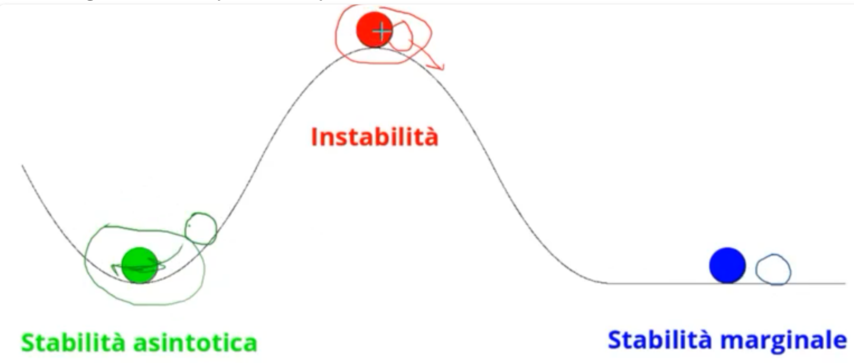
SISTEMI NON LINEARI - STUDIO DELLA STABILITA' INTERNA

STABILITA'

- Nei sistemi non lineari la stabilità è intrinsecamente stabile solo *localmente*
  - Configurazione più complessa del sistema (stabilità diverse a seconda della zona)



Per sistemi lineari: proprietà di stabilità hanno carattere **globale**

- non dipendono dalla traiettoria considerata (**stabilità del sistema**)
- non dipendono dall'ampiezza della perturbazione

Per sistemi non lineari: proprietà di stabilità hanno carattere **locale**

- dipendono dalla traiettoria considerata (**stabilità della traiettoria**)
- dipendono dall'ampiezza della perturbazione

- La stabilità è legata alla singola *traiettoria* e dipende da quanto perturbiamo (se perturbiamo tanto giungiamo a una situazione di stabilità diversa del sistema)

PUNTI DI EQUILIBRIO

Abbiamo detto che la stabilità dipende dalle traiettorie.
Ci concentriamo solo sulle *traiettorie **costanti***, ovvero i punti di equilibrio

- Lo studio e l'individuazione di essi corrisponde a trovare le condizioni di quiete

Matematicamente è una coppia stato ingresso per cui:

- Partendo da quello stato e applicando costantemente quell'ingresso allora lo stato non cambia

$$\boxed{\text{Coppia di partenza: } (x_e, u_e) \Rightarrow \begin{matrix} x(0) = x_e \\ u(t) = u_e \end{matrix} \implies x(t) = x_e \quad , \forall t \geq 0}$$

I punti di equilibrio sono quelli rappresentati in verde, rosso e blu nella figura precedente (sono lì fermi, non si muovono, supponendo che siano effettivamente fermi in partenza)

Sono i punti in cui la derivata vale zero
$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 0$
$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
$x(t) = x_e \quad , \quad u(t) = u_e$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = 0$

Fatto 2.16 I punti di equilibrio sono tutte e sole le coppie (x_e, u_e) tali che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

- **Dimostrazione:**
  - Supponiamo che il sistema si trovi in $x(t) = x_e$ e si applichi l'ingresso $u(t) = u_e$
  - Lo stato non cambia (soluzione costante) $\Leftrightarrow \quad \dot{x}(t) = 0$
  - Notiamo che

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))|_{x(t)=x_e, u(t)=u_e} = f(x_e, u_e)$$

  - Di conseguenza

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f(x_e, u_e) = 0}$$

- **Per sistemi autonomi:** x_e equilibrio $\quad \Leftrightarrow \quad f(x_e) = 0$

- trovare i punti di equilibrio quindi corrisponde a trovare tutte le coppie (x_e, u_e) tali per cui la $f(x_e, u_e) = 0$

USCITA DI EQUILIBRIO

È una funzione associata a ciascun punto di equilibrio, in particolare:

$$y_e = h(x_e, u_e)$$

ESEMPI

ESERCIZIO

- Sistema non autonomo
- Ci interessano solo le *soluzioni reali in $\mathbb{R}$*

