RIASSUNTOZZO

Consideriamo il sistema: $\dot{x} = Ax + Bu$

- Dove andiamo a considerare solo la matrice A perché è quella che mi interessa per l'analisi modale che mi dà luogo ai modi naturali del sistema
  Sappiamo che esso evolve in assenza di sollecitazioni esterne come: $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$
- Capire l'evoluzione quindi vuol dire calcolare l'esponenziale di matrice. Essendo un oggetto piuttosto complesso, "ci siamo accorti" che passando dal dominio di Laplace le cose si semplificano di molto. Infatti:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

- Pertanto riduciamo il lavoro al calcolo di una inversa di una matrice. Sappiamo che tale inversa equivale a:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} Adj(sI - A)$$

- Abbiamo evidentemente che i poli della inversa sono gli zeri di $\varphi(s)$, da cui possiamo dedurre numerose informazioni sui segnali del tempo (l'andamento, convergenti, divergenti etc...)
- In particolare, $\varphi(s)$ si può fattorizzare in un primo tempo in questo modo:

$$\varphi(s) = (s - \lambda_1)^{\mu_1}(s - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (s - \lambda_k)^{\mu_k}$$

- Una volta fattorizzato ci siamo accorti che possono capitare delle semplificazioni, pertanto abbiamo definito un nuovo polinomio, il *polinomio minimo* $m(s)$, che di fatto è un sottomultiplo di $\varphi(s)$:

$$m(s) = (s - \lambda_1)^{m_1}(s - \lambda_2)^{m_2} \dots (s - \lambda_k)^{m_k}$$

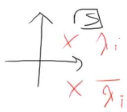
  - Esso ci dice con quale molteplicità appare ogni polo nella matrice inversa $(sI - A)^{-1}$. È una espressione più generale, perché $\varphi(s)$ mi aiutava a capire la molteplicità del singolo polinomio caratteristico, e non della inversa stessa. $m(s)$ quindi si applica meglio per comprendere i modi di evoluzione del sistema. Vale inoltre la relazione: $1 \leq m_i \leq \mu_i$ (cioè la molteplicità di $m(s)$ si può abbassare da μ_i fino a 1 ma non può scomparire)
  - Dalla teoria sappiamo che un polo in λ_i con molteplicità m_i dà luogo ai cosiddetti *modi naturali* del sistema, ovvero i modi di evoluzione presenti nell'esponenziale di matrice (ottenuti in combinazione antitrasformando ciascun termine della matrice inversa):

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \dots, t^{m_i - 1} e^{\lambda_i t} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{(numero autovalori)}$$

  - In caso di *autovalori complessi coniugati* conviene **prenderli combinati insieme**, ovvero:

- **Autovalore complesso**

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$$



$\Rightarrow$ anche il suo **complesso coniugato**

$$\overline{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

è autovalore con la **stessa** molteplicità m_i

- I due modi

$$t^\ell e^{\lambda_i t}, \quad t^\ell e^{\overline{\lambda}_i t}$$

sono sempre presenti in **coppia** e si **combinano** dando luogo ai due modi reali

$$t^\ell \cos(\omega_i t) e^{\sigma_i t}, \quad t^\ell \sin(\omega_i t) e^{\sigma_i t}$$

ESEMPIO: SISTEMA MECCANICO

Lo abbiamo già visto e abbiamo già calcolato i modi di evolvere: diagonalizzando e poi più avanti con il calcolo esplicito dell'antitrasformata

- Vediamo ora di farlo col polinomio minimo

- Fissiamo $M = 1$ e $b = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico $\varphi(s) = s(s+1)$
  $\Rightarrow$ autovalori $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità $\mu_2 = 1$
- Matrice inversa

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

  $\Rightarrow$ polinomio minimo $m(s) = \varphi(s) = s(s+1)$ molteplicità $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$
- Modi naturali $e^{\lambda_1 t} = 1$, $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$
- Elementi di e^{At} = combinazione lineari dei modi naturali

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$\varphi(s) = s(s+1)$

$\lambda_1 = 0 \quad \mu_1 = 1$

$\lambda_2 = -1 \quad \mu_2 = 1$

$1 \leq m_i \leq \mu_i \Rightarrow m_1 = 1$, $m_2 = 1$

$m(s) = s(s+1)$

ESERCIZI: DETERMINA MODI NATURALE DEL SISTEMA

ESEMPIO 1): COMPLETO

- Trovo $\varphi(s)$
- Calcolo autovalori e guardo la loro relativa molteplicità
- Fattorizzo $\varphi(s)$
- Se le molteplicità sono unitarie, scrivo già $m(s)$. Altrimenti devo stare attento a eventuali semplificazioni
- Cerco d'intuire i modi naturali. In questo primo esempio è semplice perché abbiamo poli con $m = 1$ e che sono complessi coniugati tra loro. Quindi li prendo insieme e scopro quanto valgono σ e ω per scriverli meglio

