## ESERCIZI

1. Dato il sistema LTI TC con
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$
determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è stabilizzabile
2. Dato il sistema LTI TC con
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
determinare autovalori controllabili e non controllabili e dire se il sistema è stabilizzabile
3. Dato il sistema LTI TC con
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$
determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è stabilizzabile

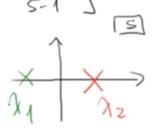
### ESERCIZIO 1: sistema parametrico

- Calcolo $\varphi(s)$, per capire gli autovalori del sistema
  - Se il sistema fosse già asintoticamente stabile, allora non devo procedere oltre (non c'è bisogno del controllo)
- Osservo gli autovalori instabili per capire se questi sono controllabili o meno
  - Se sono controllabili, allora il sistema è stabilizzabile
- Calcolo quindi $\varphi_c(s)$, ovvero $(sI - A)^{-1}B$, dove $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} Adj(sI - A)$, ovvero la funzione di trasferimento tra ingresso e stato (per capire l'evoluzione forzata dello stato)
  - In questo caso $B$ dipende dal parametro
  - Se abbiamo un singolo ingresso allora viene un vettore colonna

1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare stabilizzabilità

$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-1)$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$
$\boxed{\lambda_2 = 1}$ sistema instabile




NB: sistema stabilizzabile $\Leftrightarrow$ $\lambda_2$ è controllabile

Devo calcolare $\varphi_c(s)$ $\Rightarrow$ calcolo $(sI-A)^{-1}B$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} Adj(sI-A) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1+\alpha \\ \alpha(s+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-1+\alpha}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{\alpha}{s-1} \end{bmatrix}$$

- Studio $\varphi_c(s)$ al variare di $\alpha$

- Cioè per quali valori di $\alpha$ ho *semplificazioni* (per capire se qualche autovalore si cancella e quindi è definibile non controllabile) --> guardo per quali valori abbiamo stesse radici sia al numeratore che al denominatore (quindi in questo caso guardo le radici del denominatore e poi mi arrangio un po' a occhio)

- Per $\alpha = 0$ abbiamo semplificazioni, in particolare l'autovalore in $1$ si cancella
  - Come parte controllabile abbiamo il minimo comune multiplo degli elementi, ma in questo caso abbiamo solo $\frac{1}{s+1}$, quindi la parte controllabile è $\varphi_c(s) = s + 1$
    - Quindi $\lambda_1 = -1$ è un autovalore controllabile
  - Trovo facendo il complementare anche $\varphi_{\mathrm{nc}}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = s - 1$
    - Quindi $\lambda_2 = 1$ è un autovalore non controllabile
      - Avendo $\mathrm{Re} > 0$, il sistema è non stabilizzabile

- Per $\alpha = 2$, stesso procedimento, risultati duali
  - Rimane un autovalore non controllabile con $\mathrm{Re} > 0$, quindi il sistema è stabilizzabile

studio $\varphi_c(s)$ al variare di $\alpha$ $\qquad \varphi(s) = (s+1)(s-1)$

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{s-1+\alpha}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{\alpha}{s-1} \end{bmatrix}$$

devo vedere per quali $\alpha$ ho semplificazioni

$$\alpha = 0 \qquad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{\cancel{s-1}}{(s+1)\cancel{(s-1)}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\varphi_c(s) = s+1} \Rightarrow \lambda_1 = -1$ autovalore controllabile

$\boxed{\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = s-1} \Rightarrow \lambda_2 = 1$ autovalore non controllabile

non stabilizzabile

$$\alpha = 2 \qquad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s-1)} \\ \frac{2}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{s-1} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\varphi_c(s) = s-1} \Rightarrow \lambda_2 = 1$ autovalore controllabile $\Rightarrow$ stabilizzabile

$\boxed{\varphi_{nc}(s) = s+1} \Rightarrow \lambda_1 = -1$ autovalore non controllabile

- Nei casi rimanenti, non ci sono semplificazioni (quindi il sistema è completamente controllabile quindi stabilizzabile)

$\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$ non ci sono semplificazioni

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{s-1+\alpha}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{\alpha}{s-1} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\varphi_c(s) = (s+1)(s-1)}$ $\qquad \lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ autovalori controllabili

