CALCOLO DELL'ESPONENZIALE DI MATRICE

CASO 1) A è DIAGONALE

- Calcolo immediato: **basta fare l'esponenziale dei termini sulla diagonale**
  - questo risultato deriva dalla definizione:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2}t^2 \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} t^2 \dots = \begin{bmatrix} 1+a_1t+\frac{a_1^2t^2}{2} \dots & 0 & \cdots \\ 0 & \underbrace{1+a_2t+\frac{a_2^2t^2}{2}}_{e^{a_2t}} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

  - Da cui poi i termini finali sulla matrice si possono riscrivere in maniera "esponenziale" osservando che abbiamo lo sviluppo di Taylor

  Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & a_n \end{bmatrix}$$

⇒ applicando la definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & + & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

CASO 2) A è DIAGONALIZZABILE

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ha n autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
Gli autovalori sono gli zeri del polinomio caratteristico, così definito:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Dal teorema fondamentale dell'algebra, ne deriva che $\varphi(\lambda)$ si può così scomporre:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$$

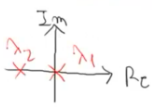
ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 0\cdot(-1) = \lambda(\lambda+1)$$

$\varphi(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$



Un altro possibile modo di definire gli autovalori è il seguente:

$$\lambda_i \text{ autovalore di } A \iff \text{esiste almeno un autovettore } v_i \text{ t.c. } Av_i = \lambda_i v_i$$

```
- ne preserva la direzione
```

Una matrice A è diagonalizzabile se esiste $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile tale che:

$$A = T\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \lambda_n\end{bmatrix}T^{-1} \quad \Rightarrow \boxed{A = T\Lambda T^{-1}}$$

- La matrice T è proprio quella che diagonalizza
- Sulla diagonale ci sono proprio gli autovalori

Adesso quindi:

Supponiamo A diagonalizzabile, ovvero $A = T\Lambda T^{-1}$

Posso facilmente calcolare A^k, in questo modo:

$$A^k = \underbrace{T\Lambda \overbrace{T^{-1} \quad T}^{I}\Lambda T^{-1} \quad \dots \quad T\Lambda T^{-1}}_{A^k}$$

- Dove tra le varie matrici si nota il prodotto $T \cdot T^{-1} = I$, quindi posso riscrivere:

$$A^k = T\underbrace{\Lambda\Lambda\dots\Lambda}_{k \text{ volte}}T^{-1}$$

  Quindi se sappiamo diagonalizzare A, possiamo facilmente *trovare la diagonalizzazione di qualsiasi potenza per qualsiasi k della matrice di partenza A*, in questo modo:

$$A^k = T\,\Lambda^k\,T^{-1}$$

Dalla definizione di esponenziale di matrice con le serie di Taylor possiamo riscrivere il termine A^k:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\,t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}T\Lambda^k T^{-1}\,\frac{t^k}{k!}$$

da cui:

$$e^{At} = T\underbrace{(\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^k\frac{t^k}{k!})}_{e^{\Lambda t}} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

- basta avere un algoritmo per diagonalizzare la matrice così da trovare l'esponenziale di matrice e capire così l'evoluzione del sistema

Riassumendo:

- Sfruttando la proprietà

$$A^k = T\Lambda^k T^{-1}$$

  e la definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T\Lambda^k T^{-1}t^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right)T^{-1} = T\,e^{\Lambda t}\,T^{-1}$$

- Poiché Λ diagonale allora

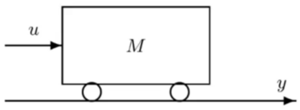
$$e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}T^{-1}$$

- da cui posso calcolare appunto $x_\ell(t) = e^{At}x_0$

ESEMPIO: SISTEMA MECCANICO

Sappiamo che:

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



$M\ddot{y}(t) = u(t) - b\dot{y}(t)$

- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{D}_{D=0} u(t)$$

Capiamo l'evoluzione dello stato, calcolando l'esponenziale di matrice:

$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda+1)$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -1$

