PROCESSO ALEATORIO TEMPO DISCRETO

Esiste un parallelo forte tra il mondo continuo e quello discreto anche parlando di processi aleatori. Sappiamo infatti un segnale x(t) è un processo aleatorio se tutti i valori per ogni istante t sono variabili aleatorie, ovvero:

$$x(t) \longrightarrow x(t)$$
 v.a.

Analogamente, nel tempo discreto, la sequenza x[n] è un processo aleatorio se le quantità relative ai campioni x[n] sono variabili aleatorie, ordinate naturalmente dall'indice dei campioni n (variabile temporale):

$$x[n] \longrightarrow x[n] ext{ v.a.}$$

FORMULE UTILI

Possiamo quindi definire come nel caso tempo continuo:

• Densità di probabilità (pdf) di x[n]:

$$p_{X[n]}(x)$$

• Distribuzione di probabilità (PDF):

$$P_{X[n]}(x)$$

Media:

$$m_{X[n]} = E[x[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x \: p_{X[n]}(x) \: dx$$

Potenza:

$$P_{X[n]}=E[x^2[n]]$$

• Varianza:

$$\sigma_{x[n]}^2 = E[(x[n] - m_{X[n]})^2] = P_{X[n]} - (m_{X[n]})^2$$

Densità di probabilità congiunte e indici del secondo ordine

Vogliamo mettere in relazione i valori di due campioni: il primo all'istante n e il secondo all'istante n+m, ovvero ci chiediamo:

$$x[n] \overset{?}{\longleftrightarrow} x[n+m]$$

Per gestire questi due campioni in modo congiunto, definiamo una densità di probabilità in questo modo:

$$p_{x[n],x[n+m]}(x,y)$$

Da cui posso ottenere degli *indici statistici* del secondo ordine.

L'indice più importante è la funzione di autocorrelazione:

$$R_{XX} = E[x[n] \cdot x[n+m]] = \iint_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot \underbrace{p_{x[n],x[n+m]}}_{ ext{pdf congiunta}}(x,y) \, dx \, dy$$

(vedi anche: covarianza, stazionarietà senso forte...)

PROCESSO WSS: Stazionarietà in senso Lato

Un processo tempo discreto è WSS se valgono entrambe:

$$\begin{cases} E[x[n]] = m_X = \text{costante non dipendente dal tempo} \\ R_{XX}[n,n+m] = E[x[n] \cdot x[n+m]] = \underbrace{R_{XX}[m]}_{\substack{\text{in funzione} \\ \text{solo di m}}} \end{cases}$$

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Nel tempo continuo il passaggio da tempo a frequenza era così eseguito ($S_{XX}={
m densita}$ ' spettrale di potenza):

$$R_{XX}(au) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S_{XX}(f)$$

Nel caso tempo discreto, si ottiene ancora la densità spettrale di potenza attraverso la trasformata. Stavolta però dovremo utilizzare la trasformata per sequenze:

$$R_{XX}[m] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathscr{F}\{R_{XX}[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}[m] e^{-j2\pi Fm} = \overline{\left[\overline{S_{XX}}(F)
ight]}$$

AUTOCORRELAZIONE DI UN SEGNALE

Invertendo la relazione appena ottenuta si ottiene la formula per l'autocorrelazione:

$$R_{XX}[m] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F) \; e^{j2\pi F} \, dF$$

CASO M=0

Ponendo m=0 si ottiene:

$$R_{XX}[m]|_{m=0}=E[x[n]|x[n+m]]|_{m=0}=E[x^2[n]]=\underbrace{P_X}_{ ext{Potenza di }X}$$

Nota: per la stazionarietà assumiamo la potenza appena ricavata costante.

Analogamente:

$$|R_{XX}[m]|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F) e^{j2\pi F m} \, dF|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F) \, dF$$

Ovvero si ottiene:

$$oxed{P_X = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F)\,dF}$$

RELAZIONI TRA LE AUTOCORRELAZIONI

Ci chiediamo quale sia la relazione tra le funzioni di autocorrelazione tempo continuo e tempo discreto, supponendo che i segnali di partenza siano collegati tra loro dal campionamento.

In altre parole, sappiamo che nel tempo continuo esiste questa relazione:

$$x(t) o R_{XX}(au) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S_{XX}(f)$$

Nel mondo tempo discreto se eseguiamo il campionamento di x(t) si ottiene:

$$x(nT) = x[n] \underbrace{\rightarrow R_{XX}[m]}_{\star}$$

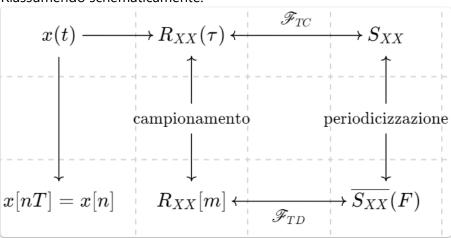
Con

$$\underbrace{R_{XX}}_{\text{t. discreto}} = \star = E[x[n] \; x[n+m]] = E[x(nT) \cdot x((n+m)T)] = \underbrace{R_{XX}(nT, nT + mT)}_{\text{t. continuo}} = R_{XX}(mT) = R_{XX}(\tau)|_{\tau = mT}$$

- Ovvero l'autocorrelazione dei campioni del segnale è un campionamento dell'autocorrelazione tempo continuo
 - In altre parole se abbiamo un campionamento tra il processo tempo continuo e quello tempo discreto, allora abbiamo lo stesso campionamento tra le due funzioni di autocorrelazione (tempo discreto e tempo continuo).

Infine, la **densità spettrale** che si ottiene in tempo discreto, è la *periodicizzazione* della densità spettrale tempo continuo.

Riassumendo schematicamente:



(cfr. Spiegazione - Lezione 5 maggio 2:20 circa)