ESERCITAZIONE

D3

Trovare (se esiste) valore asintotico della risposta impulsiva di un sistema LTI

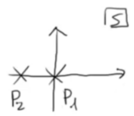
> *Bisognerà capire i modi di evoluzione*

- Verifico se ci sono semplificazioni
- Calcolo i poli di $a(s)$ (denominatore)
- Classifico i poli in base alla loro posizione sul piano complesso
- Determino i modi di evoluzione
  - Concludo sull'esistenza o meno di $\lim_{t\to\infty} g(t)$
  - Ad esempio applicando il teorema del valore finale

D3. $G(s) = \frac{s+4}{2s+s^2}$ $\qquad \lim_{t\to\infty} g(t) = ?$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$G(s) = \frac{s+4}{s(s+2)}$



$a(s) = s(s+2)$ poli $\underbrace{P_1 = 0}_{\text{modo di evoluzione } 1(t) \text{ limitato}}$ $\quad \underbrace{P_2 = -2}_{\text{modo di evoluzione convergente}}$ $e^{-2t}1(t)$

tutti poli con Re < 0 e un polo in 0 di molteplicità 1
⇒ possiamo applicare il teorema del valore finale

$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{s+4}{\cancel{s}(s+2)} = 2$

NB: il limite coincide con il residuo del polo in 0

D4

D4. Per un sistema LTI con f.d.t.

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+s}$$

e ingresso $u(t) = [2+\cos(2t)]1(t)$, determinare quale tra le seguenti affermazioni è vera

1) $y_f(t)$ converge a $5+\sin(t)1(t)$; 2) $y_f(t)$ diverge; 3) $y_f(t)$ converge a $-\sin(t)1(t)$; 4) $y_f(t)$ è limitata;

> *Trovare in pratica il comportamento asintotico della risposta forzata (limitata, divergente etc..)*

- Calcolo la risposta forzata in Laplace: $Y_f(s) = G(s)U(s)$
  - Dove $U(s)$ lo troviamo con la trasformata di $u(t)$
- Adesso posso esplicitare $Y_f(s)$
  - Non sommare
  - Tenere separate le due parti (proprietà distributiva) ✓
    - Così da capire ogni termine come si comporta per ogni ingresso (risposta forzata)
- Studio ciascun termine (addendo)
  - Guardo dove sono i poli (e la relativa molteplicità)
  - Trovo i corrispondenti modi di evoluzione

- Individuo eventuali modi divergenti
  - Se ci sono, posso capire se la risposta forzata di un polo diverge e quindi il comportamento asintotico in generale diverge

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+s} = \frac{s-1}{s(s+1)} \qquad u(t) = [2+\cos(2t)]1(t) \qquad \lim_{t\to\infty} y_f(t) = ?$$

$$Y_f(s) = G(s)\,U(s) \qquad U(s) = \mathcal{L}\{[2+\cos(2t)]1(t)\} = \mathcal{L}\{2\cdot 1(t)\} + \mathcal{L}\{\cos(2t)\cdot 1(t)\}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y_f(s) = \frac{s-1}{s^2+s}\left(\frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s-1}{s^2+s}\cdot\frac{2}{s} + \frac{s-1}{s^2+s}\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \underbrace{2\,\frac{s-1}{s^2(s+1)}}_{\text{risposta forzata a } 2\cdot 1(t)} + \underbrace{\frac{s-1}{(s+1)(s^2+4)}}_{\text{risposta forzata a } \cos 2t\cdot 1(t)}$$

$+$

$2\,\frac{s-1}{s^2(s+1)}$ ha come poli 0 di molteplicità 2 $\Rightarrow$ modi di evoluzione $1(t)$, $t\cdot 1(t)$

-1 di molteplicità 1 $\Rightarrow$ modo di evoluzione $e^{-t}\cdot 1(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{2\,\frac{s-1}{s^2(s+1)}\right\} = k_1 e^{-t}1(t) + K_{21}\,1(t) + K_{22}\,t\cdot 1(t)$$ modo di evoluzione divergente

$\Rightarrow$ la risposta forzata è divergente   NB il modo di evoluzione $t\cdot 1(t)$ è sicuramente presente perché non può essere cancellato ($Y_f(s)$ ha un polo doppio in 0)

MODO ALTERNATIVO

Dalle considerazioni fatte sulla stabilità esterna, sappiamo che $G(s)$ ha un polo in zero quindi non è esternamente stabile (perché per stabilità esterna tutti i poli devono avere $\mathrm{Re} < 0$)

- Un sistema con polo in zero non è asintoticamente stabile perché con in ingresso un gradino entra in risonanza e diverge (componente e rampa)

D5

D5. Determinare i modi naturali di un sistema LTI descritto da

$$\ddot{y} = -2\,\dot{y} - 5\,y + 3\,\dot{u}$$

PRIMO MODO

- Polinomio minimo
  - Autovalori e relativa molteplicità
  - [...]

