POTENZA DI MATRICE

Per calcolare A^t è conveniente anche in questo caso passare dall'operatore di trasformata, ottenendo:

$$\mathcal{Z}\{A^t\} = (zI - A)^{-1}\, z = \frac{1}{\varphi(z)} Adj(zI - A)\, z$$

Così come: $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$

Analogamente al caso dei sistemi TC:

- $(zI - A)^{-1}$ matrice di funzioni razionali aventi come poli gli autovalori di A con la loro molteplicità nel polinomo minimo $m(z)$

Per calcolare la potenza di matrice A^t

1. Si calcola l'inversa $(zI - A)^{-1}$
2. Si scompongono in fratti semplici gli elementi di $(zI - A)^{-1}$
3. Si calcola l'**antitrasformata Zeta**

$$A^t = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1}\, z\right\}$$

+

> *Quindi gli autovalori del polinomio caratteristico sono ancora i poli dell'inversa, ovvero* $(zI - A)^{-1}$

CONFRONTO LAPLACE - Z (TC-TD)

- Il polo del gradino in TD è 1
- Al posto del modo evoluzione esponenziale, nel TD abbiamo modo evoluzione potenza (con i relativi sviluppi (moltiplica per t) quando aumenta la molteplicità)

Tempo continuo	Tempo discreto
• Trasformata del gradino TC	• Trasformata del gradino TD
$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$	$\mathcal{Z}\{1(t)\} = \frac{z}{z-1}$
• Trasformata dell'esponenziale TC	• Trasformata della potenza TD
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\, 1(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$	$\mathcal{Z}\{\lambda^t\, 1(t)\} = \frac{z}{z-\lambda}$
• Un polo in λ dà luogo al modo di evoluzione	• Un polo in λ dà luogo al modo di evoluzione
$e^{\lambda t}\, 1(t)$	$\lambda^t\, 1(t)$
• Un polo in λ di molteplicità m dà luogo ai modi di evoluzione	• Un polo in λ di molteplicità m dà luogo ai modi di evoluzione
$e^{\lambda t},\ t e^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{m-1} e^{\lambda t}$	$\lambda^t,\ t\lambda^t,\ \ldots,\ t^{m-1}\lambda^t$

MODI NATURALI

Quindi nella potenza A^t abbiamo i modi di evoluzioni, con molteplicità associata ai poli di $\varphi(z)$:

- La matrice inversa $(zI - A)^{-1}$ ha come poli gli autovalori del sistema
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$$
con le molteplicità $\quad m(z) = (z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_k)^{m_k}$
$$m_1, \ldots, m_k$$
- Ricordiamo che per per l'evoluzione libera vale
$$x_\ell(t) = A^t x(0) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1} z\right\} x(0)$$

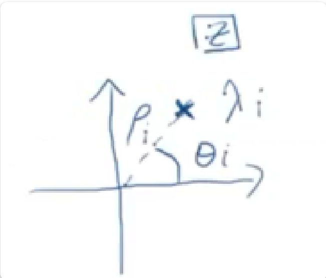
Teorema 2.7 A^t è una matrice avente come elementi opportune **combinazioni lineari** di
$$\lambda_i^t,\ t\,\lambda_i^t,\ \ldots,\ t^{m_i-1}\,\lambda_i^t$$
per $i = 1, \ldots, k$.
Tale segnali sono detti **modi naturali del sistema**.

- Di conseguenza $x_\ell(t) = A^t x(0)$ e $y_\ell(t) = C\,A^t x(0)$ evolvono secondo una opportuna **combinazione dei modi naturali** del sistema (al variare delle **condizioni iniziali**)

- I modi in Laplace erano esponenziali: $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots$

MODULO E FASE (ARGOMENTO)

Invece di guardare parte reale e immaginaria per stabilire rispettivamente convergenza oppure oscillazioni, *si va a guardare il modulo e la fase* di un certo polo λ_i



- Utile perché posso riscrivere la potenza di matrice λ_i^t in modo più semplice
  Infatti un certo λ_i lo si può riscrivere come:
$$\boxed{\lambda_i = \rho_i e^{j\theta_i}} \quad , \quad \text{avente } \rho_i = |\lambda_i| \ \ , \ \ \theta_i = \angle\lambda_i$$
  La relativa potenza è data da:
$$\lambda_i^t = (\rho_i e^{j\theta_i})^t = \rho_i^t e^{j\theta_i t} = \underbrace{\rho_i^t}\ \{\cos(\theta_i t) + j\sin(\theta_i t)\}$$

La convergenza o meno dipende dal modulo ρ_i^t (ovvero il termine di esponenziale reale)

