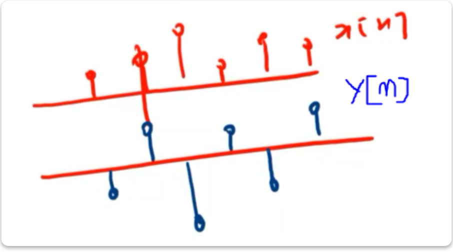
TRASFORMATE DI SEQUENZE FONDAMENTALI (parte2)

SEQUENZA "DISPARI"

Sia $x[n] \longleftrightarrow \overline{X}(F)$
Definiamo

$$y[n] = (-1)^n x[n]$$

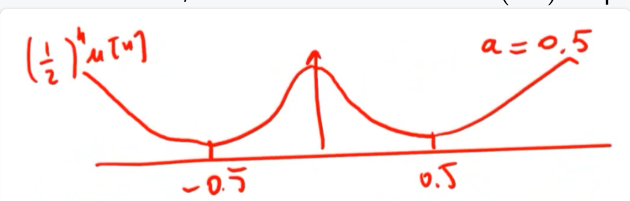
Ovvero la sequenza di partenza con ribaltamento dei campioni in posizione dispari:



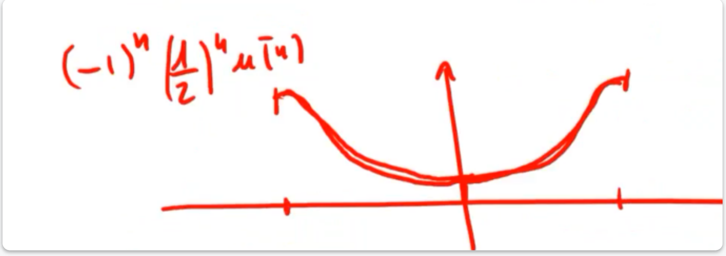
La **trasformata** è la seguente:

> $$\overline{Y}(F) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\right] e^{-j2\pi F n}$$
>
> *Osservando che $-1 = e^{j\pi}$, posso riscrivere $\overline{Y}(F)$ come:*
>
> $$\overline{Y}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi n}\, x[n] e^{-j2\pi F n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi (F-\frac{1}{2})n}}_{\overline{X}(F-\frac{1}{2})}$$

Possiamo quindi affermare che **moltiplicare per $(-1)^n$ equivale a eseguire una traslazione di $\frac{1}{2}$ in frequenza della $\overline{X}(F)$ di partenza**.

> **Esempio**
>
> Per quanto visto in precedenza sappiamo che:
>
> $$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi F}}$$
>
> Quindi applicando quanto visto:
>
> $$(-1)^n a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi (F-\frac{1}{2})}} = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j2\pi F} \cdot \underbrace{e^{j2\pi \frac{1}{2}}}_{-1}} = \frac{1}{1 + a e^{j2\pi F}}$$
>
> . Graficamente, ricordando che senza il $(-1)^n$ e per $a = 0.5$ otteniamo:
>
> 
>
>
> Si mostra facilmente che introducendo il termine $(-1)^n$ cioè ritardando lo spettro si arriva al

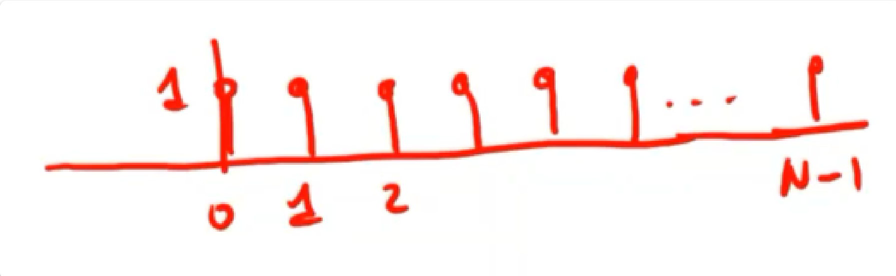
seguente risultato:



Ricordiamoci che è periodico!!

