PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI (per sistemi lineari)

Supponendo di avere come condizione iniziale la combinazione di due condizioni iniziali, ovvero:

$$x(0) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

EVOLUZIONE LIBERA: CONSIDERIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI

Si trova facilmente l'evoluzione libera in questo modo:

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= A^t x(0) \\ &= A^t(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 A^t x_1 + \alpha_2 A^t x_2 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo una **combinazione lineare delle due**

Per quanto riguarda la *risposta*, abbiamo:

$$y_\ell(t) = \alpha_1 C\, A^t x_1 + \alpha_2 C\, A^t x_2$$

- cioè ancora una combinazione lineare (rispetto a C)

Siamo in grado quindi di prevedere la combinazione lineare in risposta di due condizioni iniziali, semplicemente conoscendo l'evoluzione delle due condizioni prese singolarmente

- Basta appunto combinare linearmente le due
- sovrapposizione $\longleftrightarrow$ combinazione lineare

Riassumendo:

$$x_1, u_1 \rightarrow x_{\ell,1}(t) \quad x_{f,1}(t)$$

$$x_2, u_2 \rightarrow x_{\ell,2}(t) \quad x_{f,2}(t)$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha x_1, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rightarrow \alpha_1[x_{\ell,1}(t) + x_{f,1}(t)] + \alpha_2 [x_{\ell,2}(t) + x_{f,1}(t)]$$

- Anche per sistemi LTI TC vale il **principio di sovrapposizione degli effetti:**

- nota: vale sia per il tempo continuo che per il caso discreto

EVOLUZIONE FORZATA: CONSIDERIAMO GLI INGRESSI

A partire dal generico:

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

Si trova l'evoluzione forzata, sostituendo:

Ovvero l'evoluzione forzata in risposta a una combinazione lineare degli ingressi è ancora una combinazione lineare delle risposte dei singoli ingressi, ovvero:

- Data una combinazione lineare d'ingressi: la risposta del sistema è data dalla combinazione lineare delle singole risposte

- Consideriamo ingressi nella forma di combinazioni lineari

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ evoluzione forzata

$$
\begin{aligned}
x_f(t) &= \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau) \\
&= \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B\left(\alpha_1 u_1(\tau) + \alpha_2 u_2(\tau)\right) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \alpha_1 u_1(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \alpha_2 u_2(\tau) \\
&= \alpha_1 \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_1(\tau) + \alpha_2 \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_2(\tau) \\
y_f(t) &= \alpha_1 \underbrace{\left[\sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u_1(\tau) + D u_1(t)\right]}_{\text{risposta forzata a } u_1} + \alpha_2 \underbrace{\left[\sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u_2(\tau) + D u_2(t)\right]}_{\text{risposta forzata a } u_2}
\end{aligned}
$$

evoluzione forzata in risposta a $u_1(t)$

evoluzione forzata in risposta a $u_2(t)$

EVOLUZIONE COMPLESSIVA: METTIAMO TUTTO INSIEME

Combiniamo quindi *condizioni iniziali* e *ingressi*

- Consideriamo ingressi e condizioni iniziali nella forma di combinazioni lineari

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad x_1 \quad u_1(t) \\
u(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \qquad x_2 \quad u_2(t)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ evoluzione complessiva

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \underbrace{A^t x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau)}_{x_f(t)} \\
&= A^t\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B\left(\alpha_1 u_1(\tau) + \alpha_2 u_2(\tau)\right) = \alpha_1 A^t x_1 + \alpha_2 A^t x_2 + \alpha_1 \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_1(\tau) + \alpha_2 \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_2(\tau) \\
&= \alpha_1 \underbrace{\left(A^t x_1 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_1(\tau)\right)}_{\substack{\text{evoluzione in risposta a} \\ x(0) = x_1 \text{ e } u(t) = u_1(t)}} + \alpha_2 \underbrace{\left(A^t x_2 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_2(\tau)\right)}_{\substack{\text{evoluzione in risposta a} \\ x(0) = x_2 \text{ e } u(t) = u_2(t)}}
\end{aligned}
$$

Quindi:
l'evoluzione complessiva in risposta alle singole cause è la somma (combo lineare) delle evoluzioni in risposta alle singole cause

- principio divide et impera: posso combinare il sistema conoscendo semplicemente come risponde il sistema com singoli ingressi per singoli stati, ovvero $x_i \longrightarrow u_i(t)$
  - vale lo stesso anche per l'uscita (non solo per lo stato)
- sarà utili negli esercizi ricondurci a trattare singoli termini elementari

RISPOSTA NEI SISTEMI LTI TC

- Più complicato in generale perché dobbiamo *risolvere una equazione differenziale*
  - Dobbiamo in particolare risolvere un **problema di Cauchy** (perchè conosciamo la condizione iniziale $x(0) = 0$ e il segnale d'ingresso $u(t)$)
  - supponendo senza dimostrare che la soluzione esiste ed + è unica

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) = Cx(t) + Du(t)
\end{cases}
$$

Ricordando che x in generale è un vettore (quindi dovremo risolvere un *sistema di equazioni differenziali : (*)

