TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

INTRODUZIONE

- Si applica su sequenze di **durata finita**
  - Indichiamo con N il numero totale di campioni della sequenza
  - L'intervallo dei campioni è $[0; N-1]$

- Si può applicare anche su **sequenze periodiche**
  - Infatti nonostante non siano di lunghezza finita, si può estrarre la sequenza che si ripete semplicemente conoscendo quanto vale il periodo (*basta conoscere tutti gli N campioni in un periodo* che di fatto individuano da soli l'intero segnale)

La trasformata di Fourier che abbiamo visto in una sequenza finita, sarebbe così definita:

$$X(F) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, e^{-j2\pi Fn}$$

- "avevamo" un numero finito di campioni che caratterizzano il segnale nel tempo che poi sono stati associati con la trasformata $X(F)$ quindi a una funzione di variabile F *continua*.
  - Abbiamo cioè associato a una funzione con N parametri una funzione nel dominio della frequenza che in teoria può assumere infiniti valori della trasformata di Fourier.

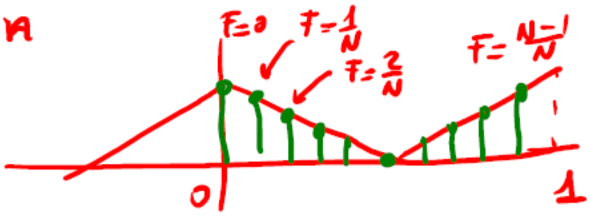
> > *Abbiamo avvero bisogno di infiniti valori associabili per la trasformata per descrivere il segnale quando in ingresso nel tempo abbiamo una sequenza finita di N numeri?*

Si può eliminare questa *ridondanza* appena descritta **campionando la trasformata di Fourier su N valori**.

Ovvero, ad esempio (periodo $[0; 1]$):

- Campioniamo in questo modo: $X(F)|_{F=k/N}$, con $k=0,1,\dots,N-1$

$$X(F)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi F n}$$



- Chiamiamo ciascun campione $X[k]$
  Adesso abbiamo finalmente N valori nel tempo e N valori in frequenza.

Si ottiene, sostituendo $F \to k/N$:

$$\boxed{x[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\; e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}} \quad , \quad k=0,1,2\dots,N-1 \;(\text{intero})$$

La cosa importante è capire che dagli $X[k]$ si può tornare indietro per riottenere $x[n]$ (vedi dopo come)

- Facendo questo, abbiamo perciò definito una nuova trasformata di Fourier che è:
  - *discreta nel tempo*
  - *produce in frequenza valori discreti*
- Abbiamo quindi ottenuto un risultato utile anche da implementarlo al calcolatore
- (la trasformata di Fourier per sequenze produceva valori continui in frequenza)

ANTITRASFORMATA

> > *Prima del calcolo effettivo, abbiamo bisogno di una formula utile*

Consideriamo la seguente sequenza, in funzione di m:

$$\boxed{\phi[m]=\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{k}{N}m}=\begin{cases} N & m=0,\pm qN,\ q\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}}$$

- Dove si mostra che vale 0 notando che abbiamo una serie geometrica troncata, del tipo:

  $$e^{(-j\frac{2\pi m}{N})^k}=a$$

  , che appunto rientra nella serie geometrica:

  $$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1-a^n}{a-a}$$

  e rimane

  $$\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{N}}m\cdot\cancel{N}}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}m}}=0$$

  Si dimostra che l'antitrasformata vale:

  $$\boxed{x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\; e^{j2\pi\frac{k}{N}n}}$$

Dove $X[k]$ sono i campioni che abbiamo trovato prima (r indice temporale):

$$X(K) = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]e^{-j2\pi\frac{k}{N}r}$$

"Dimostrazione"
Sostituendo $X[k]$ in $x[n]$ si ottiene:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{r=0}^{N-1} x[r]e^{-j2\pi\frac{k}{N}r}\right) e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$

Scambiando le sommatorie:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} x[r]\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{k}{N}(r-n)}}_{\approx\phi[m],\, m=r-m}$$

Allora, dato che abbiamo individuato la *formula* nell'espressione di $x[n]$, possiamo dire che la sommatoria in k vale:

- qN, se $r - n = 0$
- 0 altrove

Pertanto si arriva a dire che, supponendo per comodità $q = 1$:

$$x[n] = \frac{1}{\cancel{N}}\sum_{r=0}^{N-1} x[r]\ \cancel{N} \quad , \quad r = \pm qN \ , \ q \in \mathbb{Z}$$

Ovvero:

$$x[n] = x[n] \quad , \quad C.V.D.$$

- abbiamo cioè ricavato $x[n]$ (membro di destra) partendo dai soli $X(K)$.