- In generale quindi dipende dal modo di ciascun autovalore, ovvero: $\rho_i = |\lambda_i|$

* *

- Scomponento gli autovalori in termini di **modulo** e **fase**

$$\lambda_i = \rho_i e^{j\theta_i}$$

con

$$\rho_i = |\lambda_i| \qquad \theta_i = \angle\lambda_i$$

- Modo naturale

$$\begin{aligned} t^\ell\,\lambda_i^t &= t^\ell\,\rho_i^t e^{j\theta_i\,t} \\ &= t^\ell\,\rho_i^t\,[\cos(\theta_i\,t) + j\sin(\theta_i\,t)] \end{aligned}$$

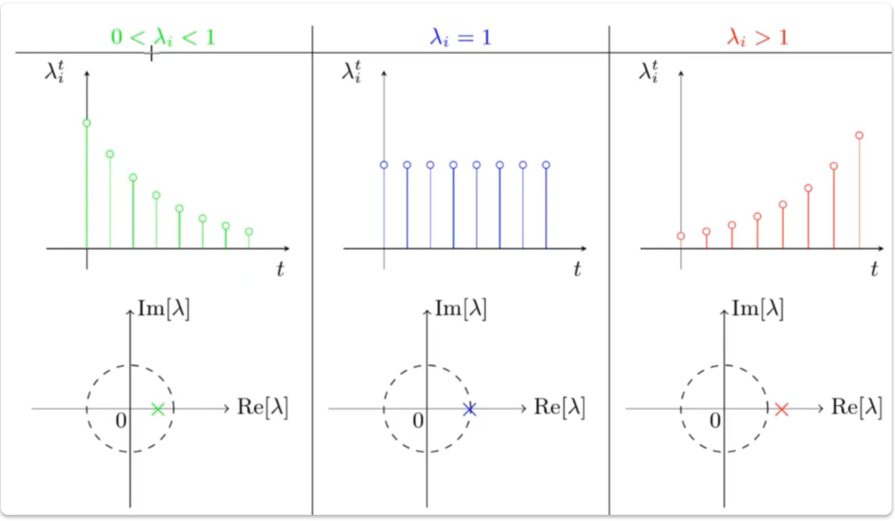
- Modulo $\rho_i = |\lambda_i|$ dell'autovalore determina la **convergenza/divergenza** del modo naturale
- Fase $\theta_i = \angle\lambda_i$ dell'autovalore determina la presenza o meno di **oscillazioni**
- **Attenzione:** se λ_i autovalore complesso allora anche il suo complesso coniugato $\overline{\lambda}_i = \rho_i e^{-j\theta_i}$ è autovalore con la stessa molteplicità
$\Rightarrow$ i modi $t^\ell\,\lambda_i^t$ e $t^\ell\,\overline{\lambda_i}^t$ sono presenti sempre in coppia e si combinano per dare luogo ai modi reali

$$t^\ell\,\rho_i^t\,\cos(\theta_i\,t) \qquad t^\ell\,\rho_i^t\,\sin(\theta_i\,t)$$

* *

POLO Λ_I REALE POSITIVO

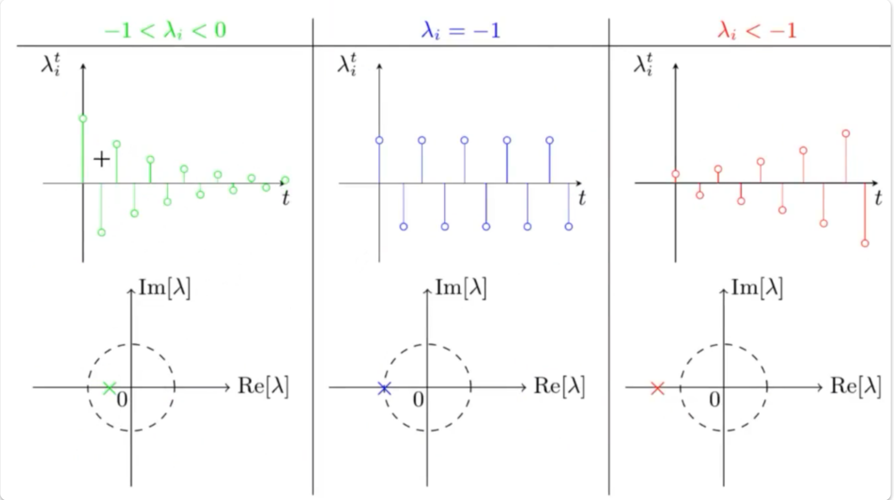
- Quanto $\theta_i = 0$ (no parte immaginaria, il polo sta sull'asse orizzontale reale)



