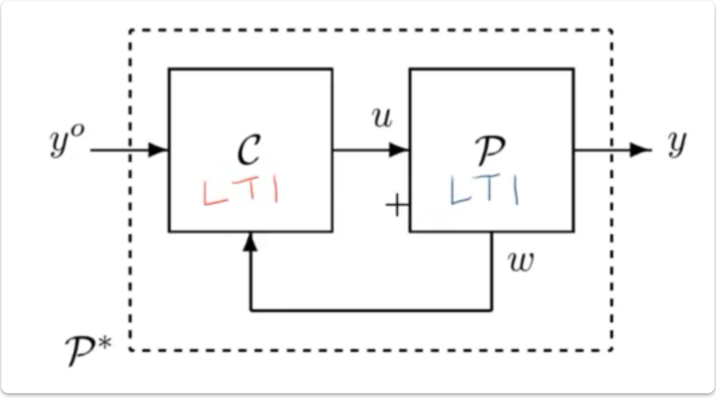
### SITEMA A CICLO CHIUSO $\mathcal{P}^*$

- Supponiamo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$ come detto LTI
  Possiamo quindi **combinarli** e ottenere un unico sistema LTI generalizzato, che chiamiamo $\mathcal{P}^*$ ("pi star"). È il nostro sistema a ciclo chiuso (in *retroazione*)
  
  
- Dato un riferimento, $\mathcal{P}^*$ ci dice come si comporta il sistema di controllo una volta preso un riferimento $y^o$

## FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Essendo $\mathcal{P}^*$ un sistema LTI, possiamo definire una funzione di trasferimento:

$$G^*_{y^o\,y}(s)$$

- indica la funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra riferimento $y^o$ e l'uscita $y$

Quindi in pratica avremo:

$$y^0 \rightarrow \boxed{G^*_{y^o\,y}(s)} \rightarrow y$$

Essa indica *come il sistema si comporta in riferimento a un certo valore desiderato*
Dato che $\mathcal{P}$ ha una sua $G(s)$ di riferimento, l'obiettivo del controllo è quello di scegliere $\mathcal{C}$ adeguatamente per avere una funzione di trasferimento totale $G^*_{y^o\,y}(s)$ come vogliamo e quindi che l'uscita $y$ tenda a $y^o$ di riferimento

### RISPOSTA FORZATA

Posso scrivere la risposta forzata in due parti:

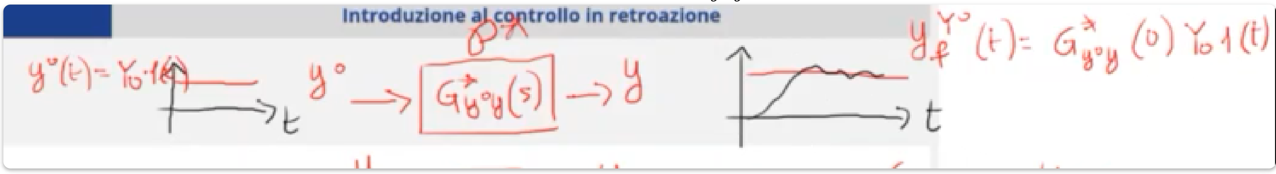
- **Transitorio** - parte di risposta forzata che dipende dai poli della funzione di trasferimento $G^*_{y^o\,y}(s)$
- **Regime Permanente** - parte di risposta forzata che dipende dai poli dai poli dell'ingresso ovvero il riferimento $y^o$

Quindi:

$$y_f(t) = t_f^{G^*}(t) + y_f^{Y^o}(t)$$

Sappiamo dalla teoria che *se un sistema è asintoticamente stabile, allora la risposta complessiva $y(t)$ converge al regime permanente $y_f^{Y^o}(t)$*

