# RISPOSTA IMPULSIVA

L'antitrasformata della funzione di trasferimento. Ovvero quest'ultima osservata nel dominio del tempo:

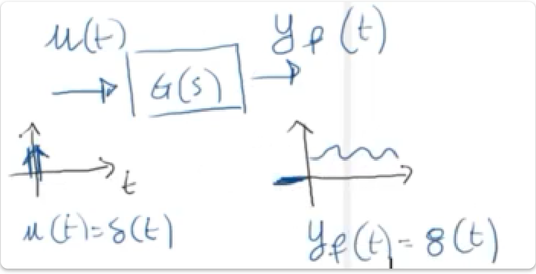
$$\boxed{g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}}$$

Sfruttando la linearità dell'antitrasformata si arriva a dire che:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(SI-A)^{-1}B + D]\} = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Chiamata risposta impulsiva perché equivale alla risposta forzata del sistema se prendiamo come ingresso un segnale impulsivo di Dirac, infatti:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = \mathcal{L}^{-1}\{u(t)\} = 1 \implies Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s) \longleftrightarrow y_f(t) = g(t)$$




Essendo una "rielaborazione" di $G(s)$, anche la risposta impulsiva *non comprende quei poli nascosti all'interno del sistema*

- In altre parole, solo i poli (autovalori) visibili a $G(s)$ danno un contributo alla risposta impulsiva
  - Quindi i **modi di evolvere** descritti dalla risposta impulsiva sono relativi solo a un **sottoinsieme di quelli totali del sistema**
    - I modi che non si osservano sono detti *modi nascosti* del sistema

ESEMPIO DEL CARRELLO

- caso a) non ci sono poli nascosti quindi non ci sono modi nascosti

- caso b) ci sono poli nascosti quindi ci sono anche modi nascosti (si vede solo il modo esponenziale)

$\varphi(s) = s(s+1) \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad$ modi naturali $1(t),\ e^{-t}1(t)$

caso a) $\qquad C = [1 \quad 0] \qquad y = x_1$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1}\right\} = k_1 1(t) + k_2 e^{-t} 1(t) = 1(t) - e^{-t} 1(t)$$

entrambi i modi naturali compaiono in $g(t)$
$\Rightarrow$ non ci sono modi nascosti

caso b) $\qquad C = [0 \quad 1] \qquad y = x_2$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} 1(t)$$

solo il modo naturale $e^{-t}1(t)$ associato all'autovalore non nascosto $\lambda_2 = -1$ si vede nella $g(t)$
il modo naturale $1(t)$ associato all'autovalore nascosto $\lambda_1 = 0$ non si vede in $g(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{modo nascosto}}$

## CALCOLO DELLA RISPOSTA FORZATA

Sappiamo che:

$$Y_f(s) = G(s)\,U(s)$$

Se in ingresso abbiamo $u(t)$ con trasformata $U(s)$ razionale, allora

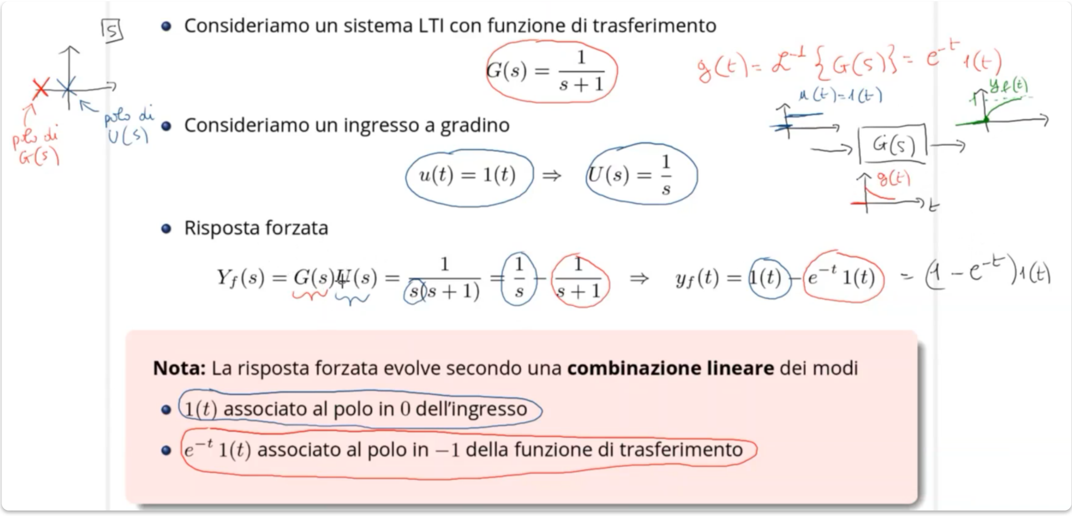
- poli di $Y_f(s) = \text{poli funzione trasferimento} + \text{poli ingresso}$
- modi di $y_f(t) = \text{modi risposta impulsiva } g(t) + \text{modi ingresso } u(t)$

