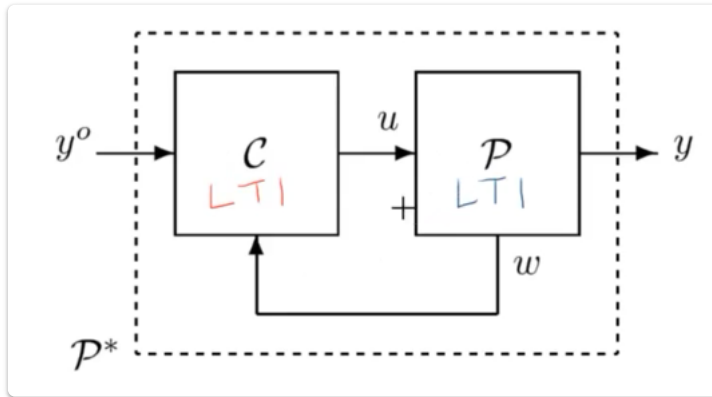


SISTEMA A CICLO CHIUSO \mathcal{P}^*

- Supponiamo \mathcal{C} e \mathcal{P} come detto LTI

Possiamo quindi **combinarli** e ottenere un unico sistema LTI generalizzato, che chiamiamo \mathcal{P}^* ("pi star"). È il nostro sistema a ciclo chiuso (in **retroazione**)



- Dato un riferimento, \mathcal{P}^* ci dice come si comporta il sistema di controllo una volta preso un riferimento y^o

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Essendo \mathcal{P}^* un sistema LTI, possiamo definire una funzione di trasferimento:

$$G_{y^o y}^*(s)$$

- indica la funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra riferimento y^o e l'uscita y

Quindi in pratica avremo:

$$y^o \rightarrow \boxed{G_{y^o y}^*(s)} \rightarrow y$$

Essa indica **come il sistema si comporta in riferimento a un certo valore desiderato**

Dato che \mathcal{P} ha una sua $G(s)$ di riferimento, l'obiettivo del controllo è quello di scegliere \mathcal{C} adeguatamente per avere una funzione di trasferimento totale $G_{y^o y}^*(s)$ come vogliamo e quindi che l'uscita y tenda a y^o di riferimento

RISPOSTA FORZATA

Posso scrivere la risposta forzata in due parti:

- **Transitorio** - parte di risposta forzata che dipende dai poli della funzione di trasferimento $G_{y^o y}^*(s)$
- **Regime Permanente** - parte di risposta forzata che dipende dai poli dell'ingresso ovvero il riferimento y^o

Quindi:

$$y_f(t) = t_f^{G^*}(t) + y_f^{Y^o}(t)$$

Sappiamo dalla teoria che **se un sistema è asintoticamente stabile, allora la risposta complessiva $y(t)$ converge al regime permanente $y_f^{Y^o}(t)$**

- Siccome abbiamo supposto che il riferimento sia costante (ovvero un gradino), sappiamo anche calcolare il regime permanente (e quindi l'uscita)

• **Riferimento costante**

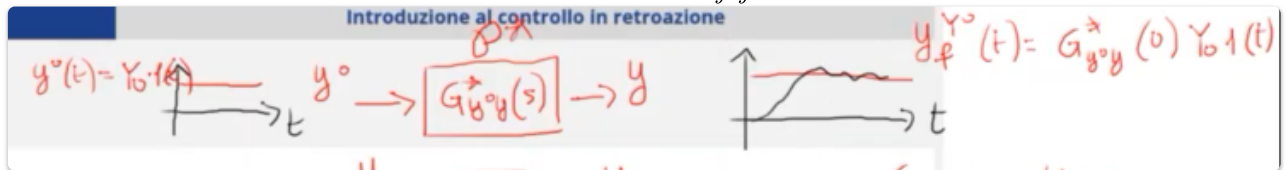
$$y^o(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

⇒ regime permanente

$$y_f^{Y^o}(t) = G_{y^o y}^*(0) \cdot Y_0 \cdot 1(t)$$

con $G_{y^o y}^*(0)$ **guadagno in continua in ciclo chiuso**

- quindi in uscita avremo ancora un gradino in ingresso $G_{y^o y}^*(s)$ moltiplicato per un certo Y_0



L'obiettivo quindi è portare l'uscita (che è ancora come detto una costante e coincide col regime permanente per sistemi asintoticamente stabili) **al valore di riferimento**