FINESTRA RETTANGOLARE (rect)

L'equivalente tempo discreto di un rettangolo è una **finestra rettangolare** ed è così rappresentabile:



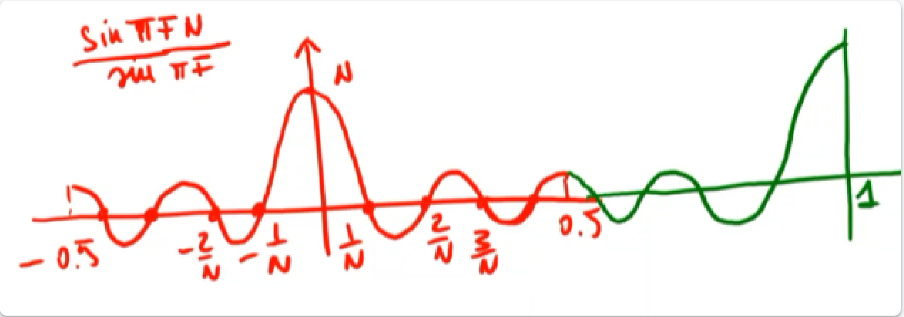
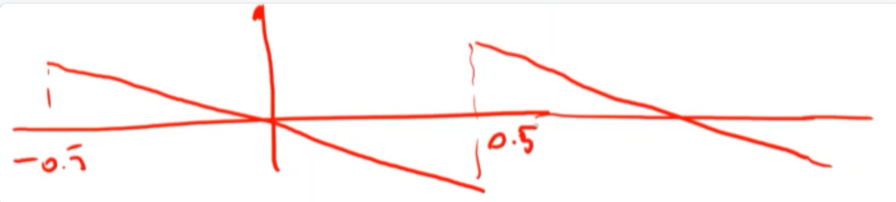
> *Matematicamente:* $x[n] = u[n] - u[n-N]$*, ovvero*
>
> $$\boxed{x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

Trasformata $\overline{X}(F)$

$$\overline{X}(F) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=0}^{N-1} (\underbrace{e^{-j2\pi F}}_{q})^n = \sum_{n=0}^{N-1} q^n$$

Siamo arrivati a una serie **geometrica troncata**, di ragione q:

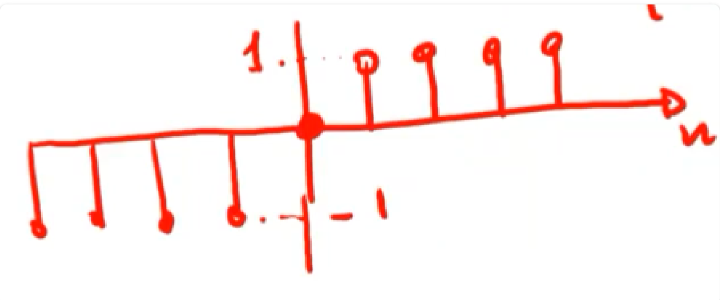
> *il fatto che sia troncata ci garantisce che la serie **converge** (infatti è una sommatoria di un numero finito di termini)*
>
> *Il risultato è noto dall'analisi matematica ed è il seguente (valido* $\forall q$*):*
>
> $$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^n}{1-q}}$$
>
> *Applicando questo risultato con* $q = e^{-j2\pi Fn}$*, otteniamo:*
>
> $$\overline{X}(F) = \frac{1-e^{-j2\pi Fn}}{1-e^{-j2\pi Fn}} \underbrace{=}_{\substack{\text{raccolgo} \\ \text{meta' fase}}} \frac{e^{-j\pi Fn}(e^{j\pi Fn} - e^{-j2\pi Fn})}{e^{-j\pi F}(e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})}$$
>
> *Da cui ci si riconduce alla formula di Eulero del seno moltiplicando sopra e sotto per* $2j$*:*
>
> $$\overline{X}(F) = [\ldots] = e^{-j2\pi F(\frac{N-1}{2})} \cdot \frac{\sin(\pi Fn)}{sin(\pi F)}$$

> *Dove è stato fatto comparire $\frac{N-1}{2}$ che è il centro di simmetria di un rettangolo*
> ***Riassumendo**:*
>
> $$\boxed{u[n]-u[n-N] \quad \longleftrightarrow \quad e^{-j2\pi F\left(\frac{N-1}{2}\right)} \cdot \frac{\sin(\pi F n)}{\sin(\pi F)}}$$
>
> *Graficamente:*
> *Lo spettro di ampiezza è simile a un sinc ("**similsinc**"), ma la principale differenza è che è **periodico**:*
>
> 
>
>
> *Lo spettro di fase invece è una **retta** con pendenza $2\pi \cdot \frac{N-1}{2}$ (più campioni di prende, più la retta ha pendenza maggiore). Anch'essa è evidentemente **periodica**:*
>
> 
>

