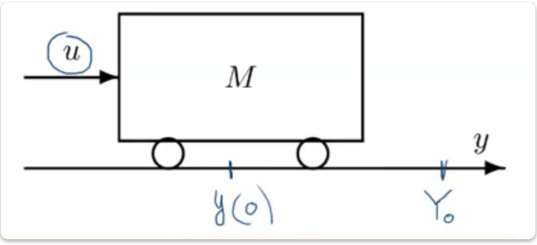
ESEMPIO: CONTROLLO DI POSIZIONE

- L'uscita è rappresentata dalla posizione del carrello $y(t)$
- L'ingresso (da controllare) è la spinta da dietro u
- Esiste l'attrito (viscoso) b
- Il carrello ha massa M

Si vuole portare il carrello in una posizione desiderata Y_0 con il controllo u a partire da una certa posizione di partenza $y(0)$



Dobbiamo quindi far accadere che:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \approx Y_0$$

Supponiamo di aver accesso allo stato per agire sulla legge del controllo

- Lo stato è come al solito: composto da due componenti $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{posizione} \\ \text{velocita'} \end{bmatrix}$
  - Conoscere lo stato significa sapere a ogni istante t la posizione e la velocità del carrello

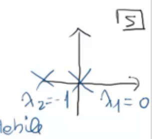
Sappiamo già per questo sistema che:
(funzione di trasferimento in cui si vuole ricavare l'uscita, infatti $C = [1 \ \ 0]$)

- Equazioni di stato per $M = 1$ e $b = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C}\, x(t) \end{aligned}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = s\,(s+1)$$



sistema marginalmente stabile

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{r(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{s\,(s+1)}$$

con

$$r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Sappiamo per le specifiche di progetto che:

$$u(t) = -Fx(t) + Hy^o(t)$$

- Il guadagno in feedback F avrà la stessa dimensione del vettore di stato, quindi: $F = [f_1 \quad f_2]$
- H invece è uno scalare (sistema SISO)

  Totale: 3 parametri da controllare $\to f_1, f_2, H$

PRIMO PASSO: POLINOMIO CARATTERISTICO A CICLO CHIUSO (SPECIFICA 1)

1) $\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$

$$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_1 & -1-f_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^*(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ f_1 & s+1+f_2 \end{bmatrix} = s(s+1+f_2) + f_1 = s^2 + (f_2+1)s + f_1$$
$$= s^2 + a_1^* s + a_0^*$$

$a_1^* = f_2 + 1$

$a_0^* = f_1$

Come si nota, abbiamo un polinomio a ciclo chiuso in cui possiamo agire direttamente sui parametri moltiplicativi alla variabile di riferimento s. In questo modo posso arbitrariamente gestire la stabilità perché posso modificare gli zeri (ovvero i poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso in questo caso)

- Se avessimo usato il polinomio ad anello aperto, avremmo ottenuto

  $$\varphi(s) = s^2 + s$$

  su cui non avrei potuto far niente se non concludere che veniva un sistema marginalmente stabile (osservando gli zeri)
- Adesso invece con quelli che ho rinominato a_1^* e a_2^* posso regolarmi, perché dipendono da f_i ovvero gli elementi della matrice F di controllo/guadagno in feedback. Posso rendere il sistema *asintoticamente* stabile

Basta applicare il criterio algebrico di Cartesio a nostro favore, infatti basta che i coefficienti a_1^* e a_2^* siano entrambi positivi:

$$\begin{cases} a_1^* > 0 \\ a_2^* > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + f_2 > 0 \\ f_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} f_2 > -1 \\ f_1 > 0 \end{cases}}$$

Questi sono quindi i guadagni tali da ottenere *poli con parte reale minore di zero* e rispettare la specifica 1

- Poi per la specifica 3 questi poli dovranno essere posizionati in un certo modo sul semipiano sinistro così da ottenere un transitorio che scompare rapidamente

SPECIFICA 2

Applico la formula per trovare H:

$$\boxed{G^*_{y^\circ y}(0) = 1}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{n(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{n(s)}{s^2 + a_1^* s + a_0^*} H$$

$n(s) = C \operatorname{Adj}(sI - A) B = 1$

Per soddisfare la specifica 2

$$H = \frac{\varphi^*(0)}{n(0)} = \frac{a_0^*}{1} = f_1$$

Dove si nota che H dipende da f_1 che avevamo trovato precedentemente

- $H = f_1 = 1$

SPECIFICA 3

Vogliamo che il transitorio "scompaia" velocemente, ovvero vogliamo che l'uscita converga il prima possibile (e senza troppe oscillazioni possibilmente) al regime permanente, che corrisponde al nostro Y_0 di riferimento.