**Tuttavia**, nel prodotto $G(s)\,U(s)$ **potrebbero esserci semplificazioni**, che portano una riduzione dei poli; oppure **potrebbe esserci un aumento di molteplicità** che fanno comparire nuovi modi di evoluzione (quando il polo dell'ingresso coincide con il polo della funzione di trasferimento)

- Il caso tipico (no semplificazioni o aumento di molteplicità) lo abbiamo solo quando i poli sono *disgiunti*

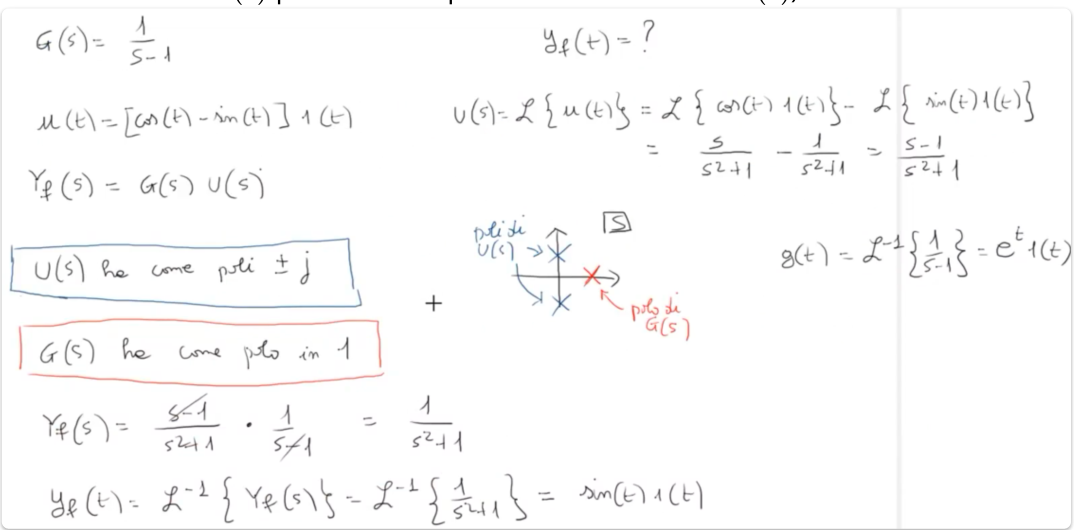
#### ESEMPIO 1: CASO TIPICO

- Compaiono tutti i modi associati all'ingresso e alla funzione di trasferimento (abbiamo la somma dei due in uscita)




### ESEMPIO 2: SEMPLIFICAZIONI

- Calcolo della risposta forzata (tipica domanda da esame)
- Calcolo $G(s)$ se non ce l'ho già
- Trasformo l'ingresso $u(t) \to U(S)$
- Individuo i poli di $U(s)$ e $G(s)$ (magari anche sul piano complesso)
  - La risposta impulsiva (facoltativo) basta trovare $g(t)$ come antitrasformata di $G(s)$
- Applico la formula per $Y_f(s)$
  - Osservo se ci sono semplificazioni (in questo caso compaiono)
- Faccio $\mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\}$ per trovare la risposta forzata $y_f(s)$
  - Osservo se ci sono state semplificazioni (in questo caso sì, scompare il modo associato alla funzione di trasferimento $G(s)$ perché si semplifica con uno zero di $U(s)$)




