PROCESSI ALEATORI TEMPO DISCRETO

INTRODUZIONE

Esiste un parallelo forte tra il mondo continuo e quello discreto anche parlando di processi aleatori. Sappiamo infatti un segnale $x(t)$ è un processo aleatorio se tutti i valori per ogni istante t sono variabili aleatorie, ovvero:

$$x(t) \longrightarrow x(t) \text{ v.a.}$$

Analogamente, nel tempo discreto, **la sequenza $x[n]$ è un processo aleatorio se le quantità relative ai campioni $x[n]$ sono variabili aleatorie**, ordinate naturalmente dall'indice dei campioni n (variabile temporale):

$$\boxed{x[n] \longrightarrow x[n] \text{ v.a.}}$$

FORMULE UTILI

Possiamo quindi definire come nel caso tempo continuo:

- *Densità di probabilità (pdf)* di $x[n]$:

$$p_{X[n]}(x)$$

- *Distribuzione di probabilità (PDF)*:

$$P_{X[n]}(x)$$

- *Media*:

$$m_{X[n]} = E[x[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_{X[n]}(x) \, dx$$

- *Potenza*:

$$P_{X[n]} = E[x^2[n]]$$

- *Varianza*:

$$\sigma^2_{x[n]} = E[(x[n] - m_{X[n]})^2] = P_{X[n]} - (m_{X[n]})^2$$

Densità di probabilità congiunte e indici del secondo ordine

Vogliamo mettere in relazione i valori di due campioni: il primo all'istante n e il secondo all'istante $n+m$, ovvero ci chiediamo:

$$x[n] \overset{?}{\longleftrightarrow} x[n+m]$$

Per gestire questi due campioni in modo congiunto, definiamo una **densità di probabilità** in questo modo:

$$p_{x[n],x[n+m]}(x,y)$$

Da cui posso ottenere degli *indici statistici* del secondo ordine.

- L'indice più importante è la **funzione di autocorrelazione**:

$$R_{XX} = E[x[n]\cdot x[n+m]] = \iint_{-\infty}^{\infty} x\cdot y\cdot \underbrace{p_{x[n],x[n+m]}}_{\text{pdf congiunta}}(x,y)\,dx\,dy$$

(vedi anche: *covarianza*, stazionarietà senso forte...)

PROCESSO WSS: Stazionarietà in senso Lato

Un processo tempo discreto è WSS se valgono entrambe:

$$\begin{cases} E[x[n]] = m_X = \text{costante non dipendente dal tempo} \\ R_{XX}[n, n+m] = E[x[n]\cdot x[n+m]] = \underbrace{R_{XX}[m]}_{\substack{\text{in funzione} \\ \text{solo di m}}} \end{cases}$$

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Nel tempo continuo il passaggio da tempo a frequenza era così eseguito ($S_{XX} = \text{densita' spettrale di potenza}$):

$$R_{XX}(\tau) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} S_{XX}(f)$$

Nel caso tempo discreto, si ottiene ancora la densità spettrale di potenza attraverso la trasformata. Stavolta però dovremo utilizzare la **trasformata per sequenze**:

$$R_{XX}[m] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathscr{F}\{R_{XX}[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j2\pi Fm} = \boxed{\overline{S_{XX}}(F)}$$

AUTOCORRELAZIONE DI UN SEGNALE

Invertendo la relazione appena ottenuta si ottiene la formula per l'autocorrelazione:

$$R_{XX}[m] = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F)\, e^{j2\pi F}\, dF$$

CASO $M=0$

> > *Ponendo $m=0$ si ottiene:*
> >
> > $$R_{XX}[m]|_{m=0} = E[x[n]\; x[n+m]]|_{m=0} = E[x^2[n]] = \underbrace{P_X}_{\text{Potenza di }X}$$
> >
> > ***Nota:*** *per la stazionarietà assumiamo la potenza appena ricavata costante.*

> > *Analogamente:*

$$R_{XX}[m]|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F) e^{j2\pi Fm}\, dF|_{m=0} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F)\, dF$$

Ovvero si ottiene:

$$\boxed{P_X = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{S_{XX}}(F)\, dF}$$

RELAZIONI TRA LE AUTOCORRELAZIONI

Ci chiediamo quale sia la relazione tra le funzioni di autocorrelazione tempo continuo e tempo discreto, supponendo che i segnali di partenza siano collegati tra loro dal campionamento.
In altre parole, sappiamo che nel tempo continuo esiste questa relazione:

$$x(t) \rightarrow R_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} S_{XX}(f)$$

Nel mondo tempo discreto se eseguiamo il campionamento di $x(t)$ si ottiene:

$$x(nT) = x[n] \underbrace{\rightarrow R_{XX}[m]}_{\star}$$

Con

$$\underbrace{R_{XX}}_{\text{t. discreto}} = \star = E[x[n]\, x[n+m]] = E[x(nT) \cdot x((n+m)T)] = \underbrace{R_{XX}(nT, nT+mT)}_{\text{t. continuo}} = R_{XX}(mT) = R_{XX}(\tau)|_{\tau=mT}$$

- *Ovvero l'autocorrelazione dei campioni del segnale è un campionamento dell'autocorrelazione tempo continuo*
  - In altre parole se abbiamo un campionamento tra il processo tempo continuo e quello tempo discreto, allora abbiamo lo stesso campionamento tra le due funzioni di autocorrelazione (tempo discreto e tempo continuo).

Infine, la **densità spettrale** che si ottiene in tempo discreto, è la *periodicizzazione* della densità spettrale tempo continuo.

Riassumendo schematicamente:

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r] \arrow[dd] & R_{XX}(\tau) \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathscr{F}_{TC}"] & & S_{XX} \\ & \text{campionamento} \arrow[u] \arrow[d] & & \text{periodicizzazione} \arrow[u] \arrow[d] \\ x[nT] = x[n] & R_{XX}[m] \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathscr{F}_{TD}"'] & & \overline{S_{XX}}(F) \end{tikzcd}$$

(cfr. Spiegazione - Lezione 5 maggio 2:20 circa)