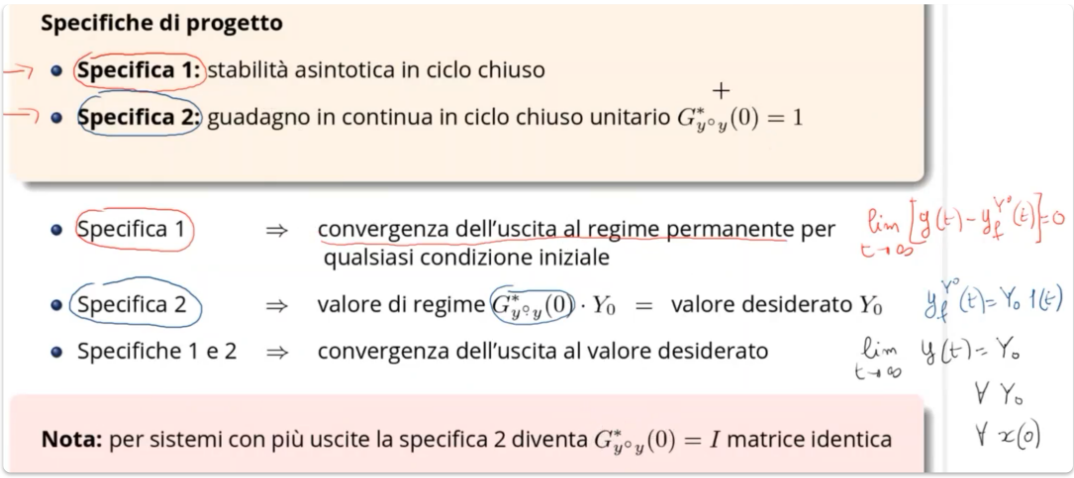
- Siccome abbiamo supposto che il riferimento sia costante (ovvero un gradino), sappiamo anche calcolare il regime permanente (e quindi l'uscita)
  - Riferimento costante
  $$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$
  $\Rightarrow$ regime permanente
  $$y_f^{Y^\circ}(t) = G^*_{y^\circ y}(0) \cdot Y_0 \cdot 1(t)$$
  con $G^*_{y^\circ y}(0)$ **guadagno in continua in ciclo chiuso**
- quindi in uscita avremo ancora un gradino in ingresso $G^*_{y^o y}(s)$ moltiplicato per un certo $Y_0$




**L'obiettivo quindi è portare l'uscita** (che è ancora come detto una costante e coincide col regime permanente per sistemi asintoticamente stabili) **al valore di riferimento**

- Quindi cercheremo di fare attenuazioni o guadagni a seconda del caso o dell'istante
  Deve quindi valere la relazione:
  $$y_f^{Y^o}(t) = G^*_{y^o y}(0) \cdot Y_0 \cdot 1(t) = \underbrace{Y_0 \cdot 1(t)}_{\text{riferimento}}$$
  Pertanto, dovremo trovare il modo in cui il guadagno $G^*_{y^o y}(s)$ sia 1, cosicché
  $$y_f^{Y^o}(t) = \underbrace{1}_{G^*_{y^o y}(0)} \cdot Y_0 \cdot 1(t) = \underbrace{Y_0 \cdot 1(t)}_{\text{riferimento}} \qquad \checkmark$$
  valga la relazione (il regime permanente coincide col riferimento)
  Abbiamo ottenuto quindi che:
  $$\lim_{t \to \infty} y(t) = Y_0 \quad , \quad \forall Y_0, \forall x(0)$$
  viene detto *inseguimento perfetto* del riferimento

> **Cosa ci serve: SPECIFICHE DEL PROGETTO**
>
> Progettare un sistema di controllo $\mathcal{P}^*$ che sia *asintoticamente stabile* (che mi garantisce convergenza al regime permanente) e tale per cui il *guadagno in continua sia unitario*, significa **avere un sistema la cui uscita converge al valore di riferimento** [che è l'obiettivo del controllo]




Sono dette le *specifiche a regime* (o specifiche statiche)
Quindi il nostro obiettivo ora è costruire un **controllore** che rispetti le specifiche necessarie

