

SEGNALI TEMPO DISCRETO

INTRODUZIONE

Definizione e caratteristiche

- Sequenze di numeri
- Indicate con $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, che stabilisce l'ordine della variabile x

Esempi

- numero di auto che passano attraverso un casello autostradale [nasce discreto]
- segnale vocale [nasce analogico, lo analizzo come discreto (grazie al campionamento)]

Se nei segnali tempo continuo si cercava con l'analisi in frequenza di ricavare informazioni sulla *periodicità* del segnale, adesso coi segnali tempo discreto si cerca di estrarre un certo tipo di *ciclicità*.

$$\underbrace{t. continuo}_{periodicit\grave{a}} \iff \underbrace{t. discreto}_{ciclicit\grave{a}}$$

Lo strumento per fare ciò rimarrà lo stesso, ovvero la *trasformata di Fourier*, anche se sarà applicata in modo diverso.

$$\boxed{x(t) \xrightarrow[\text{Campionamento}]{} x[n] \xrightarrow[TDF]{} X(f)}$$

dove TDF = trasformata discreta di Fourier

- Nota: il passaggio in frequenza è utile perché dallo spettro si ricavano numerosi informazioni (ad esempio lo spettro di un segnale vocale mostra dei picchi di risonanza che permettono di distinguere un fonema emesso da un altro).

CAMPIONAMENTO

Passaggio $x(t) \rightarrow x[n]$, dove:

$$\begin{cases} x[n] = x(t)|_{t=nT} \\ T = \text{passo di campionamento} \\ f_c = \text{frequenza di campionamento (\# campioni in un un sec.)} \end{cases}$$

Ricostruzione del segnale

Sotto opportune ipotesi, si può anche fare il passaggio inverso, ovvero

$$x[n] \rightarrow x(t),$$

ovvero si può ricostruire il segnale analogico a partire dai campioni

Per fare ciò:

$$x(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{ADC} \xrightarrow{x[n]} \boxed{DAC} \xrightarrow{\quad} x(t)$$

Dove: ADC = Analog to Digital converter, DAC = Digital to Analog converter

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Si vuole eseguire il passaggio:

$$x(t) \rightarrow x_c(t) \quad ,$$

dove $x_c(t)$ rappresenta il segnale analogico campionato. In particolare:

$$x_c(t) = x(t) \cdot p(t) \quad ,$$

con $p(t)$ *funzione pettine di Dirac*, così espressa:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Pertanto, svolgendo i conti:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

- Nota: il vantaggio di questa nuova formulazione sta nel fatto che $x_c(t)$ dipende soltanto dai campioni, mentre in quella precedente dipendeva dal segnale analogico $x(t)$.

Riassumendo quindi:

$$x_c(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

Trasformata del segnale campionato

Ci chiediamo ora di trovare la relazione:

$$x_c(t) \Longleftrightarrow X_c(f)$$

- Essendo $p(t)$ analogico e **periodico** di periodo **T**, posso rappresentarlo come *serie di Fourier*:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

I coefficienti di Fourier c_k per definizione sono:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt$$

- Dalle proprietà della δ , sappiamo che dall'integrale di un segnale impulsivo moltiplicato per una funzione si ottiene il valore della funzione calcolata nel punto in cui è posizionata la δ .

- δ è posizionata in $T = 0$

- La funzione è l'esponenziale complesso (che per $T = 0$ vale 1)

Quindi:

$$c_k = \frac{1}{T}$$

Da cui finalmente:

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

Sostituendo questo nuovo risultato al posto di $x_c(t) = x(t) \cdot p(t)$ e portando $x(t)$ dentro la sommatoria, si ottiene:

$$x_c(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

Posso ora definire la **trasformata**, sfruttando la proprietà di linearità:

$$X_c(f) = \mathcal{F}\{x_c(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x(t) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t}\}$$

- Eseguire la trasformata del prodotto tra un segnale $x(t)$ e l'esponenziale complesso comporta una **traslazione in frequenza** del valore di f_0 , che vale nel nostro caso $\frac{k}{T}$. Ecco quindi che si ottiene **lo spettro del segnale campionato**:

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

Analogamente:

$$X_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_c)$$

Osservazioni

- $X_c(f)$ è una funzione **periodica** di periodo f_c
- $X_c(f)$ si costruisce partendo da $X(f)$ e sommando tutte le sue versioni traslate di multipli di f_c (a "destra e sinistra"). Ogni replica è moltiplicata per un valore f_c

Passaggio inverso

Il passaggio inverso (ovvero **ricostruire il segnale a partire dai campioni**), grazie a delle opportune osservazioni, si può eseguire solo se sono rispettate le seguenti **condizioni necessarie**:

$$\begin{cases} \text{Lo Spettro ha banda Limitata} \\ f_c \geq \frac{f_c}{2} \end{cases}$$

La seconda condizione è fondamentale per evitare **aliasing** (sovrapposizione) tra le repliche. Il mezzo con cui si ricostruisce il segnale è un filtro **passa-basso** con frequenza di taglio $f_c \geq \frac{f_c}{2}$ e guadagno $\frac{1}{f_c}$.

Possiamo quindi enunciare il **teorema del campionamento**:

Dato un segnale a banda limitata (ovvero $|X(f)| = 0$ per $f > B$) con $f_c > 2B$, allora è possibile ricostruire $x(t)$ dai campioni $x(nT) = x[n]$

- Nota: $f_c = 2B$ viene detta **frequenza di Nyquist**

INTERPOLAZIONE CARDINALE

Abbiamo visto che:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{campionatore}} \longrightarrow x(nT) = x[n] = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \delta(t - nT) dt$$

E il passaggio inverso:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{formatore di impulsi}} \xrightarrow{x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)} \boxed{\text{filtro di ricostruzione}} \longrightarrow x(t)$$

- Dove il filtro di ricostruzione è un filtro **passa basso** ideale, che possiamo quindi esprimere così:

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_c} & 0 \leq |f| \leq \frac{f_c}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \frac{1}{f_c} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

Possiamo quindi calcolarci l'antitrasformata, ottenendo:

$$h_{LP}(t) = \text{sinc}(t \cdot f_c) \quad ,$$

che è appunto una funzione *sinc* che vale 1 in $t = 0$ e ha gli zeri nei multipli interi di $\frac{t}{f_c}$, ovvero nei multipli di T (cfr. relazione tra T e f_c).

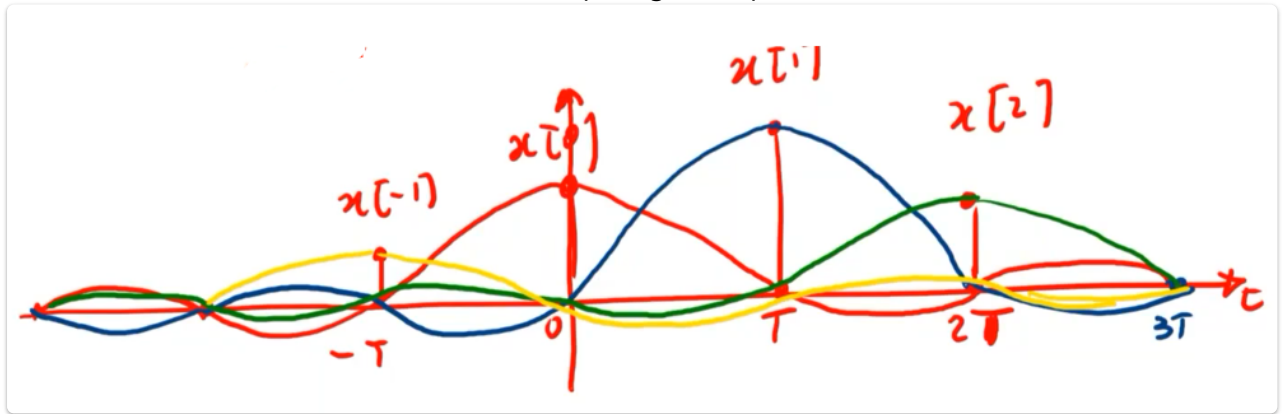
Come visto x_c va in ingresso al filtro di ricostruzione e questo dà luogo al segnale $x(t)$. Pertanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c(t) * h(t) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT) \right) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \left(\delta(t - nT) * h(t) \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h(t - nT) \\ &= x[n] \cdot \text{sinc}(f_c \cdot (t - nT)) \end{aligned}$$

--> Dunque per ricostruire il segnale faccio le seguenti cose:

- Considero i vari campioni $\dots, x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots$, che sono come detto posizionati nei multipli di T ;
- Moltiplico ogni campione n -esimo per un *sinc*, che ha gli zeri negli istanti di campionamento degli altri campioni (per come è definito) e vale 1 nel punto in cui è posizionato il campione

n –esimo di riferimento. Reitero come detto per ogni campione.



- Si esegue quindi la somma di tutti i *sinc* costruiti per ogni istante T .
 - Tale somma rappresenta proprio la **ricostruzione del segnale**.
 - Viene denominata **interpolazione cardinale**.

