ESERCIZI: STUDIO STABILITA' ESTERNA

0)

- Controllo se la condizione necessaria è soddisfatta
- Se non lo è, costruisco la tabella (essendo grado 3)
- Applico il criterio di stabilità
  - Se gli elementi della prima colonna sono tutti di segno concorde (e diversi da zero), allora hanno tutti parte reale minore di zero e quindi è *esternamente stabile*

$G(s) = \dfrac{1}{s^3+3s^2+s+2}$ stabilità esterna ?

$a(s) = s^3+3s^2+s+2$

tutti coefficienti $\neq 0$ e di segno concorde $\Rightarrow$ condizione necessaria soddisfatta

$\Rightarrow$ per studiare la stabilità devo costruire la tabella di Routh

$a(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = 2$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array} \qquad E_{11} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$E_{11} = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}(2-3) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 2 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 1 & \boxed{1/3} & 0 & \\ 0 & \boxed{2} & 0 & \end{array}$$

tutti elementi della prima colonna $\neq 0$ (tabella regolare) e di segno concorde

$\Rightarrow$ tutte radici con $Re < 0$

$\Rightarrow$ sistema esternamente stabile

1)

- Verifico se ci sono semplificazioni (guardando se ci sono zeri in comune)
- Verifico se è verificata la condizione necessaria
- Se è verificata, costruisco la tabella di Routh

1) $G(s) = \dfrac{s-1}{s^3+3s^2+2s+4}$

verifico se ci sono semplificazioni

numeratore ho uno zero in $z_1 = 1$

calcolo il denominatore in 1: $1+3+2+4 \neq 0 \Rightarrow$ non ci sono semplificazioni

$a(s) = s^3+3s^2+2s+4$ NB: condizione necessaria soddisfatta

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array} \qquad E_{11} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 2 & \boxed{3} & 4 & 0 \\ 1 & \boxed{2/3} & 0 & \\ 0 & \boxed{4} & 0 & \end{array} \qquad E_{11} = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}(4-6) = \frac{2}{3}$$

elementi prima colonna tutti > 0 $\Rightarrow$ tutte radici con $Re < 0$

$\Rightarrow$ sistema esternamente stabili

2)

- Qui ci sono semplificazioni

2) $G(s) = \frac{s}{s^3+2s^2+s} = \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s^2+2s+1)} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

Per Cartesio $e(s) = s^2+2s+1$ ha tutte radici con $Re < 0$

$\Rightarrow$ sistema esternamente stabile

- Abbiamo un polinomio di secondo grado con tutte radici con parte reale minore di zero

3)

- Non ci sono semplificazioni
- Non è verificata la condizione necessaria $\Rightarrow$ mancano dei termini (coefficienti)
  - Non ha tutte radici con parte reale $< 0 \Rightarrow$ sistema *esternamente instabile*

3) $G(s) = \frac{s+3}{s^4+1}$

il polinomio $e(s) = s^4+1$ non soddisfa le condizione necessaria

perché mancano i termini s^3, s^2, s

$\Rightarrow$ $e(s)$ non ha tutte radici con $Re < 0$

$\Rightarrow$ sistema esternamente instabile

$e(s) = s^4+1 = 0 \iff s^4 = -1$

4)

- Parametro α reale
- Non cerco di capire il segno andando a calcolare esplicitamente le radici, ma piuttosto:
  - *Applico la regola di Cartesio*, perché ho un polinomio di secondo grado
  - Radici con parte reale minore di zero $\iff$ tutti i coefficienti di segno concorde e diversi da zero
  - Faccio un sistema per imporre le condizioni

4) $G(s) = \frac{1}{s^2+(1-\alpha)s+4\alpha}$ $\quad e(s) = s^2+(1-\alpha)s+4\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Per Cartesio $e(s)$ con Radici e $Re < 0 \iff$ tutti coefficienti $\neq 0$ e di segno concorde

$1-\alpha > 0 \quad 1 > \alpha \quad \alpha < 1$

$4\alpha > 0 \quad \alpha > 0$

$\iff 0 < \alpha < 1$

stabilità esterna $\iff 0 < \alpha < 1$

5)

- Semplificazioni: non banale perché il denominatore dipende da un parametro
  - Dovrei studiare tanti caso
  - Allora non lo faccio e osservo che il polinomio al numeratore è stabile, avendo una radice in -3
  - Da cui allora osservo il denominatore e guardo quando questo ha radici con parte reali maggiore di 0, senza fare semplificazioni
  - In altre parole, *eventuali radici instabili (parte reale maggiore o uguale a 0), non possono essere semplificate*

> **Nota**
>
> Se avessimo avuto:
>
> $$G(s) = \frac{s-1}{s^3+2^2+s+\alpha}$$
>
> avremmo avuto lo zero del numeratore con parte reale maggiore di 0, quindi potevano esserci semplificazioni instabili. Quindi era *necessario considerare separatamente i casi per la stabilità*