- Quindi cercheremo di fare attenuazioni o guadagni a seconda del caso o dell'istante
Deve quindi valere la relazione:

$$y_f^{Y^o}(t) = G_{y^o y}^*(0) \cdot Y_0 \cdot 1(t) = \underbrace{Y_0 \cdot 1(t)}_{\text{riferimento}}$$

Pertanto, dovremo trovare il modo in cui il guadagno $G_{y^o y}^*(s)$ sia 1, cosicché

$$y_f^{Y^o}(t) = \underbrace{1}_{G_{y^o y}^*(0)} \cdot Y_0 \cdot 1(t) = \underbrace{Y_0 \cdot 1(t)}_{\text{riferimento}} \quad \checkmark$$

valga la relazione (il regime permanente coincide col riferimento)

Abbiamo ottenuto quindi che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y_0 \quad , \quad \forall Y_0, \forall x(0)$$

viene detto **inseguimento perfetto** del riferimento

Cosa ci serve: SPECIFICHE DEL PROGETTO

Progettare un sistema di controllo \mathcal{P}^* che sia **asintoticamente stabile** (che mi garantisce convergenza al regime permanente) e tale per cui il **guadagno in continua sia unitario**, significa **avere un sistema la cui uscita converge al valore di riferimento** [che è l'obiettivo del controllo]

Specifiche di progetto

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G_{y^o y}^*(0) = 1$

- **Specifica 1** \Rightarrow convergenza dell'uscita al regime permanente per qualsiasi condizione iniziale $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_f^*(t)] = 0$
 - **Specifica 2** \Rightarrow valore di regime $G_{y^o y}^*(0) \cdot Y_0 = \text{valore desiderato } Y_0$ $y_f^*(t) = Y_0 \cdot 1(t)$
 - Specifiche 1 e 2 \Rightarrow convergenza dell'uscita al valore desiderato $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y_0$
 $\forall Y_0$
 $\forall x(0)$
- Nota:** per sistemi con più uscite la specifica 2 diventa $G_{y^o y}^*(0) = I$ matrice identica

Sono dette le **specifiche a regime** (o specifiche statiche)

Quindi il nostro obiettivo ora è costruire un **controllore** che rispetti le specifiche necessarie

RIFERIMENTI LENTAMENTE VARIABILI

Fin ora abbiamo visto i casi in cui il riferimento è costante. Si dimostra che anche con riferimenti lentamente variabili (ad esempio la traiettoria che la macchina deve assumere in un percorso relativamente semplice - ad esempio "quasi" rettilineo) vanno bene le specifiche 1 e 2 sopra descritte per il progetto di un controllore \mathcal{C}

Prendiamo il caso di **riferimento sinusoidale** di bassa frequenza ($\omega_0 \approx 0$)

Abbiamo un ingresso sinusoidale \rightarrow La risposta in frequenza (regime permanente) è ancora una sinusoide (scrivibile in termini parte reale e parte immaginaria oppure in termini di modulo e fase)

- Se applichiamo la specifica 2 (guadagno in continua unitario), si vede che per $\omega_0 \approx 0$, la risposta in frequenza coincide **approssimativamente** con l'andamento desiderato
- Si esegue un piccolo errore ma se ω_0 è piccola allora l'errore è trascurabile per certi esperimenti/aspetti

• Esempio di riferimento lentamente variabile: riferimento sinusoidale

$$y^o(t) = Y_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$$

di **bassa frequenza** $\omega_0 \approx 0$

• Regime permanente $= \text{Re} \{ G_{y^o y}^*(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \} + \text{Im} \{ G_{y^o y}^*(j\omega_0) \} \sin(\omega_0 t) Y_0 1(t)$

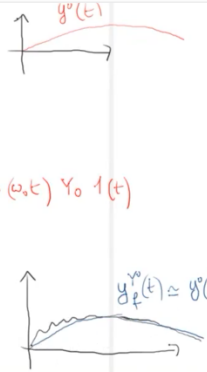
$$y_f^{Y^o}(t) = |G_{y^o y}^*(j\omega_0)| Y_0 \sin[\omega_0 t + \angle G_{y^o y}^*(j\omega_0)] 1(t)$$

• Per continuità $G_{y^o y}^*(0) = 1 \Rightarrow G_{y^o y}^*(j\omega_0) \approx 1$ quando $\omega_0 \approx 0$

