

TRATTAZIONE FORMALE: IPOTESI SEMPLIFICATIVE

Supponiamo che:

- Il sistema sia completamente controllabile (così che si può assegnare liberamente tutti gli autovalori in ciclo chiuso)
 - Posso scegliere come voglio i coefficienti di $\varphi^*(s)$ (polinomio caratteristico a ciclo chiuso) - con il vincolo che il primo sia $s^n \cdot \varphi_n^*$, con $\varphi_n^* = 1$ (monico)
- $r(s)$ ha tutte radici con parti reali minori di zero ($r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B$, va al numeratore di $G_{y^o y}^*(s)$)
- In questo modo, essendo stabile ci sono possibili semplificazioni tra numeratore e denominatore di $G_{y^o y}^*(s)$

Abbiamo:

$$\varphi^*(s) = s^n + \varphi_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \varphi_1^* s + \varphi_0^*$$

Ora:

- $r(s)$ è un generico polinomio di grado m , con $m < n$ tale che:

$$r(s) = r_m s^m + r_{m-1} s^{m-1} + \dots + r_1 s + r_0$$

- $\varphi^*(s)$ è un polinomio di grado n , che scegliamo di questo tipo:

$$\varphi^*(s) = \frac{\overbrace{r(s)}^{\text{grado } m}}{r_m} \frac{\overbrace{a^*(s)}^{\text{grado } n-m}}{a^*(s)} = \dots = \left(s^m + \frac{r_{m-1}}{r_m} + \dots + \frac{r_0}{r_m} \right) a^*(s)$$

- Dove $a^*(s)$ è un polinomio scelto da me (monico)
- Dividendo per r_m diventa monico anche $r(s)$

Tutto questo è comodo perché:

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{\cancel{r(s)}}{\frac{\cancel{r(s)}}{r_m} a^*(s)} H = \frac{r_m}{a^*(s)} H$$

- Abbiamo i poli esclusivamente in $a^*(s)$, che è come detto un polinomio scelto appositamente e infine due termini costanti r_m e H

Per garantire la specifica 2, si sceglie $H = \frac{a_0^*}{r_m}$ (così che $G_{y^o y}^*(0) = 1$)

E allora si giunge alla forma:

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{a_0^*}{a^*(s)}$$

- Con $a^*(s) = s^{n-m} + a_{n-m-1}^* s^{n-m-1} + \dots + a_0^*$ scelto da me (monico) - utile per dare l'andamento che vogliamo alla risposta a gradino a ciclo chiuso

Pertanto la risposta forzata al gradino in ciclo chiuso che abbiamo già visto in precedenza diventa:

- Polinomio $a^*(s)$ definisce i poli in ciclo chiuso e di conseguenza la forma della risposta al gradino in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_{y^o y}^*(s) \frac{Y_0}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a_0^*}{a^*(s)} \frac{Y_0}{s} \right\}$$

🔥 Importante: stabilità di $r(s)$

Nota bene: il polinomio $r(s)$ si semplifica (cancella) $\iff r(s)$ è stabile (altrimenti poi diventerebbe instabile anche $\varphi^*(s)$)

- Nel procedimento visto si cancella il polinomio $r(s)$ con la scelta

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m} a^*(s)$$

Si può fare se e solo se $r(s)$ ha tutte radici con $\text{Re} < 0$ perché $\varphi^*(s)$ deve essere un polinomio stabile!

Regola generale: nel progetto dei sistemi di controllo non si possono mai effettuare cancellazioni tra poli/zeri instabili, cioè con $\text{Re} \geq 0$

Nell'esempio di progetto precedente avevamo $n - m = 1$

- In questi casi la funzione di trasferimento si dice del **I ordine** ed è della forma:

- $$G_{y^o y}^*(s) = \frac{a_0^*}{s + a_0^*}, \quad \text{con } a_0^* > 0 \text{ numero scelto da me}$$

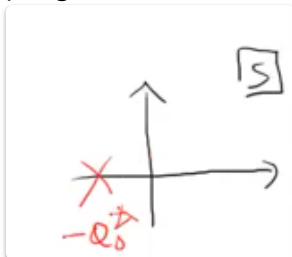
- Tale funzione di trasferimento dà luogo a una risposta al gradino $y^o(t)$ del tipo:

- Risposta al gradino $y^o(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_{y^o y}^*(s) Y^o(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a_0^* Y_0}{s(s + a_0^*)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Y_0}{s} - \frac{Y_0}{(s + a_0^*)} \right\} = \left(1 - e^{-a_0^* t} \right) \cdot Y_0 \cdot 1(t) \end{aligned}$$

- $\tau = 1/a_0^*$ **costante di tempo** del sistema

- Dove l'esponenziale $e^{-a_0^* t}$ dipende dalla posizione del polo che abbiamo assegnato dove vogliamo per garantire una convergenza a 0 di tale esponenziale sufficientemente alta



- la costante di tempo è utile per capire in quanto tempo si arriva alla risposta a regime

- il tempo di assestamento in particolare mi dice esattamente in quanto tempo di arriva in un intorno sufficientemente piccolo della risposta a regime

Se il grado relativo fosse 2, ovvero $n - m = 2$ si ottiene:

- Consideriamo il caso di **grado relativo** $n - m = 2$
- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso del **II ordine**

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{a_0^*}{s^2 + a_1^*s + a_0^*}$$

con $a_0^* > 0$ e $a_1^* > 0$ per la stabilità

- Parametri caratteristici della funzione di trasferimento in ciclo chiuso

- smorzamento** $\zeta = \frac{a_1^*}{2\sqrt{a_0^*}}$
- pulsazione naturale** $\omega_n = \sqrt{a_0^*}$

- In termini dei parametri caratteristici

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Poli in ciclo chiuso

$$p_{1,2}^* = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{Q_0^*}{Q_1^*}(s) + \frac{Q_2^*}{Q_1^*}(s)$$

\uparrow $n-m$

dove infatti:

$$s^2 + a_1^*s + a_0^* = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = a_0^*$$

$$\omega_n = \sqrt{a_0^*}$$

$$2\zeta\omega_n = a_1^*$$

$$\zeta = \frac{a_1^*}{2\sqrt{a_0^*}}$$

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{a_0^*}{s^2 + a_1^*s + a_0^*} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- lo smorzamento e la pulsazione naturale sono stati introdotti per caratterizzare il sistema perché ci daranno maggiori informazioni su esso

In particolare:

- al variare dello smorzamento abbiamo poli reali oppure immaginari

Se i poli sono reali abbiamo modi di evoluzione non oscillanti. Quindi la funzione al gradino al ciclo chiuso ha un andamento monotono quindi senza oscillazioni (che è buono per la specifica 3)

Nel caso sottosmorzato abbiamo comunque stabilità asintotica ($\text{Re} < 0$), però è presente la parte immaginaria quindi ci saranno modi di evoluzione oscillanti

- Poli in ciclo chiuso

$$p_{1,2}^* = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

• caso sovrasmorzato $\zeta \geq 1$ due poli reali

- andamento della risposta al gradino in ciclo chiuso monotono (simile al caso $n - m = 1$)
- specifiche dinamiche in termini di tempo di assestamento

• caso sottosmorzato $0 < \zeta < 1$ coppia di poli complessi coniugati

$$p_{1,2}^* = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$|p_{1,2}^*| = \omega_n$$

- risposta al gradino in ciclo chiuso con oscillazioni
- specifiche dinamiche in termini di tempo di assestamento e **massima sovraelongazione percentuale**

Da cui (evitando tutti i conti) si ottiene per il caso **sottosmorzato**:

- dove in rosso abbiamo il transitorio, infatti:
 - compare l'esponenziale reale (velocità di convergenza relativa ai poli)
 - compare anche la parte immaginaria (velocità delle oscillazioni)
- in blu invece il regime permanente (a gradino)

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso per $n - m = 2$

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2}^* = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

- Consideriamo il caso sottosmorzato $0 < \zeta < 1$

- Risposta al gradino $y^o(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G_{y^o y}^*(s) Y^o(s) \}$$

