BUONA POSIZIONE DEL PROBLEMA DI CONTROLLO

Come visto la retroazione sull'uscita non modifica gli autovalori nascosti, pertanto il polinomio $\varphi_h(s)$ rimane inalterato nel passaggio da anello aperto a ciclo chiuso
Polinomio in anello aperto:

$$\varphi(s) = \underbrace{\varphi_h(s)}\ a(s)$$

Polinomio in ciclo chiuso:

$$\varphi^*(s) = \underbrace{\varphi_h(s)}\ [a(s) + K\, b(s)]$$

Dato che il nostro obiettivo è quello di rendere il sistema in ciclo chiuso *asintoticamente stabile*, ovvero avere radici di $\varphi^*(s)$ con $\mathrm{Re} < 0$, allora:

- $\varphi_h(s)$ dato che rimane inalterato, dovrà essere stabile asintoticamente

> *Allora si dice che un problema in retroazione sull'uscita è **ben posto** (cioè più facilmente risolvibile), quando $\varphi_h(s)$ ha tutte radici con $\mathrm{Re} < 0$ - ovvero quando gli autovalori nascosti sono già stabili (non potendo essere modificabili)*

- Quindi se per la retroazione sullo stato si studia "solo" controllabilità e stabilizzabilità, in questo caso è necessario lo studio anche dell'*osservabilità*

Nota: il fatto che il problema sia ben posto è condizione necessaria per avere K guadagno stabilizzante ma in generale **non è sufficiente** con la legge di controllo $u = -Fy + Hy^o$

- Nel caso del carrello era possibile, ma abbiamo già visto un altro esempio in cui non era possibile

PROGETTO DELLA RETROAZIONE ALGEBRICA SULL'USCITA

Sappiamo che:

Specifiche di progetto

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^o y}(0) = 1$
- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

Dove:

- Per la specifica 1 e 3 si cerca K adatto
- Per la specifica 2 si sceglie H adatto
  - Con

$$G^*_{y^o y}(0) = \frac{b(0)}{a(0) + Kb(0)} H = 1$$

  - Quindi

$$H = \frac{a(0) + Kb(0)}{b(0)}$$

Quindi, riassumendo:

Progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sull'uscita

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$
   If $\varphi_h(s)$ asintoticamente stabile (non ci sono autovalori nascosti instabili)
   il problema di controllo è *ben posto* e si va al passo 2
   else il problema di controllo *non* è ben posto
   Il progetto non può essere concluso e l'algoritmo termina
2. **If** esiste K tale che $a^*(s) = a(s) + K\,b(s)$ asintoticamente stabile
   si fissa K (per soddisfare specifica 1 e possibilmente 3)
   si va al passo 3
   else la retroazione statica sull'uscita non è sufficiente per stabilizzare
   Il progetto non può essere concluso e l'algoritmo termina
3. **If** $b(0) \neq 0$
   si pone $H = \frac{a(0)+K\,b(0)}{b(0)}$ (per avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante)
   else non è possibile inseguire un riferimento costante
   si pone ad esempio $H = K$

- Se fallisce al caso 2, vedremo che ci saranno altre soluzioni

QUANDO L'ALGORITMO PUO' FALLIRE: COSA FARE

1. Problema non ben posto
   1. Agisco sulle matrici B (aggiungere/modificare variabili di controllo) e C
2. Autovalori nascosti
   1. Non ho abbastanza informazioni interne del sistema
3. Se fallisce anche se ben posto
   1. La retroazione algebrica sull'uscita non è sufficiente: devo considerare un controllore dinamico --> retroazione dinamica sull'uscita (con leggi di controllo non generali)
4. Caso particolare $b(0) = 0$ --> cerco di modificare $b(s)$ modificando B e/o C

