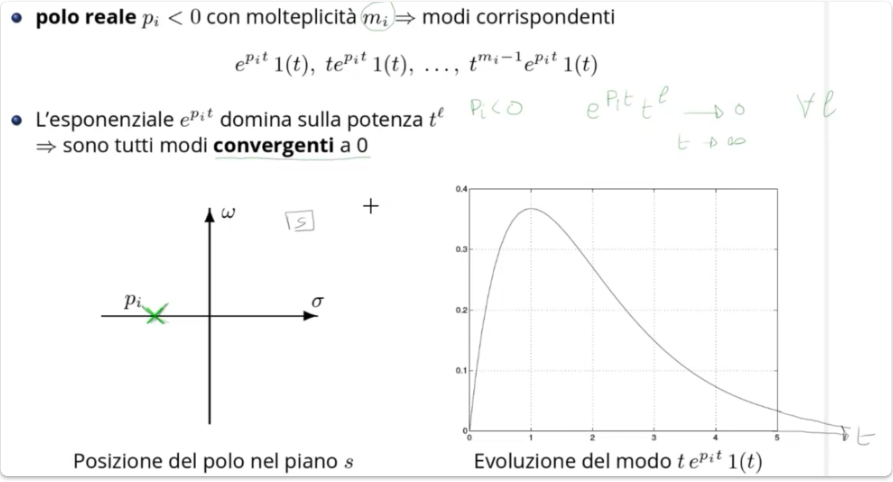
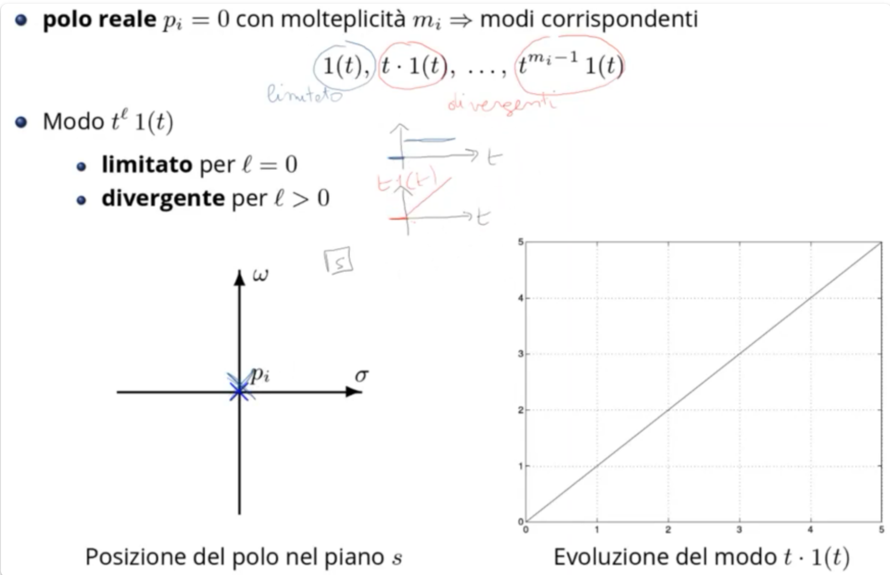
POLO REALE MINORE DI ZERO

- Nel prodotto tra t e $e^{p_i t}$ *predomina l'esponenziale*, quindi **indipendentemente dalla potenza t^ℓ abbiamo modo convergenti a 0**



POLO REALE UGUALE A ZERO

- Rimane solo t^ℓ nel prodotto
  - Quindi l'evoluzione dipende da quanto vale ℓ
- Pertanto, **la molteplicità influenza l'evoluzione** se il polo reale è uguale a zero



POLO REALE MAGGIORE DI ZERO

Nel prodotto tra t e $e^{p_i t}$ *predomina l'esponenziale*, quindi **indipendentemente dalla potenza t^ℓ abbiamo modo convergenti a ∞**

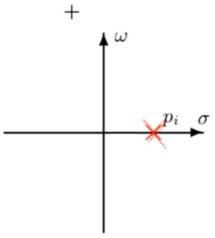
- **polo reale** $p_i > 0$ con molteplicità $m_i \Rightarrow$ modi corrispondenti

$$e^{p_i t}\,1(t),\ t e^{p_i t}\,1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1} e^{p_i t}\,1(t)$$