PERIODICITA' DI X[k] e x[n]

- $X[k]$ e $x[n]$ sono **periodiche**

Dimostrazione:
Dimostriamo che è periodica di periodo N

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$$

Basta dimostrare che $X[k+N] = X[k]$. Allora:

$$X[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{k+N}{N}n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}}_{X[k]} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi\cancel{\frac{N}{N}}^{1} n}}_{1}$$

Quindi una sequenza DFT finita può (e deve) essere trattata come una sequenza periodica.

Vale lo stesso anche per $x[n]$, infatti anche lei è una sequenza periodica
Dimostrazione

$$IDFT = DFT^{-1} = x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\ e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Calcoliamo quindi: $x[n+N]$

$$x[n+N] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\; e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)}$$

Da cui, come prima:

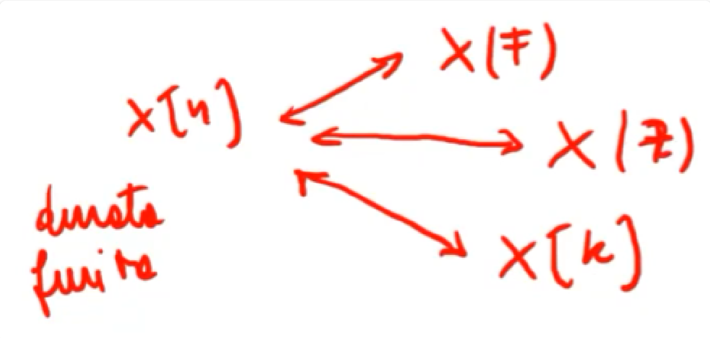
$$x[n+N] = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[K]\; e^{j\frac{2\pi k}{N}n}}_{X[n]} \cdot \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{\cancel{N}}k\cancel{N}}}_{1} =$$

- $x[n]$ è quindi periodica

Quindi in generale si considerano sempre sequenze periodiche

RELAZIONI TRA LE TRASFORMATE

Possiamo facilmente concludere che le trasformate che abbiamo visto (Fourier, Z, Discreta), sono relazionate tra loro (a patto per ora che $x[n]$ sia finita), e dunque è possibile passare da una all'altra con le operazioni di antitrasformata e quindi nuovamente di trasformata.



- Ad esempio si può passare da $X(F)$ a $X[k]$ facendo la trasformata di Fourier per sequenze inversa (cosi da ottenere $x[n]$) e quindi applicare la DFT per giungere a $X[k]$.

  Nota: esistono anche relazioni dirette tra le varie trasformate, senza passare da $x[n]$

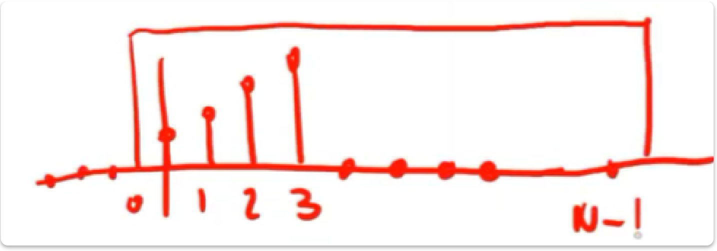
  > - Infatti come visto, si può passare direttamente da $X(F)$ a $X(k)$ con l'operazione di **campionamento**, ovvero:
  >
  > $$X(F) \longrightarrow X[k] = X(F)|_{F=k/N}$$
  >
  > > - (quindi in generale si può usare in qualche modo la DFT come strumento di campionamento veloce)

NOTE SUL PERIODO

Il periodo può essere anche diverso dalla lunghezza della sequenza

- Infatti magari in alcuni casi, se abbiamo per esempio una sequenza "corta", si può utilizzare come periodo una sequenza "più lunga" composta dai campioni della sequenza di partenza più altri campioni fino alla lunghezza del periodo posti a 0.