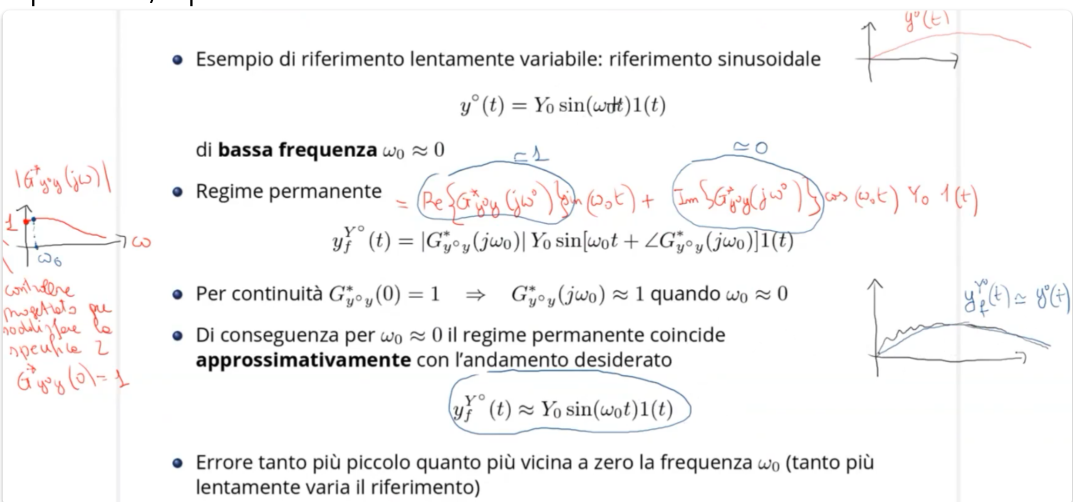
## RIFERIMENTI LENTAMENTE VARIABILI

Fin ora abbiamo visto i casi in cui il riferimento è costante. Si dimostra che anche con riferimenti lentamente variabili (ad esempio la traiettoria che la macchina deve assumere in un percorso relativamente semplice - ad esempio "quasi" rettilineo) vanno bene le specifiche $1$ e $2$ sopra descritte per il progetto di un controllore $\mathcal{C}$

Prendiamo il caso di *riferimento sinusoidale* di bassa frequenza ($\omega_0 \approx 0$)

Abbiamo un ingresso sinusoidale --> La risposta in frequenza (regime permanente) è ancora una sinusoide (scrivibile in termini parte reale e parte immaginaria oppure in termini di modulo e fase)

- Se applichiamo la specifica $2$ (guadagno in continua unitario), si vede che per $\omega_0 \approx 0$, la risposta in frequenza coincide *approssimativamente* con l'andamento desiderato
- Si esegue un piccolo errore ma se $\omega_0$ è piccola allora l'errore è trascurabile per certi esperimenti/aspetti




Quindi le specifiche $1$ e $2$ sono valide anche per riferimenti che variano di poco

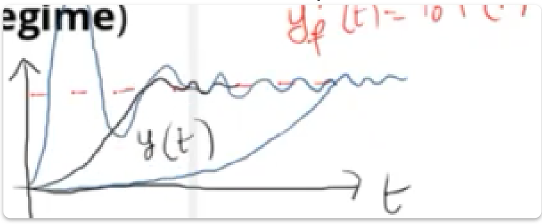
## SPECIFICHE DEL TRANSITORIO

Le specifiche $1$ e $2$ garantiscono un certo comportamento per il *regime permanente*, ma non ci dicono tanto riguardo la risposta transitoria
Si parla allora di **specifica** $3$, che mi assicura di arrivare rapidamente al regime permanente (che se è

progettato con 1 e 2 coincide o quasi con il riferimento)
- Esempio della doccia: arrivare più velocemente possibile alla temperatura desiderata, evitando inaspettate escursioni di temperatura repentine

$$\text{Specifica 3: transitorio rapido + escursioni limitate}$$

Possibili casi da evitare (qualitativi)



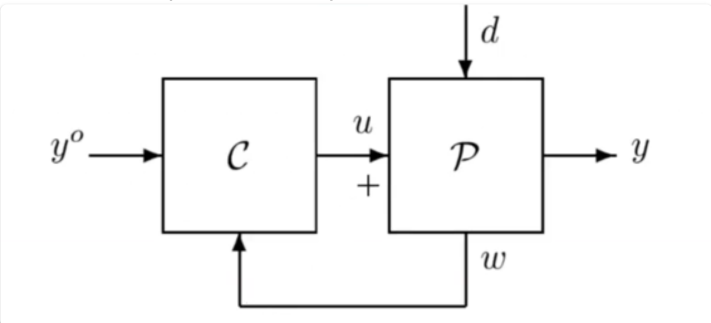

Si premura che la parte transitoria della risposta forzata sia corretta per l'esigenze che abbiamo

$$y_f(t) = \underbrace{t_f^{G^*}(t)}_{\text{spec. 3}} + \underbrace{y_f^{Y^o}(t)}_{\text{spec. 1,2}} = \mathcal{L}^{-1}\{\underbrace{G^*_{y^o\,y}(s)}_{\text{spec. 3}} Y^o(s)\}$$

