ESERCIZIO: RETROAZIONE SULL'USCITA

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + \alpha^2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\alpha u \\ \dot{x}_3 = x_2 + u \\ y = x_3 \end{cases}$$

- a) Determinare il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
- b) Dire per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

Si fissi ora $\alpha = 2$ e si consideri la legge di controllo in retroazione algenrica sull'uscita $\boxed{u = -K\,y + H\,y^\circ}$.

- c) Dire per quali valori di K si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso;
- d) Progettare, se possibile, i due guadagni K e H in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.
- e) Fissati K e H come al punto precedente, calcolare per il sistema in ciclo chiuso il regime permanente in risposta a un segnale di riferimento $y^\circ(t) = 5\sin(t)1(t)$

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

0)

- Mi scrivo le matrici A, B, C

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 2\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A)

> $\varphi(s)$ e $G(s)$

- Calcolo il determinante secondo la prima riga (per esempio)
- Fattorizzo il polinomio
  - Essendo di grado 3, faccio una prima fattorizzazione e poi eguaglio i coefficienti a,b scelti
- Sempre utile fattorizzarlo infine secondo le proprie radici
  - Dagli autovalori capisco se è stabile oppure no (mi avvantaggio per dopo)
- Calcolo poi $G(s)$ (l'aggiogata ce l'ho di già)

- Conviene fare il prodotto partendo dalle matrici con più zeri presenti
- *Verifico anche se ci sono semplificazioni*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 2\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) $\varphi(s)$, $G(s)$

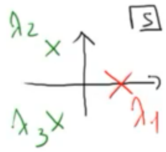
$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = s \cdot s^2 - 1 \cdot 1 = s^3 - 1$$

$$\varphi(s) = (s-1)(s^2 + as + b) = s^3 + as^2 + bs - s^2 - as - b$$

$$= s^3 + (a-1)s^2 + (b-a)s - b = s^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 1 \end{matrix}$$

$$\varphi(s) = (s-1)(s^2+s+1)$$

autovalori $\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$G(s) = \frac{1}{\varphi(s)} C \, \mathrm{Adj}(sI - A) B = \frac{1}{s^3 - 1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 2\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 - 1} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 2\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 - 1}(\alpha^2 + 2\alpha s + s^2) = \frac{(s+\alpha)^2}{s^3 - 1}$$

NB: devo verificare se ci sono semplificazioni per qualche α

$$G(s) = \frac{(s+\alpha)^2}{s^3 - 1} = \frac{(s+\alpha)^2}{(s-1)(s^2+s+1)}$$

$\alpha = -1 \qquad G(s) = \dfrac{(s-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(s-1)}(s^2+s+1)} = \dfrac{s-1}{s^2+s+1}$

$\alpha \neq -1 \qquad$ non ci sono semplificazioni $\qquad G(s) = \dfrac{(s+\alpha)^2}{(s-1)(s^2+s+1)}$

B)

- Facile se abbiamo risposto in maniera completa ad A) (con le semplificazioni)
  - Infatti per $\alpha = -1$ avevamo semplificazioni, quindi vuol dire che è presente un autovalore nascosto (instabile in questo caso)

b) problema di controllo ben posto $\iff \varphi_R(s) = \dfrac{\varphi(s)}{e(s)}$ è asintoticamente stabile

$\alpha = -1 \qquad \varphi_R(s) = \dfrac{(s-1)\cancel{(s^2+s+1)}}{\cancel{s^2+s+1}} = s - 1 \qquad \lambda_1 = 1$ autovalore instabile mancante

$\Rightarrow$ problema di controllo non ben posto

$\alpha \neq -1 \qquad \varphi_R(s) = 1 \qquad$ non ci sono autovalori mancanti $\Rightarrow$ problema di controllo ben posto

FINE STUDIO PARAMETRICO

C)

- Cerchiamo K stabilizzanti (asintotici a ciclo chiuso)

- Abbiamo retroazione sull'uscita quindi utilizzeremo la formula adeguata
  - $\varphi_h(s) = 1$ perché come visto in B) non ci sono autovalori nascosti per $\alpha \neq -1$

c) $\alpha = 2$ per quali K si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_R(s)\, a^*(s) = \varphi_R(s)\left[a(s) + K b(s)\right]$$
$$= 1 \cdot \left[s^3 - 1 + K(s+2)^2\right] = s^3 - 1 + K(s^2+4s+4) = s^3 + Ks^2 + 4Ks + 4K - 1$$

