ATTRATTIVITA'

Fin ora con la stabilità alla Lyapunov abbiamo visto la stabilità della traiettoria a livello locale (piccole perturbazioni di $x(0)$).
Estendiamo adesso il concetto con l'attrattività, che *studia il comportamento asintotico*

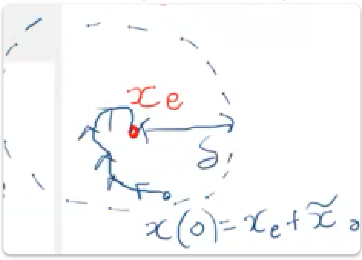
> > *L'attrattività ci dice che dopo una perturbazione iniziale la traiettoria tende a convergere nello stato di equilibrio di partenza*

Si prende quindi come riferimento un x_e di equilibrio e da lì si prende un punto iniziale $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$ e si studia il comportamento della traiettoria

- Se dopo un certo tempo converge al punto di equilibrio allora vale l'attrattività

Può essere **locale** o **globale**

LOCALE

- Esiste un "bacino di equilibrio" intorno al punto di equilibrio.
  - Se perturbiamo con un $\tilde{x}_0$ tale che $||\tilde{x}_0|| < \delta$ allora esiste attrattività locale se poi la traiettoria ritorna nel punto di equilibrio x_e
    

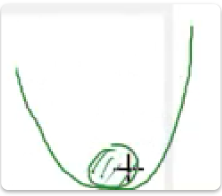
- Qui si vede bene: $x(0)$ è interno all'intorno di δ quindi è interno al "bacino di attrazione/equilibrio" e pertanto la traiettoria convergerà a x_e
  - Esempio: pendolo --> se partiamo da una condizione non perfettamente verticale, dopo un po' di tempo in presenza d'attrito il pendolo torna nella posizione di equilibrio

$$\boxed{||x_0|| \leq \delta \implies \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) = x_e}$$

GLOBALE

Indipendentemente da quanto è grande la perturbazione $\tilde{x}_0$, la traiettoria converge al punto di equilibrio x_e

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) = x_e}$$



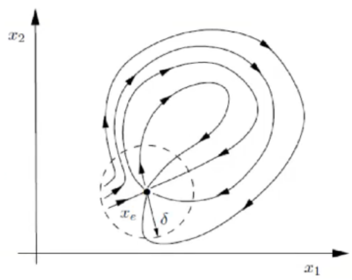
- un punto di equilibrio per essere globalmente attrattivo deve essere l'unico del sistema

> ✎ **Relazione tra le due stabilità**

Possono esserci dei casi in cui vale la stabilità alla Lyapunov ma non vale l'attrattività, o viceversa. Per questo i due concetto sono indipendenti l'uno con l'altro
Ad esempio (Pallina sul piano):

Abbiamo in questo caso stabilità alla Lyapunov (perché rimaniamo nell'intorno in caso di piccole perturbazioni) ma non attrattività (perché non torniamo al punto di equilibrio)
Riportiamo adesso un caso in cui vale attrattività ma non la stabilità alla Lyapunov

- Per sistemi non lineari in generale la stabilità è un **proprietà locale** $\Rightarrow$ possono coesistere equilibri stabili e instabili
- Per sistemi non lineari stabilità alla Lyapunov e attrattività sono **concetti indipendenti**
  - Stabilità alla Lyapunov $\not\Rightarrow$ attrattività
    Esempio:
    $$\dot{x} = 0$$
    tutti gli stati sono equilibri stabili ma non attrattivi perché $x(t) = x(0) \quad \forall t \geq 0$
  - Attrattività $\not\Rightarrow$ stabilità alla Lyapunov
    (quando le traiettorie si allontanano sempre dall'equilibrio prima di tornarci, vedi figura)

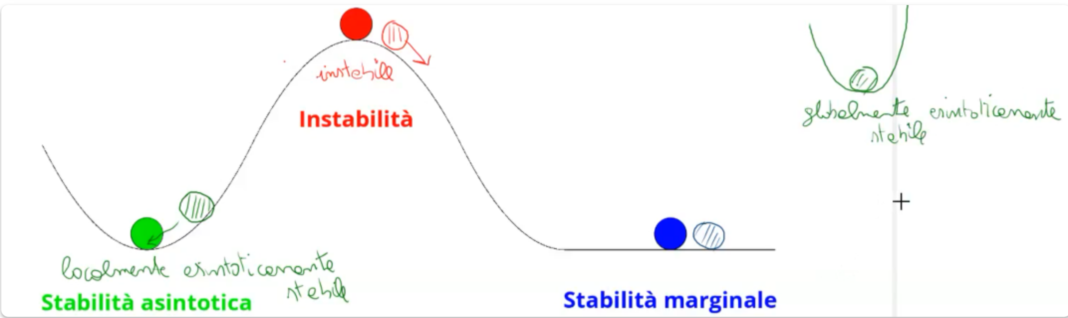


Prima di tornare nel punto di equilibrio mi allontano
Quindi un sistema è stabile se valgono entrambe queste condizioni