Nota: è un caso ideale, perché abbiamo utilizzato un filtro LP ideale.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEQUENZE

Intro

Andiamo a ottenere **in un modo alternativo** la trasformata $X_c(f)$

- Il significato finale è lo stesso, ma la forma è alternativa rispetto a quella calcolata precedentemente

Sappiamo che:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_c(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT) \right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt}_{= e^{-j2\pi fnT}} \end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere, per le proprietà della δ :

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{j2\pi fnT}$$

- Posso con questa formula calcolare la **trasformata a partire dai campioni**.
- Useremo sempre questa per calcolare lo spettro di un segnale campionato.
 - Con l'altra formula, ovvero $X_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - f_c)$ dovrei partire dalla trasformata del segnale analogico e quindi sommare le versioni traslate dello spettro (come visto) :(

Con una notazione alternativa (più comune):

$$\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f n T}$$

☰ **E' ancora periodica di periodo f_c .**

Basta mostrare che:

$$\begin{aligned}\overline{X}(f + f_c) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi (f + f_c) n T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T} \cdot e^{-j2\pi f_c n T} \\ &\quad \text{dato che } f_c \cdot T = 1 \text{ (il 2° esponenziale viene 1)} \\ &= \overline{X}(f) \quad C.V.D.\end{aligned}$$

⚠ Frequenze Normalizzate

Spesso è più comodo utilizzare al posto della variabile "fisica" f una **variabile normalizzata F** , ovvero:

$$f \longrightarrow f T = \frac{f}{f_c} = \boxed{F}$$

- Tale F viene detta appunto **frequenza normalizzata**.
- Ne consegue quindi la seguente definizione alternativa della trasformata:

$$\boxed{\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi F n}}$$

- E' ancora un segnale **periodico** di periodo **1**
- Essendo soltanto un modo differente di esprimere lo stesso concetto di **trasformata di Fourier per sequenze**, si può passare da una forma all'altra senza problemi con i soli cambi di variabile necessari, cioè "riscalando" gli assi (se necessario: vedi esempi lezione 28/04 - 2:06:00)

ANTITRASFORMATTA DI FOURIER PER SEQUENZE

📅 Intro

Calcolare la sequenza $x[n]$ a partire dalla funzione "normalizzata" $\overline{X}(F)$, cioè:

$$\overline{X}(F) \longrightarrow x[n]$$

Cambiando solamente l'indice ($n \rightarrow m$), sappiamo che:

$$\overline{X}(F) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{j2\pi Fm}$$

Se adesso a $\overline{X}(F)$:

- moltiplichiamo $e^{j2\pi Fn}$
- integriamo tra $\frac{-1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

Si ottiene:

$$\left(\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{j2\pi Fm} dF}_{\overline{X}(F)} \right) \cdot e^{j2\pi Fn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi F(m-n)} dF}_{\star}$$

$$\star = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi F(m-n)) dF - j \int_{-1/2}^{1/2} \sin 2\pi F(m-n) dF$$

$$= \begin{cases} \text{rimane } \int e^0 dF & \text{e quindi } 1 & \text{se } m = n \\ \int (\text{coseno e seno per un certo numero intero di periodi}) & & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

- Da cui, finalmente:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In conclusione (*prendendo in considerazione solo quando $x[n] = 1$*):

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F) \cdot e^{j2\pi FN} dF$$

è l'**antitrasformata per sequenze della funzione $\overline{X}(F)$** ;

- E' la somma (integrale) di tanti esponenziali complessi ognuno a frequenza normalizzata F , la cui ampiezza è infinitesima e vale $\overline{X}(f) \cdot dF$ (peso in fase di ricostruzione).
- Stessa visione della espansione in serie/trasformata di Fourier

☰ Frequenze Fisiche

Per le frequenze fisiche, ricordando che $f = F \cdot f_c$, si dimostra analogamente che:

$$x[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} x[n] \cdot e^{j2\pi fnT} df$$

.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA

Vogliamo ottenere per la convergenza:

$$|\overline{X}(f)| < \infty$$

- Si dimostra che questo vale quando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Infatti:

$$\begin{aligned} |\bar{X}(f)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi F n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot \underbrace{|e^{-j2\pi F n}|}_1 \quad (\text{disuguaglianza triangolare}) \\ &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|} \end{aligned}$$

se essa è limitata, allora anche $\bar{X}(F)$ lo è e quindi converge

Quindi: *assoluta sommabilità di $x[n]$ implica la convergenza della trasformata di Fourier per sequenze.*

Nota: esistono altre condizioni per la convergenza *meno forti* (vedi sequenza costante 2.2 e 5 maggio)

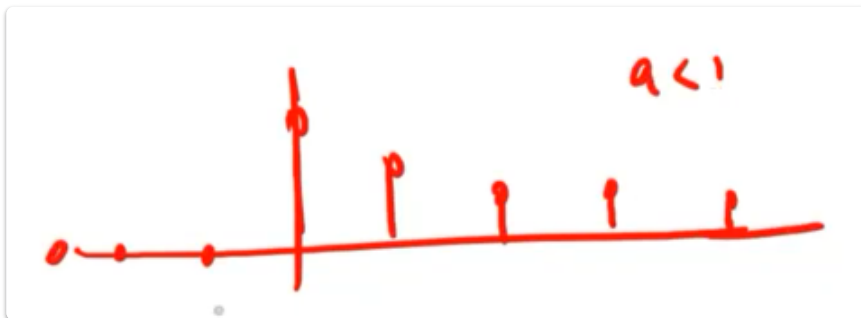
ESEMPI

Calcolo di $\bar{X}(f)$ della sequenza $x[n] = a^n \cdot u[n]$

- dove

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Supponendo $|a| < 1$ si ha:



$$\begin{aligned} \bar{X}(F) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j2\pi F n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a e^{-j2\pi F})}_q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1 \end{aligned}$$

(serie geometrica di ragione q)

Quindi, sostituendo il segnale al posto di q , otteniamo la trasformata:

$$\bar{X}(F) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi F}}$$

SPETTRO
DELLA SEQUENZA
 $x[n]$

Anche in questo caso la trasformata è una funzione **complessa** della variabile F , pertanto si può esprimere/rappresentare in **modulo** e **fase**, coi relativi **spettri** di **ampiezza e fase**.

Partiamo a calcolare lo **spettro di ampiezza**:

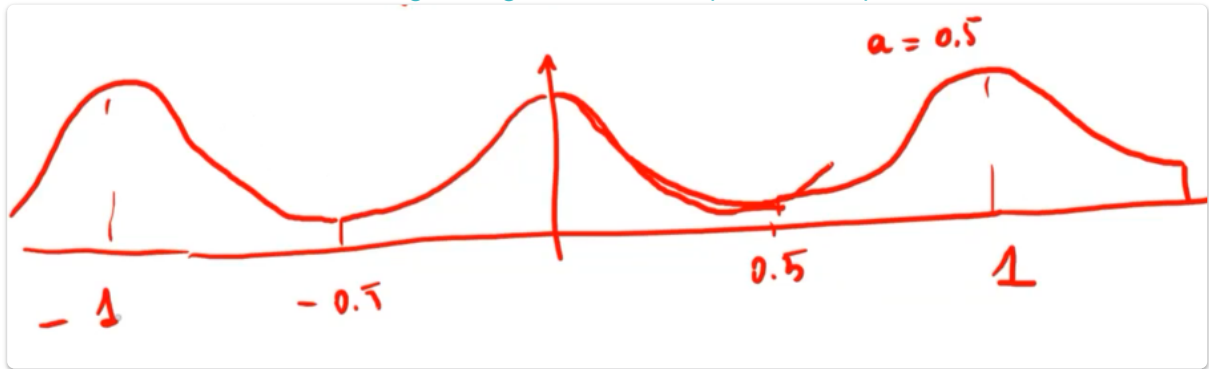
- Separiamo parte reale e parte immaginaria, sfruttando le formule di Eulero:

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{1 - a \cos 2\pi F + ja \sin 2\pi F}$$

- Troviamo il **modulo**:

$$|\bar{X}(f)| = \frac{1}{\sqrt{(Re)^2 + (Im)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos 2\pi F)^2 + (ja \sin 2\pi F)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2 \cos 2\pi F}}$$

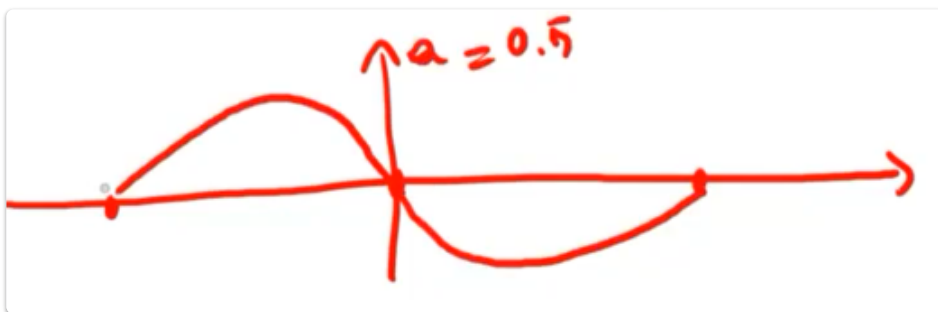
Ponendo $a = 0.5$, otteniamo il seguente grafico (essendo periodica di periodo 1):



