## NOTAZIONE VATTORIALE E MATRICI A,B,C

Il modello corso di laurea magistrale che abbiamo visto lo possiamo scrivere in forma vettoriale in questo modo:

- Consideriamo il vettore di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Le equazioni di transizione dello stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (1-\alpha)x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_1(t) + (1-\beta)x_2(t) \end{cases}$$

possono essere scritte in forma vettoriale

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t))$$

$$x(t+1) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

- L'equazione di uscita

$$y(t) = \beta x_2(t)$$

può essere scritta in forma vettoriale

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \beta x_2(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = h(x(t))$$

$$y(t) = C\, x_2(t)$$

- Dove sono state individuate le matrici $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$, $\mathrm{C}$ sfruttando implicitamente il prodotto matrice per vettore (cfr. argomenti successivi)

## NOTAZIONE GENERALE (TD)

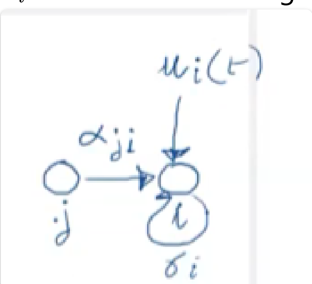
Un modello compartimentale TD si può descrivere in questo modo:

$$\boxed{x_i(t+1) = x_i(t) + f_i^{in}(t) - f_i^{out}(t)}$$

Dove:

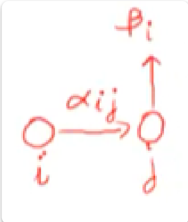
$$f_i^{in}(t) = u_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ji} x_j(t) + \gamma_i x_i(t)$$

- $a_{ji}$ rappresenta la percentuale di risorse $x_j(t)$ che passano dal compartimento $j$ a $i$.
- $\gamma_i$ rappresenta la percentuale di risorse generate all'interno del compartimento $i$ (come erano gli interessi nell'esempio della banca)
- $u_i$ naturalmente sono gli ingressi esterni che vanno in $i$



$$f_i^{out}(t) = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_i(t) + \beta_i x_i(t)$$

- $a_{ij}$ percentuale di risorse che vanno verso il compartimento $j$
- $\beta_i, x_i(t)$ sono le risorse che escono definitivamente dal sistema (vanno verso l'esterno)




Mettendo tutto insieme si giunge alla **equazione di stato**:

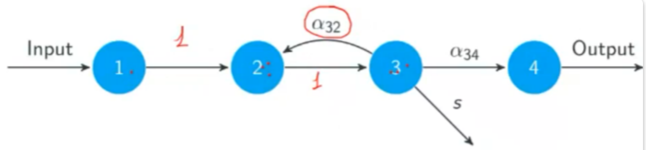
- Equazione di stato per il compartimento $i$:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t) \\ &= x_i(t) + u_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji}\, x_j(t) + \gamma_i\, x_i(t) - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}\, x_i(t) - \beta_i\, x_i(t) \\ &= \left(1 + \gamma_i - \beta_i - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}\right) x_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji}\, x_j(t) + u_i(t) \end{aligned}$$

- Esistono ovviamente anche alcuni vincoli. Ad esempio: la somma delle risorse che escono dovrà essere inferiore o uguale alle risorse presenti in un compartimento

### ESEMPIO: CATENA DI PRODUZIONE (TD)

Supponiamo che una catena di produzione abbia $4$ stati collegati tra loro. Si può scrivere l'equazione di bilancio per ciascuno stato.
Guardando l'equazione per lo stato $2$ (più ingressi):




- Al secondo stadio abbiamo

$$f_2^{\text{in}}(t) = x_1(t) + \alpha_{32}\, x_3(t) \qquad f_2^{\text{out}}(t) = x_2(t)$$

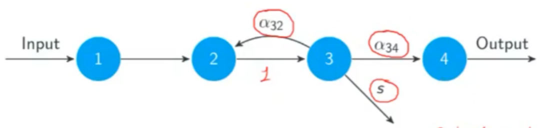
- Quindi

$x_2(t)$

$$x_2(t+1) = \cancel{x_2(t)} + f_2^{\text{in}}(t) - f_2^{\text{out}}(t) = x_1(t) + \alpha_{32}\, x_3(t)$$

$x_1(t) + \alpha_{32}\, x_3(t)$

Per lo stadio $3$ invece (più uscite):