STABILITA' INTERNA DEI PUNTI DI EQUILIBRIO

Definizione (Stabilità interna di un equilibrio):
L'equilibrio (x_e, u_e) si dice:

- **Localmente asintoticamente stabile**
  se è stabile alla Lyapunov e localmente attrattivo.
- **Globalmente asintoticamente stabile**
  se è stabile alla Lyapunov e globalmente attrattivo.
- **Marginalmente stabile**
  se è stabile alla Lyapunov ma non attrattivo.



STUDIO DELLA STABILITA'

- Metodo di Lyapunov diretto --> ricerca di una funzione che associa il punto minimo di energia al punto di equilibrio (non lo studiamo)
- **Metodo indiretto di Lyapunov: linearizzazione**
    - Andiamo a linearizzare il sistema e studiamo quest'ultimo, con i metodi visti per i sistemi lineari

METODO DI LYAPUNOV INDIRETTO - LINEARIZZAZIONE

Si approssima un sistema non lineare con un sistema lineare associato, ottenuto tramite il processo di linearizzazione del sistema di partenza

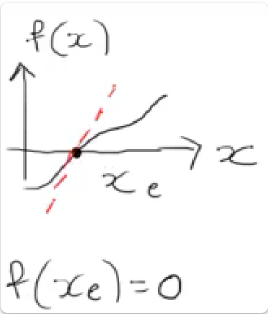
Sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

- Lo si approssima *linearizzando le funzioni f e h*

Si approssima la funzione (non lineare) nel punto di equilibrio x_e con la relativa *retta tangente*

- Ovvero una *approssimazione di Taylor* del primo ordine

  Ovvero:

$$f(x) = \underbrace{f(x_e) \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_e} x(x - x_e)}_{\text{retta}} + \underbrace{R(x - x_e)}_{\text{resto}}$$

- Dove il resto tende a 0 di ordine superiore rispetto alla retta
  Quindi possiamo approssimare la nostra funzione non lineare con la **retta tangente** (lineare)

$$\boxed{f(x) \approx f(x_e) \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_e} x(x - x_e)}$$

In **generale**, l'approssimazione per funzione di più variabili si può effettuare con la **matrice Jacobiana delle derivate parziali** calcolata nel punto di equilibrio

$$f(x, u) \approx f(x_e, u_e) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=x_e, u=u_e}}_{A_e} x(x - x_e) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x=x_e, u=u_e}}_{B_e} (u - u_e)$$

- perché x è il vettore dello stato e u il vettore degli ingressi
- $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad n \times n$$
  $$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad n \times m$$

Ovviamente si linearizza allo stesso modo anche $h(x, u)$:

$$h(x,u) \approx h(x_e,u_e) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{(x,u)=(x_e,u_e)}}_{C_e}(x - x_e) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u}\bigg|_{(x,u)=(x_e,u_e)}}_{D_e}(u - u_e)$$

--

Quindi partendo dal sistema non lineare abbiamo:

- trovato un punto di equilibrio (x_e, u_e) t.c. $f(x_e, u_e) = 0$, con $y_e = h(x_e, u_e)$
- e abbiamo poi approssimato le due funzioni f e h grazie alle matrici Jacobiane A_e, B_e, C_e, D_e

  $$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \qquad (x_e, u_e) \text{ punto di equilibrio} \qquad f(x_e,u_e) = 0, \quad y_e = h(x_e,u_e)$$

  $$f(x,u) \simeq \cancel{f(x_e,u_e)} + A_e(x - x_e) + B_e(u - u_e)$$
  $$h(x,u) \simeq \underbrace{h(x_e,u_e)}_{y_e} + C_e(x - x_e) + D_e(u - u_e)$$

- dove abbiamo osservato che $f(x_e, u_e) = 0$ e $h(x_e, u_e) = y_e$ per ipotesi del punto di equilibrio
  Possiamo riscrivere il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio come:

  $$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_e(x(t) - x_e) + B_e(u(t) - u_e) \\ y(t) = y_e + C_e(x(t) - x_e) + D_e(u(t) - u_e) \end{cases}$$

- Rinominando gli argomenti all'interno delle parentesi (che sono oggetti che conosciamo almeno come idea)

  $$x(t) - x_e = \tilde{x}(t) \qquad u(t) - u_e = \tilde{u}(t)$$
  $$y(t) - y_e = \tilde{y}(t)$$

