

NICCOLÒ ZANOTTI

APPUNTI DI FISICA NUCLEARE

OPEN SOURCE PUBLISHER

Copyright © 2022 Niccolò Zanotti

PUBLISHED BY OPEN SOURCE PUBLISHER

<https://github.com/feyn-23/fisica-nucleare-subnucleare>

Licensed under the Apache License, Version 2.0 (the “License”); you may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Indice

Fisica nucleare 5

<i>o.1 Le unità di misura della Fisica Nucleare e Subnucleare</i>	5
<i>o.2 Le proprietà generali dei nuclei</i>	7
<i>o.3 Le carte dei nuclidi</i>	11

Lo studio del nucleo 17

<i>o.4 La sezione d'urto</i>	17
<i>o.5 Calcoli di sezioni d'urto</i>	21
<i>o.6 Le proprietà ondulatorie delle particelle microscopiche</i>	25
<i>o.7 Teoria della diffrazione di Kirchoff</i>	30
<i>o.8 Le sezioni d'urto in meccanica quantistica</i>	35
<i>o.9 Diffrazione di un disco assorbente</i>	39
<i>o.10 Il raggio nucleare</i>	41
<i>o.11 Energia di legame nucleare</i>	47

Richiami di Meccanica Quantistica 53

<i>o.12 Osservabili e valori di aspettazione</i>	53
<i>o.13 Definizione ed indefinizione delle osservabili</i>	55
<i>o.14 Momento angolare orbitale</i>	58
<i>o.15 Momento angolare intrinseco o spin</i>	60
<i>o.16 La somma dei momenti angolari</i>	65
<i>o.17 Stati quantomeccanici di due particelle identiche</i>	69

<i>I primi modelli nucleari</i>	73
<i>o.18 Il modello nucleare a goccia</i>	73
<i>o.19 Il nucleo come gas di fermioni</i>	78
<i>o.19.1 Aspetti generali</i>	78
<i>o.19.2 La funzione d'onda del nucleone</i>	80
<i>o.19.3 Nucleoni e principio di esclusione</i>	81
<i>o.19.4 L'espressione dell'energia di legame</i>	84
<i>o.19.5 Il calcolo dell'energia di legame</i>	86
<i>o.20 Il modello a Shell</i>	91
<i>o.20.1 Il potenziale nucleare medio</i>	91

Appendice A : Integrazione sull'angolo solido della sezione d'urto di scattering
97

Appendice B : Funzione di Bessel di ordine zero 99

Appendice C : Integrazione della funzione di Bessel di ordine zero 101

Bibliografia 103

Fisica nucleare

0.1 Le unità di misura della Fisica Nucleare e Subnucleare

La scelta della unità di misura è arbitraria ma, in accordo con i criteri che ispirano i moderni sistemi, soddisfa alcuni semplici requisiti di ordine generale:

- **l'unità deve essere connessa ad un fenomeno naturale ritenuto stabile ed invariabile nel tempo** piuttosto che ad un oggetto o manufatto particolare il quale potrebbe deteriorarsi o modificare le sue proprietà con il tempo;
- **le unità non devono essere ridondanti** e devono costituire un sistema di grandezze fisiche irriducibili dette fondamentali dalle quali ottenere tutte le altre che invece vengono dette derivate;
- **l'unità deve essere riproducibile in laboratorio con una relativa facilità** (in realtà è lavoro da professionisti quali sono i metrologi).

Un sistema di unità di misura più appropriato può essere costruito facendo riferimento alle costanti fisiche fondamentali che governano i fenomeni nucleari e subnucleari. Accanto alle grandezze fondamentali, ogni area della fisica introduce anche specifiche costanti fisiche. Queste possono essere sia dimensionali che adimensionali, riferirsi a specifiche classi di fenomeni - e dunque di rango locale - oppure valide per ogni fenomeno fisico e quindi di rango universale.

Mentre il valore numerico delle costanti dimensionali dipende dalla scelta del sistema di unità misura, quello delle costanti adimensionali ne è del tutto indipendente per cui si ritiene che siano dotate di un più profondo significato fisico anche se a tutt'oggi nessuna teoria è in grado di predirne il valore. Fu Planck che propose di assumere come grandezze fisiche fondamentali le costanti fisiche universali introducendo i cosiddetti sistemi naturali di unità di misura. Lo scopo di tali sistemi è quello di dedurre le appropriate scale di lunghezze, tempi, masse e temperature direttamente dai fenomeni naturali piuttosto che da convenzioni di natura metrologica.