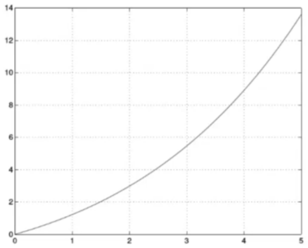
$p_i > 0$

$\lim_{t \to \infty} t^\ell e^{p_i t} = \infty \quad \forall \ell$

- Sono tutti modi **divergenti**



Posizione del polo nel piano s



Evoluzione del modo $t\,e^{p_i t}\,1(t)$

RIASSUMENDO

Relativamente ai modi di $t^\ell\, e^{p_i t} 1(t)$

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

- **Parte reale** $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\}$ e **molteplicità** m_i (nel caso $\sigma_i = 0$) determinano la **convergenza/divergenza**
- **Parte immaginaria** $\omega_i = \mathrm{Im}\{p_i\}$ determina la presenza o meno di **oscillazioni**

Nota: Per conoscere l'andamento qualitativo di $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ è sufficiente guardare la **posizione dei poli** nel piano s e la loro **molteplicità**

- se abbiamo $m_i = 1$ abbiamo solo il modo $e^{p_i t}$
- se abbiamo $m_i > 1$ abbiamo due modi $t^\ell\, e^{p_i t}$, con $\ell > 0$

POLI COMPLESSI (CONIUGATI)

- Lì prendiamo a coppie (il coniugato ha la stessa molteplicità di quello non coniugato)
  Stessi modi di evoluzione di quelli già visti, soltanto che ogni termine è moltiplicato per

$1, t, t^2, \ldots, t^{m_i-1}$, ovvero:

- Consideriamo un **polo complesso**

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i$$

con **molteplicità** m_i $\quad (s-p_i)^{m_i} \ (s-\overline{p}_i)^{m_i}$

- Allora anche il suo complesso coniugato

$$\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

è polo con la **stessa molteplicità** m_i

- Modi complessi associati alla coppia di poli complessi

$$\begin{array}{l} e^{p_i t}\, 1(t),\ t\, e^{p_i t}\, 1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\, e^{p_i t}\, 1(t) \\ e^{\overline{p}_i t}\, 1(t),\ t\, e^{\overline{p}_i t}\, 1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\, e^{\overline{p}_i t}\, 1(t) \end{array}$$

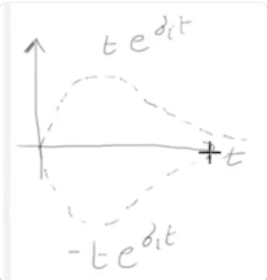
- Tali modi complessi si combinano in modo da ottenere i **modi reali**

$$\begin{array}{l} \sin(\omega_i t)\, e^{\sigma_i t}\, 1(t),\ t\, \sin(\omega_i t)\, e^{\sigma_i t}\, 1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\, \sin(\omega_i t)\, e^{\sigma_i t}\, 1(t) \\ \cos(\omega_i t)\, e^{\sigma_i t}\, 1(t),\ t\, \cos(\omega_i t)\, e^{\sigma_i t}\, 1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\, \cos(\omega_i t)\, e^{\sigma_i t}\, 1(t) \end{array}$$

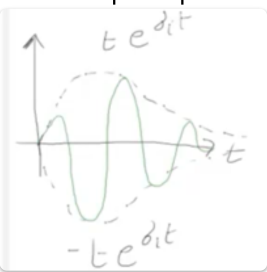
- stessi modi ma moltiplicati per potenze successive di t

CON PARTE REALE MINORE DI ZERO

- Domina l'esponenziale
  Costruiamo il grafico con l'inviluppo:



Poi moltiplico per il seno



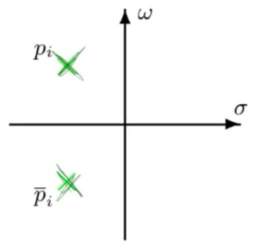
Abbiamo tutti **modi convergenti a zero**, indipendentemente dalla molteplicità

- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i < 0$ e molteplicità $m_i \;\Rightarrow\;$ modi corrispondenti

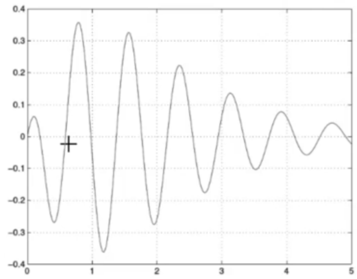
$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\;,\; t\,\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\,,\ldots,\; t^{m_i-1}\,\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$
$$\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\;,\; t\,\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\,,\ldots,\; t^{m_i-1}\,\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