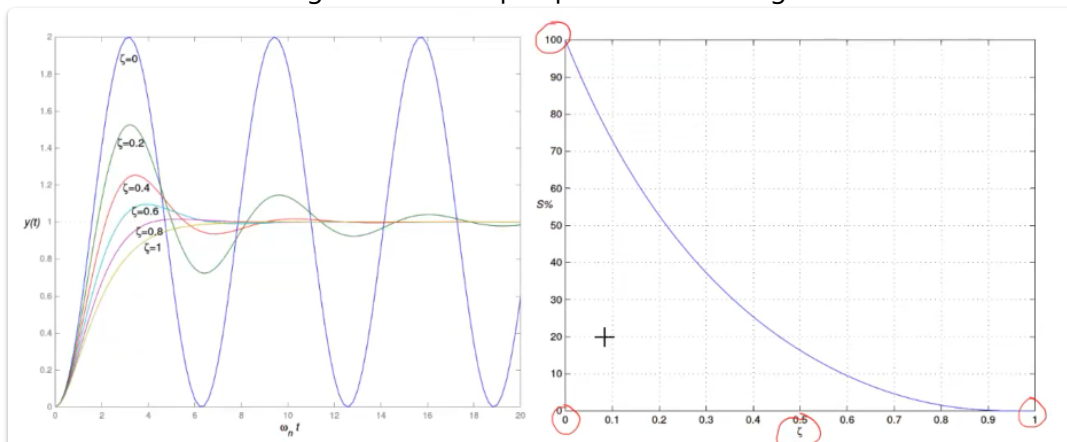
$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2 Y_0}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)} \right\}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \cdot Y_0 \cdot 1(t)$$

- Per $\zeta \rightarrow 0$ oscillazioni sempre meno smorzate
- Nel caso limite $\zeta = 0$ ci sono oscillazioni persistenti

Nota: Smorzamento piccolo \rightarrow tante oscillazioni

- il transitorio non converge se abbiamo poli puramente immaginari



- compaiono *sovra elongazioni* (supera il valore del permanente)

Massima sovraelongazione percentuale S : massima percentuale di superamento del valore di regime Y_0

- di quanto supera in percentuale il valore asintotico della risposta a regime
 - dipende dallo smorzamento: tanto più è piccolo, tanto più è grande la sovraelungazione (vedi grafico)
 - se lo smorzamento vale più di 1 come già detto non c'è sovraelungazione

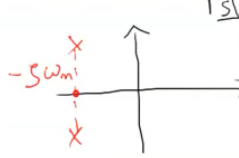
Valgono le formule:

• Nel caso $n - m = 2$ con $0 < \zeta < 1$

$$G_{y_0 y}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2}^* = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$T_{a,\varepsilon} \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(100/\varepsilon)$$

$$S = 100 e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$


- dove il tempo di assestamento dipende come già detto dalla parte reale dei poli: tanto più essi sono lontani dall'asse immaginario, tanto più è veloce (piccolo) il tempo di assestamento del transitorio

Nei progetti si assegnano $T_{a,\varepsilon}$ e S e si determinano la posizione dei poli (smorzamento e pulsazione naturale) per soddisfare le specifiche

- Nel caso $n - m = 2$ con $0 < \zeta < 1$

$$T_{a,\varepsilon} \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(100/\varepsilon)$$

$$S = 100 e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Più grande in valore assoluto $\zeta\omega_n$ (ossia più lontani dall'asse immaginario sono i poli) più piccolo il tempo di assestamento (e quindi più rapida la convergenza al valore di regime)
- Maggiore lo smorzamento ζ minore la sovraelongazione
- Specifiche dinamiche in termini di valori massimi accettabili per $T_{a,\varepsilon}^\circ$ e S°
 \Rightarrow specifiche in termini di ζ e ω_n

$$\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(100/\varepsilon) \leq T_{a,\varepsilon}^\circ$$

$$100 e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq S^\circ$$

CASO GENERALE $N - M > 2$

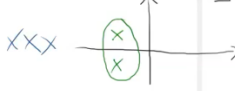
Ci si cerca di ricondurre ai casi precedenti fattorizzando $a^*(s)$, dopo aver posizionato i *poli dominanti* e gli altri poli con alta frequenza (lontani dall'asse immaginari), così che la funzione dipende solo dai (2) poli

dominanti (asintoticamente - perché hanno transitorio molto rapido)