  > - Graficamente, supponiamo di avere una sequenza con 4 campioni. Il periodo potrebbe essere di $N-1$ campioni con $N-1>4$. In questi casi dal quinto campione fino all'N-esimo meno uno si aggiungono degli zeri:

- 

- Quindi il periodo (ovvero il numero di campioni) su cui si calcola la DFT (nonché il campionamento in frequenza) può essere anche diverso dal numero di campioni che compongono la sequenza di riferimento. Per fare ciò si aggiungono degli zeri.

DFT PER PLOTTARE LA X(F)

Sia: $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1\}$

Ha trasformata:

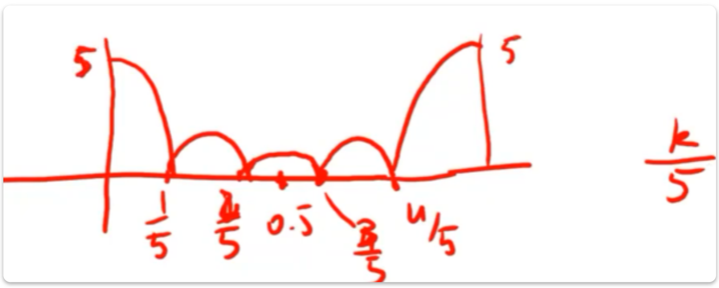
$$X(F) = \sum_{n=0}^{4} x[n] e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j2\pi Fn}$$

- Da cui, applicando la serie geometrica troncata e poi raccogliendo metà fase:

$$X(F) = \frac{1 - e^{j2\pi F5}}{1 - e^{-j2\pi F}} = \frac{e^{-j2\pi F\frac{5}{2}} \cdot e^{+j2\pi F\frac{5}{2}} - e^{-j2\pi F\frac{5}{2}}}{e^{-j2\pi F\frac{F}{2}} \cdot (e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})}$$

  Moltiplicando per $2j$ sopra e sotto:

$$X(F) = e^{-j2\pi F(\frac{5-1}{2})} \cdot \frac{\sin 5\pi F}{\sin \pi F}$$



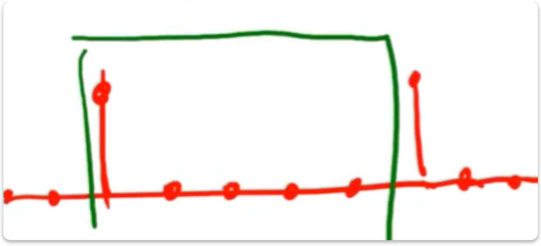
- dove gli zeri sono posizionati in $\frac{k}{5}$, avendo una sequenza con 5 volte 1
- è un *similsinc* (periodico)

> > *Supponiamo ora di calcolare la $x[k]$ con periodicità $N = 5$*

Sappiamo che: $X[k] = X(F)|_{F=\frac{k}{N}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

La sequenza quindi è:

$$x[0] = 5 \quad , \quad x[1] = x[2] = x[3] = x[4] = 0$$



- La sequenza è periodica ma ci interessa analizzare un singolo periodo (in verde)

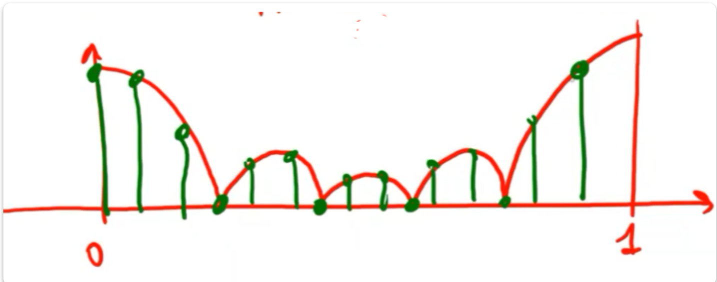
> > *Supponiamo ora di calcolare la $x[k]$ con periodicità MAGGIORE $N = 15$*

La sequenza di riferimento è dunque la seguente:

Quindi:

$$X[k] = X(F)|_{F=\frac{k}{15}},\ k = 0, 1, \dots, 14$$

Graficamente si ottiene (in verde):



- che rappresentano in modo migliore la $X(F)$, perché il campionamento è più fitto

Se vogliamo quindi plottare la $X(F)$ in maniera sempre più precisa, basta aumentare il numero di k (ovvero aggiungere 0 in fondo alla sequenza).
Il numero minimo di valori per poi tornare alla sequenza di partenza è il periodo del segnale (che al minimo è la lunghezza del segnale stesso)

PROPRIETA'

Le seguenti proprietà sono valide **per sequenze periodiche!**

1) LINEARITA'

La DFT è un operatore lineare.

