STABILITA' E MODI NATURALI

Stabilità asintotica $\Leftrightarrow$ $\lim_{t \to \infty} e^{At} = 0$

$\Leftrightarrow$ tutti gli elementi di e^{At} sono convergenti a 0

$\Leftrightarrow$ tutti i modi naturali sono **convergenti**

Stabilità marginale $\Leftrightarrow$ $\exists M : \left\| e^{At} \right\| \leq M \quad \forall t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ tutti gli elementi di e^{At} sono limitati

$\Leftrightarrow$ tutti i modi naturali sono **limitati**

Instabilità interna $\Leftrightarrow$ e^{At} non si mantiene limitata

$\Leftrightarrow$ esiste almeno un elementi di e^{At} non limitato

$\Leftrightarrow$ esiste almeno un modo naturale **divergente**

Quindi:

Fatto 2.9 Un sistema LTI TC è

- **asintoticamente stabile** $\Leftrightarrow$ tutti i modi naturali del sistema sono **convergenti**
- **marginalmente stabile** $\Leftrightarrow$ tutti i modi naturali del sistema sono **limitati** (ma non tutti sono convergenti)
- **internamente instabile** $\Leftrightarrow$ esiste almeno un modo naturale **divergente**

- Ricordiamo la classificazione dei modi $t^\ell e^{\lambda_i t}$

	$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$	$\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$	$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

- quindi l'asse Reale del piano complesso rappresenta il confine tra stabilità e instabilità: a sinistra abbiamo convergenza (al limite limitato se consideriamo anche l'asse stesso), a destra abbiamo divergenza
- si mantiene ancora il rapporto $\text{posizione dei poli} \longleftrightarrow \text{convergenza/divergenza}$

$y = Cx + Du$

- **Autovalori del sistema** = autovalori della matrice A
- Per un sistema LTI, la stabilità interna dipende dalla **posizione** degli autovalori nel piano complesso e dalla loro **molteplicità**

Teorema 2.3 Un sistema LTI TC è

- **asintoticamente stabile** $\Leftrightarrow$ tutti modi naturali convergenti
  $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale < 0
- **marginalmente stabile** $\Leftrightarrow$ tutti i modi naturali limitati
  $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale ≤ 0
  AND quelli con parte reale $= 0$ hanno molteplicità $= 1$ come radici del polinomio minimo
- **internamente instabile** negli altri casi $\Leftrightarrow$ esiste almeno un modo naturale divergente
  $\Leftrightarrow$ esiste almeno un autovalore con parte reale > 0
  OR con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1 nel polinomio minimo

- nota: la stabilità dipende dalla molteplicità solo nel caso particolare in cui $Re\{\lambda_i\} = 0$: se la molteplicità è maggiore di 1 allora abbiamo instabilità

RIASSUNTO COMPLETO

Per studiare la stabilità interna: calcoliamo il polinomio caratteristico $\varphi(s) = \det(sI - A)$ e distinguiamo 4 casi

1. Se tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale < 0
   $\Rightarrow$ sistema asintoticamente stabile
2. Se esiste almeno una radice di $\varphi(s)$ con parte reale > 0
   $\Rightarrow$ sistema internamente instabile
3. Se tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale ≤ 0 **AND** quelle con parte reale $= 0$ hanno molteplicità unitaria come radici di $\varphi(s)$
   $\Rightarrow$ sistema marginalmente stabile
   [Infatti tali radici dovranno necessariamente avere molteplicità unitaria anche come radici del polinomio minimo $m(s)$, in quanto $1 \leq m_i \leq \mu_i$]
4. Se invece tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale ≤ 0 **AND** ne esiste almena una con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1 come radice di $\varphi(s)$
   $\Rightarrow$ dobbiamo calcolare il polinomio minimo $m(s)$ e distinguere 2 sottocasi
   1. se tutte le radici con parte reale $= 0$ hanno molteplicità unitaria come radici di $m(s)$ $\Rightarrow$ sistema marginalmente stabile
   2. se invece esiste almeno una radice con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1 come radice di $m(s)$ $\Rightarrow$ sistema internamente instabile