SEGNO

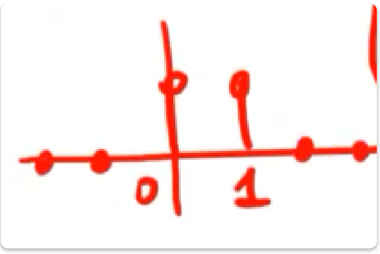
Sia:

$$x[n] = sgn[n] = \begin{cases} 1 & n>0 \\ 0 & n=0 \\ -1 & n<1 \end{cases}$$



Definiamo:

$$y[n] = \overbrace{\Delta x[n] = x[n]-x[n-1]}^{\diamondsuit} = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 0 & n\geq 2 \\ 1 & n=0 \\ 1 & n=1 \end{cases} \quad \underbrace{=}_{\text{dal grafico}} \overbrace{\delta[n]+\delta[n-1]}^{\clubsuit}$$



- Abbiamo due impulsi discreti unitari (uno centrato in 0 e uno centrato in 1).

Eseguendo la **trasformata** di entrambe le notazioni sopra descritte si ottiene:

$$\diamondsuit \longleftrightarrow \overline{Y}(F) = \overline{X}(F)(1 - e^{-j2\pi F})$$

$$\spadesuit \longleftrightarrow \overline{Y}(F) = 1 + e^{-j2\pi F}$$

Deve valere quindi la relazione:

$$\boxed{\overline{X}(F)(1 - e^{-j2\pi F}) = 1 + e^{-j2\pi F}}$$

Pertanto,

$$\mathscr{F}\{sgn(n)\} = \overline{X}(F) = \frac{1 + e^{-j2\pi F}}{1 - e^{-j2\pi F}}$$

Ovvero:

$$\boxed{\boxed{sgn[n] \longleftrightarrow \frac{1 + e^{-j2\pi F}}{1 - e^{-j2\pi F}}}}$$

GRADINO

Dalla trasformata della sequenza segno appena dimostrata, si passa facilmente a trovare la trasformata del **gradino**, infatti sappiamo che:

$$u[n] = \frac{1}{2} sgn[n] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

- ovvero si ottiene moltiplicando la sequenza segno per $\frac{1}{2}$ e si aggiunge quindi un termine di ritardo $1/2$ per ottenere il gradino **unitario**. Infine sommiamo ancora $\frac{1}{2}\delta[n]$ per "correggere" come vogliamo il termine in 0.

> **Trasformata del gradino**
>
> $$\mathscr{F}\{u[n]\} = \frac{1}{2}\mathscr{F}\{sgn[n]\} + \frac{1}{2}\delta(F) + \frac{1}{2}$$
>
> Dove per **linearità** è stata fatta la trasformata dei termini "facili" da vedere.
> Dalla relazione precedente conosciamo anche la trasformata della sequenza segno. Si può quindi concludere e riassumere in questo modo (facendo un po' di raccoglimenti e semplificazioni):
>
> $$\boxed{u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j2\pi F}} + \frac{1}{2}\delta(F)}$$

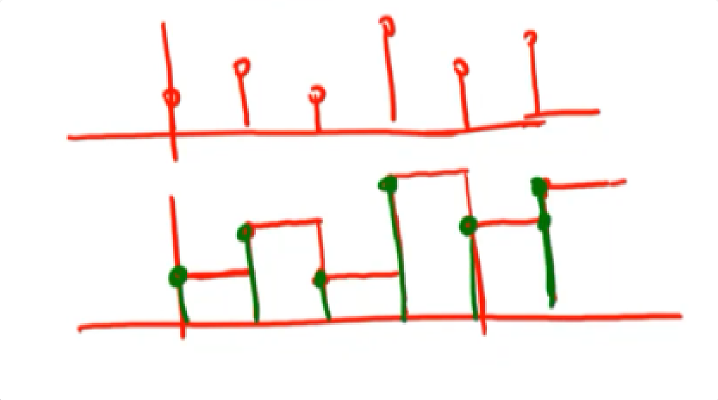
> **Nota bene:** la trasformata include anche una funzione generalizzata ($\delta(F)$), come ci si aspettava dato che la funzione gradino "non va a zero".

INTERPOLAZIONE A MANTENIMENTO

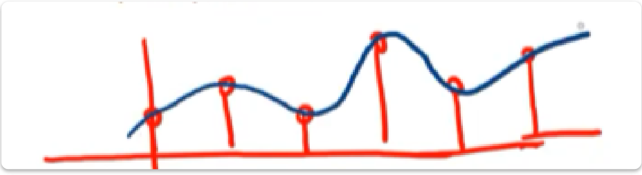
Precedentemente abbiamo visto l'*interpolazione cardinale* come primo modo di **ricostruire il segnale** a partire dai campioni. Esso era denominato $x_c(t)$ *però* presentava due problemi principali nell'utilizzo pratico, ovvero l'utilizzo della δ e del filtro H_{LP} ideale (cfr. Appunti vecchi e schema riassuntivo Lezione 5 maggio 1h e 11m circa).