- l'obiettivo del controllo quindi sarà quello di assegnale alla funzione di trasferimento a ciclo chiuso una forma desiderata

## ATTENUARE o REIETTARE I DISTURBI

Se un sistema presenta dei disturbi $d$ come in figura, allora occorrono *nuove specifiche* per attenuare o reiettare completamente questi ultimi




- nei sistemi reali $d$ è sempre presente
  - Esempio: aeroplano --> turbolenza: il controllore $\mathcal{C}$ cercherà di attenuare questi disturbi

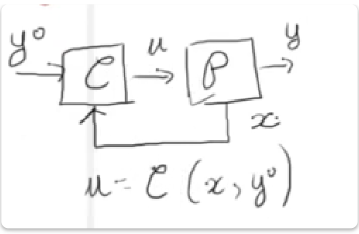
Agiscono quindi nel sistema due ingressi: $y^o$ e $d$ sul sistema a ciclo chiuso quindi l'andamento dell'uscita dipende da entrambi

- A causa di questo infatti esistono due funzioni di trasferimento: $G^*_{y^o\,y}(s)$ e $G^*_{d\,y}(s)$
  - Cioè una tra il riferimento e l'uscita e una tra il disturbo e l'uscita
    - Essendo il sistema lineare ci si può concentrare su una delle due singolarmente

# TECNICHE DI CONTROLLO: fase progettuale

## 1° Tecnica: RETROAZIONE ALGEBRICA SULLO STATO

Supponiamo di avere informazione completa sullo stato (sistema di controllo in *informazione completa*), ovvero $w = x$



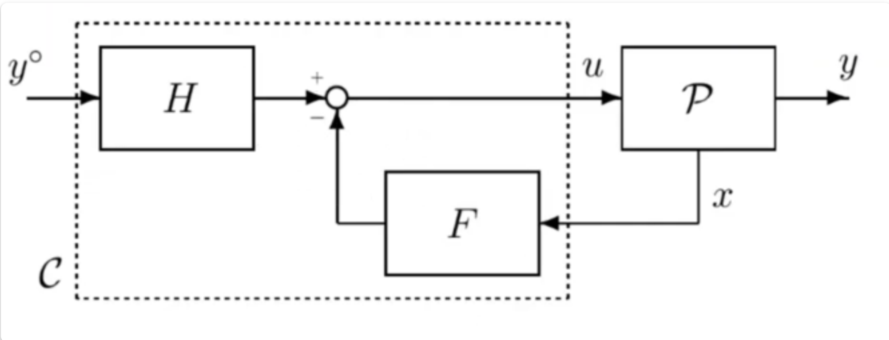

Quindi per ogni istante di tempo $t$ dobbiamo scegliere un $u$ opportuno, sulla base di $2$ ingressi: lo stato $x$ e il riferimento $y^o$. Quindi $u$ è una funzione di $2$ variabili:

$$u = \mathcal{C}(x, y^o)$$

Supponiamo che venga generata una azione di controllo $u(t)$ *lineare*. Sarà allora della forma matrice per vettore:

$$\text{Legge di controllo } (\mathcal{C}) : \quad \boxed{u(t) = \underbrace{-Fx(t)}_{\text{feedback}} + \underbrace{Hy^o(t)}_{\text{feedforward}}}$$

- Dove $F$ e $H$ sono matrici di dimensioni opportune
  - Il meno davanti a $F$ si inserisce per default (ma sarebbe indifferente come idea)
  Il controllo in $\text{feedback è pari a } -Fx(t)$ e dipende dallo stato $x$
  - $F$ è il guadagno in feedback ed è una matrice $\dim(u) \times \dim(x)$
  Il controllo in $\text{feedforward è pari a } Hy^o(t)$ e dipende dal riferimento $y^o$
  - $H$ è il guadagno in feedforward ed è una matrice $\dim(u) \times \dim(y)$




#### SISTEMI SISO $(\text{DIM}(U) = \text{DIM}(Y) = 1)$

Per sistemi SISO:

- $F$ è un vettore riga $F = [f_1, f_2, \cdots, f_n] \quad , \quad n = \dim(x)$
  - (dato che lo stato è un vettore colonna $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$)
- $H$ è uno scalare
  - (dato che il riferimento è un valore)