2) TRASLAZIONE NEL TEMPO (CIRCOLARE)

ESEMPIO

Partiamo per capire con un esempio: trasliamo di un campione a destra la sequenza.

- È circolare perché e come se il campione in posizione 3 fosse uscito dalla sequenza e rientrato da sinistra (buffer circolare)

Questa è la traslazione da considerare quando parliamo di DFT per sequenze periodiche

DFT

Sappiamo che si può passare da $x[n]$ a $X[k]$ grazie alla DFT
Ma applicare la DFT su una sequenza traslata $x[n-n_0]$ in cosa consiste?
Si dimostra che:

$$\boxed{DFT\{x[n-n_0]\} = X(k)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}}$$

Quindi una traslazione nel tempo introduce un termine esponenziale a moltiplicare in frequenza

Dimostrazione
Applichiamo la definizione (facendo un cambio di variabile quando necessario)

$$DFT\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_0]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{p=-n_0}^{N-1-n_0} x[p]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(p+n_0)} \qquad n-n_0=p$$

$$= \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}} \sum_{p=-n_0}^{N-1-n_0} x[p]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kp}$$

- Il primo fattore ricorda il termine di fase tipico delle traslazioni
- Il secondo fattore coincide con $X[k]$, anche se la sequenza non parte da 0 e non arriva a $N-1$, ma c'è un valore n_0 di offset:
  - Si verifica facilmente però che, per $p=-n_0$:

$$\underbrace{x[-n_0]\; e^{-j\frac{2\pi}{n}k\,(-n_0)}}_{p=-n_0} = \underbrace{x[N-n_0]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-n_0)}}_{p=N-n_0} \quad , \quad \text{perche' la sequenza è periodica}$$

  - Possiamo quindi riscrivere l'ultimo passaggio in questo modo:

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}\sum_{p=-n_0+1}^{N-n_0} x[p]e^{-j\frac{2\pi}{N}kp}$$

  Ripetendo lo stesso ragionamento (faccio partire la sommatoria da un termine prima e arrivo a un termine prima) un certo numero di volte, ci sarà una configurazione del tipo:

$$DFT\{x[n-n_0]\}) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}\underbrace{\sum_{p=0}^{N-1} x[p]e^{-j\frac{2\pi}{N}kp}}_{X(k)}$$

- Abbiamo proprio trovato $X(K)$

3) TRASLAZIONE IN FREQUENZA

Si dimostra che una traslazione in frequenza di k_0 introduce un termine esponenziale a moltiplicare $x[n]$

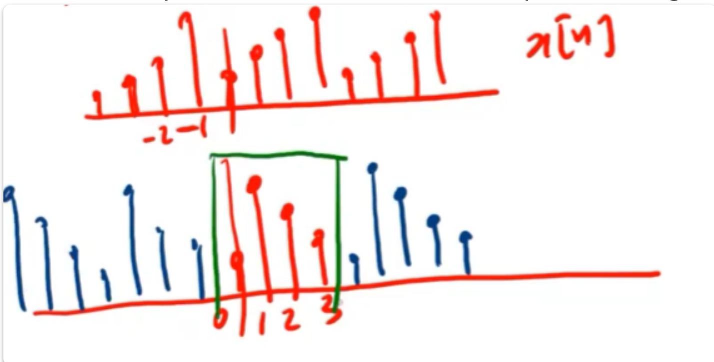
$$x[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} \longleftrightarrow X[k-k_0]$$

(sorta di dualità con traslazione nel tempo circolare)

Dimostrazione
(la stessa di 2))

4) INVERSIONE TEMPORALE

- Inversione: operazione di ribaltamento rispetto all'origine della sequenza: $x[n] \longrightarrow y[n] = x[-n]$



- dove il periodo (in verde) si ottiene tenendo fermo il campione in 0 e ribaltando temporalmente gli altri campioni

Vediamo l'effetto sulla DFT:
Si dimostra che:

$$x[-n] = y[n] \longleftrightarrow Y[k] = \sum_{p=0}^{N-1} x[p] e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)p} = X[-k]$$