$\boxed{\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = 1}$ $\qquad$ non ci sono autovalori non controllabili

sistema completamente controllabile $\Rightarrow$ stabilizzabile

- Al variare di $B$ possono variare le proprietà di stabilità, infatti essa è la matrice che dice come il controllo agisce sulla dinamica del sistema
  - Se abbiamo un sistema stabilizzabile, allora è sufficiente cambiare $B$ in modo da rendere il sistema controllabile (comodo perché non devo cambiare tutto il sistema)

## ESERCIZIO 2: sistema di dimensione tre

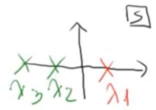
- Calcolo $\varphi(s)$ come al solito per vedere se è già stabile
  - Lo calcolo secondo la prima riga in questo caso
  - Otteniamo un polinomio già fattorizzato quindi si vedono bene gli autovalori
    - Abbiamo $\lambda_1$ con $\mathrm{Re} > 0$, quindi dobbiamo studiare la sua controllabilità
- Calcolo $(sI - A)^{-1}B$
  - Prima calcolo $(sI - A)^{-1}$, osservando che è una matrice a blocchi (quindi basta che faccio l'inversa dei due blocchi al massimo di dimensione $2 \times 2$)

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\varphi(s) = \det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)\det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} =$$

$$= (s-1)(s+1)(s+2)$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$
$\lambda_3 = -2$




sistema internamente instabile

stabilizzabile $\iff$ $\lambda_1$ (autovalore con $\mathrm{Re} \geq 0$) è controllabile

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 \quad 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \qquad (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

- Da cui, si moltiplica per $B$
- Singolo ingresso --> vettore colonna

- Trovo $\varphi_c(s)$ e $\varphi_{\mathrm{nc}}(s)$
  - Controllando che quelli non controllabili siano già stabili e tra quelli non controllabili ci siano quelli (in questo caso solo 1) instabili

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\varphi_c(s) = s-1 \qquad \lambda_1 = 1$ autovalore controllabile

$$\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = \frac{\cancel{(s-1)}(s+1)(s+2)}{\cancel{s-1}} = (s+1)(s+2)$$

$\lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$ autovalori non controllabili

$\varphi_{nc}(s)$ ha radici con $\mathrm{Re} < 0$ $\Rightarrow$ sistema stabilizzabile

## ESERCIZIO 3: esercizio parametrico (cfr. ESERCIZIO 1)

- Entrambi gli autovalori con $\mathrm{Re} \geq 0$
  - Quindi il sistema è stabilizzabile se tutti gli autovalori sono controllabili (quindi se il sistema è *completamente controllabile*)
    - Ricordiamo che vogliamo avere un sistema asintoticamente stabile, quindi vogliamo avere autovalori tutti con $\mathrm{Re} < 0$, quindi devo escludere anche quelli sul "confine" in $0$, indipendentemente dalla loro molteplicità

- Calcolo al solito $(sI-A)^{-1}B$

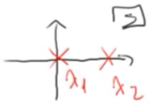
3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(s) = \det(sI-A) = \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2)(s+1)+2$$

$$= s^2 - s - 2 + 2 = s^2 - s = s(s-1)$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$




stabilizzabile $\iff$ $\lambda_1$ e $\lambda_2$ controllabili (sistema completamente controllabile)

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI-A)\, B = \frac{1}{s(s-1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} \begin{bmatrix} \alpha(s+1)-1 \\ -2\alpha-(s-2) \end{bmatrix}$$

- Controllo per quali $\alpha$ abbiamo semplificazioni (per studiare la controllabilità)
  - Guardo radici in comune tra numeratore e denominatore
- Abbiamo semplificazioni per $\alpha = 1$ (relativa a $s = 0$) e per $\alpha = \frac{1}{2}$ (relativa a $s = 1$)
  - Avendo ottenuto due autovalori con $\mathrm{Re} > 0$, il sistema è non controllabile

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s(s-1)} \begin{bmatrix} \alpha(s+1)-1 \\ -2\alpha-(s-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(s+1)-1}{s(s-1)} \\ \frac{-2\alpha-(s-2)}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

Per studiare la controllabilità devo vedere per quali $\alpha$ ho semplificazioni

il denominatore ha radici in 0 e 1 $\Rightarrow$ devo vedere per quali $\alpha$ i numeratori hanno radici in 0, 1

$$\alpha(s+1)-1 \Big|_{s=0} = \alpha - 1 = 0 \iff \alpha = 1$$

$$\alpha = 1 \quad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{s+\cancel{1}-\cancel{1}}{s(s-1)} \\ \frac{-\cancel{2}-s+\cancel{2}}{s(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ -\frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$\varphi_c(s) = s-1$

