ANALISI MODALE

Ricordiamo che per un sistema LTI TC abbiamo trovato che esiste la seguente corrispondenza tra dominio del tempo e Laplace:

$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$\updownarrow$$

$$e^{At} \longleftrightarrow (sI-A)^{-1}$$

Questo ci ha portato a trovare l'evoluzione libera:

$$x_\ell = e^{At}x_0 = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

- da cui si può capire i modi di evoluzione del sistema
- dove abbiamo notato che $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)}Adj(sI-A)$
  - Ovvero l'inversa è un rapporto di polinomi tale che grado numeratore minore del grado del denominatore (strettamente propria)

POLINOMIO CARATTERISTICO

Il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ può essere riscritto individuando i suoi zeri, che sono gli **autovalori** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ **con molteplicità** $\mu_1, \ldots, \mu_2$, e fattorizzando:

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{k}(s-\lambda_i)^{\mu_i}$$

- Pertanto, *gli autovalori del polinomio caratteristico sono i poli della matrice inversa*, infatti: $(sI-A)^{-1} = \frac{Adj(sI-A)}{\varphi(s)}$
- Quindi gli autovalori determinano l'evoluzione nel tempo dell'esponenziale di matrice e^{At}

> *Primo esempio: Calcolo esponenziale di matrice*
>
> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad e^{At} = ?$ $\quad n = 2$
>
> $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} Adj(sI-A)$
>
> $\varphi(s) = \det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)$
>
> $\lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = -1$
>
> $\mu_1 = 1$ $\quad \mu_2 = 1$
>
> $Adj(sI-A) = Adj \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$
>
> $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$
>
> $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$
>
> modi di evoluzione (naturali) $\quad e^{t}$ associato a λ_1, $\quad e^{-t}$ associato a λ_2
>
> *i modi di evoluzione sono associati agli autovalori*

ESEMPIO 2

- calcolo $\varphi(s)$
- trovo gli zeri (autovalori)
- calcolo l'inversa $(sI-A)^{-1}$
- antitrasformo per trovare l'esponenziale di matrice e^{At}
- interpreto i modi di evoluzione e li classifico se serve (divervente, convergente etc...)
  - la molteplicità determina il modo di evoluzione

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\varphi(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s&-1\\0&s\end{bmatrix}=s^2 \qquad \varphi(s)=0 \iff s=0$$

$$\lambda_1=0 \qquad \mu_1=2$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\varphi(s)}\operatorname{Adj}(sI-A)=\frac{1}{s^2}\operatorname{Adj}\begin{bmatrix}s&-1\\0&s\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s&1\\0&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s^2}\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

$$t\geq 0 \qquad e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\begin{bmatrix}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}&\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}\\0&\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$$

modi naturali 1, t

limitato non oscillante — divergente non oscillante

ESEMPIO 3: STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO MA DIVERSA MATRICE

- $\varphi(s)$ viene come nell'esempio precedente
- cambia però l'evoluzione nel tempo (basta calcolare $(sI-A)^{-1}$)
- in origine avevo una molteplicità 2 ma facendo l'inversa la **molteplicità si abbassa** e diventa 1.

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\varphi(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}=s^2$$

$$\lambda_1=0 \qquad \mu_1=2$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\varphi(s)}\operatorname{Adj}(sI-A)=\frac{1}{s^2}\operatorname{Adj}\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&0\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

$$t\geq 0 \qquad e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\begin{bmatrix}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}&0\\0&\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

modo di evoluzione $1(t)$ limitato non oscillante

- Un solo modo di evoluzione in questo caso: il gradino

POLINOMIO MINIMO

- Polinomio che rimane dopo le semplificazioni, per trovarlo si calcola:

a. si calcolano $\operatorname{Adj}(sI-A)$ e $\varphi(s)$
b. si calcola $(sI-A)^{-1}=\operatorname{Adj}(sI-A)/\varphi(s)$ effettuando tutte le semplificazioni
c. si calcola $m(s)$ come **minimo comune multiplo** dei **denominatori** degli elementi di $(sI-A)^{-1}$