La costruzione di un sistema di unità di misura le cui grandezze abbiano la scala appropriata per una certa classe di fenomeni richiede l'introduzione di specifici vincoli tra le grandezze fondamentali della descrizione macroscopica. Ad esempio, dato che **i fenomeni nucleari e subnucleari sono al tempo stesso relativistici e quantistici** ciò significa che le velocità, ovvero i quozienti tra lunghezze e tempi saranno dell'ordine di c , mentre le azioni, cioè i prodotti delle energie per i tempi caratteristici saranno dell'ordine di \hbar . Due costanti universali non sono però sufficienti per fissare la scala delle tre grandezze necessarie al Sistema Internazionale per descrivere la relatività e meccanica quantistica (L , T ed M). Il particolare ruolo giocato dalle macchine acceleratrici in fisica nucleare e delle particelle elementari suggerisce allora di assumere come terza grandezza (non costante) un fondamentale parametro costruttivo della macchina, **l'energia E** . In accordo con le convenzioni adottate nella ingegneria delle macchine acceleratrici si assume come unità l'elettronvolt (eV), ovvero l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di un volt. Si ottiene facilmente la sua conversione in joule: $E_{\text{cin}} = eV$ da cui $1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$.

Definite le unità del **Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare (SNNS)** possiamo facilmente calcolare i loro valori nel Sistema Internazionale (SI) attraverso le seguenti equazioni dimensionali (si noti che con le lettere minuscole indichiamo le grandezze fondamentali del SNNS e con le maiuscole quelle del SI)

$$\begin{aligned} c &\sim \frac{L}{T} & \epsilon &\sim Mc^2 & \epsilon T &\sim \hbar \\ L &\sim cT & M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & T &\sim \frac{\hbar}{\epsilon} \\ L &\sim \frac{\hbar c}{\epsilon} & M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & T &\sim \frac{\hbar}{\epsilon} \end{aligned}$$

Da queste deduciamo che le lunghezze possono essere misurate in unità di $\frac{\hbar c}{\epsilon}$ ($\hbar c/eV$ o $1/eV$ se $\hbar = c = 1$), i tempi in unità di $\frac{\hbar}{\epsilon}$ (\hbar/eV o $1/eV$ se $\hbar = 1$) ed infine le masse in unità di $\epsilon/c^2(eV/c^2$ o eV se $c = 1$).

Tenendo ora presenti i valori delle costanti universali espresse nel Sistema Internazionale e della conversione tra Joule (J) ed elettronvolt (eV):

$$\begin{aligned} \hbar &= 1.055 \times 10^{-34} J \cdot s & c &= 2.998 \times 10^8 m/s & \hbar c &= 3.162 \times 10^{-26} J \cdot m \\ 1eV &= 1.602 \times 10^{-19} J \end{aligned}$$

possiamo calcolare i coefficienti della conversione tra il Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare ed il Sistema Internazionale

(per quanto riguarda l'energia, piuttosto che gli eV, assumeremo la scala più appropriata dei MeV)

$$\begin{aligned} L &\sim \frac{\hbar c}{\epsilon} \quad 1 \left(\frac{\hbar c}{MeV} \right) \sim 1.97 \times 10^{-19} m \\ M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} \quad 1 \left(\frac{MeV}{c^2} \right) \sim 1.78 \times 10^{-30} Kg \\ \frac{\hbar}{\epsilon} &\sim T \quad 1 \left(\frac{\hbar}{MeV} \right) \sim 6.59 \times 10^{-22} s \end{aligned}$$

o.2 Le proprietà generali dei nuclei

Il **nucleo** è un sistema composto formato da **neutroni** e **protoni** - spesso indicati con il nome generico di **nucleoni** - tenuti assieme dalla **interazione forte**, una delle interazioni fondamentali della natura(di cui non si ha traccia macroscopicamente).

In fisica nucleare si usa il termine 'nuclide' piuttosto che 'nucleo' più prossimo alla chimica. Si hanno le seguenti grandezze rilevanti:

- **numero atomico** Z , ovvero numero di protoni del nuclide;
- il numero di neutroni non ha nome specifico e si indica con N ;
- **numero di massa** A , ovvero il numero di nucleoni $Z + N$.