$\varphi_{nc}(s) = s$

autovalore non controllabile con $\mathrm{Re} \geq 0$
$\Downarrow$
non stabilizzabile

$$\alpha(s+1)-1 \Big|_{s=1} = 2\alpha - 1 = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}-1}{s(s-1)} \\ \frac{-1-s+2}{s(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2}\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}} \\ \frac{-\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s} \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$\varphi_c(s) = s$

$\boxed{\varphi_{nc}(s) = s-1}$
$\Downarrow$
non stabilizzabile

Infine, dimostriamo che non abbiamo semplificazioni per gli altri valori non considerati di $\alpha$, quindi i casi in cui abbiamo completa controllabilità e quindi stabilizzabilità

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$ non ho semplificazioni

$\rightarrow \quad \varphi(s) = \varphi_c(s) = s(s-1)$

completa controllabilità $\Rightarrow$ stabilizzabilità

## RAGGIUNGIABILITA'

- Metodo utile poi per capire quando si perde di controllabilità

Per ora, definiamo la raggiungibilità come l'insieme di **proprietà** tali per cui, se applicate opportunamente sul sistema, permettono attraverso un certo **controllo** $u$ di **portare lo stato iniziale** del sistema nullo $x(0) = 0$ **a un certo stato specifico** che si desidera $x(t) = x^o$

> *Si cerca in altre parole di capire se esiste un certo segnale di controllo $u$ che porta lo stato del sistema a un certo valore desiderato di "obiettivo" $x^o$ (partendo da uno stato di quiete)*
> 
> 

- esempio: braccio robotico --> portare l'oggetto in una certa posizione desiderata in un certo lasso di tempo

Dato che le condizioni iniziali le supponiamo nulle, allora l'evoluzione dello stato $x(t)$ dipende solo dalla risposta forzata $x_f(t)$, perché ($x_\ell(t)$ dipende dalle sole condizioni iniziali). Ovvero:

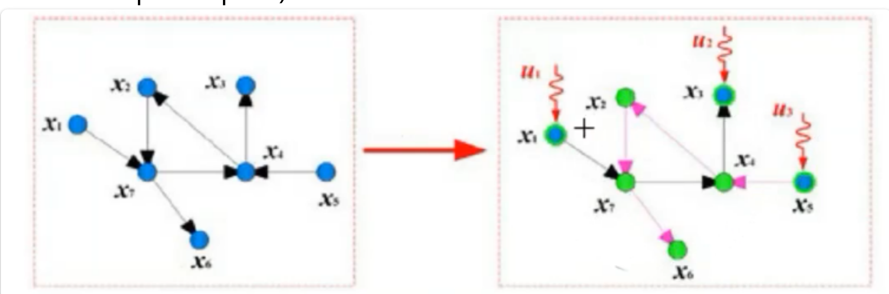
$$x(t) = \cancel{x_\ell(t)}^{\,0} + x_f(t)$$

Quindi:

$$x(t) = x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

> *Conviene per la raggiungibilità di ragionare nel tempo. Altrimenti in Laplace avremmo $X_f(t) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$, come abbiamo visto per la stabilità. Tuttavia come vedremo conviene rimanere nel tempo*

### ESEMPIO DI APPLICAZIONE

- Applicare le proprietà di raggiungibilità per capire se possiamo portare il sistema complessivo (lo stato di tutti gli agenti) a un valore desiderato
  - Ad esempio nella dinamica delle opinioni potremmo pensare a una campagna di marketing (che può influenzare anche un sottoinsieme di agenti - ovvero i nodi del grado) tale per cui lo stato complessivo raggiunga un valore di riferimento (ad esempio uno stato di fiducia verso un brand che faccia fare più acquisti)
  
  
  - Nel caso ci si regola a mano a mano, aumentando ad esempio il numero di ingressi $u_i$ per influenzare più persone

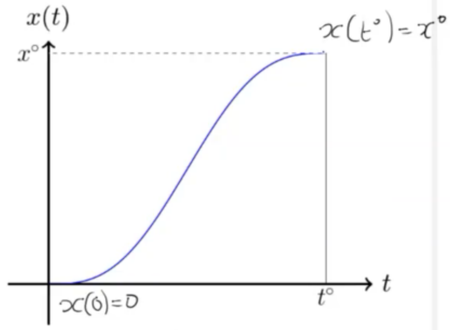
- L'esempio inverso può essere quello di agire in maniera malevola sullo stato degli agenti per capire la robustezza del sistema (usato in cyber-security)