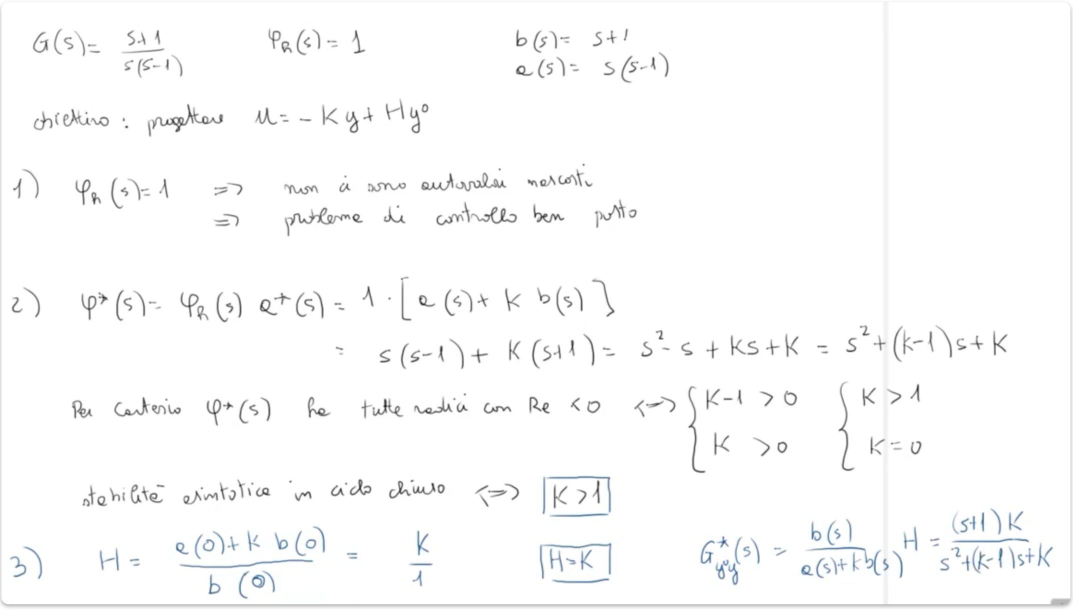
- Se l'algoritmo termina al passo 1 il problema di controllo **non** è ben posto perché ci sono autovalori nascosti con Re > 0
  In questo caso dobbiamo **modificare** B e/o C per garantire che gli autovalori a Re ≥ 0 non siano nascosti
- Autovalori nascosti = autovalori non controllabili e/o non osservabili
  - Autovalori non controllabili con Re ≥ 0
    $\Rightarrow$ dobbiamo modificare B (cambiare/aggiungere variabili di controllo)
  - Autovalori non osservabili con Re ≥ 0
    $\Rightarrow$ dobbiamo modificare C (cambiare/aggiungere sensori)
- Se l'algoritmo termina al passo 2 vuol dire che la retroazione statica sull'uscita non è sufficientemente potente per stabilizzare
  $\Rightarrow$ dobbiamo considerare leggi di controllo più generali:
  retroazione **dinamica** sull'uscita (controllore = sistema dinamico)
- Condizione $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2) soddisfacibile $\Leftrightarrow$ $b(0) \neq 0$
  Se $b(0) = 0$ e vogliamo mantenere l'uscita a un valore costante, dobbiamo modificare B e/o C in modo da modificare $b(s)$

Si fa un passo indietro quindi se l'algoritmo fallisce

ESEMPIO

- Supponendo al solito che non ci siano parti nascosti (sempre vero quando ci viene dato $G(s)$)
- Si vuole progettare una retroazione sull'uscita del tipo $u = -Ky + Hy^o$
- Dato che non ho autovalori nascosti, allora problema ben posto
- Calcolo quindi $\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\ a^*(s)$
- Uso Cartesio se il polinomio è di secondo grado per capire quando abbiamo tutte radici con $\mathrm{Re} < 0$
  - Quindi cerco i casi in cui abbiamo stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1)
    - Per la specifica 3 si disegna il luogo delle radici (per scegliere smorzamento e parte reale appositi)
- Calcolo H secondo la formula per la specifica 2 (guadagno in ciclo chiuso unitario)

Specifiche 1 e 2:



$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)}$ $\qquad \varphi_R(s) = 1$ $\qquad b(s) = s+1$, $a(s) = s(s-1)$

obiettivo: progettare $u = -Ky + Hy^o$

1) $\varphi_R(s) = 1 \Rightarrow$ non ci sono autovalori nascosti $\Rightarrow$ problema di controllo ben posto