Ne consegue che una qualunque coppia dei numeri Z, N ed A identifica univocamente il nuclide. La notazione è la seguente:



Si parla di nuclidi

1. **isotopi** se hanno stesso Z ma diversi N ed A ;
2. **isotoni** se hanno stesso N ma diversi Z ed A ;
3. **isobari** se hanno stesso A ma diversi N ed Z ;
 - se questi hanno N e Z scambiati si dicono *speculari*;
4. **isomeri** se sono identici ma in uno stato di energia differente.

Il neutrone ha una massa di $939.56 MeV/c^2$ che eccede di soli $1.29 MeV/c^2$ la massa del protone che ammonta a $938.27 MeV/c^2$. Spesso approssimate a $940 MeV/c^2$ o addirittura ad $1 GeV/c^2$, i nucleoni risultano circa 1840 volte più massivi dell'elettrone ($0.51 MeV/c^2$). La piccola differenza di massa gioca un ruolo chiave in molti fenomeni. Sia i **neutroni** che i protoni possiedono un momento angolare

intrinseco di **spin** $s = \frac{1}{2}$ (in unità \hbar). Sulla base della meccanica quantistica, ciò significa che la proiezione del momento angolare lungo un certo asse può assumere i due soli valori $\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$. Lo spin interviene non solo negli aspetti specifici della dinamica dei nucleoni ma anche nella determinazione del loro **comportamento collettivo**. La meccanica quantistica impone ai sistemi di particelle identiche restrizioni peculiari che non hanno analogie nella fisica classica. Sulla base del **teorema di spin statistica** i neutroni ed i protoni nucleari - che hanno spin semintero - si comportano collettivamente come **fermioni** e devono soddisfare il **principio di Pauli**, un fatto che gioca un ruolo decisivo nella **stabilità e struttura** del nucleo.

Nella fisica classica solo una particella estesa può possedere momento angolare intrinseco (spin). Se lo possiede ed è elettricamente carica allora possiede anche momento di dipolo magnetico. Ad esempio è facile mostrare che un anello di carica e e superficie S , posto in rotazione attorno all'asse di simmetria, soddisfa la seguente relazione $\mu = \frac{eL}{2m}$.

Nella fisica quantistica, non solo le particelle estese (composte) ma **anche quelle puntiformi** (elementari) possono essere dotate di **spin** per cui - se dotate di carica elettrica - possiederanno anche un **momento di dipolo magnetico**.

Vediamo da un conto esplicito che l'analogia classica-quantistica è fallimentare:

$$\begin{aligned} \mu &= iS = \frac{e}{T}\pi R^2 \\ L &= mvR = m\frac{2\pi R}{T}R \rightarrow \pi R^2 = \frac{T}{2m}L \\ \rightarrow \mu &= \frac{e}{T}\frac{T}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m}\left(\frac{L}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

dove la grandezza $\frac{e\hbar}{2m}$ viene detta **magnetone di Bohr** e vale $9.274 \times 10^{-24} J/T$. E' un fatto ben noto però che la relazione tra μ ed L differisce da quella classica per un fattore numerico. Ad esempio, nel caso di particelle puntiformi di spin $1/2$, l'equazione **quantomeccanica relativistica di Dirac** conduce ad una relazione contenente un fattore g :

$$\mu_{qm} = g\frac{e\hbar}{2m}\left(\frac{L}{\hbar}\right)$$

di valore 2.

Preso atto di questo fatto dobbiamo aggiungere che le teorie di campo quantizzato hanno dimostrato che il fattore $g = 2$ delle particelle puntiformi deve subire **piccole correzioni** dovute a certi processi virtuali, soprattutto di natura elettromagnetica, di cui diremo

$$g = 2(1 + a) \quad a = \frac{g - 2}{2}$$

Momento di dipolo magnetico dei nucleoni

La correzione a - detta *momento magnetico anomalo* o anche $\frac{g-2}{2}$ - rappresenta uno dei parametri più importanti per un confronto di alta precisione tra previsioni teoriche e misure sperimentalistiche. A titolo di esempio nel caso dell'elettrone si ha

$$a_{th} = 0.001159652181643(764)$$

$$a_{ex} = 0.001159652180730(280)$$

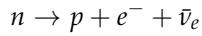
lo stupefacente accordo costituisce uno dei test più significativi a favore della QED. Nel caso in cui la particella quantistica non sia puntiforme il fattore $g = 2$ si modifica ben più pesantemente. Ad esempio, nel caso del protone deve essere moltiplicato per 2.79 per cui si ha $g = 2 \times 2.79 = 5.58$ mentre nel caso del neutrone deve essere moltiplicato per -1.91 per cui si ha $g = 2 \times (-1.91) = -3.82$.