- Ancora non abbiamo visto un modo quantitativo per soddisfare questa richiesta, ma sappiamo in generale che dipende dalla posizione dei poli del polinomio caratteristico a ciclo chiuso. Ci saranno alcuni casi in cui abbiamo un andamento soddisfacente, e altri in cui non si rispetta questa specifica.

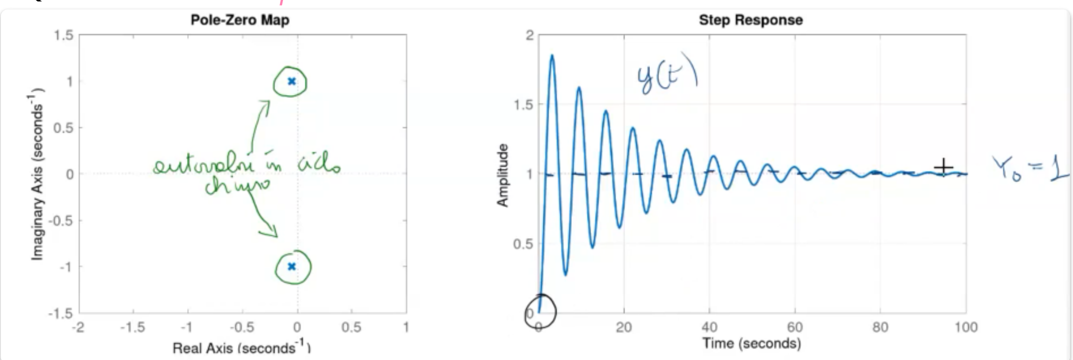
ESEMPIO 1

Sappiamo che $\varphi(s)^* = s^2 + (f_2 + 1)s + f_1$

- Poniamo $f_1 = 1$ e $f_2 = -0.9$ e vediamo che succede
- $\varphi(s)^*$ diventa

$$\varphi(s)^* = s^2 + 0.1\, s + 1$$

- Se li calcoliamo, si ottengono poli *complessi coniugati*, posizionati naturalmente nel semipiano sinistro perché abbiamo scelto f_1 e f_2 conformi alla specifica 1.
  - Questo causa una *risposta in ciclo chiuso oscillante*



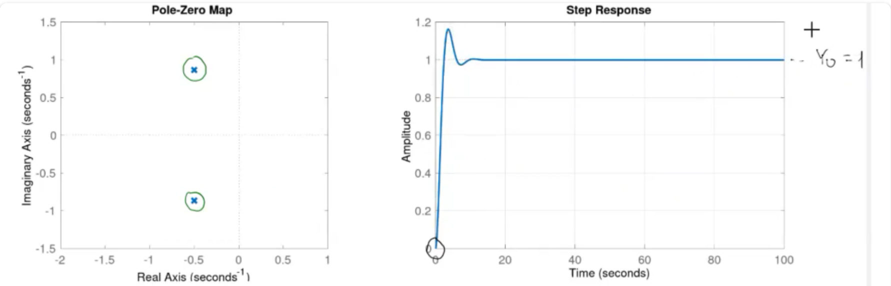
- Fisicamente l'uscita (che rappresenta la posizione del carrello) non è ottimale al nostro caso: il carrello infatti prima di arrivare alla posizione desiderata $Y_0 = 1$, va avanti e indietro a questa (arrivando anche a valori vicino a 2). Inoltre ci mette anche diverso tempo
  - Questo accade perché abbiamo autovalori sì stabili (parte reale minore di 0), ma sono oscillanti (complessi coniugati) e *vicino all'asse verticale immaginario*, ovvero alla zona di "confine" per l'instabilità

ESEMPIO 2

Cambiamo solo f_2, facendolo diventare 0

- Cambia quindi il polinomio caratteristico a ciclo chiuso e cambiano quindi i relativi autovalori
  - In questo caso sono posizionati più lontani dalla instabilità e hanno oscillazioni minori (e ci arrivo

anche più velocemente)



- Guadagni in feedback $f_1 = 1$ e $\boxed{f_2 = 0}$
- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\boxed{\varphi^*(s) = s^2 + s + 1}$$