- L'esponenziale $e^{\sigma_i t}$ domina sulla potenza t^ℓ $\Rightarrow$ sono tutti modi oscillanti **convergenti** a 0

$\sin(\omega_i t)\, t\, e^{\sigma_i t}$



Posizione dei poli nel piano s


Evoluzione del modo $t\,\cos(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t)$

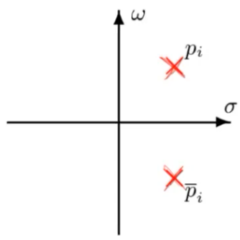
CON PARTE REALE MAGGIORE DI ZERO

- Domina l'esponenziale, che quindi fa divergere il tutto (caso duale del precedente)

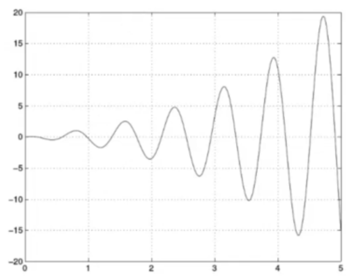
- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i > 0$ e molteplicità $m_i \;\Rightarrow\;$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\;,\; t\,\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\,,\ldots,\; t^{m_i-1}\,\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$
$$\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\;,\; t\,\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\,,\ldots,\; t^{m_i-1}\,\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

- Sono tutti modi oscillanti **divergenti**



Posizione dei poli nel piano s


Evoluzione del modo $t\,\cos(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t)$

- segnali **tutti divergenti, indipendentemente dalla molteplicità**
  - perché posizionati sulla destra nel piano complesso

CON PARTE REALE UGUALE A ZERO

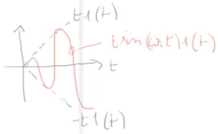
- Non c'è l'esponenziale, quindi dipende solo da ℓ

> > *La molteplicità influenza sulla divergenza*

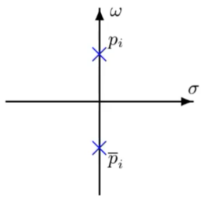
Se $\ell = 0$ allora abbiamo un andamento limitato, altrimenti se $l > 0$ abbiamo divergenza (lineare)

- **poli immaginari** $p_i = j\omega_i$, $\overline{p}_i = -j\omega_i$ con $\sigma_i = 0$ e molteplicità m_i
  $\Rightarrow$ modi corrispondenti

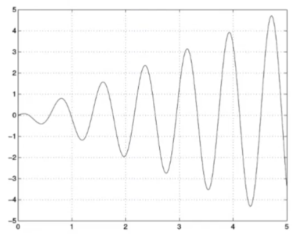
$$\begin{array}{llll} \sin(\omega_i t)\,1(t), & t\,\sin(\omega_i t)\,1(t), & \ldots, & t^{m_i-1}\,\sin(\omega_i t)\,1(t) \\ \cos(\omega_i t)\,1(t), & t\,\cos(\omega_i t)\,1(t), & \ldots, & t^{m_i-1}\,\cos(\omega_i t)\,1(t) \end{array}$$



- Modi $t^\ell\,\sin\omega_i\,t\,1(t)$, $t^\ell\,\cos\omega_i\,t\,1(t)$
  - **limitati** per $\ell = 0$
  - **divergenti** per $\ell > 0$