MODO ALTERNATIVO

- È già in forma standard ✓
- Essendo in rappresentazione ingresso uscita, sappiamo che $m(s) = \varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0$
  - Trovo facilmente α_1 e α_0 osservando l'equazione di partenza
  - Individuo esplicitamente $m(s)$ e trovo le radici (autovalori)

- Trovo i relativi modi di evoluzione

$\ddot{y} = (-2)\dot{y} (-5)y + 3\ddot{u}$ modi naturali ?

Per sistemi in rappresentazione ingresso / uscita

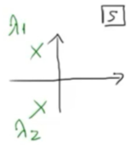
$m(s) = \varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0$ dove

$\ddot{y} = (\alpha_1)\dot{y} + (\alpha_0) y + \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u$

$\alpha_1 = -2$

$\alpha_0 = -5$

$\boxed{5}$



$m(s) = s^2 + 2s + 5$

autovalori in $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$ con molteplicità $m_1 = m_2 = 1$

$\Rightarrow$ modi di evoluzione

$e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t)$, $e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t)$

$e^{-t} \sin(2t)$, $e^{-t} \cos(2t)$

D6

D6. Determinare i modi naturali di un sistema LTI descritto da

$$\ddot{y} + 4\,\dot{y} + 4\,y = 4\,\dot{u}$$

- Scrivo il sistema in forma normale
- Seguo procedimento esercizio precedente
  - Qui abbiamo molteplicità 2 quindi cambia solo in questo

$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 4\ddot{u}$ modi naturali ?

$\ddot{y} = (-4)\dot{y} (-4) y + 4\ddot{u}$

$m(s) = \varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0 = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$

autovalori in $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\mu_1 = m_1 = 2$

$\Rightarrow$ modi di evoluzione

$e^{\lambda_1 t}$, $t\, e^{\lambda_1 t}$

e^{-2t}, $t\, e^{-2t}$

D7

D7. Studiare la stabilità interna ed esterna del sistema LTI descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2\,x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - u \\ y &= x_1 + u \end{cases}$$

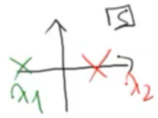
- Scrivo esplicitamente le matrici che rappresentano il sistema A, B, C, D
- Calcolo $\varphi(s)$ e se serve $m(s)$
  - In questo caso posso già concludere perché abbiamo un autovalore con $\mathrm{Re} > 0$ quindi è internamente instabile
- Stabilità esterna (se verifico che è asintoticamente stabile so che implica stabilità esterna; in questo caso però non lo so a priori, perché ho un autovalore stabile e l'altro no --> devo calcolare la funzione di trasferimento)
  - Calcolo quindi la funzione di trasferimento

    - Guardo i poli e concludo sulla stabilità

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 1$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = (s+2)(s-1)$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad \mu_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 1 \qquad \mu_2 = 1$$



$\exists$ autovalore con Re > 0 $\Rightarrow$ sistema internamente instabile

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} \overbrace{\left(C \,\mathrm{Adj}(sI-A) B\right)}^{r(s)} + D$$

$$r(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = s-1$$

Si nota che c'è una semplificazione

- il polo in 1 si semplifica --> autovalore nascosto

$$G(s) = \frac{r(s)}{\varphi(s)} + D = \frac{\cancel{s-1}}{(\cancel{s-1})(s+2)} + 1 = \frac{1}{s+2} + 1 = \frac{s+3}{s+2}$$

polo in $p_1 = -2$ di molteplicità $\mu_1 = 1$

tutti poli con Re < 0 $\Rightarrow$ sistema esternamente stabile

D9

Stabilità esterna

D9. Per il sistema LTI descritto da

$$-\ddot{y} + 9\,y = \dot{u} - 3\,u$$

dire se esistono ingressi limitati tali da far divergere l'uscita e nel caso, esistano, determinarne uno.