POLO λ_i REALE NEGATIVO

- il seno va a 0
- il coseno vale ± 1

> > *componente oscillatoria (seni alterni)*



- Rispettivamente oscillante convergente, oscillante limitato, oscillante divergente

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI

- Quando $\theta_i \neq 0$ e $\theta_i \neq \pi$

$\theta_i \neq 0$ e $\theta_i \neq \pi$
coppia di autovalori complessi coniugati

modi di evoluzione

$\rho_i^t \cos(\theta_i t)$, $\rho_i^t \sin(\theta_i t)$

RIASSUMENDO

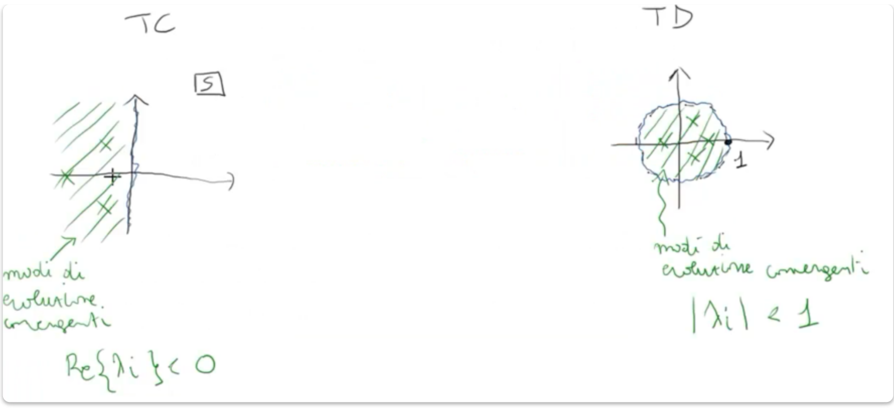
	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$	$\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\lvert\lambda_i\rvert > 1$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

Quindi la molteplicità diventa importante quando abbiamo autovalori con modulo 1, ovvero il caso $|\lambda_i| = 1$

- **Modulo** $|\lambda_i|$ e **molteplicità** m_i (nel caso $|\lambda_i| = 1$) determinano la **convergenza/divergenza**
- **Fase** $\angle\lambda_i$ determina la presenza o meno di **oscillazioni**

Nota: Per conoscere l'andamento qualitativo di $A^t = \mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1} z\}$ è sufficiente guardare la **posizione degli autovalori** nel piano z e la loro **molteplicità** nel polinomio minimo

CONFRONTO MODI TC-TD



- da una parte abbiamo come "confine" il semipiano sinistro, dall'altra la circonferenza unitaria

> *i modi del TC sono esponenziali $e^{\lambda_i t}$ mentre in TD sono potenze λ_i^t*

STABILITA' DEI SISTEMI TD

INTERNA

Stabilità interna: proprietà intrinseca del sistema (non dipende dalla traiettoria)
In generale, in maniera simmetrica rispetto al caso TC:

Teorema 2.8 Un sistema LTI TD è

- **asintoticamente stabile** $\Leftrightarrow$ tutti modi naturali convergenti
  $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori del sistema hanno modulo < 1
- **marginalmente stabile** $\Leftrightarrow$ tutti modi naturali limitati
  $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori del sistema hanno modulo ≤ 1
  AND quelli con modulo $= 1$ hanno molteplicità $= 1$ come radici del polinomio minimo
- **internamente instabile** negli altri casi $\Leftrightarrow$ $\exists$ almeno un modo naturale divergente
  $\Leftrightarrow$ esiste almeno un autovalore con modulo > 1
  OR con modulo $= 1$ e molteplicità > 1 nel polinomio minimo

- La regione di stabilità asintotica nel piano z corrisponde al cerchio unitario

$$\mathbb{C}_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ESTERNA

Necessita del calcolo della funzione di trasferimento $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$

- Si fanno eventuali semplificazioni
- Si studia il denominatore $a(z)$ e i suoi poli (che sono un sottoinsieme di tutti i poli del sistema come del caso TC)
  - Abbiamo (bibo)stabilità esterna se i poli di $a(z)$ hanno tutti modulo < 1

- Stabilità asintotica implica stabilità esterna (ma non vale il contrario)

$G(z) = C(zI-A)^{-1}B+D$

- Consideriamo un sistema LTI tempo discreto SISO con funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

con $b(z)$ e $a(z)$ polinomi coprimi (senza radici comuni)