Proseguiamo con il calcolo della **fase**:

$$\bar{X}(f) = \frac{1 - a \cos 2\pi F - ja \sin 2\pi F}{\underbrace{|1 - a \cos 2\pi F + ja \sin 2\pi F|^2}_{\text{Razionalizzazione}}}$$

$$\angle \bar{X}(f) = \arctan \left(\frac{Re}{Im} \right) = \arctan \left(\frac{-a \sin 2\pi F}{1 - a \cos 2\pi F} \right) \underset{\text{dispari}}{=} - \arctan \left(\frac{a \sin 2\pi F}{1 - a \cos 2\pi F} \right)$$



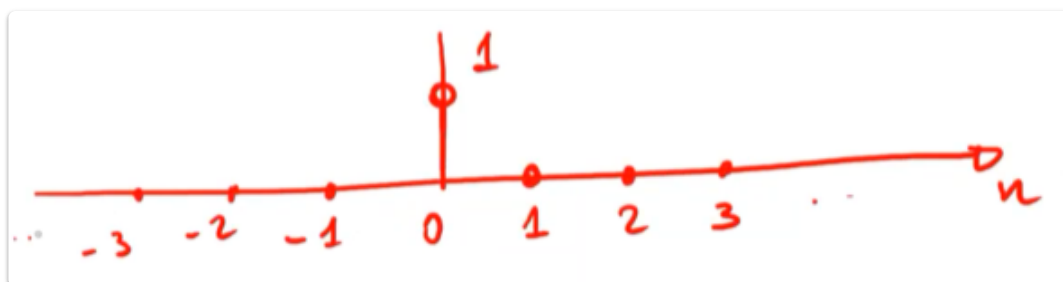
✓ Dispari

TRASFORMATE DI SEQUENZE FONDAMENTALI (parte1)

IMPULSO DISCRETO UNITARIO

E' una **sequenza** che indichiamo così:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- Nonostante sia definita in modo semplice (a differenza della delta di Dirac che è una "astrazione matematica"), risulterà essere di fondamentale importanza.

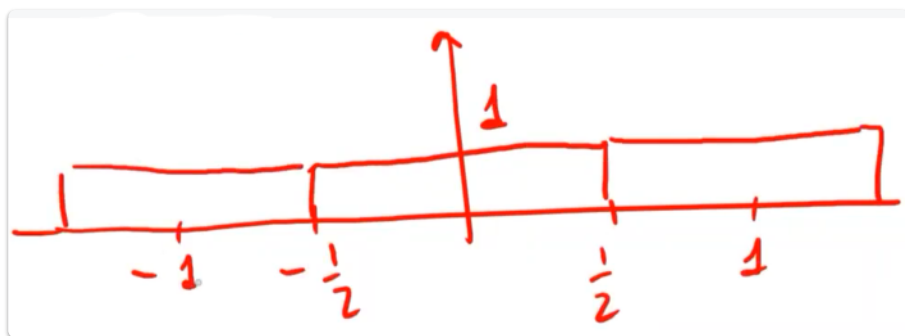
La sua **trasformata** è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi F n} \\ &= \delta[0] e^{-j2\pi F \cdot 0} \\ &= 1 \cdot e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1$$

Vale quindi 1 nel periodo $-\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$ poi però si **ripete**, in questo modo:



SEQUENZA COSTANTE $x[n] = 1$



- Questa sequenza non soddisfa la condizione sufficiente che abbiamo visto per la convergenza, dato che **non vale**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Cioè la sequenza non è assolutamente sommabile

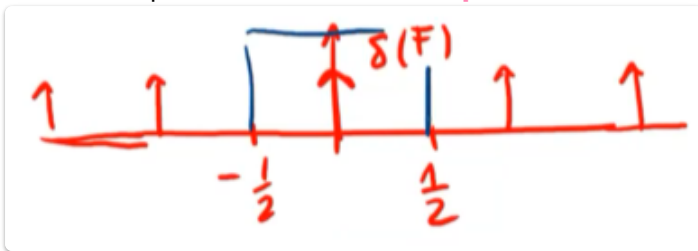
Tuttavia è comunque possibile trovare la trasformata, che è la seguente:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \bar{X}(f) = \delta(F)$$

Ovvero in altre parole:

$$x[n] = 1 \longleftrightarrow \delta(F)$$

- Dato che è periodica, otteniamo un **pettine di Dirac** (in blu un singolo periodo):



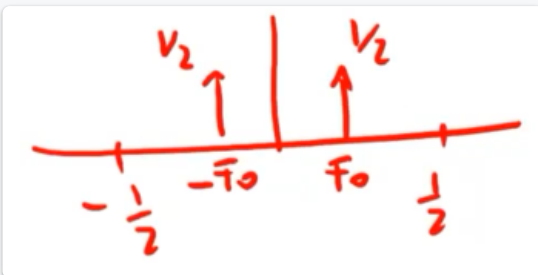
Abbiamo ottenuto quindi un risultato utile ma siamo stati **costretti** a introdurre delle **funzioni impulsive** (questo perché non è rispettata la condizione sufficiente).

Possiamo calcolare l'antitrasformata e poi confrontare il risultato con l'impulso discreto unitario:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \bar{X}(f) e^{j2\pi F n} dF = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(F) e^{j2\pi F n} dF \underset{\text{proprietà } \delta}{=} 1 \quad \forall n \text{ della sequenza}$$

Esempio: dimostriamo che $x[n] = \cos 2\pi F_0 n \longleftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]$

Supponendo $|F_0| < \frac{1}{2}$, ci aspettiamo il seguente spettro:



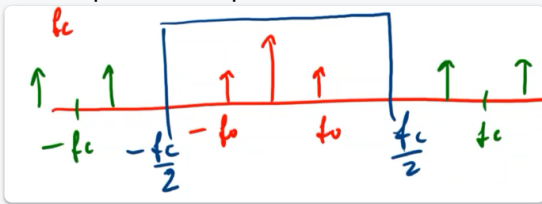
La trasformata inversa è:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\frac{1}{2} [\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]}_{\bar{X}(f)} e^{j2\pi F n} dF$$

Da cui, sfruttando le proprietà della δ e le formule di Eulero:

$$\frac{1}{2}(e^{j2\pi F_0 n} + e^{-j2\pi F_0 n}) = \cos 2\pi F_0 n \quad \checkmark$$

Ci potevamo aspettare questo risultato. Infatti la trasformata del coseno porta a due delta di Dirac: se campioniamo questo risultato, otteniamo una ripetizione di tali delte, in questo modo:



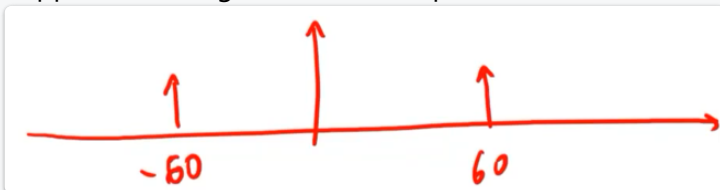
Un'altra trasformata notevole

In maniera duale, vale anche la seguente:

$$x[n] = \sin 2\pi F_0 n \longleftrightarrow \frac{1}{2j}[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)]$$

Esempio particolare: $x(t) = \cos 2\pi 60t$

Rappresentabile graficamente in questo modo:>



Scegliendo $f_c = 100\text{Hz}$, si ottiene il seguente spettro (frecche verdi):



Overo abbiamo ottenuto lo stesso spettro se avessi campionato il segnale $\cos 2\pi 40t$ alla stessa frequenza di campionamento f_c .

> Basta osservare che le due delta di Dirac sono posizionate in -40 e $+40$ nel periodo di riferimento (blu)

Questo è accaduto perché abbiamo "violato" le condizioni necessarie del Teorema del Campionamento: **infatti la frequenza di campionamento scelta non è superiore di due volte la banda del segnale, ovvero:**

$$\cancel{f_c = 2B}$$

Il segnale è cioè **affetto da aliasing**.