$$G_y^* G(s) = \frac{e^{\lambda}}{Q^*(s)}$$

↑
grado $m-n$

- Consideriamo il caso di grado relativo $n - m > 2$
- In questo caso cerchiamo di ricordarci a uno dei due casi visti in precedenza
- Per posizionare gli $n - m > 2$ poli
 - **2 poli dominanti** sulla base delle specifiche dinamiche (ad esempio espresse in termini di $T_{a,\varepsilon}$ e S°)
 - $n - m - 2$ **poli in alta frequenza** con parte reale molto minore rispetto ai poli dominanti in modo da avere modi di evoluzione molto rapidi
- Polinomio dei poli in ciclo chiuso

$$a^*(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \tilde{a}^*(s)$$


con

- $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ polinomio dei poli dominanti
- $\tilde{a}^*(s)$ polinomio stabile dei poli in alta frequenza

LIMITI FISICI

Se vogliamo avere un transitorio molto rapido (ad esempio nell'ordine dei millisecondi), è necessario scegliere un guadagno F molto grande → guardando la legge di controllo però ci si accorge che non possiamo scegliere F arbitrariamente grande perché l'azione di controllo diventerebbe molto elevata (al punto da essere ingestibile)


- Nella pratica si sceglie un compromesso
 - Esempio: tranvia → si sceglie una via di mezzo per portare il mezzo in una certa posizione in un tempo relativamente buono per i miei scopi senza "sovraccaricare" il controllo
- Per avere un transitorio rapido (tempo di assestamento $T_{a,\varepsilon}$ piccolo) dobbiamo posizionare i poli in ciclo chiuso con parte reale molto negativa
- Questo può richiedere un guadagno F molto grande in quanto

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

⇒ azione di controllo $u = -Fx + Hy^\circ$ **non moderata**
- Nella pratica scegliamo F per avere un buon **compromesso** tra velocità di convergenza al regime permanente e moderazione dell'azione di controllo

Un modo alternativo per scegliere F (invece di posizionare i poli in modo da avere transitorio soddisfacente) è il **controllo ottimo**

- Tiene conto del compromesso sopra descritto (transitorio rapido pur rientrando nei limiti fisici)
 - Idea: tenere basso l'errore d'inseguimento e l'azione di controllo - sulla base di un parametro ρ a seconda delle mie esigenze (se preferisco avere un po' di più di errore o di controllo)



- **Controllo ottimo:** si sceglie F che rende minimo

$$J = \int_0^\infty \{ [y^\circ(\tau) - y(\tau)]^2 + \rho u^2(\tau) \} d\tau$$
- $(y^\circ - y)^2$ termine relativo all'errore di inseguimento
- u^2 termine relativo alla moderazione dell'azione di controllo
- ρ parametro di progetto che pesa l'importanza relativa dei due obiettivi
- Matlab lqr, Python control.lqr

ZERI INSTABILI (cioè se $r(s)$ non è stabile)

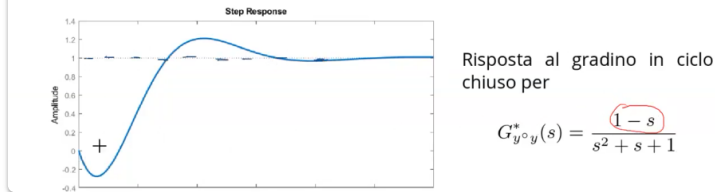
- ci sono zeri non cancellabili - rimangono nella funzione di trasferimento a ciclo chiuso

- abbiamo una sottoelongazione (perché avremo un polo con $\text{Re} > 0$)

- Se $r(s)$ non ha tutte radici a $\text{Re} < 0$ (ipotesi 2 non soddisfatta) allora non posso cancellare completamente $r(s)$
 \Rightarrow zeri instabili **non** possono essere cancellati e si ritrovano immutati nella funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y \circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

- In questo caso è più complicato soddisfare le specifiche dinamiche (vedi corsi/testi specifici di controlli automatici)
- Ad esempio può essere presente una **sottoelongazione** (undershoot) nella risposta al gradino in ciclo chiuso