Risolvere un problema di controllo significa quindi determinare correttamente:

$$\underbrace{n}_{F} + \underbrace{1}_{H} \quad \text{parametri di progetto}$$

## EQUAZIONI DI STATO

Si possono riscrivere le equazioni di stato del sistema a ciclo chiuso sulla base di quanto abbiamo detto (applicando cioè un determinato controllo $\mathcal{C}$), per rappresentarlo algebricamente

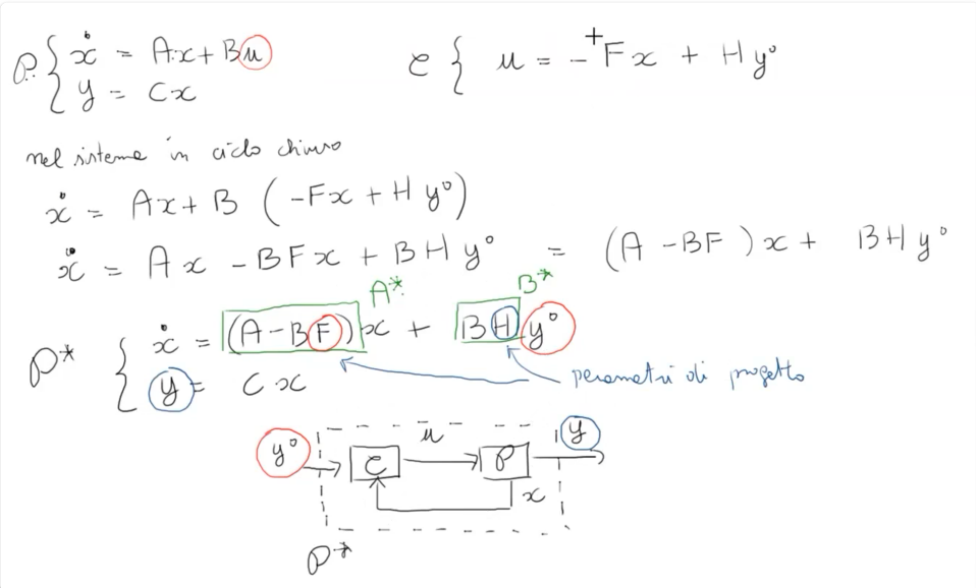
- Sappiamo infatti che il controllo dovrà essere del tipo: $\mathcal{C} \to \ \{u = -Fx + Hy^o$

- Sostituiamo $u$ del controllo in $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + \cancel{Du}^{\,0} \end{cases}$
  Ottenendo:
- $\dot{x} = Ax + B(-Fx + Hy^o) = Ax - BFx + BHy^o = (A - BF)x + BHy^o$
  Quindi il problema a ciclo chiuso:

$$\mathcal{P}^* = \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{(A - BF)}^{A^*}x + \overbrace{BH}^{B^*}y^o \\ y = Cx \end{cases}$$

- Dove abbiamo rinominato le matrici che compaiono in $\dot{x}$ con $A^*$ e $B^*$

> *Quindi agendo sui parametri di progetto $F$ e $B$ si può modificare l'uscita del sistema $y^o$ a nostro piacimento rendendo addirittura in certi casi stabile un $\mathcal{P}$ che in origine non lo era. Questo lo possiamo fare in maniera più generale specificando la retroazione $u = -Fx + Hy^o$ che appunto modifica la dinamica del sistema*




**Sistema in ciclo chiuso**

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^o(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $\boxed{A^* = A - BF}$ e $\boxed{B^* = BH}$

- dove appunto abbiamo modificato le matrici $B$ e $A$. Quest'ultima in particolare è importante perché è quella che determina i modi di evoluzione del sistema (per fare un esempio)

#### POLINOMIO CARATTERISTICO IN CICLO CHIUSO

Se vogliamo agire sulla stabilità, dobbiamo gestire gli zeri del polinomio caratteristico $\varphi(s)$. Pertanto, si definisce *polinomio caratteristico in ciclo chiuso*, il seguente:

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

perché appunto è cambiata la matrice $A$

- notiamo che qui entra in gioco solo la matrice $F$. Ci possiamo aspettare che inserendo determinati valori in essa, vadano a variare sul piano $s$ i poli di $\varphi(s)^*$, e dunque le condizioni di stabilità
  - Quindi: agire su $F \approx$ spostare gli autovalori