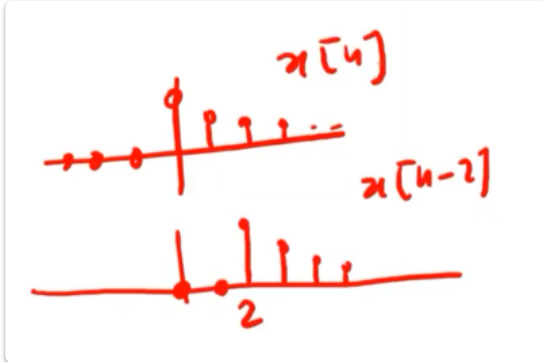
1) LINEARITA'

2) RITARDO

- Un ritardo nel tempo, introduce un **ritardo dei campioni**. Nella pratica questa operazione corrisponde a fare uno **shift** a destra o sinistra l'intera sequenza di un valore intero.

| Significa cioè eseguire il passaggio $x[n] \rightarrow x[n - n_0]$

Ad esempio, ponendo $n_0 = 2$ al segnale $x[n] = a^n \cdot u[n]$ si ottiene :



Si ottiene che:

$$\begin{aligned} x[n] &\longleftrightarrow \bar{X}(f) \\ x[n - n_0] &\longleftrightarrow e^{-j2\pi F n_0} \cdot \bar{X}(f) \end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] e^{-j2\pi F n}$$

- Ponendo $m = n - n_0$, si ottiene:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{j2\pi F(m+n_0)} = e^{-j2\pi F n_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi F m}}_{\bar{X}(f)}$$

| Traslare nel tempo quindi introduce **un termine esponenziale complesso in frequenza** (si altera solo lo spettro di fase, l'ampiezza rimane la stessa)

3) MODULAZIONE

Cosa si ottiene nel tempo quando si trasla in frequenza.

- E' perciò duale del teorema del ritardo.

$$\bar{X}(F - F_0) \longleftrightarrow x[n] e^{j2\pi F_0 n}$$

Nota: a sinistra abbiamo la situazione in frequenza per comodità di lettura e spiegazione del teorema

Dimostrazione:

$$\mathcal{F}\{x[n] e^{j2\pi F_0 n}\} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi F_0 n} \right) e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi (F - F_0) n} = \bar{X}(F - F_0)$$

4) CONIUGAZIONE

Sia

$$x[n] \longleftrightarrow \bar{X}(f)$$

Allora

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j2\pi F n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi F n} \right)^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi(-F)n} \right)^* = X^*(-F)$$

SIMMETRIA HERMITIANA

$$\begin{aligned} x[n] \text{ e' Reale} &\longrightarrow x[n] = x^*[n] \\ \text{Allora } \bar{X}(F) &= \left(\bar{X}(-F) \right)^* \end{aligned}$$

Ne deriva che:

$$|\bar{X}(F)| = |\bar{X}(-F)| \quad \text{il modulo ha } \mathbf{simmetria \text{ pari}}$$

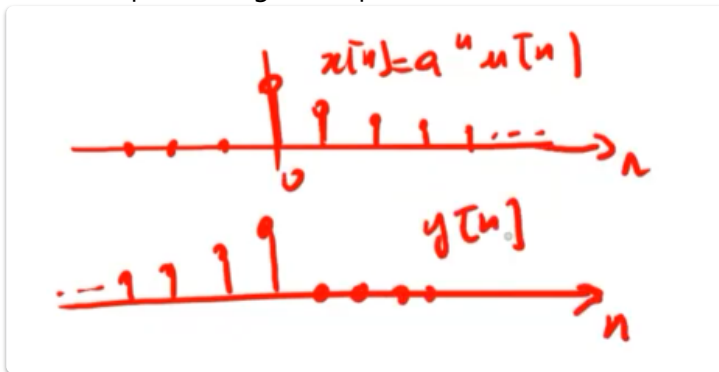
$$\angle \bar{X}(F) = \angle \bar{X}(-F) \quad \text{la fase ha } \mathbf{simmetria \text{ dispari}}$$

5) INVERSIONE TEMPORALE

Passaggio

$$x[n] \longrightarrow y[n] = x[-n]$$

Nell'esempio del segnale esponenziale, si ottiene:



Nel dominio di Fourier, invece:

$$\bar{Y}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j2\pi F n} \underset{m=-n}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{j2\pi F m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi(-F)m} = X(-F)$$

Pertanto, riassumendo:

$$\begin{aligned} x[n] &\longrightarrow y[n] = x[-n] \\ X[-F] &\longrightarrow Y[F] \end{aligned}$$

COROLLARIO

Si può dimostrare che con un ribaltamento nel tempo si ottiene coniugazione in frequenza

$$x[n] \text{ e' reale} \longrightarrow Y(F) = X^*(F)$$

6) CONVOLUZIONE

Siano $x[n]$ e $y[n]$ due sequenze

Si definisce la convoluzione tra le due, come:

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k]$$

Il teorema afferma che:

$$\boxed{\overline{W}(F) = \overline{X}(F) \overline{Y}(F)}$$

Dimostrazione:

$$\overline{W}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] e^{j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \right) \cdot e^{-j2\pi F n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi F n}}_{\overline{Y}(F) \cdot e^{-j2\pi F k}}$$

Si conclude quindi:

$$\overline{W}(F) = \overline{Y}(F) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi F k}}_{\overline{X}(F)} = \overline{Y}(F) \overline{X}(F), \quad \text{C.V.D.}$$

7) PRODOTTO

Duale rispetto al precedente:

Siano $x[n]$ e $y[n]$ due sequenze

Si definisce il prodotto tra le due, come:

$$w[n] = x[n] \cdot y[n]$$

Il teorema afferma che:

$$\boxed{\overline{W}(F) = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \cdot \overline{X}(F - \theta) d\theta}$$

Dimostrazione:

$$\overline{W}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n] y[n]}_{w[n]} e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\overline{Y}(\theta) e^{j2\pi \theta n}}_{\text{antitrasf.}} d\theta e^{-j2\pi F n}$$

Scambiando i due operatori lineari:

$$\overline{W}(F) = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi (F-\theta)n}}_{\overline{X}(F-\theta)} d\theta = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(\theta) \cdot \overline{X}(F - \theta) d\theta$$

Note: abbiamo ottenuto ancora una volta una convoluzione come nel caso tempo continuo, però qui non è più esteso da $-\infty$ a $+\infty$, ma è limitato in un periodo (nel caso di frequenze normalizzate da $-1/2$ a $1/2$).

8) PARSEVAL

Il teorema mostra la relazione tra una sequenza $x[n]$ e il coniugato di una sequenza complessa $y[n]$, in questo modo

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F) \overline{Y}^*(F) dF}$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}(F) \cdot e^{j2\pi F n} dF \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}^*(F) \cdot e^{-j2\pi F n} dF$$

Scambiando i due operatori:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \overline{Y}^*(F) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi F n}}_{\overline{X}(F)} dF = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F) \overline{Y}^*(F) dF \quad , \text{C.V.D.}$$

RELAZIONE DI PARSEVAL

Supponendo

$$y[n] = x[n]$$

e andando a sostituire nella relazione data dal teorema ($\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F) \overline{Y}^*(F) dF$), si ottiene la **Relazione di Parseval**:

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}_{\substack{\text{energia nel tempo} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \underbrace{x^*[n]}_{y^*[n]}}} = \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} |\overline{X}(F)|^2 dF}_{\substack{\text{energia dalla trasformata} \\ \int_{-1/2}^{1/2} \overline{X}(F) \underbrace{\overline{X}^*(F)}_{\overline{Y}^*(F)} dF}}$$

9) INCREMENTO (derivata)

Cerchiamo di trovare una alternativa al calcolo della derivata, che nel caso delle sequenze *non si può calcolare*.

Inoltre non è possibile nemmeno "avvicinare" i campioni tra loro perché la *distanza è stabilita dalla frequenza di campionamento*.

- La cosa che più si avvicina "al calcolo di una derivata" $\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)$ è la seguente:

$$\frac{x[n] - x[n-1]}{T}$$

- Questa relazione è descritta in modo riassuntivo dall'**operatore incremento**, che descrive la differenza tra due campioni adiacenti. È definito come segue:

$$\boxed{\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]}$$

Trasformata di $\Delta x[n]$.

$$\mathcal{F}\{\Delta x[n]\} = \overline{X}(F) - \underbrace{\overline{X}(F) e^{-j2\pi F}}_{\text{teo ritardo}} = \overline{X}(F) \cdot (1 - e^{-j2\pi F})$$

Riassumendo:

$$\boxed{\Delta x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(F) \cdot (1 - e^{-j2\pi F})}$$

10) SEQUENZA SOMMA (integrale)

Sappiamo dall'analisi nel tempo che:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha = x(t) * u(t)$$

Ancora una volta, non riusciamo a definire nel modo "classico" un integrale per una sequenza, però posso trovare un parallelo definendo una **sequenza somma**, in questo modo:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]}$$

🔗 **Trasformata di $\Delta y[n]$.**

$$\Delta y[n] = y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \underbrace{\quad}_{\text{un termine}} = x[n]$$

Facendo la trasformata a destra e sinistra si ottiene:

$$\bar{Y}(F) (1 - e^{-j2\pi F}) = \bar{X}(F)$$

Da cui:

$$\bar{Y}(F) = \frac{\bar{X}(F)}{1 - e^{-j2\pi F}}$$

NOTA BENE: questa relazione **vale soltanto se**, per $F = 0$ allora $\bar{X}(F) = 0$, ovvero:

$$\bar{X}(F)|_{F=0} = 0$$

(infatti per $F = 0$ il termine $\bar{Y}(F) (1 - e^{-j2\pi F}) = \bar{X}(F)$ vale sempre 0).