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

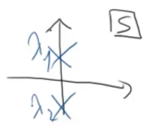
$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 - (-1) = s^2 + 1$

$\varphi(s) = 0 \iff s^2 + 1 = 0 \iff s^2 = -1 \iff s = \pm j$

$\lambda_1 = j \quad \mu_1 = 1$

$\lambda_2 = -j \quad \mu_2 = 1$

$\varphi(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s - j)(s + j)$



$m(s) = \varphi(s) = (s - j)(s + j)$

perché $\mu_1 = 1 \Rightarrow m_1 = 1$

$\mu_2 = 1 \Rightarrow m_2 = 1$

modi naturali $e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t)$, $e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t)$ $\quad \sigma_1 = 0 \quad \omega_1 = 1$

$\sin(t)$, $\cos(t +$

- Calcoliamo ora anche l'inversa per completezza, anche se come visto non è necessaria per capire i modi naturali del sistema (in questo caso con molteplicità 1)
- Antitrasformo ogni singolo elemento della matrice e controllo se torna (sì perché abbiamo ancora combinazione lineari di seno e coseno)

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI-A) = \frac{1}{s^2+1} \operatorname{Adj}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

- Troviamo infine l'evoluzione libera applicando la formula:

$$x_e(t) = e^{At} x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t)x_1(0) + \sin(t)x_2(0) \\ -\sin(t)x_1(0) + \cos(t)x_2(0) \end{bmatrix}$$

- dove la prima riga della matrice ci dice come evolve la prima componente di stato del sistema e la seconda riga ci dice come evolve la seconda componente di stato
- quindi *l'evoluzione libera è una combinazione lineare dei modi naturali dipendente dalla condizione iniziale $x(0)$*

ESERCIZIO 2): MATRICE 3X3 DIAGONALE A BLOCCHI

❷ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Suggerimento: per una matrice diagonale a blocchi l'inversa si calcola invertendo i blocchi sulla diagonale

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1}+ & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

2) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\varphi(s) = \det(sI-A) = \det\begin{bmatrix} s+3 & -2 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \det(s+1)$$

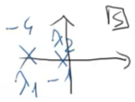
$$= \left[(s+3)(s+2) - (-2)(-1)\right](s+1)$$

$$= (s^2+5s+6-2)(s+1) = (s^2+5s+4)(s+1) = (s+4)(s+1)(s+1)$$

$$= (s+4)(s+1)^2$$

$\lambda_1 = -4 \qquad \mu_1 = 1$

→ $\lambda_2 = -1 \qquad \mu_2 = 2$



$\mu_1 = 1 \implies m_1 = 1$

$\mu_2 = 2 \implies 1 \leq m_2 \leq 2 \implies$ per determinare m_2 devo calcolare +

- Non si possono scrivere da subito i modi naturali a causa della molteplicità, ma intanto posso dire che sono tutti convergenti avendo tutti parte reale minore di zero
  - Però per capire esplicitamente quali sono devo calcolare $m(s)$

- Calcolo quindi l'inversa $(sI - A)^{-1}$
  - Sfrutto che è diagonale a blocchi così evito di fare tutti i conti con l'aggiogata di una matrice 3×3
- Dopodiché per il polinomio minimo faccio l'm.c.m degli elementi dell'inversa, e osservo la molteplicità.
  - In particolare compaiono due poli entrambi con molteplicità 1 nel polinomio minimo

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}\begin{bmatrix} s+3 & -2 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+4)(s+1)^2} \operatorname{Adj}\begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (s+1)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}} \operatorname{Adj}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+4)(s+1)}\begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+4)(s+1)} & \frac{2}{(s+4)(s+1)} & 0 \\ \frac{1}{(s+4)(s+1)} & \frac{s+3}{(s+4)(s+1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

denominatori $(s+4)(s+1)$, $(s+1)$

$m(s) = (s+4)(s+1)$

- Quindi si è abbassato il grado di molteplicità nel passaggio $\varphi(s) \to m(s)$, infatti $\varphi(s) = (s+4)(s+1)^2$ e $m(s) = (s+4)(s+1)$
  - Da cui si trovano facilmente i modi naturali, osservando gli zeri di $m(s)$
- Abbiamo solo 2 modi di evolvere anche se la dimensione del sistema era 3×3. Questo accade quando abbiamo un abbassamento di molteplicità
  - Se calcolassimo esplicitamente l'antitrasformata ($e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$) della matrice inversa otterremmo lo stesso risultato, mettendo in combinazione lineare gli elementi della matrice.