• Di conseguenza per $\omega_0 \approx 0$ il regime permanente coincide **approssimativamente** con l'andamento desiderato

$$y_f^{Y^o}(t) \approx Y_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$$

• Errore tanto più piccolo quanto più vicina a zero la frequenza ω_0 (tanto più lentamente varia il riferimento)



Handwritten notes on the left:
 $|G_{y^o y}^*(j\omega)|$
 ω_0
 Controllore progettato per soddisfare la specificità 2
 $G_{y^o y}^*(0) = 1$

Quindi le specifiche 1 e 2 sono valide anche per riferimenti che variano di poco

SPECIFICHE DEL TRANSITORIO

Le specifiche 1 e 2 garantiscono un certo comportamento per il **regime permanente**, ma non ci dicono tanto riguardo la risposta transitoria

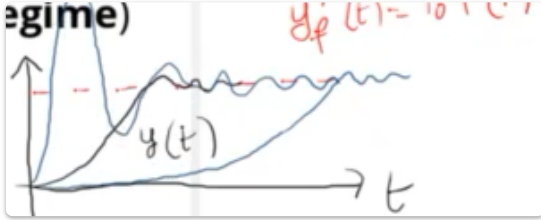
Si parla allora di **specifica 3**, che mi assicura di arrivare rapidamente al regime permanente (che se è

progettato con 1 e 2 coincide o quasi con il riferimento)

- Esempio della doccia: arrivare più velocemente possibile alla temperatura desiderata, evitando inaspettate escursioni di temperatura repentine

Specifica 3: transitorio rapido + escursioni limitate

Possibili casi da evitare (qualitativi)



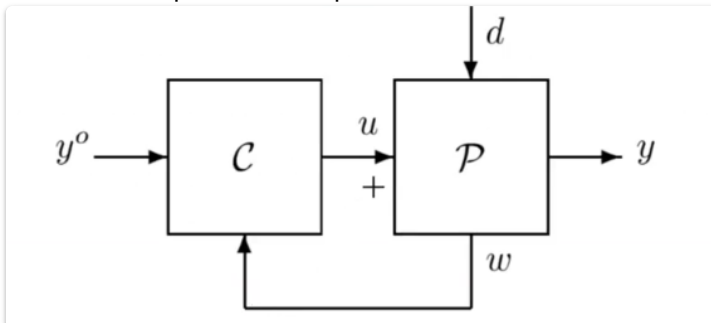
Si premura che la parte transitoria della risposta forzata sia corretta per l'esigenze che abbiamo

$$y_f(t) = \underbrace{t_f^{G^*}(t)}_{\text{spec. 3}} + \underbrace{y_f^{Y^o}(t)}_{\text{spec. 1,2}} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \underbrace{G_{y^o y}^*(s)}_{\text{spec. 3}} Y^o(s) \right\}$$

- l'obiettivo del controllo quindi sarà quello di assegnare alla funzione di trasferimento a ciclo chiuso una forma desiderata

ATTENUARE o REIETTARE I DISTURBI

Se un sistema presenta dei disturbi d come in figura, allora occorrono *nuove specifiche* per attenuare o reiettare completamente questi ultimi



- nei sistemi reali d è sempre presente
 - Esempio: aeroplano --> turbolenza: il controllore C cercherà di attenuare questi disturbi

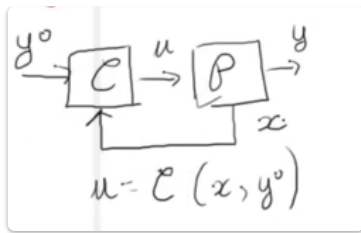
Agiscono quindi nel sistema due ingressi: y^o e d sul sistema a ciclo chiuso quindi l'andamento dell'uscita dipende da entrambi

- A causa di questo infatti esistono due funzioni di trasferimento: $G_{y^o y}^*(s)$ e $G_{d y}^*(s)$
 - Cioè una tra il riferimento e l'uscita e una tra il disturbo e l'uscita
 - Essendo il sistema lineare ci si può concentrare su una delle due singolarmente

TECNICHE DI CONTROLLO: fase progettuale

RETROAZIONE ALGEBRICA SULLO STATO

Supponiamo di avere informazione completa sullo stato (sistema di controllo in *informazione completa*), ovvero $w = x$