La condizione è quindi verificata se:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi F n} \Big|_{F=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$$

Vale quindi se la media dei campioni vale 0 (cfr. con teorema integrazione tempo continuo).

Riassumendo:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{\bar{X}(F)}{1 - e^{-j2\pi F}}} \quad \text{se } \bar{X}(F) = 0 \text{ per } F = 0$$

TRASFORMATE DI SEQUENZE FONDAMENTALI (parte2)

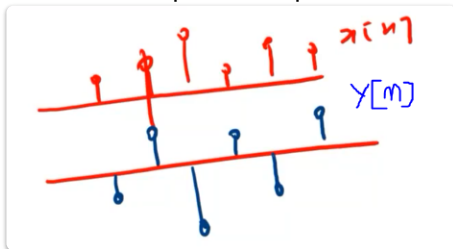
SEQUENZA "DISPARI"

Sia $x[n] \longleftrightarrow \bar{X}(F)$

Definiamo

$$y[n] = (-1)^n x[n]$$

Ovvero la sequenza di partenza con ribaltamento dei campioni in posizione dispari:



La **trasformata** è la seguente:

$$\bar{Y}(F) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-j2\pi F n} \right]$$

Osservando che $-1 = e^{j\pi}$, posso riscrivere $\bar{Y}(F)$ come:

$$\bar{Y}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi n} x[n] e^{-j2\pi F n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi (F - \frac{1}{2}) n}}_{\bar{X}(F - \frac{1}{2})}$$

Possiamo quindi affermare che **moltiplicare per $(-1)^n$ equivale a eseguire una traslazione di $\frac{1}{2}$ in frequenza della $\bar{X}(F)$ di partenza.**

Esempio

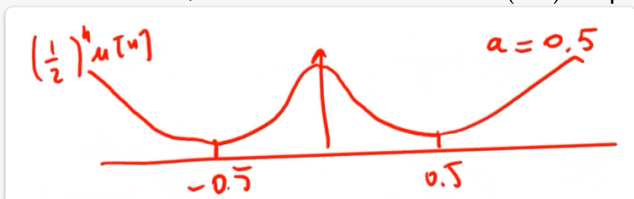
Per quanto visto in precedenza sappiamo che:

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi F}}$$

Quindi applicando quanto visto:

$$(-1)^n a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi (F - \frac{1}{2})}} = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi F} \cdot \underbrace{e^{j2\pi \frac{1}{2}}}_{-1}} = \frac{1}{1 + a e^{j2\pi F}}$$

. Graficamente, ricordando che senza il $(-1)^n$ e per $a = 0.5$ otteniamo:



Si mostra facilmente che introducendo il termine $(-1)^n$ cioè ritardando lo spettro si arriva al

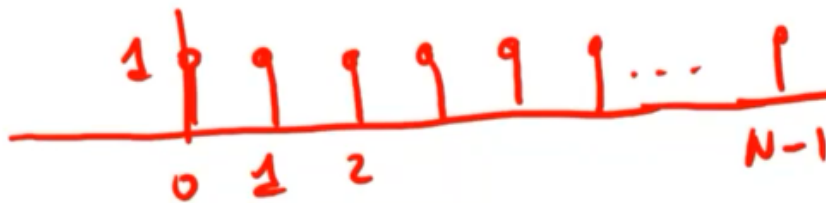
seguente risultato:



Ricordiamoci che è periodico!!

FINESTRA RETTANGOLARE (rect)

L'equivalente tempo discreto di un rettangolo è una **finestra rettangolare** ed è così rappresentabile:



Matematicamente: $x[n] = u[n] - u[n - N]$, ovvero

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trasformata $\bar{X}(F)$

$$\bar{X}(F) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{(e^{-j2\pi F})^n}_q = \sum_{n=0}^{N-1} q^n$$

Siamo arrivati a una serie **geometrica troncata**, di ragione q :

il fatto che sia **troncata** ci garantisce che la serie **converge** (infatti è una sommatoria di un numero **finito** di termini)

Il risultato è noto dall'analisi matematica ed è il seguente (valido $\forall q$):

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

Applicando questo risultato con $q = e^{-j2\pi F n}$, otteniamo:

$$\bar{X}(F) = \frac{1 - e^{-j2\pi F N}}{1 - e^{-j2\pi F}} \underbrace{=}_{\text{raccolgo meta' fase}} \frac{e^{-j\pi F N} (e^{j\pi F N} - e^{-j2\pi F N})}{e^{-j\pi F} (e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})}$$

Da cui ci si riconduce alla formula di Eulero del seno moltiplicando sopra e sotto per $2j$:

$$\bar{X}(F) = [\dots] = e^{-j2\pi F (\frac{N-1}{2})} \cdot \frac{\sin(\pi F N)}{\sin(\pi F)}$$

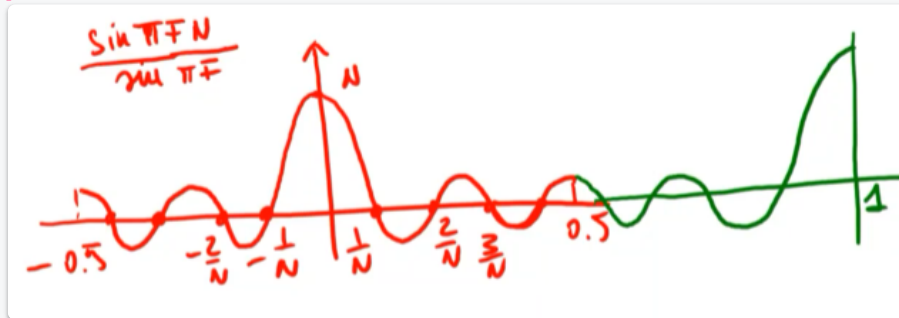
Dove è stato fatto comparire $\frac{N-1}{2}$ che è il *centro di simmetria di un rettangolo*

Riassumendo:

$$u[n] - u[n - N] \longleftrightarrow e^{-j2\pi F(\frac{N-1}{2})} \cdot \frac{\sin(\pi F n)}{\sin(\pi F)}$$

Graficamente:

Lo spettro di *ampiezza* è simile a un sinc ("*similsinc*"), ma la principale differenza è che è *periodico*:



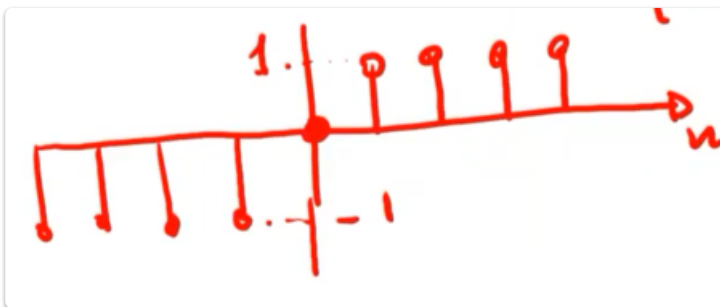
Lo spettro di *fase* invece è una *retta* con pendenza $2\pi \cdot \frac{N-1}{2}$ (più campioni di prende, più la retta ha pendenza maggiore). Anch'essa è evidentemente *periodica*:



SEGNO

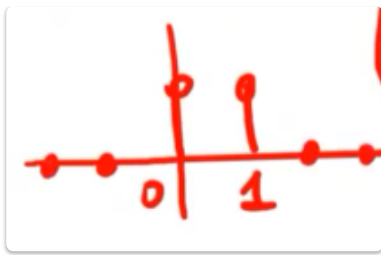
Sia:

$$x[n] = \text{sgn}[n] = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



Definiamo:

$$y[n] = \overbrace{\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]}^{\diamond} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 0 & n \geq 2 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \end{cases} \quad \underset{\text{dal grafico}}{=} \overbrace{\delta[n] + \delta[n-1]}^{\clubsuit}$$



- Abbiamo due impulsi discreti unitari (uno centrato in 0 e uno centrato in 1).

Eseguendo la **trasformata** di entrambe le notazioni sopra descritte si ottiene:

$$\diamond \longleftrightarrow \bar{Y}(F) = \bar{X}(F)(1 - e^{-j2\pi F})$$

$$\spadesuit \longleftrightarrow \bar{Y}(F) = 1 + e^{-j2\pi F}$$

Deve valere quindi la relazione:

$$\boxed{\bar{X}(F)(1 - e^{-j2\pi F}) = 1 + e^{-j2\pi F}}$$

Pertanto,

$$\mathcal{F}\{sgn(n)\} = \bar{X}(F) = \frac{1 + e^{-j2\pi F}}{1 - e^{-j2\pi F}}$$

Ovvero:

$$\boxed{sgn[n] \longleftrightarrow \frac{1 + e^{-j2\pi F}}{1 - e^{-j2\pi F}}}$$

GRADINO

Dalla trasformata della sequenza segno appena dimostrata, si passa facilmente a trovare la trasformata del **gradino**, infatti sappiamo che:

$$u[n] = \frac{1}{2}sgn[n] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

- ovvero si ottiene moltiplicando la sequenza segno per $\frac{1}{2}$ e si aggiunge quindi un termine di ritardo $1/2$ per ottenere il gradino **unitario**. Infine sommiamo ancora $\frac{1}{2}\delta[n]$ per "correggere" come vogliamo il termine in 0.