- Fissiamo $M = 1$ e $b = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Diagonalizzando

$T = [v_1 \ v_2]$

v_1 autovettore di $\lambda_1 = 0$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

v_2 autovettore di $\lambda_2 = -1$

$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\lambda_1}{0} & 0 \\ 0 & \underset{\lambda_2}{-1} \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}}$$

con $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$

- Applicando la formula poiché $e^{\lambda_1 t} = 1$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

$e^{\lambda_1 t} = e^{0t} = 1$

$e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

25/58

Possiamo quindi calcolare l'evoluzione libera (ovvero come si evolve il sistema in assenze di sollecitazioni esterne):

$$x_\ell = e^{At}x(0)$$

- dove $x(0)$ è il vettore dello stato di dimensione 2:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{posizione} \\ \text{velocita'} \end{bmatrix}$$

Quindi:

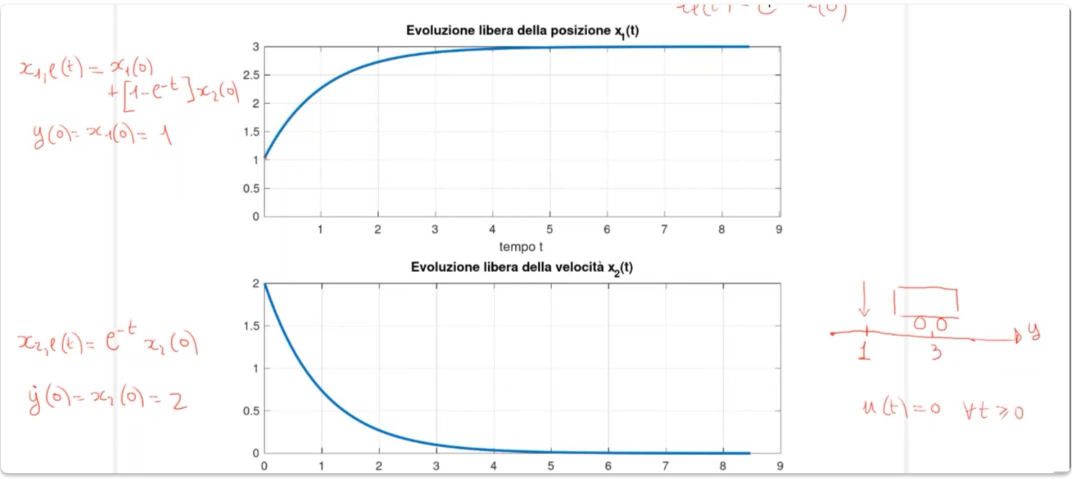
- evoluzione libera dello stato

$$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

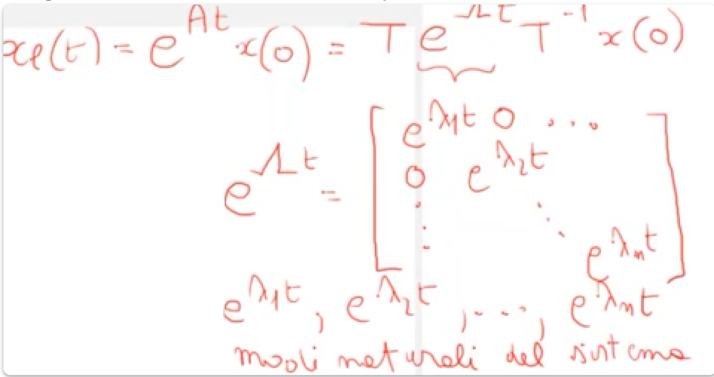
$$= \begin{bmatrix} x_1(0) + (1-e^{-t})\,x_2(0) \\ e^{-t}\,x_2(0) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = y(0)$ posizione iniziale e $x_2(0) = \dot{y}(0)$ velocità iniziale

Graficamente (ricordando che l'attrito c'è):



- Abbiamo ottenuto una evoluzione libera che nel tempo dipende dai segnali $e^{\Lambda t}$, ovvero i segnali sulla diagonale di tale matrice. Essi prendono il nome di *modi naturali* di evoluzione del sistema



Nel caso del carrello:

- $\lambda_1 = 0$ quindi $e^{\lambda_1 t} = 1$
- $\lambda_1 = -1$ quindi $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

Se fossero tutte diagonalizzabili le matrici sarebbe già fatto tutto.