Vediamo per quali K abbiamo stabilità asintotica in ciclo chiuso

- Costruisco la tabella di Routh perché ho un polinomio di 3° grado
  - $\varphi^*(s)$ asintoticamente stabile $\iff$ tutti gli elementi della prima colonna ha lo stesso segno
  - Risolviamo il sistema di disequazioni
  - Osservando che il denominatore della seconda disequazione deve essere positivo quindi si riduce allo studio del solo numeratore (che è semplice perché di secondo grado)
  - considero solo $K \in \mathbb{R}$

$$\varphi^*(s) = s^3 + Ks^2 + 4Ks + 4K - 1$$

Costruisco la tabella Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array} \qquad E_{11} = -\frac{1}{a_2} \det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 4K & 0 \\ 2 & K & 4K-1 & 0 \\ 1 & E_{11} & & \\ 0 & 4K-1 & & \end{array} \qquad E_{11} = -\frac{1}{K} \det\begin{bmatrix} 1 & 4K \\ K & 4K-1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{K}\left(4K-1-4K^2\right) = \frac{4K^2-4K+1}{K}$$

$$\varphi^*(s) \text{ asintoticamente stabile} \iff \begin{cases} K > 0 \\ \dfrac{4K^2-4K+1}{K} > 0 \\ 4K-1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K > 0 \\ 4K^2-4K+1 > 0 \\ K > \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} K > 0 \\ (2K-1)^2 > 0 \\ K > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$K > \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad K \neq \frac{1}{2}$$

D)

- Progetto per rispettare le specifiche:
  - stabilità asintotica in ciclo chiuso (già fatto ✓)
  - inseguimento perfetto in riferimento costante
  - Scrivo la funzione di trasferimento in caso di retroazione algebrica sull'uscita (vedi formula)
  - Calcolo in zero
  - Trovo H (in funzione di K)

d) $u = -Ky + Hy^\circ$

stabilità asintotica in ciclo chiuso $\quad K > \frac{1}{4} \quad K \neq \frac{1}{2}$

inseguimento perfetto di un riferimento costante $\quad G^*_{y^\circ y}(0) = 1$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K b(s)} H = \frac{(s+2)^2}{s^3 + Ks^2 + 4Ks + 4K - 1} H$$

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{4}{4K-1} H = 1 \iff H = \frac{4K-1}{4}$$

ad esempio $\quad K = \frac{1}{3} \quad H = \dfrac{\frac{4}{3}-1}{4} = \dfrac{\frac{1}{3}}{4} = \dfrac{1}{12}$

- Scelgo un K arbitrario per trovare un valore (numero) anche per H

E)

- Riferimento sinusoidale (applico teorema risposta in frequenza per segnali tipici)
  - Applico la formula del teorema della risposta in frequenza (ricordando che ho un sistema in ciclo chiuso: quindi l'ingresso è il riferimento e l'uscita è y e ha funzione di trasferimento $G^*_{y^\circ y}$)

e) $y^\circ(t) = 5\sin(t)\cdot 1(t)$ calcolare $y_f^{Y^\circ}(t)$ per il sistema in ciclo chiuso

$$y^\circ(t) \longrightarrow \boxed{G^*_{y^\circ y}} \longrightarrow y(t)$$

applico il teorema della risposta in frequenza con $\omega_0 = 1$

$$y_f^{Y^\circ}(t) = 5\left(\mathrm{Re}\{G^*_{y^\circ y}(j\omega_0)\}\sin(\omega_0 t) + \mathrm{Im}\{G^*_{y^\circ y}(j\omega_0)\}\cos(\omega_0 t)\right)1(t)$$

Prendendo gli stessi H e K dell'esercizio D), si ottiene:

- Calcolo alla fine la risposta in frequenza con $\omega_0 = 1$
  - Cerco Re e Im
  - Li metto nella formula di $y_f^{Y^\circ}(t)$

$$y_f^{Y^\circ}(t) = 5\left(\underbrace{\mathrm{Re}\{G^*_{y^\circ y}(j\omega_0)\}}\sin(\omega_0 t) + \underbrace{\mathrm{Im}\{G^*_{y^\circ y}(j\omega_0)\}}_{\text{con } \omega_0 = 1}\cos(\omega_0 t)\right)1(t)$$

$$K = \frac{1}{3} \qquad H = \frac{1}{12}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3 + Ks^2 + 4Ks + 4K - 1} \qquad H = \frac{s^2+4s+4}{s^3 + \frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{12}$$

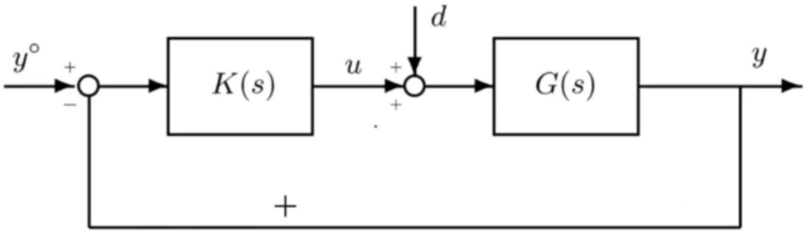
$$G^*_{y^\circ y}(j) = \frac{j^2 + 4j + 4}{j^3 + \frac{1}{3}j^2 + \frac{4}{3}j + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{12} = \frac{-1 + 4j + 4}{-j - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}j + \cancel{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3 + 4j}{\frac{1}{3}j} \cdot \frac{1}{12} = (-9\cdot j + 12)\cdot\frac{1}{12} = 1 + \frac{3}{4}j$$

$$y_f^{Y^\circ}(t) = 5\left[\sin(t) + \frac{3}{4}\cos(t)\right]1(t)$$

ESERCIZI: RETROAZIONE DINAMICA SULL'USCITA

- Non c'è prefiltro H_f



$U(s) = K(s)\left[H_f Y^\circ(s) -\right.$

Si consideri il sistema a retroazione in figura con

$$G(s) = \frac{3}{s^2+1}$$

- a) Progettare la funzione di trasferimento del controllore $K(s)$ in modo tale che il sistema in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.
- b) Progettare un controllore con azione integrale tale che il sistema in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.
- c) Si supponga che
$$y^\circ(t) = 10 \cdot 1(t), \quad d(t) = 5 \cdot 1(t)$$
Per i controllori progettati ai punti a) e b), determinare il regime permanente per l'uscita $y(t)$ e l'errore di inseguimento $y(t) - y^\circ(t)$ a regime.

A)

> *$K(s)$ per rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile*

- $K(s)$ è un rapporto di polinomi di grado n_K opportuno
  - $n_K \geq \text{grado } a(s) - 1 \geq 2 - 1 \geq 1$
    - In questo caso quindi abbiamo 3 parametro
- Scrivo $\varphi^*(s)$ (spesso in questo esercizi $\varphi_h(s) = 1$, in particolare quando viene data $G(s)$)
  - Rendo il polinomio stabile (asintotica in ciclo chiuso)
  - Se non viene richiesto una posizione particolare dei poli, basta eguagliare il polinomio coi suoi coefficienti a un altro polinomio stabile che scelgo (con radici aventi $\text{Re} < 0$, in questo caso $(s+1)^3$ che ha 3 radici in -1)

$$\varphi^*(s) = s^3 + p_0 s^2 + (3q_1+1)s + 3q_0 + p_0$$

Ad esempio pongo

$$\varphi^*(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

$$\begin{cases} p_0 = 3 \\ 3q_1 + 1 = 3 \\ 3q_0 + p_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = 3 \\ q_1 = 2/3 \\ 3q_0 + 3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p_0 = 3 \\ q_1 = 2/3 \\ q_0 = -2/3 \end{matrix}$$

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{\frac{2}{3}(s-1)}{s+3}$$

B)

> *Ancora progetto di un controllore con azione dinamica sull'uscita però stavolta con azione integrale (denominatore con polo in 0, ovvero $p_0 = 0$)*