Trasformata del gradino

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{sgn[n]\} + \frac{1}{2}\delta(F) + \frac{1}{2}$$

Dove per **linearità** è stata fatta la trasformata dei termini "facili" da vedere.

Dalla relazione precedente conosciamo anche la trasformata della sequenza segno. Si può quindi concludere e riassumere in questo modo (facendo un po' di raccoglimenti e semplificazioni):

$$\boxed{u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j2\pi F}} + \frac{1}{2}\delta(F)}$$

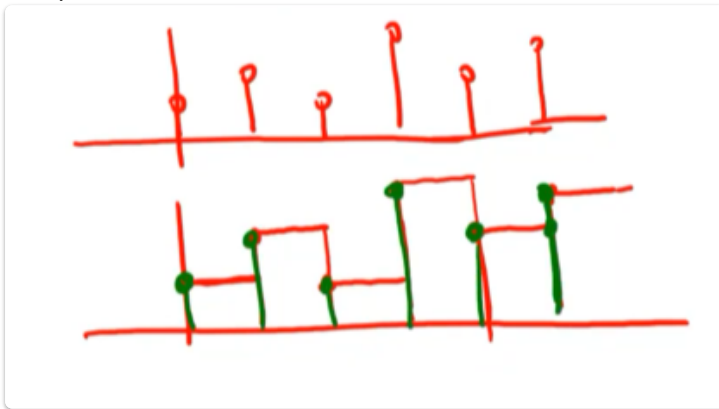
Nota bene: la trasformata include anche una funzione generalizzata ($\delta(F)$), come ci si aspettava dato che la funzione gradino "non va a zero".

INTERPOLAZIONE A MANTENIMENTO

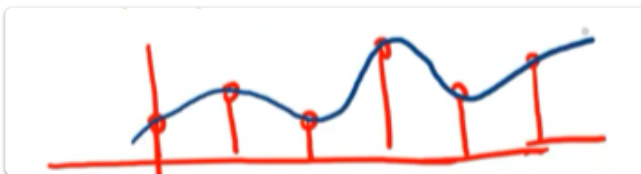
Precedentemente abbiamo visto l'*interpolazione cardinale* come primo modo di **ricostruire il segnale** a partire dai campioni. Esso era denominato $x_c(t)$ *però* presentava due problemi principali nell'utilizzo pratico, ovvero l'utilizzo della δ e del filtro H_{LP} ideale (cfr. Appunti vecchi e schema riassuntivo Lezione 5 maggio 1h e 11m circa).

Nell'utilizzo pratico si sceglie perciò un modo alternativo: **l'interpolazione a mantenimento**.

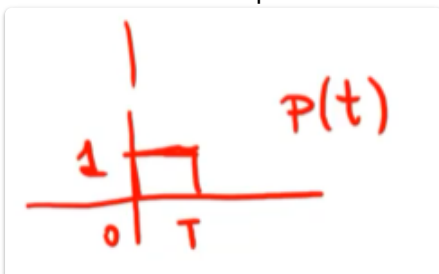
- La sequenza di partenza viene "unita", utilizzando delle funzioni *costanti a tratti*, viene cioè mantenuto il campione per tutta la durata del passo di campionamento
 - Si effettua in questo modo un **passaggio dal mondo discreto (digitale) al mondo continuo (analogico)**
 - Graficamente si formano tanti rettangoli attaccati tra loro (di altezza diversa a seconda del campione)



Potenzialmente, il segnale ricostruito potrebbe essere diverso da quello analogico di origine, che magari era fatto così:



- Passare dalla forma d'onda *costante a tratti* a quella *di partenza* è però in qualche modo possibile, ma è necessario definire un **modello** (matematico) della forma d'onda costante a tratti. Introduciamo quindi la **funzione rettangolare** $p(t)$ che descrive il mantenimento (costante) della funzione da un campione fino al successivo:



Ovvero:

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Possiamo quindi definire il segnale continuo ricostruito "a rettangoli" reiterando $p(t)$ per tutta la durata del segnale. Si ottiene quindi:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot p(t - nt)$$

“ Nota

Il segnale $x_c(t)$ era così definito:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \underbrace{\delta(t - nt)}$$

Questa espressione risulta simile a quella trovata adesso ($\hat{x}(t)$), con la differenza che in una si usa l'impulso della δ e nell'altra invece si costruisce un rettangolo.

Quello che cambia è lo spettro, come vediamo adesso...

🔗 Trasformata di $\hat{x}(t)$

Calcoliamo:

$$\hat{X}(F) \underbrace{=}_{\text{tempo continuo}} \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot p(t - nt)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \underbrace{\mathcal{F}\{p(t - nt)\}}_{\text{teo ritardo}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \underbrace{P(f)}_{\mathcal{F}\{p(t)\}} \cdot e^{-j2\pi f n T}$$

Da cui:

$$\hat{X}(f) = P(f) \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T}}_{\bar{X}(F)}$$

Abbiamo quindi ottenuto una trasformata *simile* a quella vista utilizzando la δ (ovvero $\bar{X}(F)$)... **La differenza sostanziale nell'aver utilizzato il rettangolo sta nella comparsa del fattore $P(f)$ a moltiplicare.** Riassumendo:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot p(t - nt) \longleftrightarrow P(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T} = \hat{X}(f)$$

🔗 Trasformata di $p(t)$

Essendo $p(t)$ segnale rettangolare traslato, ovvero: $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$, possiamo calcolare facilmente la sua trasformata:

$$P(f) = T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

Riassumendo:

$$\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \longleftrightarrow T \cdot \text{sinc}(ft) \cdot e^{-j2\pi F \frac{T}{2}}$$

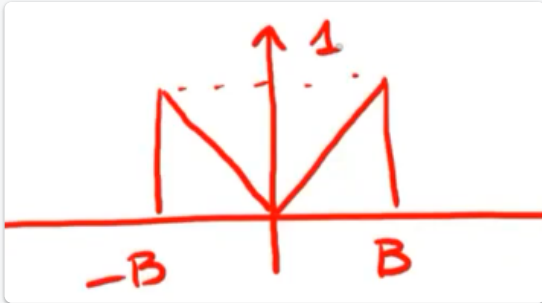
Dall'ultimo risultato ottenuto, si arriva a dire che:

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= \underbrace{\overline{X}(F)} \cdot T \cdot \text{sinc}(fT) e^{-j\pi FT} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) \cdot T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi FT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi FT}\end{aligned}$$

Questa relazione ci permetterà di modellare il segnale interpolato con mantenimento rispetto al caso ideale.

Esempio

Prendiamo il seguente segnale a banda limitata:



Tale che il suo spettro sia:

$$\overline{X}(F) = \frac{|f|}{B} \cdot \frac{1}{2B} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

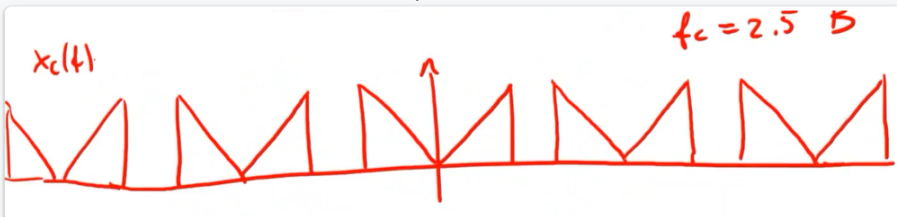
Andiamo a utilizzare una **frequenza di campionamento superiore rispetto a quella di Nyquist**, in particolare **maggiore del doppio della banda B** così da evitare il problema dell'utilizzare un filtro ideale per la ricostruzione. Scegliamo quindi per esempio

$$f_c = 2.5 B$$

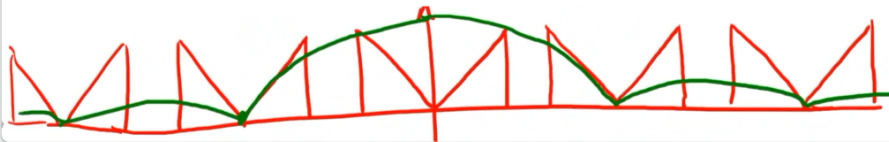
La formula che dobbiamo utilizzare è la seguente:

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi FT}$$

Utilizzando solo la prima parte della formula otterremmo il seguente andamento periodico (ovvero ciò che si ottiene utilizzando le δ):