Alcuni fatti rilevanti:

- La natura dei nucleoni *non è quella di particelle elementari*. Questo si intuisce dalla deviazione di g dal valore 2. Inoltre il modello a quark degli adroni conferma questo aspetto, asserendo che, in prima approssimazione, i nucleoni sono pensabili come **stati legati di tre quark** con 'carica forte' complessiva nulla nello stato di minima energia.
- nucleoni non possiedono momento di dipolo elettrico, un fatto che ha importanti implicazioni.
- La strong force ha carattere attrattivo e short range;
- Le dimensioni lineari del nucleo sono circa 10^5 volte inferiori a quelle dell'atomo. La descrizione quantistica dei fenomeni risulta essenziale(energia a livelli discreti ...);
- Dal principio di esclusione di Pauli si hanno vincoli sulla presenza di nucleoni (1 nucleone e 1 protone al massimo in ciascun quantum state) → degenerazione dei livelli energetici;
- I nuclidi più stabili tendono ad avere un numero di neutroni un po' più alto di quello dei protoni (condizione di minima energia).

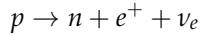
Discutiamo la **stabilità** del nucleo.

Il neutrone è intrinsecamente **instabile**: può *decadere*, mediamente ogni 14.8 minuti, in protone, elettrone e antineutrino attraverso un processo mediato dalla interazione debole detto **decadimento beta**:



A ciò si aggiunge il fatto che il protone - stabile quando libero - quando fornito di sufficiente energia può dare luogo al **decadimento**

beta inverso trasformandosi in neutrone, positrone e neutrino:



Cerchiamo di capire se e quando tali processi possano avvenire all'interno del nucleo.

Quando un nuclide è legato nello stato stabile di minima energia dalla interazione forte, accade che le interazioni deboli siano bloccate dal principio di Pauli(**Pauli blocking**¹) per cui i nucleoni diventano stabili rispetto al decadimento beta e beta inverso.

Naturalmente, le precedenti considerazioni non valgono quando il nucleo si trova al di fuori della condizione di equilibrio a causa di un eccesso di neutroni o protoni. Infatti, in questo caso vi saranno livelli energetici incompleti ed i decadimenti beta e beta inverso potranno avvenire anche all'interno del nucleo dando luogo ad un fenomeno chiamato **decadimento radioattivo** che potrà ripetersi fino al raggiungimento della condizione di stabilità. Si hanno allora i seguenti casi:

- Se il nucleo ha un **eccesso di neutroni** rispetto ai protoni accade che la instabilità del neutrone rispetto le interazioni deboli non risulti più bloccata aprendo le porte al decadimento beta (β^-) che convertirà neutroni in protoni (irradiando anche elettroni e antineutrini) fino a riportare il nucleo verso il 'corretto' quoziente neutroni/protoni:



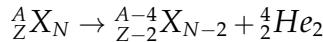
- Se il nucleo ha un **eccesso di protoni** rispetto ai neutroni può accadere che sia possibile il **decadimento beta inverso** (β^+) che convertirà protoni in neutroni (irradiando anche positroni e neutrini) fino a riportare il nucleo verso il 'corretto' quoziente neutroni/protoni:



Nel caso in cui i nuclei siano circondati dai loro elettroni, risulta energeticamente conveniente il seguente processo 'associato' al decadimento beta inverso detto **cattura elettronica** (EC)