- Nel nostro caso: $G(s)$ ha tutti i poli con $Re < 0 \iff$ denominatore ha tutte le radici con $Re < 0$
- Costruiamo quindi la tabella per sicurezza (anche se tipo $\alpha > 0$ potrei già dirlo per rispettare la condizione necessaria)

5) $G(s) = \dfrac{s+3}{s^3+s^2+s+\alpha}$ $\qquad G(s) = \dfrac{}{s^3+s^2+s+\alpha}$

il polinomio $s+3$ è stabile (radice in -3)
$\Rightarrow$ eventuali radici instabili (con $Re \geq 0$) non possono essere semplificate da $s+3$
$\Rightarrow$ $G(s)$ ha tutti poli con $Re < 0$ $\iff$ $s^3+s^2+s+\alpha$ ha tutte radici con $Re < 0$

Costruiamo tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array} \qquad E_{11} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1-\alpha & \\ 0 & \alpha & \end{array} \qquad E_{11} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = -(\alpha - 1) = 1-\alpha$$

tutte radici con $Re < 0$ $\iff$ tutti elementi della prima colonna $\neq 0$ e di segno concorde

$\iff$ $\begin{cases} 1-\alpha > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$ $\iff$ $0 < \alpha < 1$

ANALISI SISTEMI LTI IN RAPPRESENTAZIONE INGRESSO/USCITA

NOTA: PER L'ESAME SARANNO UTILI LE FORMULE CHE SI TROVANO IN FONDO A QUESTO CAPITOLO. STUDIARE BENE ANCHE GLI ESERCIZI RELATIVI

- Studiamo il caso dei sistemi SISO
  Abbiamo la derivata dell'ordine massimo del sistema (che corrisponde a n ovvero l'ordine del sistema) è data dalla somma delle uscite precedenti (derivate di ordine più basso) e dalla somma degli ingressi e delle sue derivate
- Viene detta per questo in *forma normale*

- Consideriamo un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \alpha_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1\, \dot{y}(t) + \alpha_0\, y(t) \\ &\quad + \beta_n u^{(n)}(t) + \ldots + \beta_1\, \dot{u}(t) + \beta_0\, u(t) \end{aligned}$$

dove $y^{(i)}(t) = \dfrac{d^i y(t)}{dt^i}$

(prima) Idea: passare alle equazioni di stato e poi applicare tutti i metodi già visti

- cioè passare da una equazione differenziale a una equazione di stato

INGRESSO NON DERIVATO

Sappiamo già come muoverci (già visto), infatti in quel caso

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

IN GENERALE

Si utilizza la forma canonica di osservazione

FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE

Si costruiscono le matrici generiche che sappiamo, ovvero:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

In questo modo:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_n \alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_n \alpha_1 \\ \beta_2 + \beta_n \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \beta_n$$

Dove i coefficienti α e β si trovano nel generico sistema LTI TC (vedi forma generale scritta poco fa)

ESEMPIO

- Basta prestare attenzione ai coefficienti
- Poi posso subito passare alle matrici A, B, C, D

$n=2$

$$\ddot{y}(t) = -2\,\dot{y}(t) + 3\,\dot{u}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \beta_2 \ddot{u}(t) + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

$$\alpha_1 = -2 \qquad \alpha_0 = 0 \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_1 = 3 \qquad \beta_0 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_2\alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_2\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \beta_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

- uso questo metodo solo se mi servono esplicitamente le equazioni di stato, altrimenti cfr. Metodo successivo

---

DOMINIO DI LAPLACE

(piccolo approfondimento)

L'alternativa per lavorare con sistemi LTI in rappresentazione ingresso uscita e trovare quindi la loro soluzione/analisi è passare al dominio di Laplace attraverso la trasformata

- Tanto mi interessano solo gli oggetti per l'analisi ovvero $\varphi(s), m(s), G(s)$
  Infatti, facendo la derivata delle varie uscite $y(t)$ si ottiene:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} y(t)\right\} = sY(s) - y(0)$$
$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0)$$

dalla proprietà della trasformata delle derivate

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \dot{y}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \dot{y}(0)$$
$$= s\left[sY(s) - y(0)\right] - \dot{y}(0)$$
$$= s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3} y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \ddot{y}(t)\right\} = s\,\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} - \ddot{y}(0)$$
$$= s\left(s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right) - \ddot{y}(0)$$
$$= s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\,\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)$$

  In generale quindi **la generica derivata dell'uscita è data da**:

$$\boxed{\mathcal{L}\{y^{(i)}\} = s^i Y(s) - s^{i-1} y(0) - \dots - s y^{(i-2)}(0) - y^{(i-1)}(0)}$$