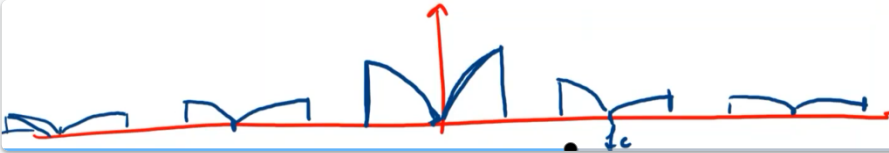


Dobbiamo moltiplicare tutto ciò per la funzione *sinc* (in verde):

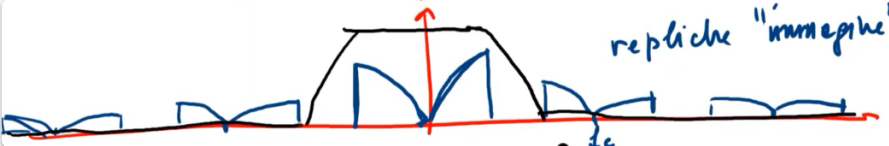


Eseguendo questo prodotto

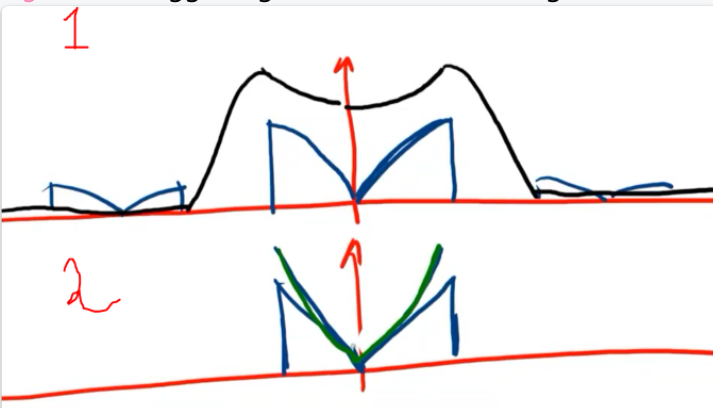
otteniamo il segnale ricostruito con interpolazione a mantenimento:



Come si nota, si sono formate delle **repliche immagini** costituite da triangoli sempre più piccoli, ma pur sempre presenti. Per eliminarle, è sufficiente utilizzare un filtro passa basso (reale perché abbiamo $f_c \geq 2B$) in questo modo (parte nera):



Inoltre, il segnale appare "**smussato**" a causa della funzione *sinc*. Per risolvere il problema esistono principalmente due modi: **1)** si utilizza un **filtro analogico** che oltre a rimuovere le repliche immagini, ha un guadagno apposito (che somiglia all'inverso della funzione *sinc* nell'intervallo desiderato, detto **shaping su banda passante**); **2)** Si **altera lo spettro del segnale campionato in modo digitale** (filtraggio digitale invece che analogico)



PROCESSO ALEATORIO TEMPO DISCRETO

Esiste un parallelo forte tra il mondo continuo e quello discreto anche parlando di processi aleatori. Sappiamo infatti un segnale $x(t)$ è un processo aleatorio se tutti i valori per ogni istante t sono variabili aleatorie, ovvero:

$$x(t) \longrightarrow x(t) \text{ v.a.}$$

Analogamente, nel tempo discreto, **la sequenza $x[n]$ è un processo aleatorio se le quantità relative ai campioni $x[n]$ sono variabili aleatorie**, ordinate naturalmente dall'indice dei campioni n (variabile temporale):

$$x[n] \longrightarrow x[n] \text{ v.a.}$$

FORMULE UTILI

Possiamo quindi definire come nel caso tempo continuo:

- **Densità di probabilità (pdf)** di $x[n]$:

$$p_{X[n]}(x)$$

- **Distribuzione di probabilità (PDF)**:

$$P_{X[n]}(x)$$

- **Media**:

$$m_{X[n]} = E[x[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X[n]}(x) dx$$

- **Potenza**:

$$P_{X[n]} = E[x^2[n]]$$

- **Varianza**:

$$\sigma_{x[n]}^2 = E[(x[n] - m_{X[n]})^2] = P_{X[n]} - (m_{X[n]})^2$$

Densità di probabilità congiunte e indici del secondo ordine

Vogliamo mettere in relazione i valori di due campioni: il primo all'istante n e il secondo all'istante $n + m$, ovvero ci chiediamo:

$$x[n] \overset{?}{\longleftrightarrow} x[n + m]$$

Per gestire questi due campioni in modo congiunto, definiamo una **densità di probabilità** in questo modo:

$$p_{x[n], x[n+m]}(x, y)$$

Da cui posso ottenere degli **indici statistici** del secondo ordine.

- L'indice più importante è la **funzione di autocorrelazione**:

$$R_{XX} = E[x[n] \cdot x[n+m]] = \iint_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot \underbrace{p_{x[n], x[n+m]}(x, y)}_{\text{pdf congiunta}} dx dy$$

(vedi anche: *covarianza*, stazionarietà senso forte...)

PROCESSO WSS: Stazionarietà in senso Lato

Un processo tempo discreto è *WSS* se valgono entrambe:

$$\begin{cases} E[x[n]] = m_X = \text{costante non dipendente dal tempo} \\ R_{XX}[n, n+m] = E[x[n] \cdot x[n+m]] = \underbrace{R_{XX}[m]}_{\text{in funzione solo di } m} \end{cases}$$

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Nel tempo continuo il passaggio da tempo a frequenza era così eseguito (S_{XX} = densità spettrale di potenza):

$$R_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{XX}(f)$$

Nel caso tempo discreto, si ottiene ancora la densità spettrale di potenza attraverso la trasformata. Stavolta però dovremo utilizzare la *trasformata per sequenze*:

$$R_{XX}[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}\{R_{XX}[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}[m] e^{-j2\pi F m} = \boxed{\overline{S_{XX}(F)}}$$

AUTOCORRELAZIONE DI UN SEGNALE

Invertendo la relazione appena ottenuta si ottiene la formula per l'autocorrelazione:

$$R_{XX}[m] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}(F)} e^{j2\pi F m} dF$$

CASO $M=0$

Ponendo $m=0$ si ottiene:

$$R_{XX}[m]|_{m=0} = E[x[n] x[n+m]]|_{m=0} = E[x^2[n]] = \underbrace{P_X}_{\text{Potenza di } X}$$

Nota: per la stazionarietà assumiamo la potenza appena ricavata *costante*.

Analogamente:

$$R_{XX}[m]|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}(F)} e^{j2\pi F m} dF|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}(F)} dF$$

Ovvero si ottiene:

$$\boxed{P_X = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}(F)} dF}$$

RELAZIONI TRA LE AUTOCORRELAZIONI

Ci chiediamo quale sia la relazione tra le funzioni di autocorrelazione tempo continuo e tempo discreto, supponendo che i segnali di partenza siano collegati tra loro dal campionamento.

In altre parole, sappiamo che nel tempo continuo esiste questa relazione:

$$x(t) \rightarrow R_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{XX}(f)$$

Nel mondo tempo discreto se eseguiamo il campionamento di $x(t)$ si ottiene:

$$x(nT) = x[n] \rightarrow \underbrace{R_{XX}[m]}_{\star}$$

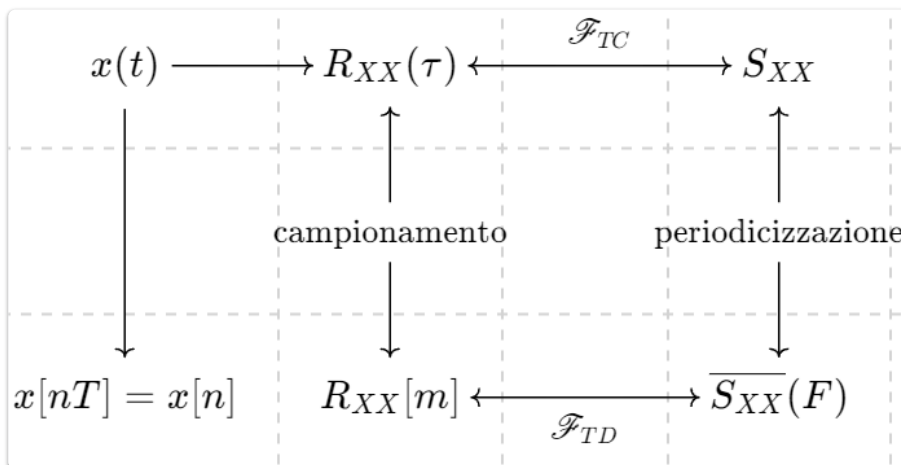
Con

$$\underbrace{R_{XX}}_{\text{t. discreto}} = \star = E[x[n] x[n+m]] = E[x(nT) \cdot x((n+m)T)] = \underbrace{R_{XX}(nT, nT+mT)}_{\text{t. continuo}} = R_{XX}(mT) = R_{XX}(\tau)|_{\tau=mT}$$

- *Ovvero l'autocorrelazione dei campioni del segnale è un campionamento dell'autocorrelazione tempo continuo*
 - In altre parole se abbiamo un campionamento tra il processo tempo continuo e quello tempo discreto, allora abbiamo lo stesso campionamento tra le due funzioni di autocorrelazione (tempo discreto e tempo continuo).