- Poli di $G(z)$ = radici di $a(z)$

Teorema 2.4 Sistema LTI TD SISO **stabile esternamente** $\Leftrightarrow$ tutti i poli di $G(z)$ hanno modulo < 1

- Anche per sistemi TD, stabilità asintotica $\Rightarrow$ stabilità esterna
- L'implicazione inversa in generale non vale (conoscere $G(z)$ non è sufficiente per concludere sulla stabilità interna)

STABILITÀ	Quantità di interesse	Condizione
Asintotica	Polinomio caratteristico $\varphi(z)$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$
Marginale	Polinomio minimo $m(z)$	$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$ & $m_i = 1$ nel caso in cui $\lvert\lambda_i\rvert = 1$
Esterna	Funzione di trasferimento $G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$ per ogni λ_i tale che $a(\lambda_i) = 0$

STABILITA' SISTEMI NON LINEARI

PUNTI DI EQUILIBRIO

Coppia stato ingresso tale per cui se partiamo dallo stato della coppia e applichiamo tale ingresso, allora rimaniamo nello stesso stato (analoga definizione)

$$x(0) = x_e, \;\; u(t) = u_e \quad \Longrightarrow \; x(t) = x_e \;\; \forall t \geq 0$$

Il punto di equilibrio rappresenta dunque una *traiettoria costante* del sistema

Cambia solo il modo con cui calcolo i punti di equilibrio

- nel caso TC si annulla la derivata
- nel caso TD si deve garantire che lo stato successivo $x(t+1)$ coincida con quello corrente $x(t)$. Ovvero il punto x_e deve essere un *punto fisso* dell'equazione transizione di stato cioè $\boxed{x_e = f(x_e, u_e)}$ (caso non autonomo)
  - Da cui si derivano tutte le considerazioni fatte per la stabilità asintotica (Lyapunov, attrattività

locale...)

> I punti di equilibrio di un sistema TD sono tutte e sole le coppie (x_e, u_e) tali che
>
> $$f(x_e, u_e) = x_e$$

- Questo risultato è una conseguenza immediata della definizione
- La definizione di punti di equilibrio non cambia, rispetto al caso TC, ma cambia la condizione da verificare
- **Per sistemi autonomi:** x_e equilibrio $\Leftrightarrow$ $f(x_e) = x_e$
  In questo caso, uno stato di equilibrio è un **punto fisso** della funzione f
- Per gli equilibri di un sistema TD, possiamo definire gli stessi concetti di stabilità già introdotti per il caso TC

  stabilità alla Lyapunov, attrattività locale } stabilità asintotica locale

STABILITA': METODO INDIRETTO DI LINEARIZZAZIONE

La stabilità di un punto di equilibrio (dato un sistema non lineare) si studia anche in questo caso con il metodo della linearizzazione

- Si studia quindi il comportamento del sistema linearizzato
  - Calcolando la matrice A_e Jacobiana delle derivate parziali

$$A_e = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \text{calcolata in } (x, u) = (x_e, u_e)$$

- Dove cambia solo la ROC, quindi bisogna guardare il modulo degli elementi della matrice A_e
  In particolare:

> **Teorema 2.10 (Metodo della linearizzazione di Lyapunov TD)** Consideriamo un sistema TI TD. Sia A_e la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio (x_e, u_e).
>
> - Se tutti gli autovalori di A_e hanno modulo < 1 (sistema linearizzato asintoticamente stabile)
> $\Rightarrow$ equilibrio (localmente) asintoticamente stabile
> - Se almeno un autovalore di A_e ha modulo > 1 (sistema linearizzato esponenzialmente instabile)
> $\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile
> - (**caso critico**) Se invece tutti gli autovalori di A_e hanno modulo ≤ 1 **AND** almeno un autovalore con modulo $= 1$ $\Rightarrow$ non si può concludere nulla

NOTA: ALL'ESAME NON CI SONO ESERCIZI DI ANALISI DEI SISTEMI NON LINEARI, MA BISOGNA SAPERE LA TEORIA PER L'ORALE

SISTEMI DI CONTROLLO

- Far comportare un sistema in un modo desiderato
- Lo vediamo solo per il tempo continuo e per sistemi lineari (ma vale anche lo stesso per il tempo continuo e per i sistemi non lineari nell'intorno dei punti di equilibrio)

Il sistema da controllare si chiama impianto o processo ($\mathcal{P}$)

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + \cancelto{0}{Du(t)} \end{cases}$$

- Ipotizzando $D = 0$ (perché il controllo non può influenzare l'uscita y istantaneamente, ma andremo ad agire sull'ingresso e poi dopo un certo ritardo l'uscita viene influenzata anche con quello che abbiamo dato in ingresso)