- Sempre per avere stabilità asintotica in ciclo chiuso

Nota: Il grado deve essere almeno 2, perché vogliamo azione integrale quindi $n_K \geq \text{grado } a(s) = 2$

$$\varphi^*(s) = s^3 + p_0 s^2 + (3q_1+1)s + 3q_0 + p_0$$

Ad esempio pongo

$$\varphi^*(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

$$\begin{cases} p_0 = 3 \\ 3q_1 + 1 = 3 \\ 3q_0 + p_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = 3 \\ q_1 = 2/3 \\ 3q_0 + 3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p_0 = 3 \\ q_1 = 2/3 \\ q_0 = -2/3 \end{matrix}$$

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{\frac{2}{3}(s-1)}{s+3}$$

b) Per introdurre azione integrale considero un $K(s)$ del tipo

$$K(s) = \frac{q_{n_K} s^{n_K} + \dots + q_1 s + q_0}{s^{n_K} + \dots + p_1 s} \qquad \boxed{p_0 = 0}$$

$n_K \geq \text{grado } e(s) = 2$

$$\boxed{K(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^2 + p_1 s}}$$

- ci saranno un po' più di conti da fare perché abbiamo grado più alto di $p(s)$ e $q(s)$
- anche in questo caso si pone $\varphi^*(s)$ uguale a un polinomio stabile che conosciamo, ad esempio $(s+1)^4$
- si esplicita infine la funzione di trasferimento del controllore

$$K(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^2 + p_1 s +} \qquad G(s) = \frac{3}{s^2+1}$$

$$\varphi^*(s) = \varphi_R(s)\left[e(s)p(s) + b(s)q(s)\right] = (s^2+1)(s^2+p_1 s) + 3(q_2 s^2 + q_1 s + q_0)$$

$$= s^4 + p_1 s^3 + s^2 + p_1 s + 3q_2 s^2 + 3q_1 s + 3q_0$$

$$= s^4 + p_1 s^3 + (3q_2+1)s^2 + (3q_1 + p_1)s + 3q_0$$

ad esempio pongo

$$\varphi^*(s) = (s+1)^4 = (s+1)(s^3+3s^2+3s+1) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

$$= s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

$$\begin{cases} p_1 = 4 \\ 3q_2 + 1 = 6 \\ 3q_1 + p_1 = 4 \\ 3q_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 4 \\ q_2 = 5/3 \\ q_1 = 0 \\ q_0 = 1/3 \end{cases} \qquad k(s) = \frac{5/3\, s^2 + \frac{1}{3}}{s^2 + 4s}$$

C)

> *Valutare il comportamento a regime con riferimento e disturbo costante (di ampiezza data) + errore d'inseguimento a regime*

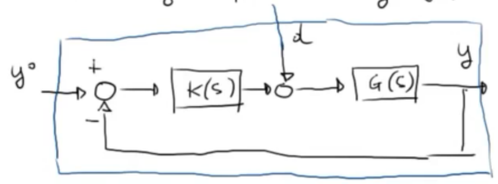
- Sistema $\mathcal{P}$ a ciclo chiuso (dinamico) con due ingressi: uno di riferimento e un disturbo
  - Abbiamo due regimi permanenti da sommare (principio sovrapposizione delle cause)

    - Avendo segnali costanti, posso applicare il teorema della risposta in frequenza per segnali costanti, quindi viene una somma di due guadagni in continua (funzioni trasferimento in ciclo chiuso - quindi calcolati in zero - uno tra riferimento e uscita e uno tra disturbo e uscita) moltiplicati ciascuno per l'ampiezza data
- al denominatore al posto di $a(s)p(s) + (s)q(s)$ viene $(s+1)^3$ perché l'ho progettato/calcolato prima - in questo modo evito di ricalcolarlo (cfr. con l'altro controllore per capire per capire meglio)

CALCOLI CON IL PRIMO CONTROLLORE

c) $y^\circ(t) = 10 \cdot 1(t)$ $\quad d(t) = 5 \cdot 1(t)$

calcolare regime permanente $y^{RP}(t)$ e errore di inseguimento a regime $y^\circ(t) - y^{RP}(t)$



$$y^{RP}(t) = \underbrace{y^{Y^\circ}(t)}_{\text{RP in risposta a } y^\circ(t)} + \underbrace{y^{D}(t)}_{\text{RP in risposta a } d(t)} = \underbrace{G^*_{y^\circ y}(0) \cdot 10 \cdot 1(t)} + \underbrace{G^*_{dy}(0) \cdot 5 \cdot 1(t)}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)} \qquad G^*_{dy}(s) = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)}$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{3}{s^2+1} \qquad K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{\frac{2}{3}(s-1)}{s+3}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}(s-1)}{(s+1)^3} \qquad G^*_{dy}(s) = \frac{3(s+3)}{(s+1)^3}$$