Infine, la **densità spettrale** che si ottiene in tempo discreto, è la *periodicizzazione* della densità spettrale tempo continuo.

Riassumendo schematicamente:



(cfr. Spiegazione - Lezione 5 maggio 2:20 circa)

QUANTIZZAZIONE

In generale, sappiamo che nel processo di *campionamento*, si esegue il passaggio:

$$x(t) \longrightarrow x(nT) \in \mathbf{R}$$

Dato che "ogni campione è un numero reale", ha bisogno di un numero infinito di cifre per essere memorizzato. Pertanto si cerca di **approssimare** questi valori con delle quantità appartenenti a un **alfabeto discreto**. Si cerca cioè di approssimare ogni campione con uno dei possibili livelli (il più vicino) descritti dal range di valori che ho a disposizione nell'alfabeto discreto.

Il valore che subisce questa alterazione viene denominato **quantizzato**, e quindi il processo diventa il seguente:

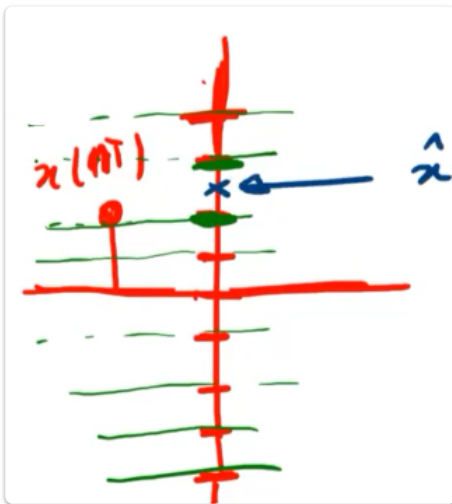
$$x(t) \longrightarrow \underbrace{x(nT)}_{\in \mathbf{R}} \longrightarrow \underbrace{\hat{x}(nT)}_{\substack{\# \text{ finito di cifre} \\ \text{(cifre binarie)}}$$

L'errore che si commette quantizzando un campione è **irreversibile**. Non si può infatti "tornare indietro" all'esatto valore di partenza.

Matematicamente si può esprimere in questo modo:

$$e(nt) = \hat{x}(nt) - x(nt)$$

- Viene per questo chiamata **rappresentazione Lossy** ovvero *con perdita*.
- L'errore commesso è modellabile (e rappresentabile) in generale come una **variabile aleatoria**



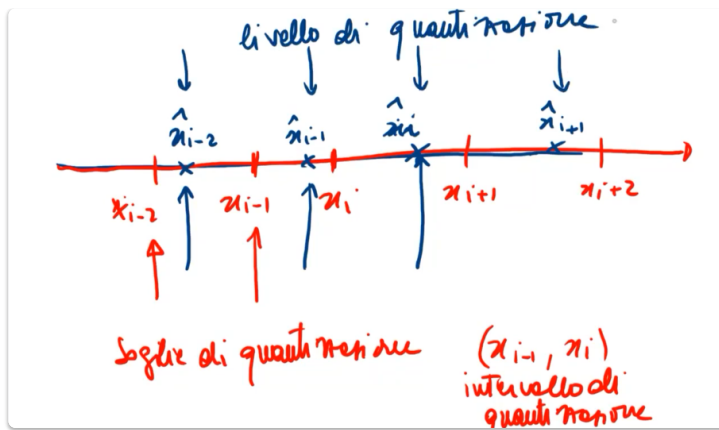
Si passa quindi da un valore $x(nT)$ a $\hat{x}(nT)$ **valore quantizzato**, ovvero:

$$x(nT) \longrightarrow \hat{x}(nT)$$

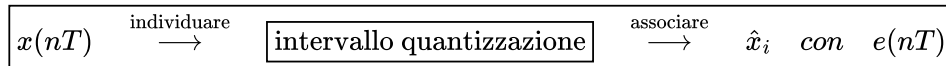
Nota: *NON si può effettuare il passaggio inverso, perché non c'è una correlazione 1 : 1 ma è piuttosto una correlazione molti : 1, perciò*

$$x(nT) \nrightarrow \hat{x}(nT)$$

La quantizzazione viene quindi effettuata utilizzando **degli intervalli e delle soglie di quantizzazione** (in rosso), e all'interno di ognuno selezioniamo un unico **livello di quantizzazione** (in blu) che sarà il riferimento associativo per tutti i campioni che cadono all'interno del relativo intervallo.



Quantizzare un segnale significa quindi eseguire il passaggio:



Da notare che come detto abbiamo **un solo** $\hat{x}(t)$ per ogni intervallo di quantizzazione, perciò è importante scegliere le soglie e i livelli di quantizzazione per minimizzare l'errore a seconda del segnale d'ingresso.

- Un algoritmo che ci aiuta in questi casi (per ridurre l'errore) è l'**algoritmo di Max-Lloyd** che produce livelli e soglie ottime in relazione alla densità di probabilità dei campioni t.c. la potenza dell'errore sia minima:

$$p_{x(nT)}(x) \rightarrow x_i, \hat{x}_i \quad \text{t.c. } E[e^{2(nT)}] \text{ sia minima}$$

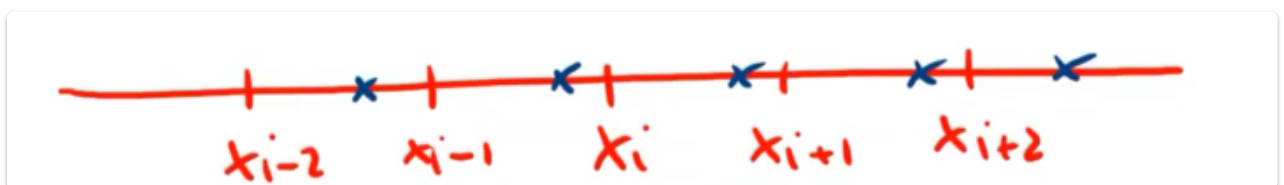
- Nota negativa: non facile calcolare intervalli e soglie ottime

QUANTIZZATORE UNIFORME

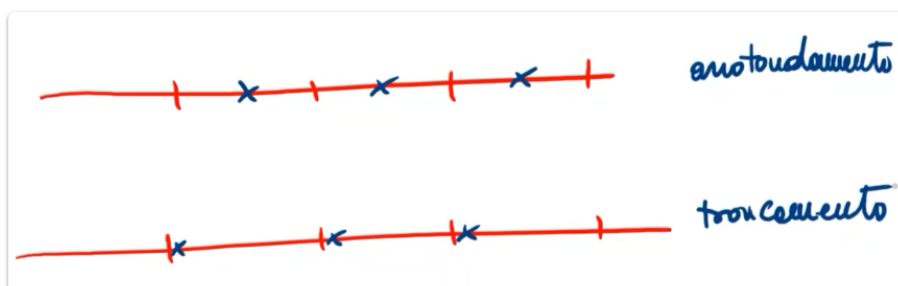
È un quantizzatore ben più semplice rispetto a quanto descritto dall'algoritmo di Max-Lloyd

- Si scelgono **soglie e livelli di quantizzazione equispaziati**
- Pertanto,

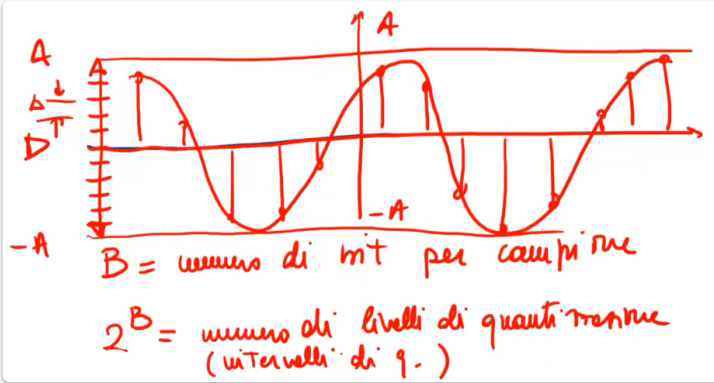
$$\begin{cases} x_i - x_{i-1} = \Delta \\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1} = \Delta \end{cases} \quad \text{con } \Delta = \text{costante} = \text{passo di quantizzazione}$$



(generalmente in realtà sceglieremo i livelli di quantizzazione al centro dell'intervallo (**arrotondamento**) oppure coincidenti con l'estremo sinistro (**troncamento**))



Segnale Sinusoidale



Supponendo la coincidenza [Dinamica - Passo di quantizzazione]:

$$\Delta = \frac{D}{2^B}$$