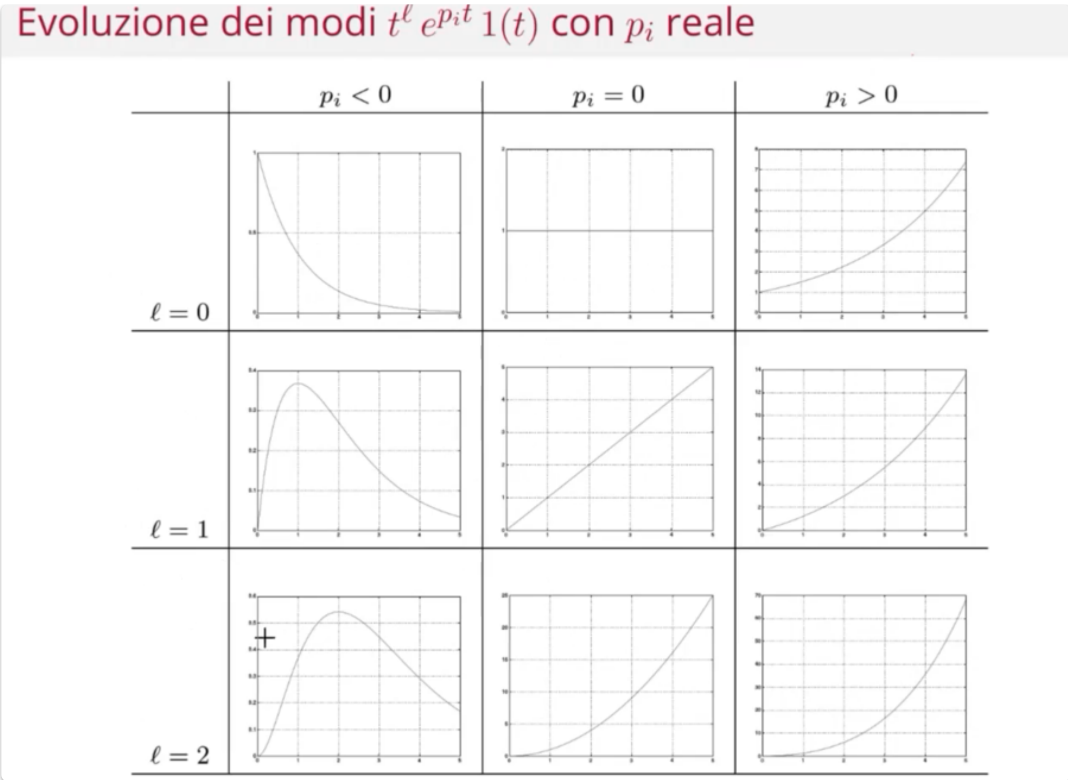


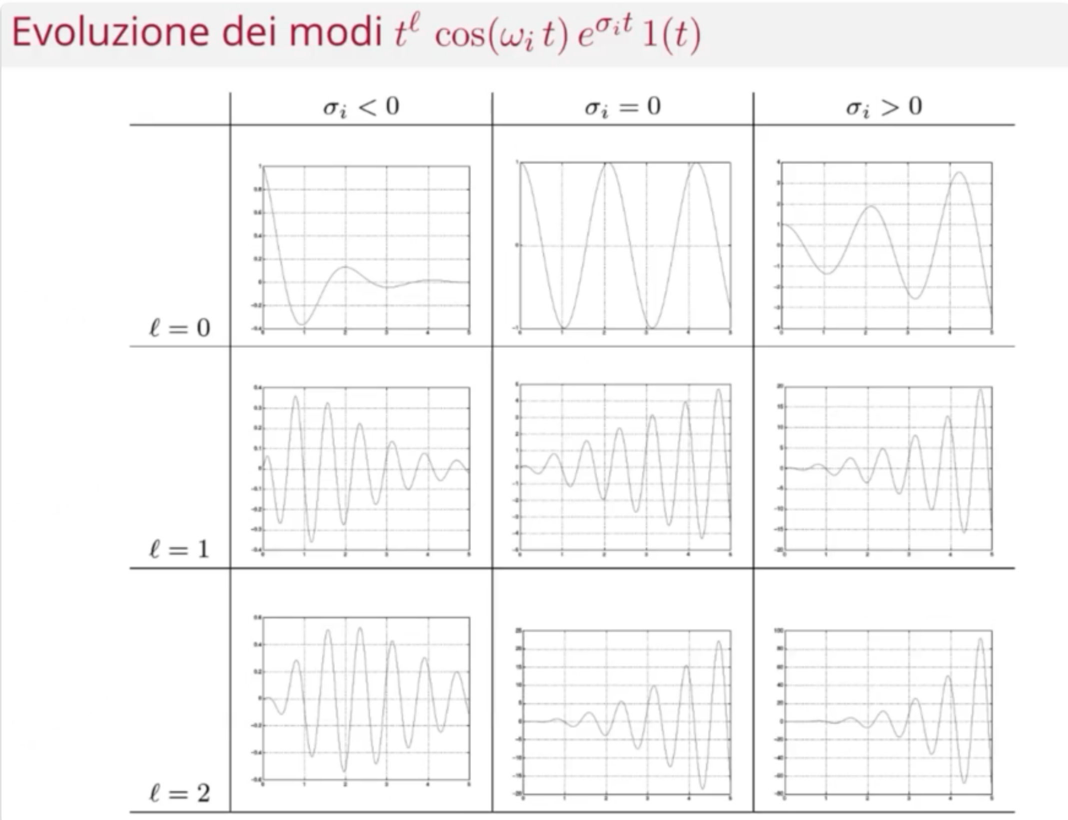
Posizione dei poli nel piano s



Evoluzione del modo
$t\,\cos(\omega_i t)\,1(t)$

RIASSUMENDO





Quindi in generale:

- [ ] se il polo è posizionato a sinistra, abbiamo convergenza
- [ ] se il polo è posizionato a destra, abbiamo divergenza
- [ ] se il polo è centrato in zero, devo stare attento alla molteplicità
    - [ ] Se essa è maggiore di zero, abbiamo divergenza

- [ ] Se essa è zero, abbiamo un andamento limitato

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

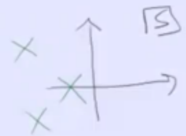
TEOREMA: RELAZIONE POLI ED EVOLUZIONE NEL TEMPO

- Formalizziamo le condizioni sopra riportate nella tabella presentando questo teorema

Teorema 2.1

1. $f(t)$ è **convergente**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$



$\Leftrightarrow$ se e solo se tutti i modi di $F(s)$ sono convergenti
$\Leftrightarrow$ tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale < 0

2. $f(t)$ è **limitata**

$$\exists M \text{ tale che } |f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ tutti i modi di $F(s)$ sono limitati
$\Leftrightarrow$ tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale ≤ 0 **AND** quelli con parte reale $= 0$ hanno molteplicità 1

3. $f(t)$ è **divergente**

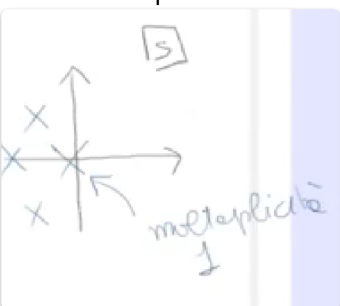
$$\lim_{t\to\infty} |f(t)| = \infty$$

$\Leftrightarrow$ esiste almeno un modo di $F(s)$ divergente
$\Leftrightarrow$ $F(s)$ ha almeno un polo con parte reale > 0 **OR** almeno un polo con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1

TEOREMA DEL VALORE FINALE

Utile per calcolare il limite di un segnale nel tempo quando abbiamo la sua trasformata $F(s)$, senza calcolare esplicitamente l'antitrasformata
- Nota: valido solo quando questo limite esiste, ovvero quando non ci sono oscillazioni persistenti (caso $\boxed{b}$ del teorema precedente) --> poli complessi con parte immaginaria diversa da zero

I casi validi quindi sono i seguenti:



- dove in 0 si prendono solo i poli con $m = 1$ per escludere i casi sopra descritti

Il teorema garantisce che vale:

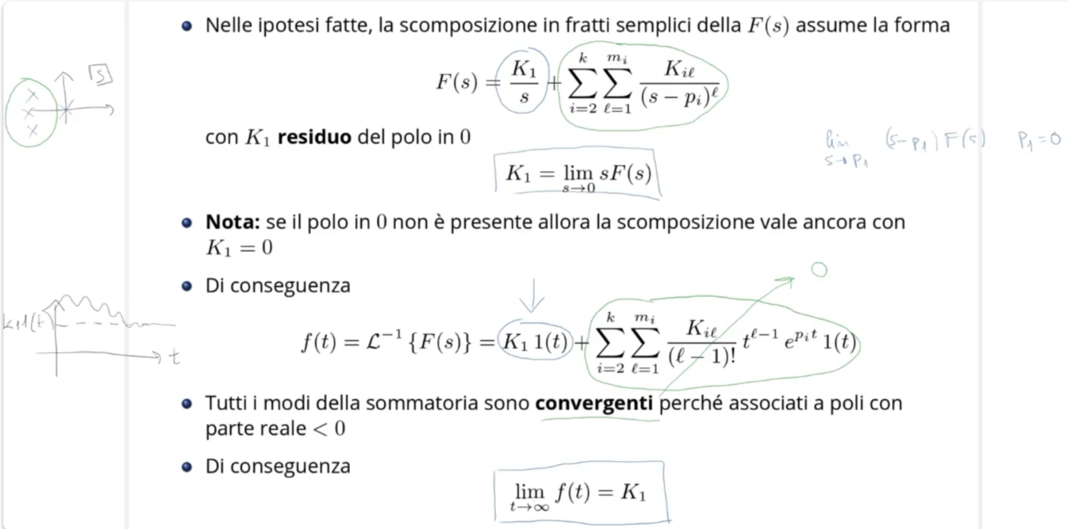
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = K \quad \text{con} \quad K = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Ovvero, uguagliando i termini:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA RESIDUI)