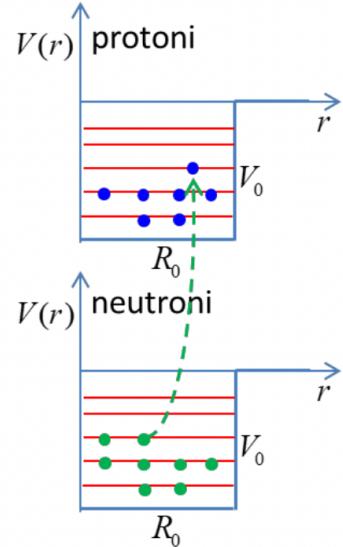


dove osserviamo che viene 'risparmiata' l'energia di creazione del positrone finale. Sempre nel caso di eccesso di protoni, si osserva che nel caso in cui il nucleo sia particolarmente pesante il nucleo tende quindi ad espellere nuclei di He dando luogo al cosiddetto **decadimento alpha**



¹ A causa del principio di Pauli, quando il nuclide si trova nello stato stabile di minima energia, i livelli energetici discretizzati dei protoni e dei neutroni sono riempiti dal basso verso l'alto occupando tutti gli stati quantici disponibili. In questa situazione la trasformazione di un neutrone in protone può risultare energeticamente impossibile poiché può accadere che il protone finale non abbia sufficiente energia per occupare il primo stato quantico disponibile.

A maggior ragione può risultare energeticamente impossibile la trasformazione di un protone in neutrone già penalizzata dalla differenza di massa negativa.



- Se il nucleo è molto molto pesante, indipendentemente dal possibile eccesso di protoni e/o neutroni, può spezzarsi in due frammenti nucleari più una coda di nucleoni singoli formata perlopiù da neutroni dando luogo alla cosiddetta **fissione nucleare** (si parla di *fissione indotta* nel caso in cui il processo venga avviato da una causa esterna quale ad esempio un neutrone di energia opportuna).
- In presenza di eccesso di neutroni (protoni) può accadere (raramente) che il nucleo espella direttamente un neutrone (protone) dando luogo al **processo di emissione di neutroni (protoni)**



- Vi sono poi processi ancora più rari come la doppia emissione di protoni, il doppio decadimento beta di due neutroni, la doppia cattura elettronica, etc ...
- Va infine detto che nel corso di un decadimento nucleare è sempre possibile un riarrangiamento dei neutroni e dei protoni sui diversi livelli energetici del nucleo (transizioni isomeriche). Quando a riarrangiarsi sono i protoni, in virtù della loro carica elettrica, possono dissipare energia nel campo elettromagnetico ovvero ad uno o più fotoni. Dato che l'interazione forte tra nucleoni è intensa, i livelli energetici nucleari sono ben spaziati ed i fotoni prodotti assai robusti in un campo di lunghezze d'onda/frequenza tipico della cosiddetta **radiazione gamma**.

0.3 Le carte dei nuclidi

In figura 1 sono rappresentati gli stati fondamentali degli oltre 3300 nuclidi a tutt'oggi noti in funzione di N e Z (nelle carte interattive sono rappresentati anche gli stati eccitati o isomeri, si veda ad esempio <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>).

Evidentemente, per ciascun nuclide, in linea orizzontale sono disposti gli isotopi, in linea verticale gli isotoni ed in linea obliqua gli isobari. In nero sono indicati i 253 *nuclidi stabili*, negli altri colori gli oltre 3000 nuclidi instabili con un codice colore che da una indicazione del tempo di dimezzamento o emivita ².

Un primo fatto rilevante riguarda la distribuzione dei nuclidi nel piano ZN . Già a colpo d'occhio si apprezza che i **nuclidi tendono ad avere più neutroni che protoni**. Si noterà che il quoziente N/Z si scosta sempre più dalla unità con il crescere del numero atomico A . Prendendo come riferimento i nuclidi stabili di ciascuna serie isotopica, si nota che i nuclidi ${}_2^4\text{He}_2$, ${}_8^{16}\text{O}_8$ fino a giungere al ${}_{20}^{40}\text{Ca}_{20}$ giacciono sulla bisettrice con un quoziente $N/Z \sim 1$. I nuclidi medi

² Secondo la meccanica quantistica i processi fisici sono di natura intrinsecamente statistica per cui è possibile predire solo la probabilità che avvengano. Data, pertanto, una popolazione di N nuclidi la variazione di N in un tempo elementare dt sarà data dalla espressione

$$dN = -N\lambda dt$$

dove λ è la **costante di decadimento del processo** e $\frac{1}{\lambda} = \tau$ è detta **vita media del processo**. La popolazione in funzione del tempo è allora data da