- Lo *scopo* del controllo è quello di *agire sul sistema mediante il segnale di controllo/ingresso u, in modo tale che l'andamento in uscita del sistema (valore delle variabili che vogliamo controllare) sia il più vicino possibile al segnale y^0 detto di riferimento*

    - $y - y^0$ viene detto **errore d'inseguimento**. L'obiettivo è renderlo il più piccolo possibile

- La classe di problemi che auspica a una uscita di riferimento pari a zero, ovvero $y^0 = 0 \ \forall t$ viene chiamata *problema di regolazione a zero*. Si raggiunge uno stato di *quiete*

- Gli altri problemi sono invece *problemi d'inseguimento*, in cui si cerca di controllare il sistema per ottenere un riferimento $y^0(t)$ generico, non nullo. Esso rappresenta la *traiettoria desiderata del sistema*

    - Ci occuperemo di questi solo parlando dei *problemi d'inseguimento con riferimento costante*, ovvero tali che

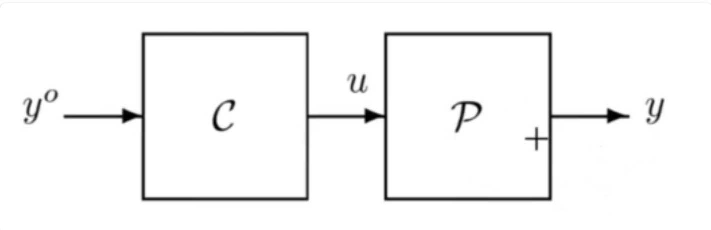
    $$y^0(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

    - che è un riferimento a gradino (costante). Vogliamo cioè portare l'uscita a un valore costante (esempio: cruise control/termostato...)
    - Y_0 è detto **set-point**, e rappresenta il valore/valori a cui vogliamo portare l'uscita (velocità macchina, temperatura della stanza...)

CONTROLLO IN ANELLO APERTO :(

Si predetermina un segnale di ingresso u sulla base delle esigenze y^0 e lo si applica al sistema.

- Non si controlla più: si suppone che non ci siano disturbi anche imprevisti che potrebbero interferire con l'ingresso scelto. Modello per questo in un certo senso *ideale*



- Sarebbe un po' come impostare a priori il miscelatore della doccia in una certa posizione "sperando" che poi l'acqua sia alla temperatura desiderata.

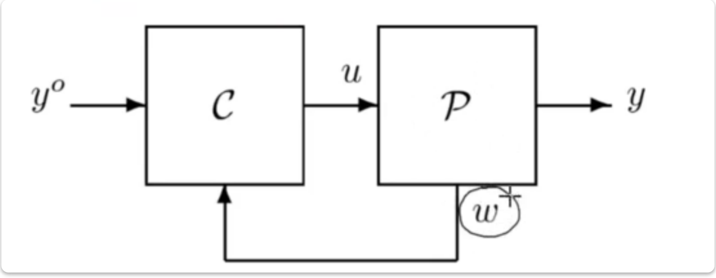
    - Con il controllo in retroazione invece avremmo la possibilità di regolare la manopola sulla base di com'è la temperatura in un certo istante (la porto verso destra se l'acqua e calda e viceversa - in tal caso w sono i sensi sulla pelle che misurano la temperatura)

CONTROLLO IN RETROAZIONE :)

Feedback control

Tengo conto in tempo reale del comportamento del sistema.

- Suppongo di conoscere le variabili w che danno informazioni sulla configurazione del sistema in un certo istante t.
- Quindi l'azione del controllo u non è predeterminata, ma è generata in ogni istante di tempo sulla base dei dati forniti da $\mathcal{P}$ con il **vettore informativo w**



- detto anche controllo in *catena aperta* (ad anello)

Se il vettore informativo coincide con l'intero stato, allora si parla di *controllo in retroazione sullo stato*. Abbiamo una informazione completa dello stato (conosco tutto quello che sta succedendo in $\mathcal{P}$)

$$\boxed{w(t) = x(t)} \quad \rightarrow \quad \text{controllo in retroazione sullo stato}$$

Se invece abbiamo a disposizione solo una parte delle variabili, guardiamo il caso in cui conosciamo solo l'uscita di $\mathcal{P}$. Si parla perciò di *controllo in retroazione sull'uscita*. Abbiamo quindi solo una informazione parziale di quello che sta succedendo

$$\boxed{w(t) = y(t)} \quad \rightarrow \quad \text{controllo in retroazione sull'uscita}$$

- Non posso guardare cosa succede dentro $\mathcal{P}$, ma guardo solo cosa esce ovvero y.