- Questo metodo è utile anche per risolvere equazioni differenziali, ad esempio il seguente è un sistema integratore:

$$\dot{y}(t) = u(t)$$
$$\downarrow \mathcal{L}$$
$$sY(s) - y(0) = U(s)$$
$$sY(s) = y(0) + U(s)$$
$$Y(s) = \frac{y(0)}{s} + \frac{U(s)}{s}$$
$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$
$$y(t) = y(0)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{U(s)}{s}\right\}$$
$$\boxed{y(t) = y(0)\,1(t) + \int_0^t u(\tau)\,d\tau}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO G(s) <--

Con il metodo visto si può facilmente trovare la funzione di trasferimento (o la risposta forzata):

- Funzione di trasferimento (formula):

funzione di trasferimento

$$\boxed{G(s) = \frac{\beta_n\, s^n + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + \beta_1\, s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1}\, s^{n-1} - \ldots - \alpha_1\, s - \alpha_0}} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Da cui come si intuisce dovremo poi *effettuare le semplificazioni* per giungere a un rapporto di polinomi $b(s)/a(s)$, ovvero:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

RISPOSTA FORZATA

- Ponendo le condizioni iniziali a 0
  - Per calcolare la risposta forzata $Y_f(s)$ possiamo porre a 0 le condizioni iniz
    $\Rightarrow$ possiamo scrivere

$$\mathcal{L}\{y_f^{(i)}(t)\} = s^i\, Y_f(s) \qquad \mathcal{L}\{u^{(i)}(t)\} = s^i\, U(s)$$

  - Data la relazione ingresso-uscita

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) \;&=\; \alpha_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1\, \dot{y}(t) + \alpha_0\, y(t) \\ &\quad + \beta_n\, u^{(n)}(t) + \ldots + \beta_1\, \dot{u}(t) + \beta_0\, u(t) \end{aligned}$$

    $\Rightarrow$ nel dominio di Laplace per la risposta forzata $Y_f(s)$ vale

$$\begin{aligned} s^n\, Y_f(s) \;&=\; \alpha_{n-1}\, s^{n-1}\, Y_f(s) + \ldots + \alpha_1\, s\, Y_f(s) + \alpha_0\, Y_f(s) \\ &\quad + \beta_n\, s^n\, U(s) + \ldots + \beta_1\, s\, U(s) + \beta_0\, U(s) \end{aligned}$$

  - Risolvendo tale equazione rispetto a $Y_f(s)$ si ottiene

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{\beta_n\, s^n + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + \beta_1\, s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1}\, s^{n-1} - \ldots - \alpha_1\, s - \alpha_0}}_{G(s)}\, U(s)$$

- scrivo nel dominio di Laplace la risposta forzata a partire dall'ingresso
- se necessario faccio semplificazioni
  - utile ad esempio se devo studiare la stabilità esterna, perché ho una formula per $Y_f(t)$
    - E potrò derivare facilmente anche $\varphi(s)$ e $m(s)$ perché coincidono entrambi con il denominatore come vediamo adesso

POLINOMIO CARATTERISTICO E MINIMO

Si dimostra che:

- $\varphi(s)$ **coincide con il denominatore di $G(s)$ prima delle semplificazioni**
- $m(s) = \varphi(s)$

Quindi:

$$den(G(s)) = s^n - a_{n-1}s^{n-1} - \cdots - \alpha_1 s - \alpha_0 = \varphi(s) = m(s)$$

DIMOSTRAZIONE

- Calcolo $\varphi(s)$ come $\det(sI - A)$ dell matrice in forma canonica di osservazione e si osserva che viene la stessa cosa
- Si vede anche che non si semplifica nulla quindi $\varphi(s) = m(s)$

> *Quindi in generale è ancora più facile trovare gli oggetti necessari per l'analisi di stabilità del sistema partendo dalle equazioni differenziali in forma di derivate di ordine successivo dell'uscita e degli ingressi come visto*

RIASSUMENDO

- Consideriamo un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) \\ &\quad + \beta_n u^{(n)}(t) + \ldots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t) \end{aligned}$$

- Sfruttando la struttura della forma canonica di osservazione possiamo calcolare $\varphi(s)$ e $m(s)$

Fatto 2.15 Per un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita vale

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \ldots - \alpha_1 s - \alpha_0 \\ m(s) &= \varphi(s) \\ G(s) &= \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \ldots - \alpha_1 s - \alpha_0} \end{aligned}$$

- Questa slide include tutto ciò che ci serve per studiare la stabilità per un sistema in rappresentazione ingresso uscita

ESERCIZI: STUDIO STABILITA'

- Individuo ordine n (massimo ordine di derivazione con cui compare l'uscita)
- Trovo i vari coefficienti a partire dalle formule generali
- Scrivo $\varphi(s)$
  - Individuo gli autovalori (zeri di $\varphi(s)$) e la relativa posizione sul piano complesso s
    - Concludo sulla stabilità interna
- Calcolo $G(s)$
  - Eseguo eventuali semplificazioni
    - Concludo sulla stabilità esterna