Nota: autovalori in ciclo chiuso più lontani dall'asse immaginario
$\Rightarrow$ risposta in ciclo chiuso con oscillazioni più smorzate

ESEMPIO 3

Cambiamo f_1 e f_2 così *autovalori in ciclo chiuso reali*

- L'andamento è non oscillante, ma *ci mette tanto tempo ad assestarmi*
  - Transitorio non oscillante :) però lento :(

CONCLUDIAMO LA LEGGE DEL CONTROLLO CON LE SPECIFICHE

Con $f_1 > 0$ e $f_2 > -1$ e $H = f_1$

- Legge di controllo

$H = f_1$

$$\begin{aligned} u &= -F\,x + H\,y^\circ \\ &= -[f_1\ f_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + f_1\,y^\circ = -f_1 x_1 - f_2 x_2 + f_1 y^\circ \\ &= f_1(y^\circ - x_1) - f_2\,x_2 = f_1\left(y^\circ - y\right) - f_2\,\dot{y} \end{aligned}$$

$+$

con $f_1 > 0$ e $f_2 > -1$

Abbiamo un termine che *dipende dalla posizione* (in particolare dalla differenza tra la posizione desiderata e quella in cui siamo $y^o - y$) e dalla *velocità* ($\dot{y}$) - detto proporzionale derivativo (PD)

- Sulla base di queste due informazioni progettiamo il nostro controllo (forza che agisce sul carrello)

Nota: esistono anche sistemi non controllabili (in cui non c'è la possibilità ad esempio di controllare gli autovalori di $\varphi(s)^*$ perché gli elementi di F non compaiono nel polinomio stesso o sono configurati in maniera non concorde con le condizioni da imporre per altre specifiche (ad esempio per calcolare un H adatto)

Attenzione: non sempre F e H possono essere scelti in modo da soddisfare le specifiche di progetto!

- Condizione $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2) soddisfacibile solo se

$$r(0) = -C\text{Adj}(A)B \neq 0$$

$H = \dfrac{\varphi^*(0)}{r(0)}$

specifica 2 può essere soddisfatta
$\Updownarrow$
$r(0) \neq 0+$

Quando $\boxed{r(0) = 0}$ **non** è possibile mantenere stabilmente l'uscita ad un valore costante con la variabile di controllo u a disposizione

- Nell'esempio del carrello, al variare dei due guadagni f_1 e f_2 era possibile assegnare a piacere gli autovalori in ciclo chiuso, ma **non** è sempre così

Possono esistere autovalori **non controllabili** che non possono essere modificati mediante controllo in retroazione!

- Se $r(0)=0$ abbiamo $H=\frac{\varphi(0)^*}{\underbrace{r(0)}_{0}}$ (impossibile)
    - Quindi quando progetto il controllo devo prestare subito attenzione a questi vincoli, altrimenti le specifiche potrebbero non essere soddisfatte
        - Per la specifica 2 come visto è facile, basta che $r(0) \neq 0$
        - Per la specifica 1 è più complicato, e bisogna parlare di *controllabilità* (vedi dopo)

CONTROLLABILITA' E STABILIZZABILITA'

- Non sempre il progetti si può fare: dipende dalle proprietà di controllabilità è stabilizzabilità del sistema

ESEMPIO 1 - sistema STABILIZZABILE

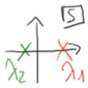
COMMENTI

- Il sistema inizialmente è internamente instabile, infatti il polinomio caratteristico "ad anello aperto" ha zeri (che sono gli autovalori) non tutti con parte reale minore di zero (ne ha uno che vale $+2$ addirittura)
- Ci calcoliamo così il polinomio caratteristico a ciclo chiuso:
    - Calcoliamo la matrice $A^* = A - BF$ della dinamica in ciclo chiuso
        - Nota: F è un vettore riga di dimensione 2, perché la matrice A di partenza è 2×2
    - Calcolo $\varphi(s)^*$
- Osserviamo gli autovalori ottenuti con il controllo
  - Notiamo che solo uno dei due autovalori può essere "corretto"/modificato. Esso lo chiameremo *autovalore controllabile*
  - L'altro è non controllabile perché non posso modificarlo
  - Per questo il sistema si dice *non completamente controllabile* (a differenza per esempio del carrello)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \underbrace{(s-2)}_{\varphi_c(s)}\underbrace{(s+1)}_{\varphi_{nc}(s)}$$

