ESERCIZI: PASSAGGIO ALLE EQ. DI STATO (SLIDE 94)

3)

$y(t) = y(t-4)$ TD autonomo TI lineare

$y(t) = a_1\, y(t-1) + a_2\, y(t-2) + a_3\, y(t-4) + a_4\, y(t-4)$

$a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 1$

$n = 4$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ y(t-3) \\ y(t-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-1) \\ y(t-2) \\ y(t-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t-4) \\ y(t-1) \\ y(t-2) \\ y(t-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$$y(t) = y(t-4) = x_4(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

4)

- Riscrivo innanzitutto in forma normale
- singolo ingresso $\rightarrow$ B matrice colonna

$y(t+2) = 3\, y(t+1) + u(t+1)$ $\qquad t+2 \rightarrow t$

$y(t) = 3\, y(t-1) + u(t-1)$ $\qquad t+1 \rightarrow t-1$

TD non autonomo TI lineare

$n = 1 \quad m = 1 \qquad x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\, y(t-1) + u(t-1) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\, x_1(t) + x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B\,+} u(t)$$

$$y(t) = 3\, y(t-1) + u(t-1) = 3\, x_1(t) + x_2(t)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

TEMPO CONTINUO (AUTONOMO OPPURE INGRESSO NON DERIVATO)

7)

- $y(t)$ come prima variabile di stato

$\ddot{y} = 0$ TC autonomo TI lineare

$n = 2$ $x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$$y(t) = x_1(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & +0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

8)

- caso TV
- ingresso compare ma non derivato $m = 0$

$\ddot{y} + \cos(t)\, u = 0$ $\ddot{y}(t) + \cos(t)\, u(t) = 0$

TC non autonomo TV lineare

$\ddot{y}(t) = -\cos(t)\, u(t)$

$n = 2$ $m = 0$ $\Rightarrow$ siamo nel caso in cui possiamo scrivere le equazioni di stato con

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\cos(t)\, u(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(t) \end{bmatrix}}_{B(t)} u(t)$$

$$y(t) = x_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{+C} x(t)$$

SIMULAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

Conoscendo:

- il modello matematico
- la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$
- come l'ambiente esterno influisce sul sistema (ingresso nell'intervallo d'interesse, ovvero: $u(t)$ in $[t_0, t_f]$)

Ci si chiede come calcolare (numericamente) l'**andamento dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$** nell'intervallo di tempo d'interesse

- Esempio: meteo ---> conosco com'è il tempo oggi e il modello matematico (eq. diff). Studio come si evolverà lo stato del sistema (temperatura, umidità, etc...)

In caso TD:

$x(t_0)$
$x(t_0+1) = f(x(t_0), u(t_0))$
$x(t_0+2) = f(x(t_0+1), u(t_0+1))$
$\vdots$

106 / 110

Caso TC:

- equazioni differenziali: più complesso (problema di Cauchy) :/
- Si cerca una *soluzione approssimata*
  - Affetto da errore di quantizzazione
- Si utilizzano metodi numerici, come il **metodo di Eulero**
  - si esegue in generale una discretizzazione (il tempo continuo diventa discreto t.c. Sia una approssimazione valida --> è un campionamento)
    - Da qui si scrivono le equazioni alle differenze

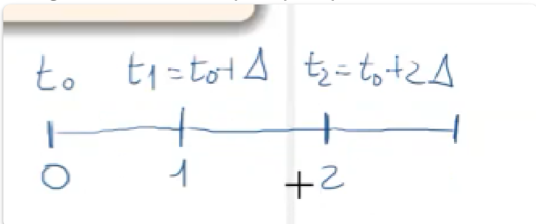
METODO di EULERO

Permette di approssimare la soluzione di una equazione differenziale (sistema TC) con un corrispondente sistema TD.

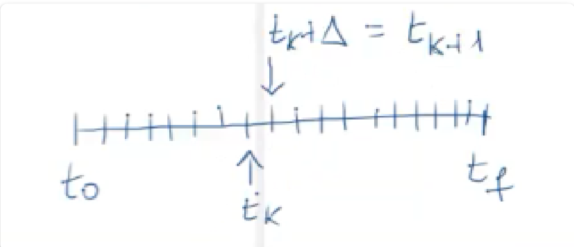
- Attraverso una discretizzazione (campionamento) dell'intervallo temporale e poi approssimando la derivata (limite che tende a 0 del rapporto incrementale) con un incremento di tempo finito pari al passo di discretizzazione Δ.

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \boxed{\frac{x(t_k + \Delta) - x(t_k)}{\Delta} = f(t_k, x(t_k), u(t_k))} \quad , \quad t_k = t_0 + k\Delta$$

- t_k è il $k-esimo$ istante di tempo (discreto)
- Scegliendo Δ sempre più piccolo, si ottiene una approssimazione più precisa



- k indica proprio l'istante di campionamento ($0, 1, 2$ sono proprio i valori di k)



Quindi: *sostituendo la derivata con il rapporto incrementale, si passa da una equazione differenziale (TC) a una equazione alle differenze (TD)*

Dalla formula precedentemente scritta, si giunge alla equazione generale per calcolare il campione successivo:

$$\boxed{x(t_k + 1) = x(t_k) + \Delta f(t_k, x(t_k), u(t_k))} \quad , \quad y(t_k) = h(t_k, x(t_k), u(t_k))$$

- Dato f (che descrive il sistema tempo continuo), si associa un sistema TD "gestito" da k

Problemi della Simulazione

La simulazione, presume che noi conosciamo con precisione le condizioni iniziali del sistema. Questo nella realtà *non è quasi mai garantito*

- Esempio: previsioni del tempo per le prossime 2 settimane - *errore*: abbiamo un sistema approssimato in partenza (evoluzione caotica)
- Inoltre la simulazione in stile "Montecarlo" è dispendiosa: per capire l'evoluzione di un sistema dovremmo fare centinaia o migliaia di simulazioni (e poi magari in realtà si evolve in un altro modo)

Per capire il comportamento del sistema se la simulazione non è sufficiente si utilizza **l'analisi**

- cioè capire il comportamento a livello teorico

---

2) ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI

RISPOSTA LIBERA E FORZATA NEI SISTEMI LTI

- Studiare il comportamento del sistema dal punto di vista teorico, senza simulare cioè.