- Dalla scomposizione in fratti semplici di $F(s)$ generica, portiamo fuori dalle sommatorie il residuo relativo al polo in 0 (e quindi facciamo partire le Σ dall'indice successivo)
- Notiamo facendo l'antitrasformata, che:
  - Il polo in 0 è un gradino (perché a meno del residuo rimane da antitrasformare $1/s$)
  - Gli altri poli (nelle sommatorie) sono convergenti a 0 perché per ipotesi sono relativi a poli con parte reale minore di 0.
  - Di tutto quindi rimane soltanto il residuo del polo in 0, pertanto il comportamento asintotico è dato da: $\lim_{t\to\infty} f(t) = K_1$



- Nelle ipotesi fatte, la scomposizione in fratti semplici della $F(s)$ assume la forma

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell}$$

con K_1 **residuo** del polo in 0

$$\boxed{K_1 = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$

$\lim_{s\to p_1} (s-p_1)F(s)$ $p_1 = 0$

- **Nota:** se il polo in 0 non è presente allora la scomposizione vale ancora con $K_1 = 0$
- Di conseguenza

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = K_1\, 1(t) + \sum_{i=2}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!} t^{\ell-1} e^{p_i t}\, 1(t)$$

- Tutti i modi della sommatoria sono **convergenti** perché associati a poli con parte reale < 0
- Di conseguenza

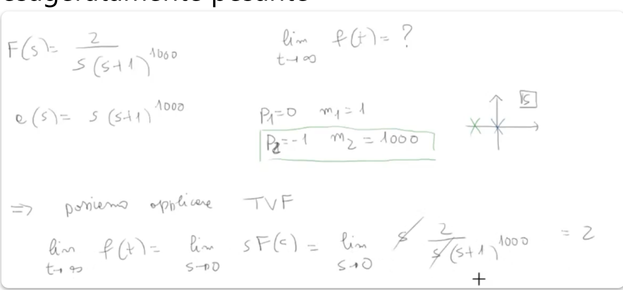
$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = K_1}$$

- se non c'è il polo in 0 il teorema vale lo stesso e $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, ovvero il segnale è convergente se ci sono tutti i poli con parte reale minore di 0.

ESERCIZI: COMPORTAMENTO ASINTOTICO

0)

- Guardo le radici di $a(s)$, notando che c'è un polo in 0 con molteplicità 1 e un polo in -2 con molteplicità 1
- Possiamo applicare il teorema del valore finale
  - In maniera alternativa si può calcolare l'antitrasformata facendo la scomposizione in fratti semplici
    - Però se avessi avuto un polo con molteplicità elevata sarebbe venuta una scomposizione esageratamente pesante



$F(s) = \frac{2}{s(s+1)^{1000}}$ $\lim_{t\to\infty} f(t) = ?$

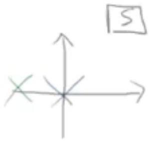
$a(s) = s(s+1)^{1000}$ $p_1 = 0$ $m_1 = 1$

$\boxed{p_2 = -1 \quad m_2 = 1000}$

$\Rightarrow$ possiamo applicare TVF

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{2}{\cancel{s}(s+1)^{1000}} = 2$

$$F(s) = \frac{2}{s(s+2)} \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = ?$$



$e(s) = s(s+2)$ $\qquad \boxed{P_1 = 0}$ $\quad \boxed{P_2 = -2}$

$\qquad m_1 = 1 \qquad m_2 = 1$

$\Rightarrow$ possiamo applicare il teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{2}{\cancel{s}(s+2)} = 1$$

$$F(s) = \boxed{\frac{K_1}{s}} + \boxed{\frac{K_2}{s+2}} \qquad k_1 = \lim_{s\to 0} sF(s) = 1$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

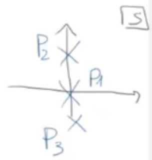
$$f(t) = k_1 \cdot 1(t) + \underbrace{\cancel{k_2 e^{-2t}}}_{\to 0} 1(t)$$