- Il problema è che in molti casi queste non lo sono
  - Per questo, la *trasformata di Laplace* permette di calcolare e^{At} in modo alternativo (e permette anche di calcolare l'evoluzione forzata oltre che quella libera)

TRASFORMATA DI LAPLACE

INTRO

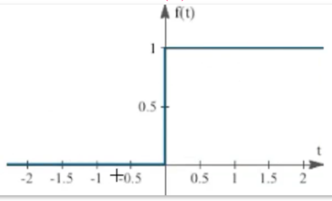
Studiamo solo i casi di **segnali causali** (perché consideriamo solo sistemi causali con istante iniziale 0, essendo anche TI)

$$f(t) = 0 \quad , \quad t < 0$$

Ad esempio: il segnale *gradino unitario* $1(t)$

- esempio di segnale causale: **gradino unitario**

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$



DEFINIZIONE

Permette di passare da dominio di variabile reale (del tempo) $f(t)$ a un dominio trasformato s, dove s è un generico numero complesso $s = \sigma + jw$. In questo modo:

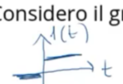
$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt}$$

- è una generalizzazione della trasformata di Fourier (basta considerare solo la parte immaginaria, ovvero porre $s = j\omega$), quindi: $F(s)_{s=j\omega} = \int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}\,dt$

TRASFORMATA DEL GRADINO UNITARIO (unico conto con la definizione)

- avendo un integrale improprio, è corretto studiare prima la convergenza di esso
  - La complicazione è che s è complesso quindi dobbiamo guardare il suo modulo
  - In particolare dobbiamo prestare attenzione all'esponenziale immaginario e^{-jwt} che viene fuori. Possiamo riscriverlo come combinazione di seni e coseni, ovvero: $e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$

- Considero il gradino unitario



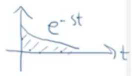
$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$

$f(t) = 1(t)$

$\Rightarrow$ applicando la definizione

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{1(t)}_{1}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt$$



Nota: la trasformata esiste per tutti e soli i valori di s per cui l'integrale improprio **converge**

- Nel caso del gradino, l'integrale improprio converge quando

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}| = 0$$

- Notiamo che

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t - j\omega t}| = |e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)]| = |e^{-\sigma t}| \cdot |\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)|$$

$$= e^{-\sigma t}\underbrace{\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}}_{1} = e^{-\sigma t}$$

esponenziale immaginario

esponenziale reale

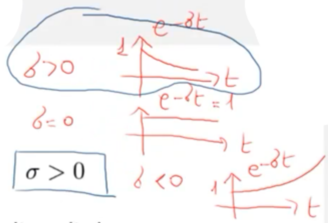
32 / 58

Dobbiamo quindi studiare per la convergenza i vari casi dell'esponenziale che abbiamo ottenuto

- per avere convergenza, l'area sottostante deve tendere a 0, quindi:

- l'integrale improprio converge quando

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}| = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sigma > 0}$$



$\Rightarrow$ la trasformata del gradino è ben definita per tutti gli s tali che

$$\sigma = \text{Re}\{s\} > 0$$

- abbiamo così trovato la ROC (regione di convergenza) della trasformata del gradino sul piano s
  Posso adesso calcolare l'integrale nella relativa regione di convergenza (facile perché abbiamo un esponenziale):

$$\text{Re}\{s\}>0 \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}dt &= -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{0}^{\infty} \\ &= -\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{t=0}^{+}\right) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = 1/s$$

Ovvero:

$$\boxed{1(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}}$$

- d'ora in avanti consideriamo l'operatore trasformata come "simbolico", ovvero lo useremo come strumento per passare da un dominio all'altro (senza preoccuparci della definizione attraverso l'integrale)