ESEMPIO (PRECEDENTE)

$m(s)$ m.c.m. dei denominatori degli elementi di $(sI-A)^{-1}$
(dopo le semplificazioni)

$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $\varphi(s)=s^2$ $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s^2}\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix}$

denominatori s, s, s^2 $\Rightarrow$ $m(s)=s^2$

$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\varphi(s)=s^2$ $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&0\\0&\frac{1}{s}\end{bmatrix}$

denominatori s, s $\Rightarrow$ $m(s)=s$

- ci aiuta a capire la molteplicità di ciascun autovalore e pertanto, *essendo gli autovalori dei poli del polinomio caratteristico possiamo applicare quanto visto in precedenza per capire i modi di evoluzione*
- Nell'esempio: la prima matrice ha **due modi di evoluzione**: 1 e t
  - La seconda matrice ha **un solo modo**: 1

In generale quindi, **il polinomio minimo è un sottoinsieme del polinomio caratteristico**, ovvero:

$$\varphi(s)=(s-\lambda_1)^{\mu_1}(s-\lambda_2)^{\mu_2}\dots(s-\lambda_k)^{\mu_k} \quad , \quad m(s)=(s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2}\dots(s-\lambda_k)^{m_k}$$

$$\text{Con } \boxed{m_i\leq\mu_i} \quad , \quad m_1\geq 1$$

- ciascun autovalore non può sparire come polo, ma la sua molteplicità può abbassarsi fino a scomparire (e al massimo se non si semplifica è pari alla molteplicità algebrica μ_i)

> **DIMOSTRAZIONE DEL PERCHE' CIASCUN AUTOVALORE NON PUO' SPARIRE**
>
> - $m_i\leq\mu_i$ vale perché semplificando non posso aumentare la molteplicità!
> - Per dimostrare $m_i\geq 1$ $\Rightarrow$ è sufficiente far vedere che gli autovalori di A **non** possono sparire completamente come poli di $(sI-A)^{-1}$
> - Ricordiamo che per ogni **autovalore** λ_i esiste almeno un **autovettore** v_i tale che
>
> $$\boxed{A\,v_i=\lambda_i\,v_i}$$
>
> - Di conseguenza, cambiando segno e aggiungendo ad ambo i membri $s\,v_i$,
>
> $$\begin{aligned} \overset{sI\,v_i}{s\,v_i-A\,v_i} &= s\,v_i-\lambda_i\,v_i \\ &\Downarrow \\ (s\,I-A)v_i &= (s-\lambda_i)v_i \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{s-\lambda_i}v_i &= (s\,I-A)^{-1}v_i \end{aligned}$$
>
> $\frac{1}{(s-\lambda_i)}(sI-A)^{-1}$
>
> - Di conseguenza, $s-\lambda_i$ deve comparire al denominatore di **almeno uno** degli elementi di $(s\,I-A)^{-1}$
>
> Rimane alla fine un λ_i (polo con molteplicità almeno 1)

MODI NATURALI

- La matrice inversa $(sI - A)^{-1}$ ha come poli gli autovalori del sistema

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} Adj(sI-A)$$

con le molteplicità

$$m_1, \ldots, m_k$$

$$\boxed{m(s) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{m_k}}$$

- Ricordiamo che per per l'evoluzione libera vale Ricordando ora che per la risposta libera vale

$$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}x(0)$$

$$\Downarrow$$

Teorema 2.2 e^{At} è una matrice avente come elementi opportune **combinazioni lineari** di

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m_i-1}e^{\lambda_i t}$$

per $i = 1, \ldots, k$.
Tale segnali sono detti **modi naturali del sistema**.

- Di conseguenza $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$ e $y_\ell(t) = C\,e^{At}x(0)$ evolvono secondo una opportuna **combinazione dei modi naturali** del sistema (al variare delle **condizioni iniziali**)

- Analogamente a quanto visto in precedenza solo che adesso teniamo conto del polinomio minimo $m(s)$
- Gli elementi della matrice esponenziale sono una combinazione lineare dei modi di evoluzione del sistema