Cerco i guadagni in continua a ciclo chiuso e poi scrivo il regime permanente sostituendo i valori trovati. Infine calcolo l'errore al regime (sottraendo al riferimento il valore del regime permanente):

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{-2}{1} = -2 \qquad G^*_{dy}(0) = 9$$

$$y^{RP}(t) = -2 \cdot 10 \cdot 1(t) + 9 \cdot 5 \cdot 1(t) = (-20 + 45) \cdot 1(t) = 25 \cdot 1(t)$$

$$y^\circ(t) - y^{RP}(t) = (10 - 25)\, 1(t) = -15 \cdot 1(t)$$

- **Nota:** abbiamo un errore grande a causa del disturbo ma anche per il fatto che il controllore non garantisce un inseguimento perfetto (guadagno in continua non unitario, fa -2. Per risolvere questo problema, dovremmo inserire un apposito prefiltro - ma per ipotesi non c'è, $H_f = 1$)

CONTROLLORE INTEGRALE

Facciamo la stessa procedura anche per l'altro controllore, cioè quello integrale (cambia $K(s)$)

- Anche in questo caso al denominatore sappiamo già che viene il polinomio dei poli in ciclo chiuso che abbiamo costruito/assegnato - ed eguagliato a $(s-1)^4$

- infine (dopo) si trova il regime permanente

$$y^{RP}(t) = \underbrace{y^{Y^\circ}(t)}_{\text{RP in risposta a } y^\circ(t)} + \underbrace{y^{D}(t)}_{\text{RP in risposta a } d(t)} = \underbrace{G^*_{y^\circ y}(0)\cdot 10\cdot 1(t)} + \underbrace{G^*_{dy}(0)\cdot 5\cdot 1(t)}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s)+b(s)\,q(s)} \qquad G^*_{dy}(s) = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s)+b(s)\,q(s)}$$

$$G(s) = \frac{3}{s^2+1} \qquad K(s) = \frac{\frac{5}{3}s^2+\frac{1}{3}}{s^2+4s}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{3\cdot\left(\frac{5}{3}s^2+\frac{1}{3}\right)}{(s+1)^4} = \frac{5s^2+1}{(s+1)^4} \qquad G^*_{dy}(s) = \frac{3\cdot(s^2+4s)}{(s+1)^4}$$

$$G^*_{y^\circ y}(0) = 1 \qquad G^*_{dy}(0) = 0$$

NB: in realtà potevo anche non fare i calcoli perché sapevo già che un controllore con azione integrale garantisce queste proprietà

$$y^{RP}(t) = 10\cdot 1(t)$$

$$y^\circ(t) - y^{RP}(t) = 0$$

- Abbiamo ottenuto un guadagno in continua tra riferimento e uscita unitario e la reiezione del disturbo in zero (me lo potevo aspettare perché ho progettato un controllore con azione integrale)
  - notiamo anche che l'errore in uscita è nullo
    - cioè si converge al regime permanente anche se abbiamo un disturbo (questo perché esso è costante e il guadagno in continua è zero)
      - Se il disturbo fosse stato sinusoidale, non potevo calcolare l'effetto con il guadagno in continua tra disturbo e uscita costante (minore frequenza, minore effetto). Dovevo vederlo con la risposta in frequenza (che in generale sarà zero)

ESAME (STRUTTURA)

- Prima parte di esercizi (domande sulla parte di analisi e progettazione sistemi di controllo - retroazione su stato e uscita, algebrica e dinamica, osservatore, etc..)

- Parte orale (approfondimento) - tutto il corso (modellistica in poi)

- I sistemi possono essere dati in varie forse (equazioni di stato, ingresso/uscita, funzione di trasferimento, linearizzazione sistemi non lineari)