Inoltre (stabilita' $\implies x_{\ell(t)} \to 0$):

$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$

$\downarrow$

0

- Per un sistema LTI TC l'evoluzione libera dello stato è del tipo

$$x_\ell(t) = e^{At}x(0)$$

Per un sistema LTI **asintoticamente stabile** $\quad e^{At} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$$\lim_{t\to\infty} x_\ell(t) = 0 \qquad \forall x(0)$$

$\Rightarrow$ l'effetto della condizione iniziale **svanisce** asintoticamente

$+$

Per un sistema LTI **marginalmente stabile**, l'evoluzione libera $x_\ell(t)$, in generale, non tende a zero ma comunque si mantiene **limitata**

ESERCIZI: STUDIO DI STABILITA' INTERNA DEL SISTEMA

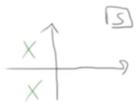
ESERCIZIO

- Trovo $\varphi(s)$
- Trovo gli zeri di $\varphi(s)$, ovvero gli autovalori
- Osservo la posizione degli autovalori sul piano complesso e concludo sulla stabilità/instabilità
  - Eventualmente dimostro che è vero calcolando esplicitamente i modi naturali
- Se ho molteplicità 1 non devo calcolare $m(s)$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ stabilità interna?

$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = s(s+1) - (-1) = s^2 + s + 1$

$\varphi(s) = 0 \iff s^2 + s + 1 = 0 \iff s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

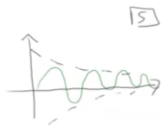


tutti autovalori con Re < 0 $\implies$ stabilità asintotica

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

infatti modi naturali

$e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$



tutti convergenti

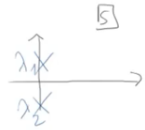
ESERCIZIO: OSSERVO (ANCHE) LA MOLTEPLICITA'

- Poli (autovalori) complessi coniugati
- Hanno molteplicità 1 (basta fattorizzare per vederlo meglio)
- Sono al margine della stabilità (i poli sono sull'asse reale)
  - La molteplicità di $\varphi(s)$ è 1 quindi anche $m(s)$ ha molteplicità 1, quindi non devo calcolare l'inversa esplicitamente
  - Posso concludere subito che abbiamo modi di evoluzione limitati, quindi *stabilità marginale*

- I modi sono seno e coseno essendo i poli complessi coniugati

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ stabilità interna ?

$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1$



$\varphi(s) = 0 \iff s^2 + 1 = 0 \iff s = \pm j$

$\lambda_1 = j \quad \mu_1 = 1$

$\lambda_2 = -j \quad \mu_2 = 1$

$\varphi(s) = (s - j)(s + j)$

$\mu_i = 1 \implies m_i = 1 \qquad m(s) = \varphi(s) = (s-j)(s+j)$

molteplicità in $\varphi(s)$ — molteplicità in $m(s)$

tutti autovalori con $Re \leq 0$ e quelli con $Re = 0$ hanno molteplicità 1 in $m(s)$

$\implies$ tutti modi naturali limitati $\sin(t), \cos(t)$

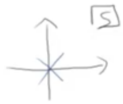
$\implies$ stabilità marginale

ESERCIZIO: INSTABILITA' CAUSATA DALLA MOLTEPLICITA'

- Abbiamo un autovalore in 0 con molteplicità 2 (caso limite)
  - Sicuramente non abbiamo stabilità asintotica, ma potrebbe esserci quella marginale se $m(s)$ avesse molteplicità 1.
  - Calcolo $m(s)$ (conti già fatti in precedenza)
  - Si scopre che $m_1 = 2$ quindi abbiamo divergenza: esiste almeno un modo naturale divergente. Infatti abbiamo: $1, t$ --> ovvero il gradino e la rampa

