MODELLISTICA E SIMULAZIONE

MODELLO

Descrive matematicamente un sistema

TEMPO DISCRETO (TD)

Descritti da $\text{equazioni alle differenze}$

- Più facili da implementare (utili per approssimare modelli tempo continuo complessi)

TEMPO CONTINUO (TD)

Descritti da $\text{equazioni differenziali}$

SISTEMA CAUSALE

Sistema dinamico, rappresentabile in maniera intuitiva con l'asse dei tempi:

- si distingue cioè tra: passato, presente t e futuro.
  - Ognuno di essi è in interazione secondo il principio *causa-effetto*: il valore a un certo tempo t_0 dipende solo da istanti precedenti $t_0 - 1, t_0 - 2, \ldots$

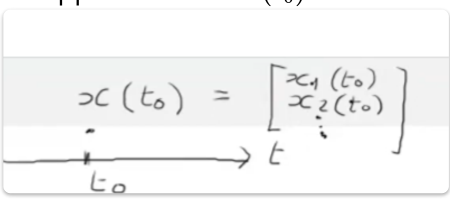
STATO DEL SISTEMA

Rappresenta la *configurazione* del sistema a un certo istante di tempo t_0.

- È in altre parole una fotografia del sistema
- Conoscendo gli ingressi, esso contiene tutte le informazioni necessarie per prevedere come si evolverà il sistema stesso

Matematicamente è un insieme di variabili (vettore) necessarie da conoscere per descrivere un sistema a un certo istante t_0.

- Si rappresenta con $x(t_0)$



EQUAZIONI DI STATO TD

Dette anche *rappresentazioni ingresso-uscita*, permettono appunto di rappresentare un sistema

$$\begin{array}{ll} \text{eq. transizione stato} & x(t+1) = f(t, x(t), u(t)) \\ \text{eq. uscita} & y(t) = h(t, x(t), u(t)) \end{array}$$

- La prima permette di passare da un certo istante t a un istante $t+1$, sulla base della configurazione attuale $x(t)$ e gli ingressi $u(t)$
  - f è la funzione di transizione di stato

- La seconda permette di calcolare il valore di uscita (che in generale è un vettore) di un sistema sulla base della configurazione attuale $x(t)$ e gli ingressi $u(t)$
  - h è la funzione di uscita
    - Se come uscita ci interessa l'intero stato, allora $y(t) = x(t)$

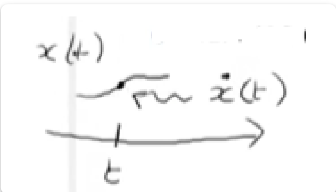
EQUAZIONI DI STATO TC

L'istante successivo dell'equazione (che nel TD è $t_0 + 1$), è un istante infinitesimale successivo. Ovvero in è la derivata rispetto al tempo $\left(\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{t}\right)$

$$\begin{array}{ll} \text{eq. transizione stato} & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ \text{eq. uscita} & y(t) = h(t, x(t), u(t)) \end{array}$$

- Viene specificato quindi lo stato dopo una variazione di tempo infinitesimale
- Indica in particolare *il tasso di variazione*:

$$\dot{x} \rightarrow \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(t, x(t), u(t))$$



SISTEMI NON AUTONOMI

Un sistema si dice *non autonomo* se *è presente un ingresso* che influenza l'evoluzione del sistema. Pertanto, c'è una interazione con l'esterno così rappresentabile:

$$\left[\dot{x} || x(t+1)\right] = f(t, x(t), u(t)) \quad , \quad y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

Viceversa, un sistema autonomo non ha ingressi dall'esterno che influenzano l'evoluzione del sistema. Quindi:

$$\left[\dot{x} || x(t+1)\right] = f(t, x(t)) \quad , \quad y(t) = h(t, x(t))$$

- mi basta conoscere la configurazione al tempo t per capire l'evoluzione futura (risolvendo l'equazione differenziale / alle differenze)

SISTEMI TEMPO INVARIANTI

Un sistema è *tempo invariante* se la configurazione di evoluzione futura del sistema non dipende dall'istante in cui ci troviamo t.

- Si comporta cioè allo stesso modo indipendentemente dal tempo in cui osserviamo (ora, tra un anno, tra dieci anni...)
- il sistema cioè risponde allo stesso modo indipendentemente dal tempo in cui si applica l'ingresso
  - esempio: corpo umano --> la risposta dipende dal tempo

$$\left[\dot{x} || x(t+1)\right] = f(x(t), u(t)) \quad , \quad y(t) = h(x(t), u(t)) \quad , \quad \text{non compare } t$$

Viceversa, l'evoluzione di un sistema *tempo variante* dipende dal tempo t in cui si applica

$$\left[\dot{x} || x(t+1)\right] = f(t, x(t), (t)) \quad , \quad y(t) = h(t, x(t), u(t)) \quad , \quad \textbf{compare t}$$

- esempio: equazioni della fisica

RIASSUNTO

Sistemi TC

	Autonomo	Non autonomo
TI	$\dot{x}(t) = f(x(t))$ $y(t) = h(x(t))$	$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ $y(t) = h(x(t), u(t))$
TV	$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ $y(t) = h(t, x(t))$	$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ $y(t) = h(t, x(t), u(t))$