- dove per l'uscita si intende la risposta forzata $y_f(t)$

    > *Studio della stabilità esterna (modo alternativo di dirlo)*
    > *Esistono ingressi limitati che fanno divergere solo se non è esternamente stabile*

- Riscrivo in forma normale
- Individuo i coefficienti
- Applico la formula per la funzione di trasferimento $G(s)$
- Effettuo eventuali semplificazioni
    - Individuando eventuali poli nascosti

- Studio i poli di $G(s)$ semplificata: se sono tutti con $\mathrm{Re} < 0$ allora è esternamente stabile

$$\ddot{y} = \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y + \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u$$

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{-s+3}{s^2-9}$$

$$-\ddot{y} = -9y + \dot{u} - 3u \qquad \ddot{y} = 9y - \dot{u} + 3u$$

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_0 = 9 \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_1 = -1 \quad \beta_0 = 3$$

$$G(s) = \frac{-\cancel{(s-3)}}{(s+3)\cancel{(s-3)}} = -\frac{1}{s+3}$$

polo in -3 con $\mathrm{Re} < 0$ $\Rightarrow$ sistema esternamente stabile
$\Rightarrow$ non esistono ingressi limitati tale da far divergere $y_f(t)$

D10

D10. Per il sistema LTI descritto da

$$\ddot{y} + 10\,y = \dot{u} + 2\,u$$

dire se esistono ingressi limitati tali da far divergere l'uscita e nel caso, esistano, determinarne uno.

- stesso procedimento dell'esercizio precedente
  - Solo che adesso abbiamo due poli (puramente immaginari) --> non tutti i poli con $\mathrm{Re} < 0$ quindi esistono ingressi limitati che fanno divergere $(\star)$

$(\star)$ L'ingresso che fa violare la condizione di stabilità esterna è tale da andare in risonanza con i poli della $G(s)$

- Prendiamo quindi come ingresso limitato ad esempio $\sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)$, del tipo:

$$u(t) = \sin(\sqrt{10}\,t)\;1(t)$$

> *Extra: verifichiamo che effettivamente diverge*
> *Deve divergere: $Y_f(s) = G(s)U(s)$*
> *Calcoliamo quindi la relativa trasformata $U(s)$*
> *Mettiamo tutto insieme e verifichiamo (si va in risonanza, i poli puramente immaginari hanno molteplicità doppia --> compaiono quindi anche i modi con $t \cdot [\ldots]$)*

$$\ddot{y} = -10\,y + \dot{u} + 2u$$

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{s+2}{s^2+10}$$

$e(s) = s^2 + 10$
$e(s) = s^2 + 10 = 0 \iff s = \pm\sqrt{-10} = \pm j\sqrt{10}$

poli in $\pm j\sqrt{10}$

non tutti poli con $\mathrm{Re} < 0$ $\Rightarrow$ sistema non esternamente stabile
$\Rightarrow$ esistono ingressi limitati che fanno divergere $y_f(t)$

come visto nella dimostrazione sulla stabilità esterna, in presenza di poli puramente immaginari $\pm j\omega_0$ l'ingresso limitato che fa divergere l'uscita è ad esempio $\sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)$ che va in risonanza con i poli di $G(s)$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+10} \qquad u(t) = \sin(\sqrt{10}\,t)\,1(t) \qquad U(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\sqrt{10}}{s^2+10}$$

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{s^2+10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{s^2+10} = \frac{\sqrt{10}\,(s+2)}{(s^2+10)^2}$$

modi di evoluzione $\sin(\sqrt{10}\,t)$, $\cos(\sqrt{10}\,t)$ limitati
$t\sin(\sqrt{10}\,t)$, $t\cos(\sqrt{10}\,t)$ divergenti

D11

D11. Determinare i punti di equilibrio del sistema non lineare descritto da

$$\dot{x} = 2 - u\,x$$

- Non lineare per il prodotto ux
- Studiare anche la stabilità (con il metodo della linearizzazione)
- Calcolo gli stati di equilibrio, ovvero individuo la relazione tra x_e e u_e (isolando uno delle due)
- Linearizzazione
    - Costruisco Ae matrice Jacobiana (se lo stato ha dimensione 1 come in questo caso allora è uno scalare invece di una matrice)
    - La calcoliamo nei punti x e u di equilibrio
- Individuo gli autovalori della matrice Ae
  - In questo caso avendo un solo valore studio il segno in base all'ingresso
  - Escludo i poli uguali a zero

$\dot{x} = f(x, u)$

(x_e, u_e) equilibrio $\Leftrightarrow$ $f(x_e, u_e) = 0$ $\Leftrightarrow$ $2 - u_e x_e = 0$
+

Dato u_e abbiamo $x_e = \frac{2}{u_e}$

$u_e = 0$ non c'è stato di equilibrio

$u_e \neq 0$ stato di equilibrio $x_e = \frac{2}{u_e}$

$A_e = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2 - ux) = -u \Big|_{x = x_e,\, u = u_e} = -\frac{2}{u_e}$

A_e ha come unico autovalore $-\frac{2}{u_e}$

$u_e > 0$ $\quad -\frac{2}{u_e} < 0$ $\Rightarrow$ A_e con autovalori e $Re < 0$ $\Rightarrow$ equilibrio localmente asintoticamente stabile

$u_e < 0$ $\quad -\frac{2}{u_e} > 0$ $\rightarrow$ A_e ha un autovalore con $Re > 0$ $\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile

D12

D12. Determinare i punti di equilibrio del sistema non lineare descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - 2)(1 - x_2) \\ y &= x_1 + 2\,x_2 \end{cases}$$

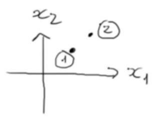
e studiarne la stabilità.