$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = -1$



$\mathrm{Re}\{\lambda_1\} > 0 \implies$ sistema internamente stabile

$$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-f_1 & 3-f_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s-2+f_1 & -3+f_2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2+f_1)(s+1)$$

$\lambda_1^* = 2 - f_1$
$\lambda_2^* = -1$

- Dato che l'autovalore controllabile è relativo proprio all'autovalore di partenza con $\mathrm{Re} > 0$, allora con opportuni valori ($f_1 > 2$) si può rendere l'autovalore con parte reale negativa, così da *rendere il sistema stabile*.
    - Quando questo è possibile il **sistema si dice stabilizzabile**, perché con il controllo posso agire sulla stabilità del sistema stesso (modificando i valori degli autovalori)
    - Stabilizzabile: tutti gli autovalori non controllabili hanno $\mathrm{Re} < 0$ (accade quando $\varphi_{\text{nc}}(s)$ è asintoticamente stabile)

ESEMPIO 2 - sistema NON STABILIZZABILE

- Analogo al precedente come procedimento (infatti cambia solo un elemento della matrice A)
  - Abbiamo un sistema con autovalori entrambi instabili

- Proviamo allora ad applicare il controllo (cambia solo un elemento alla fine)
- Calcolo anche il polinomio caratteristico a ciclo chiuso

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \overbrace{(s-2)}^{\varphi_C(s)}\overbrace{(s-1)}^{\varphi_{nC}(s)}$$

- Autovalori in anello aperto $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow$ instabilità interna
- Consideriamo un controllo in retroazione algebrica sullo stato

$$u = -F\,x + H\,y^{\circ}$$

- Matrice della dinamica in ciclo chiuso

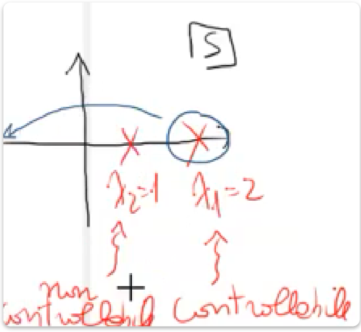
$$\begin{aligned} A^* = A - BF &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f_1 \; f_2] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-f_1 & 3-f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s-2+f_1 & -3+f_2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-2+f_1)(s-1)$$

- Autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = 2 - f_1, \quad \lambda_2^* = 1$
- Retroazione sullo stato modifica l'autovalore $\lambda_1 = 2$ ma non modifica l'altro autovalore $\lambda_2 = 1$
  - $\lambda_1 = 2$ autovalore **controllabile**
  - $\lambda_2 = 1$ autovalore **non controllabile**

- Seppur abbia la possibilità di controllare un autovalore (e quindi rendere esso stabile), rimangono altri autovalori che non si possono in nessun modo controllare (quindi rimangono autovalori con $\mathrm{Re} > 0$ che rendono il sistema instabile nonostante il controllo)
  - In questi casi si parla di **sistema non stabilizzabile**: non esiste alcun guadagno in feedback F tale da rendere il sistema in ciclo chiuso stabile (*esistono dei valori instabili non controllabili*)



DEFINIZIONI

AUTOVALORE CONTROLLABILE E NON

- Consideriamo il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

> **Definizione:** un autovalore λ_i della matrice A si dice
> - **non controllabile** se non può essere modificato con il controllo, ossia se è radice di $\varphi^*(s)$ per qualsiasi scelta F
> - **controllabile** se invece può essere modificato con il controllo

- Si dimostra che gli autovalori controllabili possono essere **posizionati a piacere** nel piano s scegliendo il guadagno di retroazione F (unico vincolo: autovalori complessi sono sempre in coppie coniugate)
- Controllabilità è una proprietà della coppia (A, B)

- Nota sulla penultima cosa: gli autovalori se controllabili li posso posizionare a piacere ma se sono complessi compaiono coniugati e li devo spostare "a coppia"
- Nota sulla cosa finale: dipende dalla matrice A e dalla matrice B, quest'ultima mi dice infatti come il controllo agisce sul sistema (era comunque ovvio osservando che in $\varphi(s)^*$ compaiono entrambe le matrici citate)

POLINOMIO CARATTERISTICO DI CONTROLLO

Dato che abbiamo partizionato l'insieme degli autovalori in due parti (controllabili e non controllabili), allora possiamo suddividere anche il polinomio caratteristico in due sotto-polinomi:

$$\varphi(s) = \varphi_c(s)\ \varphi_{\text{nc}}(s)$$

Dove:

- $\varphi_c(s)$ **polinomio caratteristico di controllo** ha come radici tutti e soli gli autovalori controllabili
- $\varphi_{\text{nc}}(s) = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$ ha come radici tutti e soli gli autovalori non controllabili

- Nell'esempio introduttivo 1 $\varphi(s) = (s-2)(s+1)$

  $\varphi_c(s) = s - 2 \qquad \varphi_{\text{nc}}(s) = s + 1$

  non completamente controllabile ma stabilizzabile perché l'autovalore non controllabile in -1 ha Re < 0

- Nell'esempio introduttivo 2 $\varphi(s) = (s-2)(s-1)$

  $\varphi_c(s) = s - 2 \qquad \varphi_{\text{nc}}(s) = s - 1$

  non completamente controllabile e non stabilizzabile perché l'autovalore non controllabile in 1 ha Re > 0

- nell'esempio del carrello $\varphi(s) = s(s+1)$

  $\varphi_c(s) = \varphi(s) = s(s+1) \qquad \varphi_{nc}(s) = 1$

  completamente controllabile e di conseguenza stabilizzabile

42 / 85

STABILIZZABILITA'

Fatto 3.3 Esiste un guadagno in feedback F tale da rendere la dinamica in ciclo chiuso $A^* = A - BF$ asintoticamente stabile
$\Leftrightarrow$ tutti gli (eventuali) autovalori non controllabili hanno Re < 0

Definizione: un sistema LTI si dice

- **completamente controllabile** se tutti gli autovalori sono controllabili
- **stabilizzabile** se tutti gli autovalori non controllabili hanno Re < 0

STUDIO DELLA CONTROLLABILITÀ / STABILIZZABILITÀ

- Negli esempi visti studiavamo il polinomio caratteristico in ciclo chiuso e sulla base della fattorizzazione di esso si individuavano gli zeri e si concludeva a secondo di quanto valeva la parte reale sulla stabilità.
  - Questo metodo funziona per casi specifici e relativamente semplici, come nell'esempio 2 qui riportato:

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s-2+f_1 & -3+f_2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-2+f_1)(s-1)$$

Autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = 2 - f_1, \quad \lambda_2^* = 1$

  - In generale però non sempre viene un polinomio facilmente "gestibile" a livello di ricerca degli zeri (autovalori).
- Per tali ragioni esiste quella che si chiama **parte controllabile del sistema**, che si può calcolare facilmente (calcolo matriciale: $(sI - A)^{-1} B$)

- Per studiare la stabilizzabilità dobbiamo fattorizzare $\varphi(s)$ in parte controllabile $\varphi_c(s)$ e parte non controllabile $\varphi_{nc}(s)$
- Per fattorizzare $\varphi(s)$ possiamo calcolare $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$ e vedere quali autovalori si modificano e quali no
(metodo **non consigliato** perché può richiedere calcoli complicati)
- In alternativa possiamo determinare direttamente $\varphi_c(s)$ individuando la **parte controllabile** del sistema $(sI-A)^{-1}B$

PARTE CONTROLLABILE

ESEMPIO: prendiamo un sistema non completamente controllabile

- Calcoliamo il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e individuiamo gli autovalori controllabili del sistema
- Operazione inversa a quello che si fa di solito: si passa dalle matrici alle equazioni di stato (ricordando che la prima componente $\dot{x}_i$ è quella associata alla i-esima riga delle matrici A e B)
- Si associa la i-esima equazione di stato all'i-esimo autovalore: se quest'ultimo è controllabile, allora l'equazione di stato rientra nel *sottosistema controllabile* $\mathcal{S}_c$
  - Se l'autovalore è non controllabile, allora l'equazione rientra in $\mathcal{S}_{nc}$, *sottosistema non controllabile*,

perché evolve indipendentemente dal controllo

- Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 1 con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = Ax + Bu \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico $\varphi(s) = (s-2)(s+1)$ con $\lambda_1 = 2$ autovalore controllabile e $\lambda_2 = -1$ autovalore non controllabile
- Equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

- $\mathcal{S}_c$ **sottosistema controllabile**: evolve secondo l'autovalore controllabile $\lambda_1 = 2$

$$\mathcal{S}_c : \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u$$

- $\mathcal{S}_{nc}$ **sottosistema non controllabile**: evolve secondo l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$