### ESEMPIO 3: AUMENTO MOLTEPLICITÀ --> RISONANZA

- Calcolo $Y_f(s)$, facendo le relative antitrasformate quando necessario
  *- Osservo che l'ingresso e la funzione di trasferimento hanno entrambi un polo in $0$*
  - Questo implica un aumento della molteplicità
- Calcolo $y_f(s)$, osservando che compare un *nuovo* modo di evoluzione (RAMPA) dovuto a un aumento della molteplicità: infatti avevamo due modi di evoluzione gradino (uno relativo alla $g(t)$ e uno relativo a $u(t)$)
  *- Abbiamo sollecitato il sistema con lo stesso modo di evoluzione* del sistema stesso. Questo fenomeno

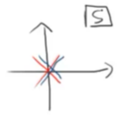
viene detto **risonanza**

$\boxed{G(s) = \frac{1}{s}}$ $\quad u(t) = 1(t) \quad$ $y_f(t) = ?$

$Y_f(s) = G(s)\,U(s)$

$\boxed{U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}}$

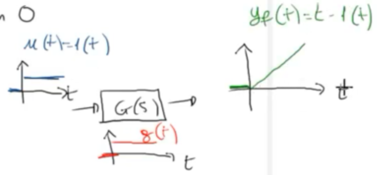
ingresso e f.d.t. hanno entrambi un polo in 0




$Y_f(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

$u(t) = 1(t)$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1(t)$




$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = t \cdot 1(t)$

nuovo modo di evoluzione non presente né in $u(t)$ né in $g(t)$ è dovuto all'aumento della molteplicità

- ingresso limitato --> uscita divergente (instabilità esterna come vedremo)

# STABILITA' ESTERNA

*- Effetto delle perturbazioni dell'ingresso sull'uscita*
- Lasciamo invariate le condizioni iniziali
- Perturbiamo "semplicemente" l'ingresso
- Poi osserviamo come si è influenzata l'uscita

## MAPPA TRANSIZIONE GLOBALE USCITA

$$y(t) = \Psi(t, x_0, u) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = Cx(t) + Du(t)$$

Con $\Psi(t, x_0, u)$ **mappa transizione dell'uscita**

- essa è una funzione che dice a partire da una condizione iniziale $x_0$ e supponendo di applicare un certo ingresso $u$ il valore dell'uscita a un certo tempo $t$.
- la mappa di transizione di stato invece mi dava informazioni sullo stato (invece dell'uscita)

## EFFETTO PERTURBAZIONE

Confronto tra uscita con ingresso *nominale* $u$ e uscita con ingresso perturbato $\tilde{u}$:

$$y(t) = \Psi(t, x_0, u) \longleftrightarrow y(t) = \Psi(t, x_0, u + \tilde{u})$$

- Dove abbiamo perturbato l'ingresso di un valore $\tilde{u}$
- Vediamo come reagisce il sistema con questi due ingressi distinti e poi osserviamo la *differenza*, così da capire l'effetto della perturbazione dell'ingresso

risposta forzata a $u(t)+\tilde{u}(t)$

$$\begin{aligned}
&\Psi(t, x_0, u+\tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) \\
&= \left\{\cancel{Ce^{At}}\,x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}\,B\,[\cancel{u(\tau)} + \tilde{u}(\tau)]\,d\tau + D[\cancel{u(t)} + \tilde{u}(t)]\right\} \\
&\quad - \left\{\cancel{Ce^{At}}\,x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}\,B\,\cancel{u(\tau)}\,d\tau + D\cancel{u(t)}\right\} \\
&= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}\,B\,\tilde{u}(\tau)\,d\tau + D\,\tilde{u}(t)
\end{aligned}$$