- come si vede c'è uno zero al numeratore in 1

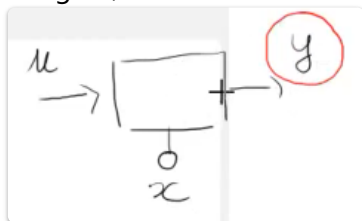
CONTROLLO IN RETROAZIONE SULL'USCITA

- Fin ora abbiamo visto il controllo in retroazione sullo stato, supponendo nella maggior parte dei casi che tutto il vettore $x(t)$ dello stato fosse accessibile per il controllo
- Supponiamo adesso che sia accessibile *solo l'uscita*, ovvero abbiamo una *informazione parziale*
 - cioè possiamo osservare solo l'uscita dello stato, senza osservare la sua conformazione interna (appare come una "scatola chiusa")

OSSERVABILITA'

Proprietà che descrive cosa stiamo osservando del comportamento interno del sistema osservando solo l'uscita y

- In figura, x è lo stato interno del sistema, che supponiamo di non poter osservare (nascosto)



- Proprietà duale della controllabilità, che ci diceva come l'ingresso influenzava l'uscita

EVOLUZIONE LIBERA E FORZATA

Sappiamo già che per un sistema LTI TC (supponendo $D = 0$):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Possiamo trovare la soluzione algebricamente passando da Laplace, e scomponendo le trasformate in evoluzione libera ed evoluzione forzata, sappiamo che:

- Soluzione del sistema nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{X_f(s)} \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}BU(s)}_{Y_f(s)} \end{aligned}$$

- $X_\ell(s)$ **evoluzione libera dello stato** dipende dalla matrice $(sI - A)^{-1}$
- $(sI - A)^{-1}$ ha come poli tutti e soli gli autovalori del sistema, radici del polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$

- Se torniamo nel tempo, sappiamo che $\mathcal{L}^{-1}\{X_\ell(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}x(0)\} = e^{At}x(0)$, ovvero dalla evoluzione libera dello stato si vedono tutti i modi naturali del sistema (basta antitrasformare)

- e attraverso il polinomio minimo $\varphi(s)$ vedo gli autovalori del sistema che sono gli zeri

- l'evoluzione forzata invece *dipende soltanto dalla parte controllabile del sistema*, infatti:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- se prendiamo i poli di $(sI - A)^{-1}B$ essi sono gli *autovalori controllabili* del sistema (ovvero gli zeri di quello che poi abbiamo definito come $\varphi_c(s)$)
 - Questo perché *alcuni autovalori si cancellano moltiplicando per B* (infatti nell'evoluzione libera questa moltiplicazione per B non c'è e vediamo tutti gli autovalori)
 - Abbiamo poi definito $\varphi_{nc}(s)$ come il complementare di $\varphi_c(s)$

L'USCITA E I SUOI AUTOVALORI OSSERVABILI

Guardando l'uscita $Y(s)$ invece, osserviamo che abbiamo una *premultiplicazione per la matrice C*.

- Tale operazione dal punto di vista matematico, può andare a *cancellare alcuni autovalori* che non compariranno come autovalori dell'*evoluzione libera* $C(sI - A)^{-1}$ dell'uscita
 - Quindi guardando l'uscita *non si vedono tutti gli autovalori*, ma rimangono soltanto i cosiddetti **autovalori osservabili**
 - Quelli che si cancellano sono detti autovalori non osservabili

- $Y_\ell(s)$ **Risposta libera**

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

dipende dalla matrice $C(sI - A)^{-1}$

$$\begin{aligned} y_\ell(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}x(0)\} \\ &= C e^{At}x(0) \end{aligned}$$

- Poli di $C(sI - A)^{-1}$ = **autovalori osservabili del sistema**

Definizione: un autovalore λ_i della matrice A si dice

- **osservabile** se compare come polo di $C(sI - A)^{-1}$ e quindi si vede nella risposta libera $Y_\ell(s)$
- **non osservabile** se non compare come polo di $C(sI - A)^{-1}$ (in quanto si cancella nel prodotto per C) e quindi non si vede nella risposta libera $Y_\ell(s)$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI OSSERVAZIONE

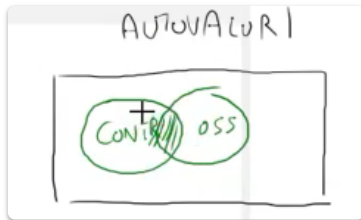
Allo stesso modo dell'evoluzione forzata dello stesso, definiamo una nuova fattorizzazione del polinomio caratteristico:

$$\varphi(s) = \varphi_o(s) \varphi_{no}(s)$$

Dove:

- $\varphi_o(s)$ **polinomio caratteristico di osservazione** ha come radici tutti e soli gli autovalori osservabili
- $\varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)}$ ha come radici tutti e soli gli autovalori non controllabili
- Per sistemi singola uscita $\dim(y) = 1$, $\varphi_o(s)$ si calcola come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $C(sI - A)^{-1}$
- Per sistemi con più uscite $\dim(y) > 1$ invece degli elementi di $C(sI - A)^{-1}$ dobbiamo considerare i determinanti delle sottomatrici quadrate

TIPOLOGIE DI AUTOVALORI



Gli autovalori quindi possono essere di 4 tipi:

- osservabili
- controllabili
- osservabili e controllabili
- né osservabili né controllabili

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Dato che abbiamo:

$$Y_f(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}B}_{G(s)} U(s)$$

- gli autovalori che rimangono sono quelli che non si cancellano né moltiplicando per C (quindi controllabili) né moltiplicando per B (quindi osservabili)
- **Perciò quelli che rimangono sono sia osservabili che controllabili**

Pertanto, dato che i poli di $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ sono i **poli del sistema** vale la seguente:

$$\{\text{Poli del sistema}\} = \{\text{Autovalori controllabili}\} \cap \{\text{Autovalori osservabili}\}$$

Nei sistemi siso, $G(s)$ come sappiamo ha una forma semplice:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- quindi i poli del sistema sono gli zeri di $a(s)$

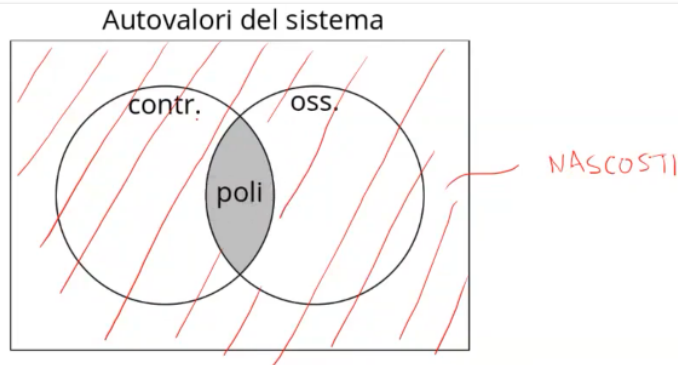
Quindi:

- evoluzione libera stato \rightarrow tutti gli autovalori come poli
- evoluzione forzata stato \rightarrow solo autovalori controllabili (resistono alla moltiplicazione per B)
- evoluzione libera uscita (risposta libera) \rightarrow solo autovalori osservabili (resistono a moltiplicazione per C)

- evoluzione forzata uscita (risposta forzata) → solo autovalori sia osservabili che controllabili (resistono a moltiplicazione per B e per C)

AUTOVALORI NASCOSTI

In rosso (relativi a perdita di osservabilità, controllabilità o entrambe):



- Autovalori non controllabili e/o non osservabili non compaiono come poli della $G(s)$, quindi non si vedono in $Y_f(s)$, e sono detti **autovalori nascosti**
- Vale la relazione

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{nascosti} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{non controllabili} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{non osservabili} \end{array} \right\}$$

- Per sistemi SISO $\dim(u) = \dim(y) = 1$, autovalori nascosti radici del polinomio

$$\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$$

Quindi nella relazione ingresso-uscita (passaggio da u a y attraverso il sistema), quello che si vede alla fine su y è solo la parte **controllabile** (quindi può essere modificata dal controllo) e **osservabile** (perché si vede in uscita)

- Il resto è nascosto

Abbiamo come mostrato una nuova fattorizzazione del polinomio (caso siso):

$$\varphi(s) = a(s) \varphi_h(s) \implies \varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$$

Fattorizzazioni viste finora (a seconda della proprietà che vogliamo):

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \underbrace{\varphi_c(s)}_{C(I-A)^{-1}B} \varphi_{mc}(s) \\ \varphi(s) &= \underbrace{\varphi_o(s)}_{C(sI-A)^{-1}} \varphi_{no}(s) \\ \varphi(s) &= \underbrace{\alpha(s)}_{C(I-A)^{-1}B} \varphi_R(s) \end{aligned}$$