1)

- Poli puramente immaginanari: non si può applicare il teorema del valore finale
- Siamo nel punto $\boxed{b}$ del teorema, che mi garantisce che $f(t)$ è limitata: tutti i poli con parte reale ≤ 0 e quelli con parte reale $= 0$ hanno $m = 1$
  - Infatti i modi di evoluzione sono: gradino (polo in 0), seno e coseno (poli complessi coniugati)

1) $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3+10s} = \dfrac{s^2+1}{s(s^2+10)}$

$e(s) = s(s^2+10)$ $\qquad P_1 = 0$, $m_1 = 0$ $\qquad P_2 = j\sqrt{10}$, $m_2 = 1$ $\qquad P_3 = -j\sqrt{10}$, $m_3 = 1$



$e(s) = 0 \iff s = 0$, $\quad s^2+10 = 0 \quad s^2 = -10$

$\Rightarrow$ non possiamo applicare TVF

$f(t)$ è limitata per $t \to \infty$ perché tutti poli con $Re \leq 0$ e quelli con $Re = 0$ hanno molteplicità 1

infatti i modi di evoluzione sono

$P_1 = 0 \Rightarrow 1(t)$

$P_{2,3} = \pm j\sqrt{10} \Rightarrow \sin(\sqrt{10}\,t)\,1(t), \ \cos(\sqrt{10}\,t)\,1(t)$

tutti limitati

2)

- Guardo i poli di $a(s)$, notando che hanno $m = 2$ e sono complessi coniugati
- Il limite asintotico è 0 perché abbiamo tutti poli con parte reale ≤ 0, quindi modi di evoluzione convergenti (caso $\boxed{a}$ del teorema)
  - calcoliamo anche esplicitamente i modi, guardando quando vale σ_1 e ω_1 per i poli complessi, e

ricordandosi di aggiungere i modi moltiplicati per t dato che abbiamo $m = 2$

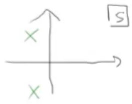
2) $F(s) = \frac{5s}{(s^2+s+1)^2}$

$a(s) = (s^2+s+1)^2$

$a(s) = 0 \iff s^2+s+1 = 0 \iff s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $m_1 = 2$

$P_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $m_2 = 2$



$P_1 = \sigma_1 + j\omega_1$

$\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ $\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

tutti poli con Re < 0 $\Rightarrow$ tutti modi di evoluzione convergenti

$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} f(t) = 0$

infatti i modi di evoluzione sono

$e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) 1(t)$, $e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) 1(t)$, $t e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) 1(t)$, $t e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) 1(t)$

- abbiamo 4 modi come ci aspettavamo (dato che $\Sigma\, \text{molteplicita'} = 4$)

ULTIMI 4 ESERCIZI: LEZIONE 14

3)

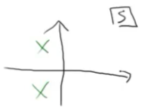
- Si osserva che ci sono semplificazioni (stesso polo al numeratore e al denominatore)
  - Un polo "va via"
  - Ci rimangono solo poli complessi coniugati
- Si può applicare anche il teorema del valore finale

3) $F(s) = \frac{5\cancel{s}}{\cancel{s}(s^2+s+1)} = \frac{5}{s^2+s+1}$ $a(s) = s^2+s+1$

$a(s) = 0 \iff s^2+s+1 = 0 \iff s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$



tutti poli con Re < 0 $\Rightarrow$ tutti modi di evoluzione convergenti

$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} f(t) = 0$

N.B. avrei potuto applicare il teorema del valore finale

$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}\, 5 \cancel{s}}{\cancel{s}(s^2+s+1)} = 0$

- modi esplicitamente calcolati nell'esercizio 2)

4)

- coppia di poli complessi coniugati
- non si può applicare il TVF (parte reale maggiore di zero)
  - parte reale maggiore di zero: divergenti
  - parte immaginaria presente: oscillanti
- quindi modi divergenti e oscillanti

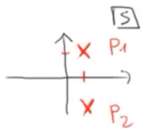
- caso $\boxed{c}$

4) $F(s) = \dfrac{4s}{s^2 - s + 1}$ $\qquad e(s) = s^2 - s + 1$

$e(s) = 0 \iff s^2 - s + 1 = 0 \iff s = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$P_1 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_2 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$