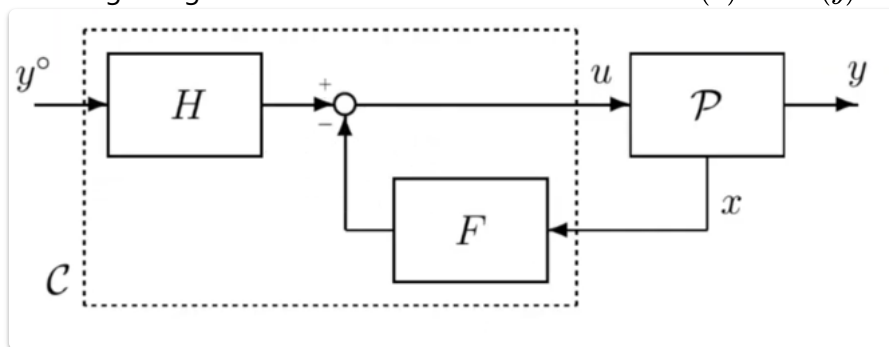
Quindi per ogni istante di tempo t dobbiamo scegliere un u opportuno, sulla base di 2 ingressi: lo stato x e il riferimento y^o . Quindi u è una funzione di 2 variabili:

$$u = \mathcal{C}(x, y^o)$$

Supponiamo che venga generata una azione di controllo $u(t)$ *lineare*. Sarà allora della forma matrice per vettore:

$$\mathcal{C} : \quad u(t) = \underbrace{-Fx(t)}_{\text{feedback}} + \underbrace{Hy^o(t)}_{\text{feedforward}}$$

- Dove F e H sono matrici di dimensioni opportune
 - Il meno davanti a F si inserisce per default (ma sarebbe indifferente come idea)
- Il controllo in feedback è pari a $-Fx(t)$ e dipende dallo stato x
 - F è il guadagno in feedback ed è una matrice $\dim(u) \times \dim(x)$
- Il controllo in feedforward è pari a $Hy^o(t)$ e dipende dal riferimento y^o
 - H è il guadagno in feedforward ed è una matrice $\dim(u) \times \dim(y)$



SISTEMI SISO ($\dim(U) = \dim(Y) = 1$)

Per sistemi SISO:

- F è un vettore riga $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]$, $n = \dim(x)$
 - (dato che lo stato è un vettore colonna $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$)
- H è uno scalare
 - (dato che il riferimento è un valore)

Risolvere un problema di controllo significa quindi determinare correttamente:

$$\underbrace{n}_F + \underbrace{1}_H \text{ parametri di progetto}$$

EQUAZIONI DI STATO

Si possono riscrivere le equazioni di stato del sistema a ciclo chiuso sulla base di quanto abbiamo detto (applicando cioè un determinato controllo \mathcal{C}), per rappresentarlo algebricamente

- Sappiamo infatti che il controllo dovrà essere del tipo: $\mathcal{C} \rightarrow \{u = -Fx + Hy^o\}$

- Sostituiamo u del controllo in $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du^0 \end{cases}$

Ottenendo:

- $\dot{x} = Ax + B(-Fx + Hy^0) = Ax - BFx + BH y^0 = (A - BF)x + BH y^0$

Quindi il problema a ciclo chiuso:

$$\mathcal{P}^* = \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{(A - BF)}^{A^*} x + \overbrace{BH}^{B^*} y^0 \\ y = Cx \end{cases}$$

- Dove abbiamo rinominato le matrici che compaiono in \dot{x} con A^* e B^*

Quindi agendo sui parametri di progetto F e B si può modificare l'uscita del sistema y^0 a nostro piacimento rendendo addirittura in certi casi stabile un \mathcal{P} che in origine non lo era. Questo lo possiamo fare in maniera più generale specificando la retroazione $u = -Fx + Hy^0$ che appunto modifica la dinamica del sistema

$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u = -Fx + Hy^0 \end{cases}$

nel sistema in ciclo chiuso

$$\dot{x} = Ax + B(-Fx + Hy^0)$$

$$\dot{x} = Ax - BFx + BH y^0 = (A - BF)x + BH y^0$$

$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{(A - BF)}^{A^*} x + \overbrace{BH}^{B^*} y^0 \\ y = Cx \end{cases}$

parametri di progetto

Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^0(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BF$ e $B^* = BH$

- dove appunto abbiamo modificato le matrici B e A . Quest'ultima in particolare è importante perché è quella che determina i modi di evoluzione del sistema (per fare un esempio)