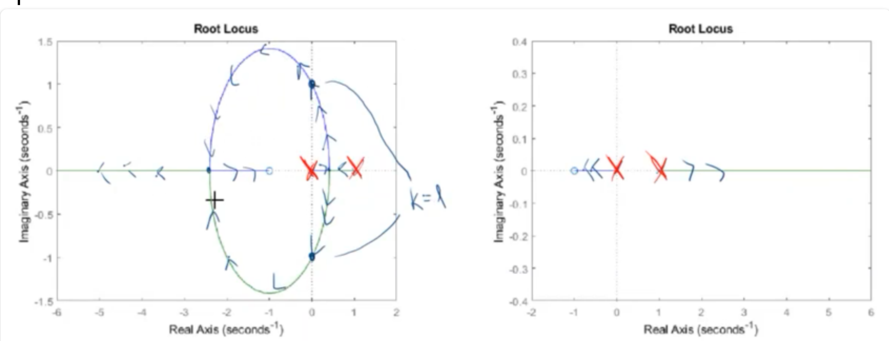
2) $\varphi^*(s) = \varphi_R(s)\, a^*(s) = 1 \cdot [a(s) + K\, b(s)] = s(s-1) + K(s+1) = s^2 - s + Ks + K = s^2 + (K-1)s + K$

Per Cartesio $\varphi^*(s)$ ha tutte radici con $\mathrm{Re} < 0 \iff \begin{cases} K-1 > 0 \\ K > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} K > 1 \\ K > 0 \end{cases}$

stabilità asintotica in ciclo chiuso $\iff \boxed{K > 1}$

3) $H = \frac{a(0) + K\, b(0)}{b(0)} = \frac{K}{1}$ $\qquad \boxed{H = K}$ $\qquad G^*_{y^o y}(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K b(s)} H = \frac{(s+1)K}{s^2 + (K-1)s + K}$

Specifica 3:



Luogo delle radici per $K > 0$ $\qquad$ Luogo delle radici per $K < 0$

Esempio sulle slide (in cui si sceglie $K = 6$ che comunque rispetta le specifiche):

- Ad esempio prendiamo $K = 6$ e quindi

$$\varphi^*(s) = s^2 + (K-1)\,s + K = s^2 + 5\,s + 6 = (s+2)\,(s+3)$$

$\Rightarrow$ autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = -2$ e $\lambda_2^* = -3$

- Guadagno in feedforward

$$H = \frac{a(0) + K\,b(0)}{b(0)} = K = 6$$

- Legge di controllo

$$u = -K\,y + H\,y^\circ = -6\,y + 6\,y^\circ = 6(y^\circ - y)$$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}\,H = \frac{s+1}{s^2 + (K-1)\,s + K}\,H = \frac{6\,(s+1)}{s^2 + 5\,s + 6}$$

Nota: In generale, per fissare K possiamo usare i criteri algebrici per studiare cosa succede alle radici di $\varphi^*(s)$ al variare di K

RETROAZIONE DINAMICA SULL'USCITA

- Quando la retroazione algebrica non basta

Idea: *generalizzare la legge di controllo precedentemente vista nel dominio di Laplace*

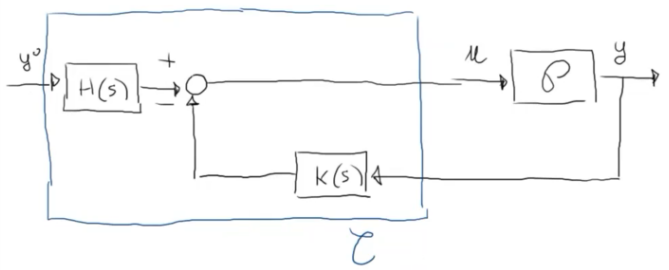
$$u(t) = -Ky(t) + Hy^o(t) \to U(s) = -HY(s) + HY^o(s) \to \text{da generalizzare}$$