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

Spesso, in fisica nucleare ci si riferisce però al **tempo di dimezzamento** $t_{1/2}$ definito come il tempo necessario per dimezzare un qualunque campione di una data sostanza. Si ottiene

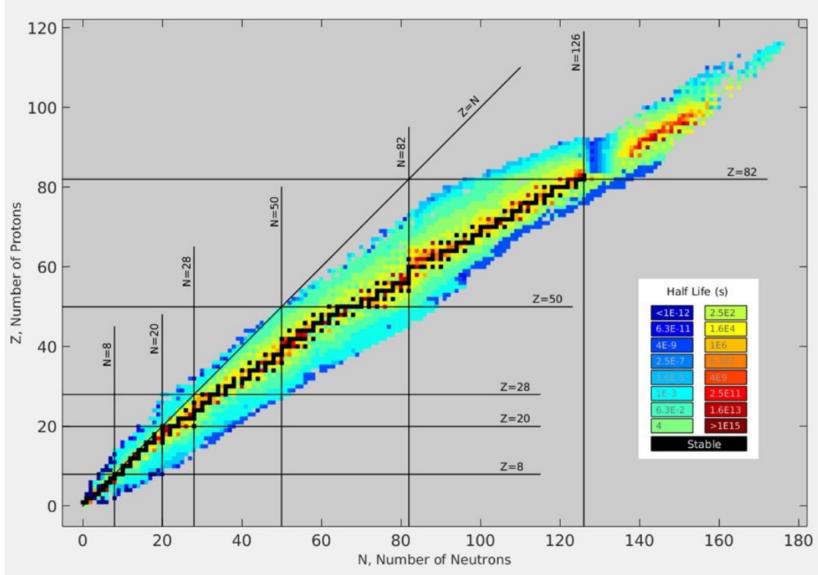


Figura 1: Nuclides plotted in NZ plane as a function of half-life.

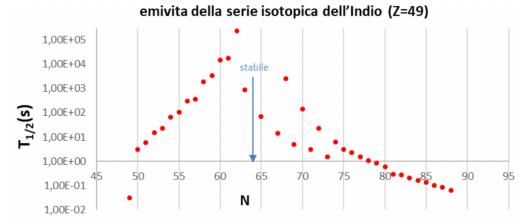
come ad esempio $^{111}_{48}\text{Cd}_{63}$ hanno un quoziente $N/Z \sim 1.3$. I nuclidi molto pesanti, infine, come $^{238}_{92}\text{U}_{146}$, hanno un quoziente $N/Z \sim 1.6$.

La instabilità nucleare è un fenomeno quantitativamente spettacolare: si va dalla emivita del ^6_1H di 2.85×10^{-22} s a quella del $^{128}_{52}\text{Te}$ di 2.43×10^{32} s ovvero attraverso 54 ordini di grandezza! Man mano che ci si allontana dalla linea dei nuclidi stabili (stability valley) i tempi di dimezzamento si accorciano progressivamente. A titolo di esempio si consideri la emivita della serie isotopica dell'indio in figura affianco.

Tornando alla carta dei nuclidi, le linee orizzontali e verticali a Z ed $N = 8, 20, 28, 50, \dots$ detti **numeri magici**, corrispondono a configurazioni di protoni e neutroni particolarmente stabili (vedi modello a shell) poiché tali numeri completano le 'shell' nucleari ovvero i livelli energetici più prominenti del potenziale nucleare medio agente su ciascun protone e neutrone.

Si potrebbe pensare che i nuclidi doppiamente magici siano tutti stabili ma in realtà non è così. Certamente si tratta di configurazioni tendenzialmente più stabili delle altre tuttavia non bisogna dimenticare che la stabilità nucleare è soprattutto legata al corretto quoziente neutroni/protoni per cui è solo quando *la doppia magicità è compatibile con un quoziente N/Z non troppo lontano dal necessario che si ha davvero un nucleo particolarmente stabile*. La dimostrazione di come la doppia magicità tenda a stabilizzare il nucleo è ben visibile nel $^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$, stabile nonostante abbia un quoziente N/Z diverso dai nuclidi della sua regione di numero atomico A .