#### FUNZIONE TRASFERIMENTO IN CICLO CHIUSO

Analogamente, definiamo la *funzione di trasferimento in ciclo chiuso* come:

$$G^*_{y^o y}(s) = C(sI - A^*)^{-1}B^* = C(sI - A + BF)^{-1}BH$$

- agendo (anche) su $H$, possiamo ottenenere uno specifico guadagno del sistema a ciclo chiuso

> **Formule per sistemi SISO (da usare negli esercizi)**
>
> Si dimostra che la funzione di trasferimento a ciclo chiuso si calcola come:
>
> $$\boxed{G^*_{y^o y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} \cdot H}$$
>
> Dove $r(s)$ è lo stesso di un sistema generico LTI TC lineare, ovvero
>
> $$r(s) = CAdj(SI - A) \cdot B$$
>
> In pratica $r(s)$ *non dipende da $F$* (cioè se calcolassi $r(s)$ in un sistema a ciclo chiuso otterrei comunque gli stessi valori)
> Nel caso generale di sistema LTI TC lineare (ad anello aperto), abbiamo: $G(s) = \frac{r(s)}{\varphi(s)}$
> Quindi varia soltanto il polinomio caratteristico ($\varphi(s) \to \varphi(s)^*$) e poi la successiva moltiplicazione per $H$
> Infatti dipende come detto da $F$ che è all'interno di $\varphi(s)^*$ che mi determinano i poli del polinomio caratteristico e $H$ (costante moltiplicativa) che determina il guadagno per un sistema a ciclo chiuso
>
> **Fatto 3.2** Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sullo stato $u = -Fx + Hy^o$
>
> - assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso
>
> $$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$
>
> - assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso
>
> $$G^*_{y^o y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$
>
> con $r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B$

- **Nota:** la retroazione algebrica (feedback) modifica sullo stato i poli (perché influenza ($\varphi(s)^*$)) ma non modifica gli zeri della funzione di trasferimento $G^*_{y^o y}(s)$
- Quando si vede l'asterisco è da leggere come "a ciclo chiuso". Ad esempio: polinomio caratteristico a ciclo chiuso $\to \varphi(s)^*$

## PROGETTO

Dobbiamo soddisfare le $3$ specifiche

#### SPECIFICA 1 E 3

(spec.1)Basta che il "nuovo" polinomio caratteristico abbia tutte radici con $\mathrm{Re} < 0$ in modo tale che sia *asintoticamente stabile* (spec.3)Dato che vogliamo anche garantire un transitorio rapido con escursioni limitate dovremo *posizionare i poli di $\varphi(s)^{}$ in modo opportuno* (vedi lezioni successive)

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) \quad , \quad \text{con Re} < 0 \text{ e posizionate adeguatamente}$$

(sono specigiche: pole placement, perché legate direttamente alla posizione dei poli sul piano complesso - in particolare nel semipiano sinistro perché li vogliamo asintoticamente stabili)

### SPECIFICA 2

Dobbiamo avere un *guadagno in continua in ciclo chiuso tale che sia unitario*, ovvero deve valere:

$$G^*_{y^o\,y}(s)|_{s=0} = G^*_{y^o\,y}(0) = 1$$

Essendo come detto:

$$G^*_{y^o\,y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} \cdot H$$

Allora deve valere:

$$G^*_{y^o\,y}(s)|_{s=0} = G^*_{y^o\,y}(0) = \frac{r(0)}{\varphi^*(0)} \cdot H = 1$$

Quindi basta porre:

$$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

Cosicché:

$$G^*_{y^o\,y}(0) = \frac{r(0)}{\varphi^*(0)} \cdot \frac{\varphi^*(0)}{r(0)} = 1$$

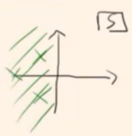
### RIASSUMENDO

**Progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sullo stato**

1. Scegliere guadagno in feedback $F$ tale che
   - polinomio caratteristico in ciclo chiuso

     $$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

     con tutte radici a $\text{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1)
   - radici di $\varphi^*(s)$ posizionate in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3)



2. Scegliere guadagno in feedforward

   $$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

   in modo da avere $G^*_{y^o\,y}(0) = 1$ e quindi inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifica 2)

Prima progetto $F$ poi $H$

- Poi ho fatto perché posso determinare il giusto $u = -Fx + Hy^o$