Per generalizzare significa che H e K (guadagno in feedforward e in feedback) *non sono più scalari*, ma diventano *funzioni di trasferimento* (in modo tale da avere più margine di scelta)
Quindi:

$$u(t) = -Ky(t) + Hy^o(t) \to U(s) = -HY(s) + HY^o(s) \to \boxed{U(s) = -K(s)Y(s) + H(s)Y^o(s)}$$

- Viene detta *retroazione dinamica* sull'uscita (dinamica perché *il controllore diventa un sistema dinamico*, ovvero avente le sue funzioni di trasferimento)
  - Vogliamo controllare un sistema dinamico $\to$ scegliamo un controllore dinamico (stessa complessità)

DIAGRAMMA A BLOCCHI



$$U(s) = -K(s)\,Y(s) + H(s)\,Y^o(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} -K(s) & H(s) \end{bmatrix}}_{\text{funzione di trasferimento del controllore}} \begin{bmatrix} Y(s) \\ Y^o(s) \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{P}$: sistema da controllare (con accesso solo di u e y)
- $H(s)$: funzione di trasferimento (ovvero un *filtraggio* [elaborazione] del segnale di riferimento y^o)

- $K(s)$: altro *filtro* che elabora l'uscita y

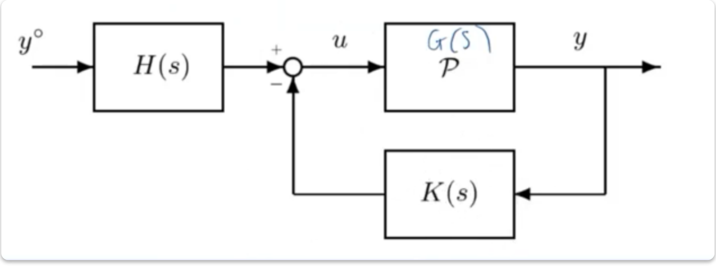
Sommando le due elaborazioni filtrate si genera *l'azione di controllo*

- Il controllore $\mathcal{C}$ quindi è un sistema dinamico e comprendere $H(s)$ e $K(s)$, avente una sua relazione ingresso uscita:

$$U(s) = -K(s)Y(s) + H(s)Y^o(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} -K(s) & H(s) \end{bmatrix}}_{\text{funzione trasferimento}} \begin{bmatrix} Y(s) \\ Y^o(s) \end{bmatrix}$$

> *il controllore prende in ingresso il riferimento e l'uscita e genera il segnale u attraverso la funzione di trasferimento*

Il vantaggio è che, a partire da una $G(s)$ data dell'impianto $\mathcal{P}$, possiamo progettare appositamente $K(s)$ e $H(s)$ per avere il comportamento desiderato al sistema in retroazione



SCELTA TIPICA DI H(F)

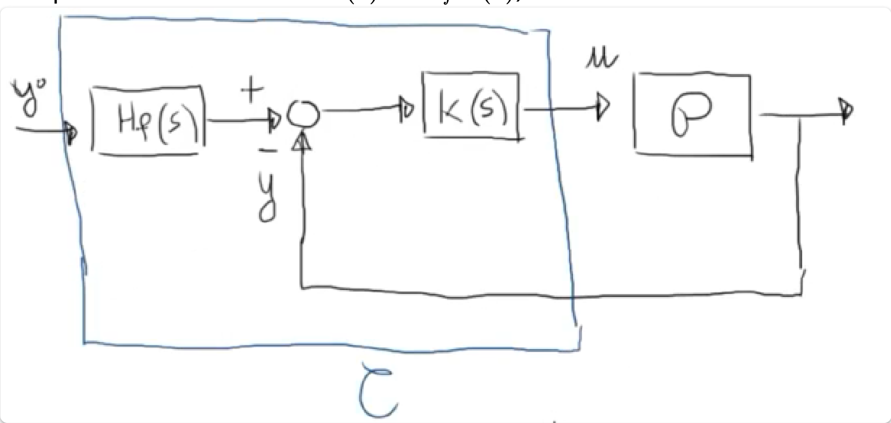
Nota: tipicamente si sceglie: $H(s) = H_f(s)K(s)$, dove $H_f(s)$ è un *prefisso* e $K(s)$ è un *guadagno in feedback*