Sistemi TD

	Autonomo	Non autonomo
TI	$x(t+1) = f(x(t))$ $y(t) = h(x(t))$	$x(t+1) = f(x(t), u(t))$ $y(t) = h(x(t), u(t))$
TV	$x(t+1) = f(t, x(t))$ $y(t) = h(t, x(t))$	$x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$ $y(t) = h(t, x(t), u(t))$

ESEMPI

MODELLO SISTEMA SCOLASTICO

$$x(t+1) = x(t) - \alpha x(t) - \beta x(t) + u(t)$$

- α e β in percentuale ($\in (0,1)$), rappresentano persone che lasciano gli studi o che vengono promossi
- l'indice di riferimento t è discreto
- è una equazione alle differenze
  Analogamente:

$$x(t+1) = f\big(x(t), u(t)\big)$$

- si calcola quindi un valore della variabile d'interesse (studenti iscritti) a un certo $t+1$ in funzione del valore al tempo t e dell'ingresso $u(t)$.
- l'equazione alle differenze quindi permette di passare dal tempo t al tempo $t+1$
- Vale se il sistema è **causale**
  - Lo stato del sistema è il numero di studenti iscritti
  - Si sottintende che $y(t) = x(t)$
- è classificato come modello di trasferimento di risorse

MODELLO ROBOT

- Le tre variabili (p_x, p_y, α) forniscono una descrizione completa della configurazione in cui si trova il robot
  $\Rightarrow$ stato del sistema

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix}$$

- La velocità angolare e velocità di avanzamento (che dipendono dai comandi inviati ai motori dal sistema di controllo) rappresentano gli ingressi al modello dell'uniciclo

$$u(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

- Equazione di transizione dello stato

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = v(t)\cos\alpha(t) \\ \dot{p}_y(t) = v(t)\sin\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) = \omega(t) \end{cases} \iff \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = x(t)$$

MODELLO DI TRASFERIMENTO DI RISORSE

Sono rappresentati da una **equazione di bilancio**:

$$x(t+1) = x(t) + f^{\text{in}}(t) + f^{\text{out}}(t)$$

Dove abbiamo *risorse che entrano e che escono*

- Negli esempi più complessi le risorse si possono trovare **in più stadi**

ESEMPIO: CONTO IN BANCA

f^{in} sarà rappresentato dagli ingressi in termini di soldi nel mio conto (guadagni), ad esempio dati dagli interessi che fruttano nel conto attuale e dai guadagni mensili regolari, quindi:

$$f^{in}(t) = \gamma x(t) + g(t)$$

f^{out} sarà rappresentato dai flussi di uscita (spese), quindi:

$$f^{out}(t) = s(t)$$

L'equazione di stato sarà:

$$x(t+1) = x(t) + \gamma x(t) + g(t) - s(t)$$

MODELLI COMPARTIMENTALI

Usati quando le risorse nei modelli di trasferimento appena descritti hanno *più di uno stadio*, in generale n stadi

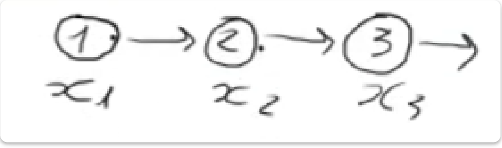
- Un esempio generale può essere quello degli anni accademici della triennale: abbiamo tre compartimenti ciascuno che descrive un anno accademico.
  - Due stadi sono collegabili tra loro grazie alle transizioni

  $$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow$$

- In questo caso dopo l'ultimo compartimento, si esce dal sistema (non sempre questo accade, può essere ciclico)

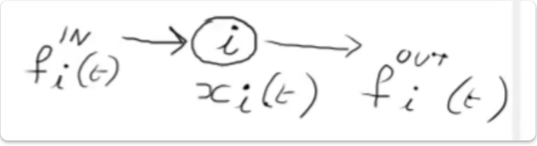
Sono detti anche *modelli di flusso* o *modelli di decisione* a seconda se il tempo è rispettivamente continuo (TC) o discreto (TD)

A ogni compartimento si può associare una variabile di configurazione dello stato stesso

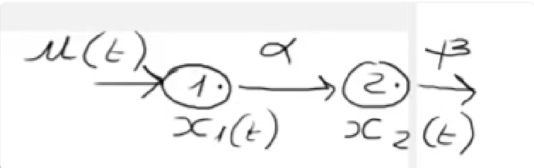


- In questo caso x_i rappresenta ad esempio il numero di studenti iscritti

In generale:



ESEMPIO CORSO MAGISTRALE:



- Equazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + f_1^{\text{in}}(t) - f_1^{\text{out}}(t) \\ &= x_1(t) + u(t) - \alpha\, x_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t+1) &= x_2(t) + f_2^{\text{in}}(t) - f_2^{\text{out}}(t) \\ &= x_2(t) + \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_2(t) \end{aligned}$$

- Equazioni di stato considerando come uscita il numero di laureati

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha)\, x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= \alpha\, x_1(t) + (1-\beta)\, x_2(t) \\ y(t) &= \beta\, x_2(t) \end{aligned}$$

- è modello TD non autonomo TI (tempo invariante perché si suppone α e β costanti)