- y irrilevante per quello che devo trovare
- Individuo $f(x)$
    - Perché quando si annulla $f(x_e)$ abbiamo equilibrio
- Trovo le soluzioni (in questo caso due)

- Queste sono i punti di equilibrio del sistema non lineare

- Studio poi la stabilità, ancora con la matrice Ae Jacobiana (in questo caso viene una matrice perché lo stato è composto da due elementi)
  - Calcolo la matrice nei punti x_e di equilibrio
  - Calcolo infine $\varphi(s) = \det(sI - A_e)$ per ogni punto di equilibrio
    - Concludo a seconda dei poli di $\varphi(s)$ sulla stabilità

D12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 = (x_1-2)(1-x_2) \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$ equilibri? stabilità?



$\dot{x} = f(x) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} \overbrace{x_2 - x_1}^{f_1} \\ \underbrace{(x_1-2)(1-x_2)}_{f_2} \end{bmatrix}$

$x_e = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix}$ equilibrio $\iff f(x_e) = 0 \iff \begin{cases} x_{e2} - x_{e1} = 0 \\ (x_{e1}-2)(1-x_{e2}) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_{e1} = 2 \quad \text{oppure} \quad x_{e2} = 1 \\ x_{e1} = x_{e2} \end{cases}$

$f_2(x_1, x_2) = (x_1-2)(1-x_2) = x_1 - x_1x_2 - 2 + 2x_2$

equilibri ① $x_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $x_e = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1-x_2 & -x_1+2 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1-x_2 & -x_1+2 \end{bmatrix}$

① $x_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi_e(s) = \det(sI - A_e) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-1) \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$

sistema linearizzato con autovalore e Re > 0 ⇒ equilibrio intrinsecamente instabile

② $x_e = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\varphi_e(s) = \det(sI - A_e) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = (s+1)s + 1 = s^2 + s + 1$

Per Cartesio $\varphi_e(s) = s^2+s+1$ ha tutte radici con Re < 0 (tutti coefficienti concordi)

sistema linearizzato asintoticamente stabile ⇒ equilibrio localmente asintoticamente stabile

D13

Risposta libera

D13. Per il sistema dinamico lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

determinare per quali condizioni iniziali la risposta libera $y_\ell(t)$ è limitata.

- Calcolo la risposta libera $y_\ell(t)$
  - Attraverso l'antitrasformata di Laplace
- Ci costruiamo solo le matrici A e C
  - B e D sono irrilevanti per quello che devo fare

> > *Nota: non sempre bisogna calcolare l'intera risposta libera $y_\ell(t)$, perché ad esempio se il sistema fosse stabile internamente allora tutti i modi sarebbero limitati/convergenti e quindi la risposta libera sarebbe limitata.*
> > *Se ci fossero invece modi divergenti, allora sarebbe necessario calcolarla esplicitamente perché vuol dire che dipende fortemente dalle condizioni iniziali*

- Cerco quindi i *modi* di evoluzione (ecco perché costruisco la matrice A)
  - Osservo i modi trovati: se come nell'esercizio ho modi sia divergenti che convergenti, allora $y_\ell(t)$ dipende dalle condizioni iniziali in qualche modo

$$y_\ell(t) = C e^{At} x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ C (sI-A)^{-1} x(0) \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)(s+2)$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow$ modo di evoluzione e^{t} divergente

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow$ " e^{-2t} convergente

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI-A) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$Y_\ell(s) = C(sI-A)^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2+6 & 2\cdot(s-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+8 & 2(s-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \left[(s+8) x_1(0) + 2(s-1) x_2(0) \right]$$

$$= \frac{s+8}{(s-1)(s+2)} x_1(0) + \frac{2}{(s+2)} x_2(0)$$

modi di evoluzione e^{t}, e^{-2t} $\Rightarrow$ segnale divergente

modo di evoluzione e^{-2t} $\Rightarrow$ segnale convergente (e quindi limitato)

Per avere $y_\ell(t)$ limitata deve essere $x_1(0) = 0$