- Quindi

$$U(s) = -K(s)Y(s) + H_f(s)K(s)Y^o(s) = K(s)[H_f(s)Y^o(s) - Y(s)]$$

  Lo schema di controllo diventa:
- Riferimento in ingresso y^o
- Lo elaboro con il prefisso $H_f(s)$, ottenendo: $H_f(s)Y^o(s)$
- Sottraggo l'uscita y, ottenendo la parentesi quadra $[H_f(s)Y^o(s) - Y(s)]$
- Elaboro tale risultato con il guadagno in feedback $K(s)$, cos' da ottenenere *l'uscita di controllo u*
- Essa entrata nell'impianto $\mathcal{P}$ (processo) che elabora l'uscita y

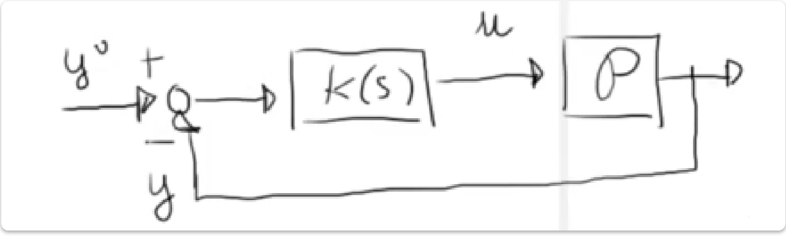
Schema molto usato in ambito industriale (cambia rispetto a quelle viste prima solo la struttura interna che porta una formula di $H(s) = H_f K(s)$)



Si distinguono 2 casi:

1. il prefisso non c'è, ovvero $H_f(s) = 1$, quindi:

$$U(s) = K(s)[Y^o(s) - Y(s)]$$



È un sistema di controllo **a un grado di libertà** (basta progettare una sola funzione di trasferimento $K(s)$)

- L'azione di controllo u dipende solo dell'errore d'inseguimento $y^o - y$

2. Se $H_f(s) \neq 1$ allora il sistema di controllo è a **due gradi di libertà**, quindi dovremo progettare due sistemi di controllo che sono dipendenti dal riferimento e dall'uscita secondo la legge di $U(s)$

SISTEMA A CICLO CHIUSO

Si arriva a un risultato molto simile analogo a quello della retroazione algebrica già vista in precedenza (lezione scorsa), in cui avevamo:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \mathcal{C}: u = -Ky + Hy^o$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \qquad \mathcal{P}^*: \quad G^*_{y^o y}(s) = \frac{H\,G(s)}{1 + K\,G(s)} \quad \leftarrow \text{dimostrato la scorsa lezione}$$

Adesso invece cambia il nostro controllo $\mathcal{C}$, ma il risultato della funzione di trasferimento è lo stesso, solo che ci inseriamo le funzioni $H(s)$ e $K(s)$ al posto delle costanti H e K:

$$\mathcal{C}: U(s) = -K(s)\,Y(s) + H(s)\,Y^o(s)$$

$$\mathcal{P}^*: \quad G^*_{y^o y}(s) = \frac{H(s)\,G(s)}{1 + K(s)\,G(s)}$$

Ponendo $H_f(s)$ costante (vedremo che basterà per le mie specifiche), ovvero H_f, si ottiene $H(s) = H_f(s)K(s) = H_fK(s)$, quindi:

$$\boxed{G^*_{y^o y}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} H_f}$$

Che rappresenta la *funzione di trasferimento in ciclo chiuso* che utilizzeremo per la retroazione dinamica per l'uscita

RISCRITTURA IN TERMINI DI POLINOMI

Possiamo riscrivere il risultato ottenuto in termini di polinomi invece di $G(s)$ e $K(s)$.