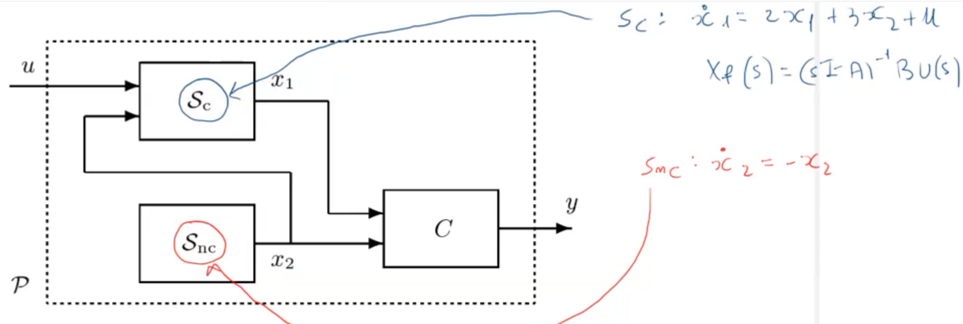
$$\mathcal{S}_{nc} : \dot{x}_2 = -x_2$$

DIAGRAMMA A BLOCCHI

Come si nota dal diagramma a blocchi, $\mathcal{S}_{nc}$ non ha ingressi, perché tanto non è controllabile (evolve *autonomamente*)

- Pertanto la risposta forzata, che dice come l'ingresso influenza lo stato (e vale nel dominio di Laplace $X_f(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$), non è influenzata da $\mathcal{S}_{nc}$.

La parte invece controllabile $\mathcal{S}_c$ ha come autovalori gli autovalori controllabili ed è per questa ragione *influenzata dal controllo* (e quindi è non autonoma)



- $\mathcal{S}_{nc}$ sottosistema non controllabile evolve come un sistema **autonomo**: non dipende da u né direttamente né indirettamente attraverso x_1
- $\mathcal{S}_{nc}$ sottosistema non controllabile **non** influenza l'evoluzione forzata $x_f(t)$

ESEMPIO DI SCOMPOSIZIONE PARTE CONTROLLABILE E NON

- Nella risposta forzata si vede solo la parte controllabile

- Consideriamo l'evoluzione forzata dello stato nel dominio di Laplace

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

- Funzione di trasferimento tra ingresso e stato

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \underbrace{(s-2)}_{\text{contr}}\underbrace{(s+1)}_{\text{non contr}}$$

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} B &= \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A) B \\
&= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$ si cancella nel prodotto $(sI - A)^{-1}B$ e quindi non compare come polo nell'evoluzione forzata

La risposta forzata ha come unico polo rimanente quello controllabile (possono essere eventualmente di più)

- Gli autovalori non controllabili spariscono (si cancellano) --> sono gli *autovalori nascosti del sistema*
  - La semplificazione avviene a causa della moltiplicazione per B (che fa rimanere solo l parte controllabile) [più avanti vedremo che possiamo avere semplificazioni anche moltiplicando per C]

GENERALIZZAZIONE e CALCOLO POLINOMIO CARATTERISTICO DI CONTROLLO

I poli controllabili del sistema sono i poli di $(sI - A)^{-1}B$

Fatto 3.4 I poli di $(sI - A)^{-1} B$ sono tutti e soli gli autovalori controllabili del sistema

- Per sistemi singolo ingresso $\dim(u) = 1$
  - $\varphi_c(s)$ si calcola come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1} B$
  - $\varphi_{nc}(s)$ si calcola come $\varphi_{nc}(s) = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$
- Per sistemi con più ingressi $\dim(u) > 1$ invece degli elementi di $(sI - A)^{-1} B$ dobbiamo considerare i determinanti delle sottomatrici quadrate
- Autovalori non controllabili non compaiono come poli di $(sI - A)^{-1}B$
  $\Rightarrow$ autovalori non controllabili non compaiono come poli di $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
  $\Rightarrow$ autovalori non controllabili sono autovalori **nascosti** del sistema

Nota: (come c'è scritto) gli autovalori non controllabile che scompaiono nel calcolo di $\varphi_{nc}(s)$ a causa della moltiplicazione per B, non si presentano nemmeno in $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE

$$\varphi_c(s) = s-2$$

$$\varphi_{mc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = \frac{(s-2)(s+1)}{s-2}$$

$$= s+1$$

> *in questo modo si stabilisce con un metodo preciso quali sono gli autovalori controllabili e quali no, e capire così se il sistema è stabilizzabile oppure no*