risposta forzata a $u(t)$

- dove l'evoluzione libere si sono semplificate, rimane solo la risposta forzata
- La risposta all'ingresso nominale della risposta forzata si cancella. **Rimane solo la risposta forzata alla perturbazione $\tilde{u}$**
  - Nel dominio di Laplace essa si calcola come $\boxed{G(s)\,\tilde{U}(s)}$
  - Non dipende né dal tipo di ingresso $u$ né dalle condizioni iniziali $x_0$
    - Ovvero se cambiamo $u$ e $x_0$ ma il sistema e la perturbazioni sono le stesse, allora l'uscita è la stessa --> tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità rispetto alle perturbazioni dell'ingresso
      **- Quindi la stabilità esterna è una proprietà intrinseca del sistema**, questo perché appunto la scelta di $x_0$ e $u$ è irrilevante per calcolare l'effetto della perturbazione
  - Cercheremo di capire se questo effetto si mantiene limitato così da garantire stabilità

Riassumendo:

- Effetto della perturbazione

$$\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B\,\tilde{u}(\tau)\,d\tau + D\,\tilde{u}(t)$$

risposta forzata alla perturbazione $\tilde{u}$

- Nel dominio di Laplace

$$\mathcal{L}\{\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u)\} = [C(sI - A)^{-1}B + D]\,\tilde{U}(s) = G(s)\,\tilde{U}(s)$$

- Effetto di una pertubazione sull'ingresso dipende da
  - funzione di trasferimento $G(s)$
  - perturbazione $\tilde{u}$

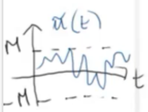
**non** dipende dalla condizione iniziale $x_0$ né dall'ingresso $u$
$\Rightarrow$ non dipende dalla particolare traiettoria nominale considerata

Per un sistema LTI **tutte** le traiettorie del sistema hanno le **stesse proprietà** di stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso.

Si può quindi parlare in modo generale di **stabilità esterna del sistema**

## STABILITA' ESTERNA

Un sistema è **esternamente stabile** se una perturbazione limitata $\tilde{u}$ porta una variazione limitata dell'uscita $y$




**Definizione:** Un sistema LTI TC si dice **esternamente stabile** se una perturbazione dell'ingresso $\tilde{u}$ limitata implica una variazione limitata dell'uscita $y$

$$\exists M : \ \|\tilde{u}(t)\| \le M \quad \forall t \quad \Longrightarrow \quad \exists L : \ \|\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u)\| \le L \cdot M \quad \forall t$$


- $L$ rappresenta la massima amplificazione possibile di un perturbazione sull'ingresso (guadagno del sistema)
- Per un sistema LTI, l'effetto della perturbazione coincide con la risposta forzata all'ingresso $\tilde{u}$

$$\mathcal{L}\{\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u)\} = G(s)\,\tilde{U}(s)$$

$\Rightarrow$ stabilità esterna è una proprietà della **sola** risposta forzata $y_f(t)$

**Un sistema di questo tipo è $BIBO$ (bounded input bounded output)**

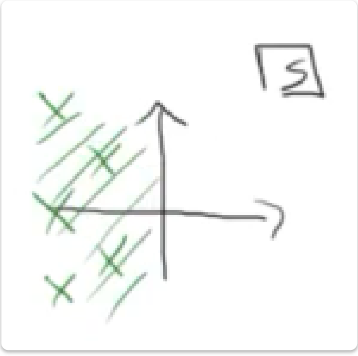
- la risposta forzata a un ingresso limitato è sempre limitata

### CONDIZIONI PER LA STABILITA' ESTERNA

Abbiamo in considerazione: $\tilde{Y}(s) = G(s)\tilde{U}(s)$
Quindi possiamo riscrivere al solito:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Un sistema è esternamente stabile **se e solo se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale $< 0$**

- Ovvero si trovano nella regione di stabilità nel piano $s$, corrispondente al semipiano sinistro
  
  
- Non si ammettono come nella stabilità interna i poli in $0$ (condizione più restrittiva per la stabilità esterna)

Quindi l'effetto degli ingressi o si mantiene limitato oppure è illimitato (non c'è vie di mezzo)

- In caso di multipli ingressi, $G(s)$ è una matrice quindi in quel caso vado a vedere tutti i poli di ogni elemento di tale matrice