$\dot{x}(t) = x^2(t) - u(t)$ calcolare gli equilibri

$y(t) = x(t)$

$(x_e, u_e) : f(x_e, u_e) = 0$

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ $\quad f(x,u) = x^2 - u$

$(x_e, u_e) : x_e^2 - u_e = 0$

dato un ingresso u_e i corrispondenti stati di equilibrio sono le soluzioni di $x_e^2 - u_e = 0$ $\quad \boxed{x_e^2 = u_e}$

N.B. ci interessano solo soluzioni reali in $\mathbb{R}$

$u_e < 0$ $\quad x_e^2 = u_e$ non ha soluzioni $\Rightarrow$ non ci sono stati di equilibrio

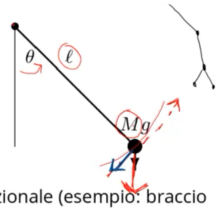
$u_e = 0$ $\quad x_e^2 = 0$ ha soluzione $x_e = 0$ $\quad$ (1) $\sqrt{u_e}$

$u_e > 0$ $\quad x_e^2 = u_e$ ha soluzione $x_e = \pm\sqrt{u_e}$ $\quad$ (2) $-\sqrt{u_e}$

$-\sqrt{u_e} \quad 0 \quad \sqrt{u_e} \quad \rightarrow x$

PENDOLO (braccio robotico)

- Pendolo di massa M e lunghezza ℓ
- θ angolo tra il pendolo e la verticale
- c coefficiente di attrito viscoso
- g accelerazione di gravità

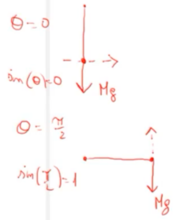


- Modello di sistema meccanico con dinamica rotazionale (esempio: braccio robotico con 1 grado dil libertà)
- Dall'equazione di Newton (lungo la direzione tangente al moto)

$$M\ell\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta - c\ell\dot{\theta}$$

dove

- $-Mg\sin\theta$ componente della forza peso tangenziale al moto
- $-c\ell\dot{\theta}$ forza di attrito viscoso che si oppone al moto



- unico grado di libertà: angolo θ

Riscriviamo l'equazione differenziali in termini di equazione di stato

- Poi cerco i punti di equilibrio una volta trovata la funzione di transizione di stato $f(x)$

$$M\ell\ddot{\theta} = -Mg\sin(\theta) - c\ell\dot{\theta}$$

$$\theta = y$$

$$M\ell\ddot{y} = -Mg\sin(y) - c\ell\dot{y}$$

$$\boxed{\ddot{y} = -\frac{g}{\ell}\sin(y) - \frac{c}{M}\dot{y}}$$

scriviamo le equazioni di stato $\quad x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{g}{\ell}\sin(\overset{x_1}{y}) - \frac{c}{M}\overset{x_2}{\dot{y}} =$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{c}{M}x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{c}{M}x_2 \end{bmatrix}$$

x_e equilibrio $\iff f(x_e) = 0$

- prima componente stato x_e : angolo
- seconda componente stato x_e : velocità

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{c}{M}x_2 \end{bmatrix}$$

$x_e : f(x_e) = 0 \qquad x_e = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_{e2} \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_{e1}) - \frac{c}{M}x_{e2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_{e2} = 0 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_{e1}) - \frac{c}{M}\cancel{x_{e2}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{e2} = 0 \\ \sin(x_{e1}) = 0 \end{cases}$$

$\sin(x_{e1}) = 0 \iff x_{e1} = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

abbiamo infiniti punti di equilibrio del tipo

$$x_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ angolo uguale a $k\pi$

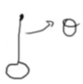
→ velocità angolare nulla

2 tipi di equilibri:

k pari

$x_{e1} = \theta_e = 0, 2\pi, -2\pi, \dots$

pendolo nella posizione verticale in basso con velocità 0



k dispari

$x_{e1} = \theta_e = \pi, -\pi, \dots$

pendolo nella posizione verticale in alto con velocità 0

- Infiniti punti di equilibrio (angolo pari a $k\pi$ e velocità angolare nulla)
  - Per k pari i punti di equilibrio sono quelli in cui il pendolo è in verticale in basso
    - Equilibrio *stabile*. Se applico piccole sollecitazioni il pendolo torna nella medesima posizione
  - Per k dispari i punti di equilibrio sono quelli in cui il pendolo è in verticale in alto