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$



$\lambda_1 = 0 \quad \mu_1 = 2$

Autovalori in 0 con $\mu_1 = 2$

$\implies$ sicuramente non abbiamo stabilità asintotica

potremmo avere stabilità marginale se $m_1 = 1$

instabilità interna se $m_1 = 2$

$\implies$ devo calcolare $m(s)$

$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \qquad m(s) = s^2 \qquad \boxed{m_1 = 2}$

autovalore in 0 con $m_1 = 2 \implies$ instabilità interna

infatti i modi naturali sono 1 (limitato), t (divergente)

ESERCIZIO DA CONFRONTARE COL PRECEDENTE

- Stesso $\varphi(s)$ del caso precedente, ma differente matrice
- Calcolo l'inversa di matrice (già fatto in passato per questa matrice)
  - Si scopre che $m_1 = 1$, quindi *stabilità marginale*. Abbiamo un solo modo di evoluzione: il gradino

$1(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

$\lambda_1 = 0 \quad \mu_1 = 2$

Autovalori in 0 con $\mu_1 = 2$

$\Rightarrow$ sicuramente non abbiamo stabilità asintotica

potremmo avere stabilità marginale se $m_1 = 1$ $\longleftarrow$

l'instabilità interna se $m_1 = 2$

$\Rightarrow$ devo calcolare $m(s)$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \qquad \boxed{m(s) = s} \qquad \boxed{m_1 = 1}$$

molteplicità 1 in $m(s)$ $\Rightarrow$ ho solo il modo naturale $1(t)$ limitato

$\Rightarrow$ stabilità marginale

RISPOSTA FORZATA E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Preso un sistema LTI TC:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Sappiamo che la risposta forzata in Laplace è data da:

$$Y_f(s) = \underbrace{[C(SI - A)^{-1}B + D]}_{\text{funzione di trasferimento}} \; U(s)$$

Rinominiamo la funzione di trasferimento con $G(s)$

- Ci dice nel dominio di Laplace come si evolve in rappresentazione ingresso uscita il sistema.
- In generale $G(s)$ è una matrice, dato che $U(s)$ e $Y_f(s)$ sono vettori colonna
  - *Ciascun elemento della matrice ci dive la relazione tra l'ingresso e l'uscita corrispondenti alla riga e alla colonna di riferimento*
    - Esempio: elemento $i, \ell \longleftrightarrow \text{relazione tra } \ell\text{-esimo ingresso e } i\text{-esima uscita}$

Per semplicità consideriamo sistemi **SISO**, quindi $U(s)$ e $Y_f(s)$ sono scalari. Avremo $Y_f(s) = G(s)\,U(s)$, quindi la possiamo scrivere come rapporto di polinomi:

$$\boxed{G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}}$$

- con i relativi *poli del sistema* (zeri di $a(s)$) e gli *zeri del sistema* (zeri di $b(s)$)

- $G(s)$ è una *funzione razionale*, infatti

- **Funzione di trasferimento**

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{\varphi(s)} \underbrace{C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B}_{r(s)} + D \end{aligned}$$

- **Per sistemi SISO**

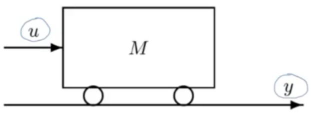
D	costante
$\varphi(s)$	polinomio di grado $\dim(x)$
$\mathrm{Adj}(sI-A)$	matrice di polinomi di grado $< \dim(x)$
$r(s) = C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B$	polinomio di grado $< \dim(x)$
$\frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B$	funzione razionale **strettamente propria** (grado del numeratore $<$ grado del numeratore)

Quindi in generale abbiamo $G(s) = \dfrac{r(s)}{\varphi(s)} + D$, ma nella frazione che compare potrebbero esserci semplificazioni (vedi dopo)

ESEMPIO SISTEMA MECCANICO

- Consideriamo finalmente anche l'ingresso $u(s)$, ovvero la forza che spinge il carrello

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{aligned}$$

Passi:

- calcolo $\varphi(s)$
- calcolo l'aggiogata di $(sI - A)$
- sostituisco tutto nella definizione di $G(s)$

$b = 1 \qquad M = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} \underbrace{C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B}_{r(s)} + D = \frac{r(s)}{\varphi(s)} + D$$

$$\varphi(s) = \det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = s(s+1)$$

$$\mathrm{Adj}(sI-A) = \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1} = \frac{1}{s(s+1)} 1 = \frac{1}{s(s+1)}$$

$a(s) = s(s+1) \qquad b(s) = 1$

- dove per comodità abbiamo riscritto $G(s)$ come:

$$G(s) = \frac{r(s)}{\varphi(s)} + D$$

- Cfr. Con appunti dopo --> (non ci sono autovalori nascosti: $\varphi(s) = a(s)$)
  - se invece della posizione prendiamo come uscita la velocità si ottiene (considerando lo stesso sistema):

  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{posizione} \\ \text{velocità} \end{bmatrix}$

  $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 = \text{velocità}$

  $G(s) = \frac{1}{\varphi(s)} \overbrace{(C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B)}^{r(s)} + D = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)} s = \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ $\quad a(s) = s+1$, $\quad b(s) = 1$

  - cambia l'uscita --> cambia la funzione di trasferimento (essa non è una proprietà intrinseca, dipende dalle manovre che facciamo dall'esterno su di essa)
  - scompare l'autovalore in 0

  Riassumendo quest'ultima cosa:

  caso a) $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad y = x_1$ posizione

  $\varphi(s) = s(s+1)$ $\quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ $\quad a(s) = s(s+1)$

  $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$ compaiono entrambi come poli di $G(s)$
  $\Rightarrow$ non ci sono autovalori nascosti

  $\varphi_R(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)} = 1$

  caso b) $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad y = x_2$ velocità

  $\varphi(s) = s(s+1)$ $\quad G(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad \boxed{a(s) = s+1}$

  $\boxed{\lambda_1 = 0}$ non compare come polo $\Rightarrow$ autovalore nascosto

  $\boxed{\lambda_2 = -1}$ compare come polo

  $\varphi(s) = s(s+1) = \varphi_R(s)\, a(s)$ $\qquad \varphi_R(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)} = \frac{s\cancel{(s+1)}}{\cancel{s+1}} = s$

RELAZIONE POLI - AUTOVALORI

Abbiamo detto che:

$$G(s) = \frac{r(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- $\varphi(s)$ ha molteplicità μ_i
  Allora:
- $G(s)$ ha molteplicità ν_i

Infatti possiamo facilmente dire che:

$$\boxed{0 \leq \nu_i \leq \mu_i} \quad , \quad \text{perchè potrebbero esserci semplificazioni}$$

- quindi l'**autovalore può scomparire**

Vale più in generale la seguente relazione tra le molteplicità: $\nu_i \leq m_i \leq \mu_i$

Quindi: *i poli del sistema* (radici di $a(s)$), *sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema* (radici di $\varphi(s)$). Questo dovuto al fatto che potrebbero esserci semplificazioni

- Gli autovalori che non compaiono all'uscita (ma che internamente ci sono), sono detti **autovalori nascosti**

Quindi possiamo dire in generale che $\varphi(s)$ contiene sia $\underbrace{a(s)}_{\text{den. f. trasf.}}$ che $\underbrace{\varphi_h(s)}_{\text{polinomio autov. nascosti}}$, quindi:

$\varphi(s) = a(s)\varphi_h(s)$

Possiamo definire il polinomio degli autovalori nascosti come segue:

$$\boxed{\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}}$$

Quindi come già detto **la funzione di trasferimento** non dipende internamente dalle proprietà interne (intrinseche) del sistema, ma **dipende invece dagli ingressi inserirti e da cosa andiamo a osservare**

- cioè dalla matrice B, che dice come l'ingresso agisce sull'uscita
- e dalle matrici C e D, che dicono cosa vado ad osservare