$s + \alpha_{32} + \alpha_{34} = 1$

- Al terzo stadio abbiamo

$$f_3^{\text{in}}(t) = x_2(t) \qquad f_3^{\text{out}}(t) = \alpha_{32}\, x_3(t) + \alpha_{34}\, x_3(t) + s\, x_3(t)$$

con $s = 1 - \alpha_{32} - \alpha_{34}$

- Quindi

$$x_3(t+1) = x_3(t) + f_3^{\text{in}}(t) - f_3^{\text{out}}(t) = x_2(t)$$

Si possono riscrivere tutte le equazioni di stato anche in forma matriciale, ottenendo:

$$
\begin{cases}
x_1(t+1) = u_1(t) \\
x_2(t+1) = x_1(t) + \alpha_{32}\, x_3(t) \\
x_3(t+1) = x_2(t) \\
x_4(t+1) = x_4(t) + \alpha_{34}\, x_3(t) - u_2(t)
\end{cases}
$$

$$
x(t+1) = \underbrace{\overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 1 \end{bmatrix}}}_{4\times 4} x(t) + \underbrace{\overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}_{4\times 2} u(t)
$$

$$
x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}
$$

- In $x_1$ non compare nessuno stato, quindi la prima riga è comporta da tutti $0$. Compare invece l'ingresso $u_1(t)$ e vale $1$, quindi questo lo scriviamo nella matrice $B$ degli ingressi $u(t)$
  - si ripete questo ragionamento per ciascuna equazione di stato
  Abbiamo riscritto il problema quindi nella forma generale:

$$x(t+1) = \mathrm{A}\, x(t) + \mathrm{B}\, u(t)$$

- dove $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$ rappresentano in modo univoco il mio sistema
  - Lo studio di queste matrici sarà l'elemento centrale per lo studio del sistema dinamico

### NOTAZIONE GENERALE (TC)

Un modello compartimentale TD si può descrivere in questo modo:

$$\boxed{\dot{x}_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)}$$

- abbiamo quindi delle variazioni istantanee (tassi) in ingresso e in uscita
- È analogo al caso TC, dato che:

$$\underbrace{x_i(t+1) - x_i(t)}_{\dot{x}_i} = f_i^{in} - f_i^{out}$$

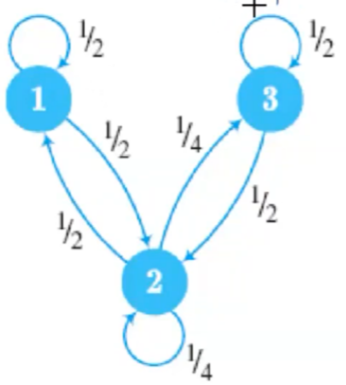
# MODELLO DI TRANSIZIONE DI STATO

Abbiamo ancora un modello con $n$ stati. Tra uno stato e l'altro non vengono più trasferite risorse, bensì, *attributi (o qualità)*, solitamente di tipo **probabilistico**

- Indicano la *probabilità di trovarsi in un certo stato $x_i(t)$*

#### ESEMPIO: PREVISIONI DEL TEMPO

- Un modello semplice che descrive l'evoluzione delle condizioni metereologiche prevede tre stati: $\underbrace{\text{soleggiato}}_{x_1(t)}$, $\underbrace{\text{nuvoloso}}_{x_2(t)}$ e $\underbrace{\text{piovoso}}_{x_3(t)}$.




- Gli stati evolvono secondo la seguente regola:
  - se il giorno è soleggiato, allora il giorno successivo sarà soleggiato o nuvoloso con la stessa probabilità del $50\%$
  - se il giorno è nuvoloso, al $50\%$ il giorno successivo sarà soleggiato, al $25\%$ nuvoloso e al $25\%$ piovoso
  - se il giorno è piovoso, il giorno successivo sarà nuvoloso o piovoso con la stessa probabilità del $50\%$

- si descrive *come si passa da uno stato all'altro*, tenendo conto della probabilità di passaggio da uno stato all'altro
  - si studia quindi la probabilità di trovarsi in uno stato, tenendo conto della probabilità di transizione tra gli stati
  Ovviamente vale il vincolo:

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$$

Sfruttando la teoria della probabilità condizionata, si può calcolare ad esempio:
La *probabilità di trovarsi nello stato piovoso al tempo $t+1$* è la seguente:

(probabilità giorno $t+1$ piovoso) $=$
(probabilità di transizione da piovoso a piovoso) $\times$ (probabilità giorno $t$ piovoso)
$+$(probabilità di transizione da nuvoloso a piovoso) $\times$ (probabilità giorno $t$ nuvoloso)

$$x_3(t+1) = \frac{1}{2}x_3(t) + \frac{1}{4}x_2(t)$$

Analogamente:

$$x_1(t+1) = x_1(t)\frac{1}{2} + x_2(t)\frac{1}{2}$$

$$x_2(t+1) = x_1(t)\frac{1}{2} + x_2(t)\frac{1}{4} + x_3(t)\frac{1}{2}$$