- Equilibrio *instabile* (con il controllo lo potremo rendere stabile). Per ora però con piccole sollecitazioni il pendolo perde l'equilibrio

MAPPA TRANSIZIONE GLOBALE

Supponendo che sia possibile trovare la soluzione di un sistema non lineare, allora questa è identificata dalla *mappa di transizione di stato*:

$$x(t) = \Phi(t, x_0, u)$$

Ovvero a partire da una condizione iniziale x_0 e un segnale d'ingresso u possiamo determinare lo stato del sistema per ogni istante t

Se abbiamo un punto di equilibrio (x_e, u_e) allora la mappa si riduce a

$$\Phi(t, x_e, u_e) = x_e$$

- ovvero se applichiamo un determinato stato e un ingresso rimaniamo nella posizione di equilibrio *Proviamo ora a perturbare*
- osservo cioè la traiettoria a partire da un punto "leggermente" spostato rispetto a x_e, ovvero $x_e + \tilde{x}_0$

- Studiamo la **stabilità interna dei punti di equilibrio** considerando una perturbazione della condizione iniziale
- Consideriamo come **traiettoria nominale** quella costante corrispondente al punto di equilibrio (x_e, u_e)

$$\boxed{x(t) = \Phi(t, x_e, u_e) = x_e}$$

- Consideriamo una condizionale iniziale perturbata $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$ e la corrispondente **traiettoria perturbata**

$$x(t) = \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e)$$

EFFETTO PERTURBAZIONE

Al solito, si fa la differenza tra la situazione perturbata e quella nominale:

- **effetto della perturbazione** = traiettoria perturbata − traiettoria nominale

$$\Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - \Phi(t, x_e, u_e) = \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - x_e$$

Nota: La quantità

$$\|\Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - x_e\|$$

misura la distanza tra la traiettoria perturbata e lo stato di equilibrio x_e

STABILITA' ALLA LYAPUNOV

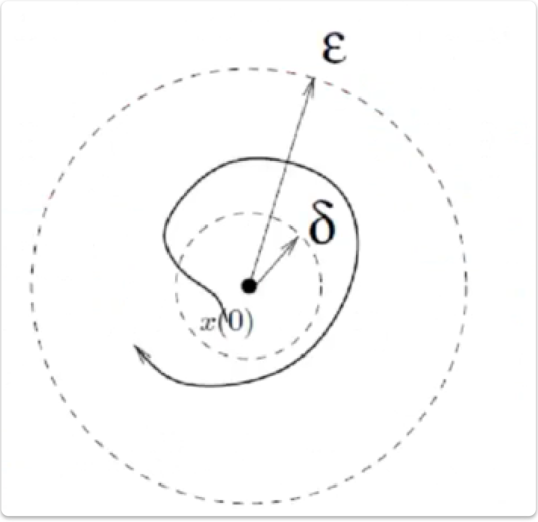
> *Perturbazioni sufficientemente piccole della condizione iniziale danno luogo a perturbazioni arbitrariamente piccole della traiettoria*

"Più piccola è la perturbazione più piccolo è l'effetto"

- Se perturbiamo poco la condizione iniziale rispetto alla condizione di equilibrio, allora anche la traiettoria corrispondente si allontana poco dalla condizione di equilibrio stessa

Matematicamente:
Abbiamo stabilità se (partendo da un punto $x(0)$ di equilibrio):

- Fissato un δ esterno al punto di equilibrio tale per cui la condizione iniziale perturbata si trova in questo intorno, allora anche la relativa traiettoria si trova a distanza inferiore a ε
- Dal punto di equilibrio riesco sempre a trovare un intorno δ che mi garantisce questo tipo di stabilità



Quindi:

- δ è la perturbazione massima che agiamo sulla condizione iniziale
- ε è la traiettoria massima che "possiamo permetterci" una volta fissato δ
  Ovvero la differenza tra la traiettoria perturbata e quella nominale deve essere inferiore a un certo ε fissato

Definizione: L'equilibrio (x_e, u_e) si dice **stabile alla Lyapunov** se comunque si fissa un $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \delta \implies \|\underbrace{\Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e)}_{\text{traiettoria perturbata}} - \underbrace{x_e}_{\text{traiettoria nominale}}\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0$$