$\varphi(s) = (s+4)(s+1)^2$

$m(s) = (s+4)(s+1)$

$\lambda_1 = -4 \quad m_1 = 1 \quad \Rightarrow$ modo naturale $e^{\lambda_1 t} = e^{-4t}$

$\lambda_2 = -1 \quad m_2 = 1 \quad \Rightarrow$ modo naturale $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

Per esercizio calcolare $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

STABILITA'

INTRO

Studia la tendenza a resistere di un sistema (robustezza) rispetto a *perturbazioni*.
Le perturbazioni possono derivare da più parti, in particolare si parla di:

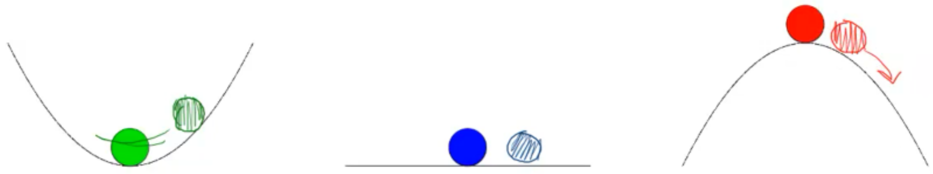
- **Stabilità interna:** robustezza rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali $x(0)$
- **Stabilità esterna:** robustezza rispetto a perturbazioni dell'ingresso u
- **stabilità strutturale:** robustezza rispetto a perturbazioni dei parametri del sistema (matrici A, B, C, D)

- studieremo solo le prime due (interna ed esterna)

> *Un sistema è robusto se date piccole perturbazioni la sua soluzione varia di poco*

STABILITA' INTERNA

Può essere di tre tipi:



Stabilità asintotica | **Stabilità marginale** | **Instabilità**

- **Stabilità asintotica:** l'effetto di perturbazioni nelle condizioni iniziali **svanisce**, ovvero **converge** a 0
- **Stabilità marginale:** l'effetto di perturbazioni nelle condizioni iniziali non svanisce ma si mantiene comunque **limitato**
- **Instabilità:** se esistono perturbazioni delle condizioni iniziali il cui effetto **non** si mantiene **limitato**.

MAPPA TRANSIZIONE GLOBALE

Partendo da un sistema LTI TC e conoscendo la condizione iniziale $x(0) = x_0$ e il segnale d'ingresso $u(t)$

- Definiamo la mappa di transizione di stato una funzione che dice qual è la condizione dello stato per ogni tempo t, a partire dalla condizione iniziale e l'ingresso. In formule:

  $$x(t) = \Phi(t, x_0, u)$$

  Essa come già visto in passato vale:

  $$\Phi(t, x_0, u) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}_{x_f(t)}$$

- "Mappa di transizione" perché ci fa capire la transizione da una certa condizione iniziale a un generico tempo t
- "Di stato" perché è relativa allo stato del sistema generico $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

EFFETTO DELLA PERTURBAZIONE

Consideriamo a partire dalla traiettoria nominale $x(t)$ sopra descritta una **traiettoria perturbata**, del tipo:

$$x(t) = \Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u)$$

L'effetto della perturbazione si trova facendo la differenza tra le due traiettorie:

$$\begin{aligned}
&\Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u) - \Phi(t, x_0, u) \\
&\qquad = \left[e^{At}(x_0 + \tilde{x}_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau\right] - \left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau\right] \\
&\qquad = e^{At}\, \tilde{x}_0
\end{aligned}$$

- Ci si accorge che la perturbazione non modifica l'evoluzione forzata $x_f(t)$ (perché si semplifica)
- Rimane *soltanto la differenza tra le evoluzioni libere*

Quindi l'effetto della perturbazione dipende da:

- matrice A (che descrive la dinamica del sistema)
- perturbazione x_0 (ovvero come perturbiamo)
  Ovvero, **non dipende né dalla condizione iniziale x_0 né dall'ingresso u**

> **Proprietà Intriseca**
>
> Quindi la stabilità interna per sistemi *lineari* è una **proprietà intrinseca del sistema stesso**
> Inoltre la perturbazione influenza solo l'evoluzione libera
> Pertanto possiamo già studiarla

FORMULE PER LA STABILITA' INTERNA

Un sistema LTI TC si dice

- **Asintoticamente stabile** se l'effetto di perturbazioni $\tilde{x}_0$ nelle condizioni iniziali svanisce, ovvero **converge** a 0

$$\lim_{t \to \infty} e^{At}\tilde{x}_0 = 0 \qquad \forall \tilde{x}_0$$

- **Marginalmente stabile** se non ho stabilità asintotica, ma l'effetto di perturbazioni $\tilde{x}_0$ nelle condizioni iniziali si mantiene comunque **limitato**

$$\forall \tilde{x}_0 \quad \exists M : \quad \left\| e^{At}\tilde{x}_0 \right\| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

- **Internamente instabile** se non ho stabilità asintotica né marginale, ovvero se esistono perturbazioni $\tilde{x}_0$ il cui effetto **non** si mantiene **limitato**

- Come si vede gli effetti si valutato solo guardando l'evoluzione libera, ovvero l'esponenziale di matrice e^{At} (moltiplicato per una certa perturbazione *arbitraria* $\tilde{x}_0$, che è un vettore che descrive la direzione)
  - Quindi si può dire che la stabilità **dipende dai modi naturali** del sistema, dato che gli elementi e^{At} sono una combinazione lineare dei modi naturali stessi
    - Devo solo individuarli e classificarli