(Nota: simile a quanto già visto:

$$P^*: \quad G^*_{y^o y}(s) = \frac{H\,G(s)}{1+K\,G(s)} \longleftarrow \text{dimostrato la scorsa lezione} \quad = \frac{b(s)}{a(s)+K\,b(s)} H$$

)

Quindi:

- Posso riscrivere $G(s)$ come rapporto di polinomi (con $b(s)$ e $a(s)$ polinomi dati dal problema)
- Posso riscrivere $K(s)$ come rapporto di polinomi (con $q(s)$ e $p(s)$ **polinomi scelti da me**)
  (semplificazione: moltiplico per $p(s)$ e $a(s)$)

$$G^*_{y^o y}(s) = \frac{K(s)\,G(s)}{1+K(s)\,G(s)} H_f \qquad \boxed{C: \; U(s) = K(s)\left[H_f Y^o(s) - Y(s)\right]}$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \qquad K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

$$G^*_{y^o y}(s) = \frac{\frac{q(s)}{p(s)}\frac{b(s)}{a(s)}}{1+\frac{q(s)}{p(s)}\frac{b(s)}{a(s)}} H_f = \frac{p(s)\cancel{a(s)}\,\frac{q(s)b(s)}{p(s)\cancel{a(s)}}}{p(s)a(s) + p(s)\cancel{a(s)}\,\frac{q(s)b(s)}{p(s)\cancel{a(s)}}} H_f$$

$$\boxed{G^*_{y^o y}(s) = \frac{q(s)\,b(s)}{p(s)a(s)+q(s)b(s)} H_f} = \frac{q(s)\,b(s)}{a^*(s)} H_f$$

$$\boxed{a^*(s) = p(s)\,a(s) + q(s)\,b(s)}$$

NB: nel caso di retroazione algebrica $K(s)=K \quad q(s)=K \quad p(s)=1$
$a^*(s) = a(s) + K\,b(s)$

Scegliendo $q(s)$ e $p(s)$ posso associare i poli in ciclo chiuso che mi servono

Note:

- al numeratore rimangono gli zeri di $G(s)$ e $K(s)$ [quindi cambia poco]
- al denominatore abbiamo un nuovo polinomio dei poli in ciclo chiuso, che dipende da $a(s)$, $b(s)$, $q(s)$, $p(s)$
  - per questo di rinomina il denominatore con $a^*(s)$
  - la cosa buona adesso è che possiamo agire su $p(s)$ e $q(s)$ per modificare i poli come vogliamo (abbiamo più gradi di libertà sul polinomio)

POLINOMIO CARATTERISTICO IN CICLO CHIUSO

Per il polinomio caratteristico in ciclo chiuso, si sottolinea che la parte di $\varphi_h(s)$ rimane inalterata (perché come detto non si modificano i poli nascosti). Discorso diverso invece per $a(s)$, che diventa $a^*(s)$. Quindi:

$$\overbrace{\varphi(s) = \varphi_h(s)a(s)}^{\text{anello aperto}} \implies \overbrace{\varphi^*(s) = \varphi_h(s)a^*(s) = \varphi_h(s)\,[p(s)a(s)+q(s)b(s)]}^{\text{ciclo chiuso}}$$

RIASSUMENDO

Fatto 3.9 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita $U(s) = K(s)[H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)]$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\, a^*(s) = \varphi_h(s)\, [p(s)a(s) + q(s)b(s)]$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)\, G(s)}{1 + K(s)\, G(s)}\, H_f = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)}\, H_f$$

Quindi per il progetto dovremo costruire appositamente per rispettare le specifiche:

- $q(s)$, $p(s)$ (specifica 1 e 3)
- H_f (specifica 2)

Procedimento simile solo che adesso per progettare $K(s)$ abbiamo un *rapporto di polinomi* (quindi è un po' più complesso)

ESEMPIO (quello che non riuscivamo a stabilizzare)

- Non poteva essere stabilizzato con la retroazione algebrica $u = -Ky + Hy^\text{o}$
- Ci proviamo allora con le retroazione dinamica: $U(s) = K(s)[H_f Y^\text{o}(s) - Y(s)]$
  - Scegliamo $K(s)$ come rapporto di polinomi di primo grado (così da avere 3 parametri liberi p_0, q_0, q_1)
  - Riscrivo $\varphi^*(s)$ e vedo un po'
  - Impongo coefficienti $\varphi^*(s)$ in modo arbitrario (ora ne ho la possibilità)
  - Così da avere le radici (non nascoste) posizionate dove vogliamo