Nell'utilizzo pratico si sceglie perciò un modo alternativo: **l'interpolazione a mantenimento**.

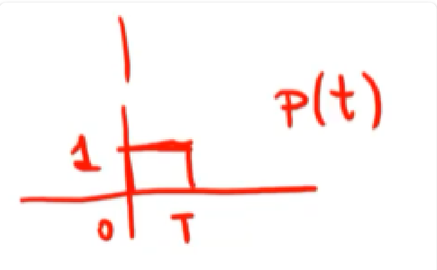
- La sequenza di partenza viene "unita", utilizzando delle funzioni *costanti a tratti*, viene cioè mantenuto il campione per tutta la durata del passo di campionamento
  - Si effettua in questo modo un **passaggio dal mondo discreto (digitale) al mondo continuo (analogico)**
  - Graficamente si formano tanti rettangoli attaccati tra loro (di altezza diversa a seconda del campione)

Potenzialmente, il segnale ricostruito potrebbe essere diverso da quello analogico di origine, che magari era fatto così:



- Passare dalla forma d'onda *costante a tratti* a quella *di partenza* è però in qualche modo possibile, ma è necessario definire un **modello** (matematico) della forma d'onda costante a tratti.
  Introduciamo quindi la **funzione rettangolare** $p(t)$ che descrive il mantenimento (costante) della funzione da un campione fino al successivo:

  Ovvero:

$$p(t) = rect(\frac{t - T/2}{T})$$

Possiamo quindi definire il segnale continuo ricostruito "a rettangoli" reiterando $p(t)$ per tutta la durata del segnale. Si ottiene quindi:

$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot p(t - nt)}$$

> **Nota**
>
> Il segnale $x_c(t)$ era così definito:
>
> $$x_{c(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \underbrace{\delta(t - nt)}$$
>
> Questa espressione risulta simile a quella trovata adesso ($\hat{x}(t)$), con la differenza che in una si usa l'impulso della δ e nell'altra invece si costruisce un rettangolo.
> Quello che cambia è lo spettro, come vediamo adesso...

Trasformata di $\hat{x}(t)$

Calcoliamo:

$$\hat{X}(F) \underbrace{=}_{\substack{\text{tempo} \\ \text{continuo}}} \mathscr{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot p(t - nt)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathscr{F}\{p(t - nt)\} \underbrace{=}_{\text{teo ritardo}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \underbrace{P(f)}_{\mathscr{F}\{p(t)\}} \cdot e^{-j2\pi FT}$$

Da cui:

$$\hat{X}(f) = P(f) \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fnT}}_{\overline{X}(F)}$$

Abbiamo quindi ottenuto una trasformata *simile* a quella vista utilizzando la δ (ovvero $\overline{X}(F)$)... **La differenza sostanziale nell'aver utilizzato il rettangolo sta nella comparsa del fattore $P(f)$** a moltiplicare. Riassumendo:

$$\boxed{\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot p(t - nt) \longleftrightarrow P(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fnT} = \hat{X}(f)}}$$

Trasformata di $p(t)$

Essendo $p(t)$ segnale rettangolare traslato, ovvero: $p(t) = rect(\frac{t - T/2}{T})$, possiamo calcolare facilmente la sua trasformata:

$$P(f) = T \cdot sinc(ft) \cdot e^{-j2\pi F \frac{t}{2}}$$

Riassumendo:

$$\boxed{rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \longleftrightarrow T\cdot sinc(ft)\cdot e^{-j2\pi F\frac{t}{2}}}$$

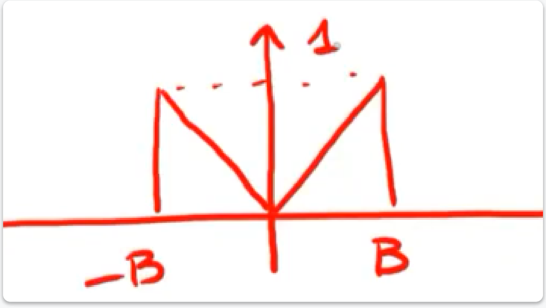
Dall'ultimo risultato ottenuto, si arriva a dire che:

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= \underbrace{\overline{X}(F)}\cdot T\cdot sinc(ft)e^{-j\pi FT}\\ &= \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{k}{T})\cdot\cancel{T}\cdot sinc(fT)\cdot e^{-j\pi FT}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{k}{T})\cdot sinc(fT)\cdot e^{-j2\pi FT}\end{aligned}$$

Questa relazione ci permetterà di modellare il segnale interpolato con mantenimento rispetto al caso ideale.