N.B. non posso applicare TVF perché non valgono le ipotesi

$\lim_{t \to \infty} |f(t)| = \infty$

poli complessi coniugati con Re > 0+ ⇒ modi di evoluzione divergenti e oscillanti

$e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t)1(t), \quad e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t)1(t)$

$e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)1(t), \quad e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)1(t)$

- il limite non esiste perché abbiamo oscillazioni

5)

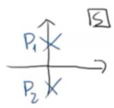
- non si può applicare il TVF perché la parte reale è uguale a zero
  - inoltre abbiamo molteplicità 2, quindi diverge a ∞
    - 4 modi di evoluzione in generale (abbiamo un termine alla seconda al quadrato al denominatore)
- caso $\boxed{c}$ del teorema (divergenza)

5) $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s^2+4)^2}$ $\qquad e(s) = (s^2+4)^2$

$e(s) = 0 \iff (s^2+4)^2 = 0 \iff s^2 + 4 = 0 \iff s^2 = -4 \iff s = \pm j2$

$P_1 = j2 \qquad m_1 = 2$

$P_2 = -j2 \qquad m_2 = 2$



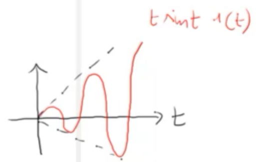
Poli con Re = 0 e molteplicità > 1

⇒ f(t) è divergente

modi di evoluzione

$\sin(\omega_1 t)1(t), \cos(\omega_1 t)1(t), \quad t\sin(\omega_1 t)1(t), \; t\cos(\omega_1 t)1(t)$

$\underbrace{\sin(2t)1(t), \cos(2t)1(t)}_{\text{limitati oscillanti}}, \quad \underbrace{t\sin(2t)1(t), \; t\cos(2t)1(t)}_{\text{divergenti oscillanti}}$



6)

- Semplificazioni! (fattorizzando il denominatore)
  - Polo in 0 con $m = 1$
  - Polo in -2 con $m = 1$
- Posso applicare il TVF

Due modi di evoluzione:

- gradino, associato al polo in 0
- esponenziale decrescente, associato al polo in -2

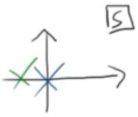
6) $F(s) = \frac{s}{s^3+2s^2} = \frac{\cancel{s}}{s^{\cancel{2}}(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}$ $\qquad a(s) = s(s+2)$

$a(s)=0 \iff s(s+2)=0 \qquad s=0 \qquad s=-2$

$\boxed{S}$

$P_1 = 0^+ \quad m_1 = 1$

$P_2 = -2 \quad m_2 = 1$



tutti poli con Re <0 e un polo in 0 con molteplicità 1

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}(s+2)} = \frac{1}{2}$

TEOREMA DEI RESIDUI ESTESO: GRADO N = GRADO D

Sia $F(s)$ una funzione semplicemente propria, dotata quindi dello stesso grado al numeratore e al denominatore
- Nota: finora abbiamo visto il caso di funzione strettamente propria
Allora si può espandere in fratti semplici come:

$$F(s) = K_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell}$$

- ovvero si aggiunge un termine aggiuntivo K_0 dovuto al termine di grado massimo al denominatore
- Si dimostra che $\boxed{K_0 = b_n}$, quindi non va nemmeno calcolata faticosamente
  - Per dimostrarlo basta fare $\lim_{s\to\infty} F(s)$

ANTITRASFORMATA

Per linearità basta antitrasformare ciascun termine

- La parte delle sommatorie è analoga
- La parte del termine costante K_0 porta con l'antitrasformata alla $\delta(t)$ di ampiezza K_0, ovvero $\boxed{K_0\,\delta(t)}$

ESEMPIO

$F(s) = \frac{3s+1}{s+1}$ $\qquad a(s) = s+1$, $b(s) = 3s+1$ $\qquad$ grado $a(s)$ = grado $b(s)$ $\Rightarrow$ $F(s)$ semplicemente propria

$F(s) = K_0 + \frac{K_1}{s+1}$

$K_1 = \lim_{s\to p_1} (s-p_1)F(s) = \lim_{s\to -1} \cancel{(s+1)}\,\frac{3s+1}{\cancel{s+1}} = -2$

$K_0 = 3 = \lim_{s\to\infty} F(s)$

$F(s) = 3 - \frac{2}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = 3\,\delta(t) - 2e^{-t}\,1(t)$