$G(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$ $\quad \varphi_R(s) = 1$ $\quad b(s) = 1$, $a(s) = s^2 - 1$

retroazione algebrica: $u = -Ky + Hy^\circ$ $\quad \varphi^*(s) = s^2 - 1 + K$
non esiste K stabilizzante

retroazione dinamica $U(s) = -K(s)Y(s) + H(s)Y^\circ(s) = K(s)[H_f Y^\circ(s) - Y(s)]$ $\quad H(s) = K(s) H_f$

$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}$ $\quad p_0, q_0, q_1$ parametri liberi

$$\varphi^*(s) = \varphi_R(s)\, a^*(s) = \varphi_R(s)\left[a(s)p(s) + b(s)q(s)\right] = 1\left[(s^2-1)(s+p_0) + 1(q_1 s + q_0)\right]$$
$$= (s^2-1)(s+p_0) + q_1 s + q_0 = s^3 + p_0 s^2 - s - p_0 + q_1 s + q_0$$
$$= s^3 + p_0 s^2 + (q_1 - 1)s + q_0 - p_0$$

al variare di p_0, q_0, q_1 posso assegnare i coefficienti di $\varphi^*(s)$ in modo arbitrario

- Posizioniamo i poli in ciclo chiuso in $-1, -10, -10$ (numeri scelti)
  - Basta fattorizzare $\varphi^*(s)$ per capire la forma in generale
  - Vado a eguagliare i coefficienti

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) &= \varphi_h(s)\,[p(s)a(s)+q(s)b(s)]\\ &= (s+p_0)\,(s^2-1)+(q_1 s+q_0)\\ &= s^3+p_0 s^2 - s - p_0 + q_1 s + q_0 = s^3 + p_0\, s^2 + (q_1-1)\,s - p_0 + q_0\end{aligned}$$

- Al variare di p_0, q_0, q_1 possiamo assegnare in modo arbitrario il polinomio caratteristico in ciclo chiuso
- Ad esempio, se vogliammo posizionare i poli in ciclo chiuso in -1, -10 e -10 poniamo

polinomio caratteristico in ciclo chiuso desiderato →

$$\varphi^*(s) = (s+1)\,(s+10)^2 = (s+1)\,(s^2+20s+100) = s^3+21s^2+120s+100$$

Di conseguenza, eguagliando i due polinomi

$$\begin{cases} p_0 = 21 \\ q_1 - 1 = 120 \\ -p_0 + q_0 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 21 \\ q_1 = 121 \\ q_0 = 121 \end{cases}$$

Possiamo inserirli in $K(s)$ così da ottenere:

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{121\,s + 121}{s + 21}$$

Da cui, la funzione di trasferimento in ciclo chiuso:

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)+q(s)b(s)}\,H_f = \frac{121s+121}{s^3+21s^2+120s+100}\,H_f$$

Per la specifica 2, imponiamo inseguimento costante uguale a 1, ovvero:

- Per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante dobbiamo imporre $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{121}{100}H_f = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H_f = \frac{100}{121}$$

Quindi possiamo esplicitare la legge di controllo in Laplace

$$U(s) = K(s)\left[H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)\right]$$

$$U(s) = \frac{121\,s + 121}{s+21}\left[\frac{100}{121}\,Y^\circ(s) - Y(s)\right]$$

SCELTA DELL'ORDINE DEL CONTROLLORE

Siano

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

e

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad , \quad \text{con grado } p(s) = \text{grado } q(s) = n_K \ \textbf{ordine del controllore}$$

Allora abbiamo $2n_K + 1$ **parametri liberi**

> *Se scegliamo $n_K \geq \text{grado } a(s) - 1$ allora possiamo scegliere i coefficienti di $a^*(s)$ arbitrariamente per garantire il posizionamento che vogliamo nei poli a ciclo chiuso (quindi abbiamo un controllore adatto)*

- Come nell'esempio precedente: avevamo $\text{grado } a(s) = 2$ quindi abbiamo scelto $K(s)$ come rapporto di polinomi di primo grado (grado $n_K = a(s) - 1 = 2 - 1 = 1$)