Esempio

Prendiamo il seguente segnale a banda limitata:



Tale che il suo spettro sia:

$$\overline{X}(F) = \frac{|f|}{B}\cdot\frac{1}{2B}\cdot rect(\frac{f}{2B})$$

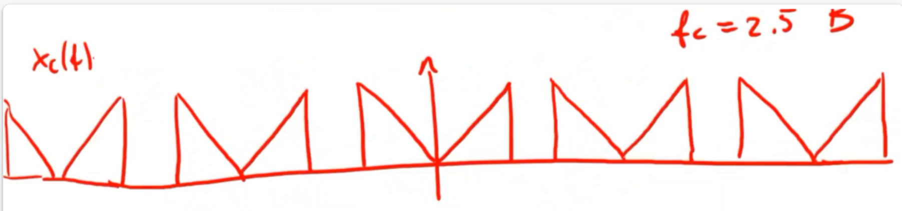
Andiamo a utilizzare una **frequenza di campionamento superiore rispetto a quella di Nyquist**, in particolare **maggiore del doppio della banda B** così da evitare il problema dell'utilizzare un filtro ideale per la ricostruzione. Scegliamo quindi per esempio

$$f_c = 2.5\ B$$

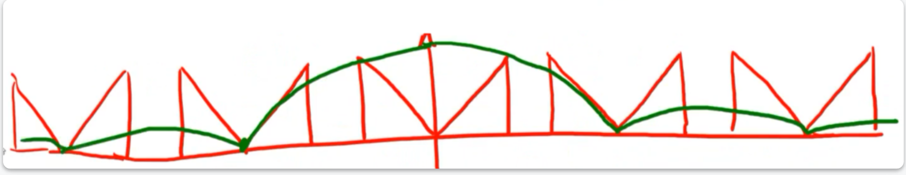
La formula che dobbiamo utilizzare è la seguente:

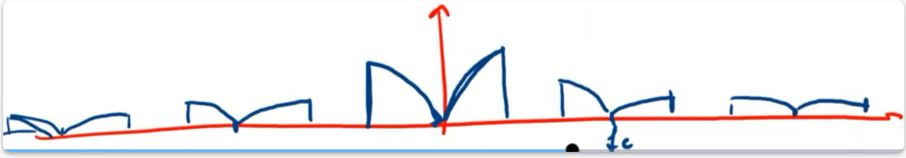
$$\hat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{k}{T})\cdot sinc(fT)\cdot e^{-j2\pi FT}$$

Utilizzando solo la prima parte della formula otterremmo il seguente andamento periodico (ovvero ciò che si ottiene utilizzando le δ):

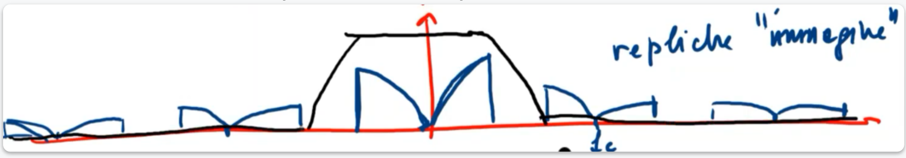


Dobbiamo moltiplicare tutto ciò per la funzione $sinc$ (in verde):

 Eseguendo questo prodotto otteniamo il segnale ricostruito con interpolazione a mantenimento:



Come si nota, si sono formate delle **repliche immagini** costituite da triangoli sempre più piccoli, ma pur sempre presenti. Per eliminarle, è sufficiente utilizzare un filtro passa basso (reale perché abbiamo $f_c \geq 2B$) in questo modo (parte nera):



Inoltre, il segnale appare "**smussato**" a causa della funzione $sinc$. Per risolvere il problema esistono principalmente due modi: **1)** si utilizza un *filtro analogico* che oltre a rimuovere le repliche immagini, ha un guadagno apposito (che somiglia all'inverso della funzione $sinc$ nell'intervallo desiderato, detto *shaping su banda passante*); **2)** Si *altera lo spettro del segnale campionato in modo digitale* (filtraggio digitale invece che analogico)