> - Utile per progettare poi un sistema più sicuro

## STATI RAGGIUNGIBILI

- Indicati con $X_r$: sono tutti quegli stati che possono essere raggiunti mediante il controllo (è un sottoinsieme degli stati se il sistema non è completamente raggiungibile, altrimenti è coincidente con l'insieme generico degli stati $\mathbb{R}^n$)
  - Nota: se il sistema è completamente raggiungibile, allora applicando l'opportuno controllo si può raggiungere qualsiasi stato

  **Definizione:** uno stato $x^\circ$ si dice raggiungibile se esistono un tempo $t^\circ$ e un segnale di controllo $u(t)$, $t \in [0, t^\circ]$ tale da portare lo stato del sistema al valore $x(t^\circ) = x^\circ$ partendo dallo stato zero $x(0) = 0$

  $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$

  $\mathbb{R}^n$

  - $\boxed{X_r \text{ insieme degli stati raggiungibili}}$
  - Se tutti gli stati sono raggiungibili $X_r = \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(x)$ il sistema si dice **completamente raggiungibile**
    in questo caso è possibile portare il sistema in qualunque configurazione mediante il controllo
  - In generale $X_r$ sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$

## ESEMPIO

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

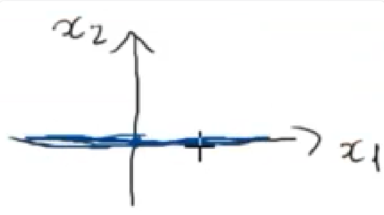
$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u & \leftarrow S_c \\ \dot{x}_2 = -x_2 & \leftarrow S_{nc} \end{cases}$

Partiamo da un sistema già visto non completamente controllabile
- Si vede che non è nemmeno completamente raggiungibile, infatti *esiste una equazione di stato che non dipende dal controllo*, quindi per capire come si evolve si risolve l'equazione differenziale associata e si nota che non dipende dal controllo
- Nel dettaglio:

$$\dot{x}_2 = -x_2 \quad \text{ha soluzione } x_2(t) = e^{-t} x_2(0)$$

si vede che il controllo non influisce. Se partiamo con condizioni iniziali nulle, ovvero
$x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2(0) = 0$ allora $x_2(t) = 0 \;\; \forall t$
- Quindi la seconda componente dello stato non si muove da $0$. Partendo dallo stato $x(0) = 0$ non posso raggiungere stati $x_2(t) \neq 0$

- Con il controllo posso modificare $x_1$ ma non $x_2$ (quindi mi muovo solo sulla retta orizzontale in figura)

- Ne deriva che l'insieme degli stati raggiungibili è

$$X_r = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \text{con } \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

- Quindi $X_r$ coincide con un *sottospazio lineare* dello spazio $\mathbb{R}^{x_1 \times x_2}$ coincidente con la sola retta $x_1$

## CAPIRE SE UN SISTEMA È O MENO COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

- Caso semplice: c'è una equazione di stato che non dipende dal controllo
- Caso più complesso: devo analizzare matematicamente com'è fatta la risposta forzata nel tempo $x_f(t)$

Infatti:
Partendo da: $x_f(t^o) = \int_0^{t^o} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$
Ci chiediamo quali stati possiamo raggiungere a partire da questo stato in un certo tempo $t^o$. Possiamo riscrivere l'esponenziale di matrice come serie di Taylor:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Quindi:

$$x_f(t^o) = \int_0^{t^o} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)^k (t^o - \tau)^k}{k!} B\, u(\tau)\, d\tau$$

Portando fuori quello che non dipende dall'integrale:

$$x_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B \underbrace{\int_0^{t^o} \frac{(t^o - \tau)^k}{k!} u(\tau)\, d\tau}_{u_k(t^o)}$$

- dove con $u_k(t^o)$ abbiamo individuato il *momento k-esimo* di $u(t)$ al tempo $t^o$
  - È la parte della risposta forzata che *dipende dal controllo*. Ovvero al variare di $u$ abbiamo coefficienti arbitrari (che possiamo scegliere con il controllo)
  Ci rimane, sviluppando la sommatoria (ricordando che per $k = 0$ l'esponenziale di matrice diventa l'identità):

  $$x_f(t) = B\, u_0(t^o) + AB\, u_1(t^o) + A^2 B\, u_2(t^o) + \dots$$

  ```
  - Una combinazione lineare di termini *arbitrari* $u_{0}(t^{o}), u_{1}(t^{o}),u_{2}(t^{o}),\dots$
  ```