CASO SCALARE: $\text{DIM}(X) = 1$

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) \quad , \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = a\,x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- al posto della matrice A abbiamo uno scalare a

Dobbiamo trovare $x(t)$ che derivata è uguale a sé stessa moltiplicata per uno scalare a, ovvero l'**esponenziale**:

$$x(t) = e^{at}x_0$$

Infatti

$$x(0) = e^0 x_0 = x_0$$

Da cui:

$$\frac{d}{dt}x(t) = a\,e^{at}x_0 = a\,x(t)$$

CASO GENERALE $\text{DIM}(X) = N$(CAOS AUTONOMO)

Problema di Cauchy:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La soluzione è:

$$\boxed{e^{At}x_0}$$

Stessa soluzione, solo che qui abbiamo un **esponenziale di matrice**, che è una funzione del tempo matriciale: per ogni istante di tempo associa una matrice, ovvero $e^{At} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$

RISPOSTA NEL CASO AUTONOMO

Abbiamo un integrale definito nel tempo d'interesse invece di una sommatoria

Fatto 2.2 Per un sistema LTI TC le evoluzioni complessive di stato e uscita sono

$$\begin{cases} x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) \end{cases}$$

$$\boxed{x_\ell(t) = e^{At}x_0} \qquad \boxed{x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0 \qquad y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Dove:

- L'evoluzione libera dipende dall'esponenziale di matrice
- L'evoluzione forza dipende dall'integrale (detto di *convoluzione*)

DIMOSTRAZIONE

Soluzione complessiva (**formula di Lagrange**)

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(0) = \overbrace{e^{A0}}^{I}x_0 + \cancel{\int_0^0 e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau} = x_0$$

- soddisfa la condizione iniziale $x(0) = x_0$ perché $e^{At}\big|_{t=0} = I$ matrice identica
- soddisfa l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ perché (vedi slide successiva)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\Big(\overbrace{e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}^{x(t)}\Big) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) \\
&= Ae^{At}x_0 + Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= A\underbrace{\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right)}_{x(t)} + Bu(t)
\end{aligned}$$

- Ricordiamo la **formula di Leibniz** per la derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} F(t,\tau)d\tau\right) = F(t,b(t))\cdot\frac{d}{dt}b(t) - \cancel{F(t,a(t))\cdot\frac{d}{dt}a(t)} + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)\,d\tau$$

0

- Nel caso di $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$$F(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) \qquad a(t) = 0 \qquad b(t) = t$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) &= e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\overbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)}^{F(t,\tau)}d\tau \\
&= \underbrace{e^{A\cdot 0}}_{I}Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$F(t,\tau)\,\overbrace{\frac{d}{dt}b(t)}^{1}\Big|_{\tau=b(t)} = e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\Big|_{\tau=t}$

ESPONENZIALE DI MATRICE

- Si definisce attraverso la *serie di Taylor*, infatti (vediamo i due casi a confronto):

- Ricordando l'espansione in **serie di Taylor** della funzione esponenziale

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k t^k}{k!} = \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{at} + \underset{k=2}{\frac{a^2t^2}{2}} + \underset{k=3}{\frac{a^3t^3}{6}} + \ldots$$

possiamo definire l'**esponenziale di matrice**

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = \underset{k=0}{I} + \underset{k=1}{At} + \underset{k=2}{\frac{A^2t^2}{2}} + \underset{k=3}{\frac{A^3t^3}{6}} + \ldots$$

$A^k = A^0 = I$

13/

- che è la soluzione del problema di Cauchy lineare tempo invariante nel caso autonomo
  - Infatti abbiamo ancora l'esponenziale di matrice pre moltiplicata per la matrice A stessa

PROPRIETA' (molte simili all'esponenziale "classico")

DERIVATA: SE' STESSA PER UNA COSTANTE

Andiamo a derivare l'esponenziale di matrice
(A è gestita come costante, la variabile di riferimento per la derivazione è t)

- Dalla definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

si ottiene

$$0 \quad A \quad A^2 t \quad A^3 \frac{3t^2}{6} = A^3 \frac{t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{de^{At}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \dots\right) \\
&= \underbrace{A}_{A \cdot I} + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2} + \dots \quad = A\left(I + At + A^2\frac{t^2}{2} + \dots\right) \\
&= A\underbrace{\left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \dots\right)}_{e^{At}} = A\, e^{At}
\end{aligned}$$

- Considero un sistema autonomo vettoriale $x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$

$\Rightarrow$ la soluzione è

$$x(t) = e^{At} x_0$$

- l'esponenziale di matrice quindi *soddisfa l'equazione differenziale in questione*
  - Soddisfa anche la condizione iniziale

ELEVAZIONE ALLA ZERO

Vale:

$$e^{A0} = I = \text{matrice identita'}$$

COME SI CALCOLA

- Per definizione, se la matrice è diagonalizzabile
- Trasformata di Laplace, se la matrice non è diagonalizzabile

PERCHE' SI CALCOLA

Per capire l'evoluzione del tempo dell'evoluzione libera e di quella forzata