POLINOMIO CARATTERISTICO IN CICLO CHIUSO

Se vogliamo agire sulla stabilità, dobbiamo gestire gli zeri del polinomio caratteristico $\varphi(s)$. Pertanto, si definisce *polinomio caratteristico in ciclo chiuso*, il seguente:

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

perché appunto è cambiata la matrice A

- notiamo che qui entra in gioco solo la matrice F . Ci possiamo aspettare che inserendo determinati valori in essa, vadano a variare sul piano s i poli di $\varphi(s)^*$, e dunque le condizioni di stabilità
 - Quindi: agire su $F \approx$ spostare gli autovalori

FUNZIONE TRASFERIMENTO IN CICLO CHIUSO

Analogamente, definiamo la *funzione di trasferimento in ciclo chiuso* come:

$$G_{y^o y}^*(s) = C(sI - A^*)^{-1}B^* = C(sI - A + BF)^{-1}BH$$

- agendo (anche) su H , possiamo ottenere uno specifico guadagno del sistema a ciclo chiuso

🔗 Formule per sistemi SISO (da usare negli esercizi)

Si dimostra che la funzione di trasferimento a ciclo chiuso si calcola come:

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi(s)^*} \cdot H$$

Dove $r(s)$ è lo stesso di un sistema generico LTI TC lineare, ovvero

$$r(s) = C \text{Adj}(sI - A) \cdot B$$

In pratica $r(s)$ *non dipende da F* (cioè se calcolassi $r(s)$ in un sistema a ciclo chiuso otterrei comunque gli stessi valori)

Nel caso generale di sistema LTI TC lineare (ad anello aperto), abbiamo: $G(s) = \frac{r(s)}{\varphi(s)}$

Quindi varia soltanto il polinomio caratteristico ($\varphi(s) \rightarrow \varphi(s)^*$) e poi la successiva moltiplicazione per H

Infatti dipende come detto da F che è all'interno di $\varphi(s)^*$ che mi determinano i poli del polinomio caratteristico e H (costante moltiplicativa) che determina il guadagno per un sistema a ciclo chiuso

Fatto 3.2 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sullo stato $u = -Fx + Hy^o$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

con $r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B$

- **Nota:** la retroazione algebrica (feedback) modifica sullo stato i poli (perché influenza $(\varphi(s)^*)$) ma non modifica gli zeri della funzione di trasferimento $G_{y^o y}^*(s)$

PROGETTO

Dobbiamo soddisfare le 3 specifiche

SPECIFICA 1 E 3

(spec.1) Basta che il "nuovo" polinomio caratteristico abbia tutte radici con $\text{Re} < 0$ in modo tale che sia *asintoticamente stabile*

(spec.3) Dato che vogliamo anche garantire un transitorio rapido con escursioni limitate dovremo *posizionare i poli di $\varphi(s)^*$ in modo opportuno** (vedi lezioni successive)

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) \quad , \quad \text{con } \operatorname{Re} < 0 \text{ e posizionate adeguatamente}$$

(sono specifiche: pole placement, perché legate direttamente alla posizione dei poli sul piano complesso
- in particolare nel semipiano sinistro perché li vogliamo asintoticamente stabili)

SPECIFICA 2

Dobbiamo avere un *guadagno in continua in ciclo chiuso tale che sia unitario*, ovvero deve valere:

$$G_{y^o y}^*(s)|_{s=0} = G_{y^o y}^*(0) = 1$$

Essendo come detto:

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} \cdot H$$

Allora deve valere:

$$G_{y^o y}^*(s)|_{s=0} = G_{y^o y}^*(0) = \frac{r(0)}{\varphi^*(0)} \cdot H = 1$$

Quindi basta porre:

$$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

Cosicché:

$$G_{y^o y}^*(0) = \frac{r(0)}{\varphi^*(0)} \cdot \frac{\varphi^*(0)}{r(0)} = 1$$

RIASSUMENDO

Progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sullo stato

- 1 Scegliere guadagno in feedback F tale che

- polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) +$$

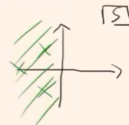
con tutte radici a $\operatorname{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1)

- radici di $\varphi^*(s)$ posizionate in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3)

- 2 Scegliere guadagno in feedforward

$$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

in modo da avere $G_{y^o y}^*(0) = 1$ e quindi inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifica 2)



Prima progetto F poi H

- Poi ho fatto perché posso determinare il giusto $u = -Fx + Hy^o$