  Questi rappresentano tutti gli stati raggiungibili attraverso la combinazione lineare tra i vettori (termini arbitrari) di controllo appena citati $(u_0(t^o), u_1(t^o), u_2(t^o), \dots)$ e le quantità $A, AB, A^2B, \dots$

Dal teorema di Cayley-Hamilton, tutte le potenze della matrice $A$ da un certo ordine $n$ in poi ($A^n, A^{n+1}, \dots$) sono riscrivibili come *combinazione lineare delle precedenti*, ovvero $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
Quindi:

$$A^k \quad , \quad k \geq n \quad \text{è scrivibile come combo lineare di } A^0 = I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$$

Allora anche:

$$A^k B \quad , \quad k \geq n \quad \text{è scrivibile come combo lineare di } B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$$

> *Quindi si conclude che uno stato è raggiungibile solo se è scrivibile come combinazione lineare dei primi $n$ vettori del tipo $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$, grazie al Teorema di Cayley-Hamilton. Se non esiste una combinazione lineare opportuna per riscrivere lo stato, allora tale stato non è raggiungibile e quindi il sistema non è completamente raggiungibile (almeno)*

### RIASSUMENDO

- Al tempo $t^\circ$ possiamo raggiungere tutti gli stati del tipo

$$x(t^\circ) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t^\circ) A^k B$$

con

$$u_k(t^\circ) = \int_0^{t^\circ} \frac{(t^\circ - \tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau$$

- Le quantità $u_k(t^\circ)$ sono assegnabili liberamente al variare del segnale $u$
  $\Rightarrow$ sono raggiungibili tutti gli stati ottenibili come combinazione lineare di $B, A\,B, A^2\,B, \dots$
- Per il **Teorema di Cayley-Hamilton** tutte le potenze successive $A^n, A^{n+1}, \dots$ sono ottenibili come combinazione lineare delle prime $n$ potenze $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
- Nella combinazione lineare è sufficiente fermarsi alla potenza $A^{n-1}$
  $\Rightarrow$ sono raggiungibili tutti gli stati ottenibili come combinazione lineare di $B, A\,B, A^2\,B, \dots, A^{n-1}\,B$ $A^nB, A^{n+1}B, \dots$

Mettendo insieme tali vettori nelle cosiddetta *matrice di raggiungibilità*, si capisce molto rapidamente quali stati del sistema sono raggiungibili e quali no

(lo stato è una combinazione lineare di vettori, con coefficienti arbitrari denominati "momenti" $u_k(t^o)$)

### APPROFONDIMENTO: TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON

Qualsiasi potenza intera di una matrice $A$ può essere riscritta come combinazione lineare delle prime $n$ matrici, scegliendo opportunamente i coefficienti

- Quindi le prime $n$ matrici sono uno spazio lineare?

  Teorema di Cayley-Hamilton
  data una matrice quadrata $A$ e il suo polinomio caratteristico $\varphi(s) = \det(sI - A)$ allora vale

  $\varphi(A) = 0$

  $\varphi(s) = s^n + \varphi_{n-1} s^{n-1} + \dots + \varphi_1 s + \varphi_0$

  $\varphi(A) = A^n + \varphi_{n-1} A^{n-1} + \dots + \varphi_1 A + \varphi_0 I = 0$ $\quad \pi(A) = 0$

  Conseguenza
  $A^n = -\varphi_{n-1} A^{n-1} - \dots - \varphi_1 A - \varphi_0 I$
  $A^n$ combinazione lineare di $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
  Per induzione da questo segue che
  $A^k$ con $k \geq n$ combinazione lineare di $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$
  $A^{n+1} = A^n \cdot A = (-\varphi_{n-1} A^{n-1} - \dots - \varphi_1 A - \varphi_0 I) A$
  $= -\varphi_{n-1} A^n - \dots - \varphi_1 A^2 - \varphi_0 A = -\varphi_{n-1}(-\varphi_{n-1} A^{n-1} - \dots - \varphi_1 A - \varphi_0 I) - \dots - \varphi_1 A^2 - \varphi_0 A$

  "Qualsiasi potenza $k$-esima di matrice è combinazione lineare delle prime $n$, con $k \geq n$"
  - Questo mi permette di definire la matrice di raggiungibilità di dimensione finita (altrimenti sarebbe infinita)