RISPOSTA NEI SISTEMI LTI TD

Sappiamo già che per descrivere un sistema LTI abbiamo bisogno delle 4 matrici A, B, C, D, ovvero:

$$\left.\begin{array}{ll} x(t+1) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{array}\right\} = LTI \longleftrightarrow (A, B, C, D)$$

- basta conoscere le 4 matrici per descrivere un sistema LTI TD
  - Da cui poi studiare le proprietà e **capire la risposta**

Il nostro obiettivo è cioè **calcolare l'evoluzione nel tempo di $x(t)$ e $y(t)$ a partire dalla condizione iniziale $x(0) = x_0$ e dalla sequenza di ingresso $u(i)$**

- se il sistema è TI (come vediamo noi prevalentemente), è sufficiente conoscere la condizione iniziale (non importa l'istante di partenza, per questo si sceglie sempre tempo iniziale 0)

In generale, in maniera ricorsiva partendo da $x(0) = x_0$ e andando avanti ($x(1), x(2) \dots$ in funzione degli istanti precedenti che ho calcolato e i relativi ingressi)

- Si arriva a trovare un pattern abbastanza evidente che mi permette di calcolare un generico $x(t)$

$$A^{t-1-(t-1)} = A^0 = I$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^0 B = IB = B$$

$$\rightarrow x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(1) = A\,x(0) + B\,u(0) = A \cdot x_0 + B \cdot u(0)$$

$$x(2) = A\,x(1) + B\,u(1) = A\big[\underbrace{A x_0 + B\,u(0)}_{x(1)}\big] + B\,u(1)$$

$$= A^2 x_0 + AB\,u(0) + B\,u(1)$$

$$x(3) = A\,x(2) + B\,u(2) = A\big[\underbrace{A^2 x_0 + AB\,u(0) + B\,u(1)}_{x(2)}\big] + B\,u(2)$$

$$= A^3 x_0 + A^2 B\,u(0) + AB\,u(1) + B\,u(2)$$

$$\vdots$$

$$x(t) = A^t x_0 + A^{t-1} B\,u(0) + \dots + AB\,u(t-2) + B\,u(t-1)$$

$$\boxed{x(t) = A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-1-\tau} B\,u(\tau)}$$

$$\tau = 0 \quad A^{t-1} B\,u(0)$$

$$\vdots$$

$$\tau = t-1 \quad A^{t-1-(t-1)} B\,u(t-1)$$

$$A^0 B\,u(t-1) = B\,u(t-1)$$

Scritto meglio:

- Applicando l'equazione di transizione dello stato

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \\
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
&= Ax_0 + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A[Ax_0 + Bu(0)] + Bu(1) \\
&= A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A[A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)] + Bu(2) \\
&= A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-1-\tau} Bu(\tau)$$

- Per un istante t generico

$$x(t) = \underbrace{A^t x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{A^{t-1}Bu(0) + \ldots + ABu(t-2) + Bu(t-1)}_{x_f(t)}$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

- dove il primo addendo *dipende soltanto dalla condizione iniziale*: viene detta **evoluzione libera** $x_\ell(t)$
  - Cioè l'evoluzione del sistema senza sollecitazioni esterne
- dove il secondo addendo *dipende soltanto dall'ingresso*: viene detta **evoluzione forzata** $x_f(t)$
  - Come l'ambiente esterno sollecita il sistema (avviene quando $x(0) = 0$)

L'evoluzione **complessiva** quindi (essendo un sistema lineare) si ottiene dalla combinazione di evoluzione libera e forzata

L'**uscita**, essendo in generale

$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t) = \mathrm{C}\left[x_\ell(t) + x_f(t)\right] + \mathrm{D}u(t) = \underbrace{\mathrm{C}x_\ell(t)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\mathrm{C}x_f(t) + Du(t)}_{y_f(t)}$$

- Dove $y_\ell(t)$ è detta *risposta libera*
- Dove $y_f(t)$ è detta *risposta forzata*

Quindi risposta $\longleftrightarrow$ evoluzione dell'uscita

Riassumendo

- Notiamo che

$$A^{t-1}Bu(0) + \ldots + ABu(t-2) + Bu(t-1) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \\
&= C\,[x_\ell(t) + x_f(t)] + D\,u(t) \\
&= \underbrace{C\,x_\ell(t)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{C\,x_f(t) + D\,u(t)}_{y_f(t)}
\end{aligned}$$

Fatto 2.1 Per un sistema LTI TD le evoluzioni complessive di stato e uscita sono

$$\begin{cases} x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) \end{cases}$$

$$x_\ell(t) = A^t x_0 \qquad x_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)$$

$$y_\ell(t) = CA^t x_0 \qquad y_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu(\tau) + Du(t)$$