Si osserva anche, dato che x_e è costante:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) - x_e) = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$$

Posso riscrivere la prima equazione:

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}(t) = A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t)}$$

Allo stesso modo, per l'uscita:

$$y(t) - y_e = C_e\,(x(t) - x_e) + D_e\,(u(t) - u_e$$

$$\boxed{\tilde{y}(t) = C_e\,\tilde{x}(t) + D_e\,\tilde{u}(t)}$$

Possiamo quindi riassumere il tutto in *unico sistema linearizzato* relativo a uno specifico punto di equilibrio:

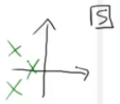
$$\begin{cases} \boxed{\dot{\tilde{x}}(t) = A_e\,\tilde{x}(t) + B_e\,\tilde{u}(t)} \\ \boxed{\tilde{y}(t) = C_e\,\tilde{x}(t) + D_e\,\tilde{u}(t)} \end{cases}$$

- ha come stato la deviazione rispetto all'equilibrio
- ha come ingresso la deviazione rispetto all'ingresso di equilibrio
- ha come uscita la deviazione rispetto all'uscita di equilibrio
  - Per questo è lineare (secondo un certo punto di equilibrio)

Si potrebbe dimostrare che lo studio della stabilità interna (robustezza rispetto a variazioni delle condizioni iniziali) dell'equilibrio si riduce all'esclusivo studio della matrice A_e.

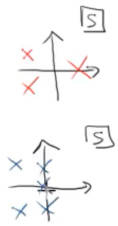
TEOREMA DEL METODO INDIRETTO ALLA LYAPUNOV

Valgono le seguenti (casi indipendenti dalla molteplicità):



Teorema 2.5 (Metodo della linearizzazione di Lyapunov) Consideriamo la matrice A_e del sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio (x_e, u_e).

- Se tutti gli autovalori di A_e hanno parte reale < 0 (sistema linearizzato asintoticamente stabile)
  $\Rightarrow$ equilibrio (localmente) asintoticamente stabile
- Se almeno un autovalore di A_e ha parte reale > 0 (sistema linearizzato esponenzialmente instabile)
  $\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile
- **(caso critico)** Se invece tutti gli autovalori di A_e hanno parte reale ≤ 0 **AND** almeno un autovalore a parte reale $= 0$ $\Rightarrow$ non si può concludere nulla



- nel caso critico dovrei considerare approssimazioni di Taylor a un ordine più grande

ESERCIZIO 1)

- Trovo i punti di equilibrio (già fatto in esercizio precedente)
- Compongo la matrice Jacobiana A_e
  - Calcolo il risultato nei vari punti di equilibrio
  - Concludo sulla stabilità caso per caso

$\dot{x}(t) = x^2(t) - u(t)$

$y(t) = x(t)$

$\dot{x} = f(x, u)$

$f(x,u) = x^2 - u$

equilibri

(1) $x_e = 0 \quad u_e = 0$

(2) $u_e > 0 \quad x_e = \sqrt{u_e}$

(3) $u_e > 0 \quad x_e = -\sqrt{u_e}$

$-\sqrt{u_e} \quad \sqrt{u_e} \quad x$

$A_e = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

(1) $x_e = 0 \quad A_e = 0$ unico autovalore in $\lambda_1 = 0$ $\boxed{S}$

$\Rightarrow$ siamo nel caso critico caso (c) $\Rightarrow$ non possiamo concludere sulla stabilità

$u = 0$ $f(x_e, u)$ x $\quad f(x,0) > 0 \ \forall x \neq 0 \quad \dot{x} = f(x,0)$

(2) $x_e = \sqrt{u_e} \quad A_e = 2\sqrt{u_e}$ unico autovalore in $\lambda_1 = 2\sqrt{u_e}$ $\boxed{S}$

$\Rightarrow$ siamo nel caso (b) (esiste almeno un autovalore con $Re > 0$)

$\Rightarrow$ equilibrio instabile

(3) $x_e = -\sqrt{u_e} \quad A_e = 2x_e = -2\sqrt{u_e}$ $\boxed{S}$

unico autovalore in $\lambda_1 = -2\sqrt{u_e}$

$\Rightarrow$ siamo nel caso a) (tutti autovalori con $Re < 0$)

$\Rightarrow$ equilibrio localmente asintoticamente stabile

Quindi:

$u_e > 0$

$-\sqrt{u_e}$ localmente asintoticamente stabile

$\sqrt{u_e}$ instabile

- tendo in generale a convergere in $-\sqrt{u_e}$