Ovvero ribaltando nel tempo la sequenza, si ottiene una sequenza (sempre periodica) ribaltata nel dominio della sequenza

Dimostrazione:

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[-n] e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} \underbrace{=}_{\text{periodicita'}} \sum_{n=0}^{N-1} x[N-n] e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} \underbrace{=}_{\text{p=N-n}} \sum_{p=1}^{N} x[p] e^{-j2\pi k\frac{N-p}{N}} \underbrace{=}_{\text{parto da 0}} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \overbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N)}}^{1} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k(-p)}$$

Da cui quindi (riscrivendo l'esponenziale per far tornare un po' le cose):

$$Y[k] = \sum_{p=0}^{N-1} x[p] e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)p} = X[-k]$$

5) CONIUGAZIONE

Sia $x[n] \longleftrightarrow X[k]$
Allora:

$$y[n] = x^*[n] \longleftrightarrow X^*[-k] = Y[k]$$

Coniugando la sequenza, la DFT viene ribaltata sull'indice k e coniugata

- È una proprietà di **simmetria** (vedi dopo)

Dimostrazione:
(portando fuori il coniugato e lasciando in evidenza un meno all'esponenziale):

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n}\right)^* = X^*[-k]$$

SIMMETRIE

Supponiamo $x[n]$ reale, allora:

$$x[n] = x^*[n]$$

Facendo la DFT:

$$X[k] = X^*[-k] \qquad \text{(simemtria Hermitiana)}$$

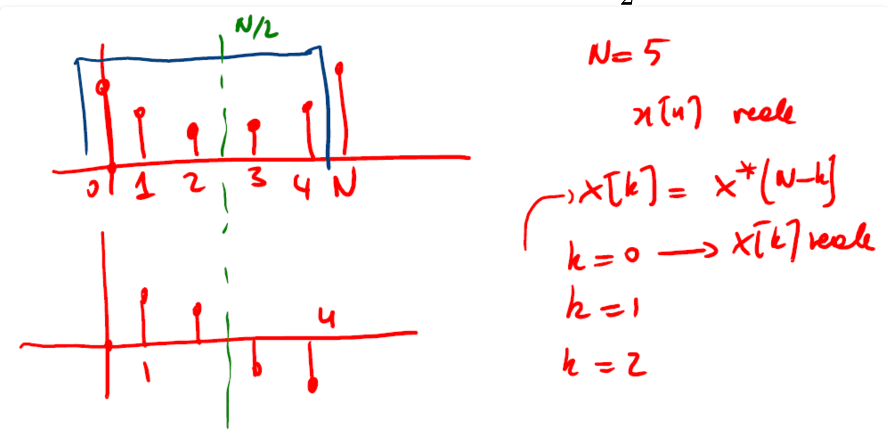
Analogamente si può riscrivere sfruttando la periodicità:

$$X[k] = X^*[N-k] \qquad \text{(simemtria Hermitiana)}$$

Questo implica che:

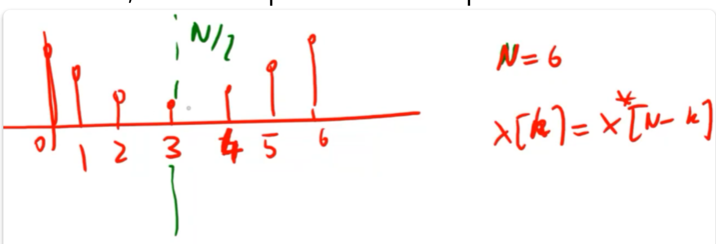
- **Ampiezza**: $|X[k]| = |X[N-k]|$
- **Fase**: $\angle X[k] = -\angle X[N-k]$

Graficamente, abbiamo una simmetria intorno a $\dfrac{N}{2}$:



- Dove in alto abbiamo le ampiezze e in basso la fase
- L'asse di simmetria sarà in questo esempio $\dfrac{5}{2}$

Per $N=6$, vediamo quest'altro esempio:



6) PARSEVAL

Si dimostra che:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, y^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, Y^*[k]}$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]\, e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}\right)^* =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y^*[k]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y^*[k] \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{X[k]}$$

Energia nei due domini

Inoltre, scegliendo $y[n] = x[n]$, si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Abbiamo ottenuto l'energia calcolata nel dominio del tempo e della freqeunza.