I 253 nuclidi stabili si estendono lungo una linea a zig-zag nel



piano Z, N da $Z = 1$ (1H) a $Z = 83$ ($^{209}_{83}Bi$) quasi senza soluzione di continuità e spesso con diversi isotopi stabili per ciascun Z . Fanno eccezione $Tc, Pm(Z = 43, Z = 61)$ che non hanno alcun nucleo stabile nella loro serie isotopica. Al di sopra della serie isotopica del Bismuto i nuclidi sono tutti instabili.

Occorre precisare che i 253 nuclidi stabili sono così suddivisi:

- 90 sono **teoricamente stabili**;
- 163 sono **osservazionalmente stabili**, ovvero teoricamente instabili ma con emivita non misurabile con le attuali tecniche.

I 253 nuclidi stabili sono stati certamente formati nel Big-bang e nel corso dei processi nucleosintetici all'interno delle stelle e delle supernovae. Si hanno inoltre 33 nuclidi con emivita maggiore di 10^8 anni, stima dell'emivita della Terra, per cui possiamo affermare che sulla Terra sono osservabili $253 + 33 = 286$ **nuclidi primordiali**.

I 33 nuclidi instabili primordiali danno origine per decadimento

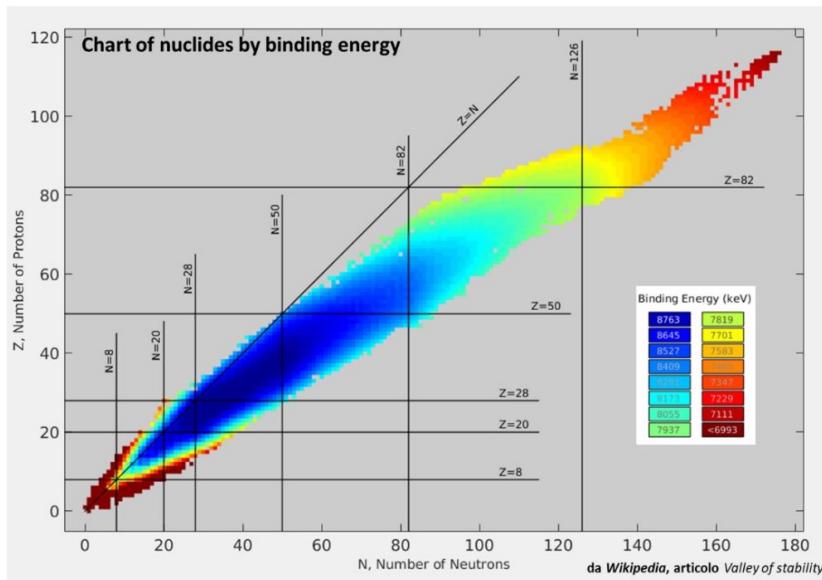


Figura 2: Chart of nuclides by binding energy.

radioattivo ad un certo numero di *nuclidi figli* spesso di breve o brevissima vita media che certamente non possono essere primordiali. A questi dobbiamo aggiungere un certo numero di nuclidi generati da **reazioni nucleari indotte** dai raggi cosmici o dai neutroni naturali. Di questi ne sono noti 53 dunque in totale sulla terra sono osservabili $286 + 53 = 339$ **nuclidi naturali**. I rimanenti, oltre 3000, sono pertanto **nuclidi artificiali** prodotti dall'uomo con tecniche differenti.

La carta in figura 2 fornisce informazioni complementari alle precedenti. Ci attendiamo che, per ciascun valore di Z , l'isotopo stabile sia quello con la maggiore energia di legame per nucleone.

L'andamento di B/A (energia di legame per nucleone) della serie isotopica dell'Indio ($Z=49$) conferma tale ipotesi. I valori della energia di legame superano gli 8 MeV per nucleone e sono dell'ordine di 8.5 MeV nel caso dell'isotopo stabile $N=64$.

Ancora più interessante è l'**andamento della energia di legame per nucleone dei soli isotopi stabili maggiormente abbondanti di ciascun nucleo del piano Z , N** . Ciò in qualche modo corrisponde alla sezione dell'istogramma bidimensionale della energia di legame lungo la sua linea mediana corrispondente agli isotopi stabili. Si ottiene l'andamento seguente: Partendo dai nuclei leggeri, il

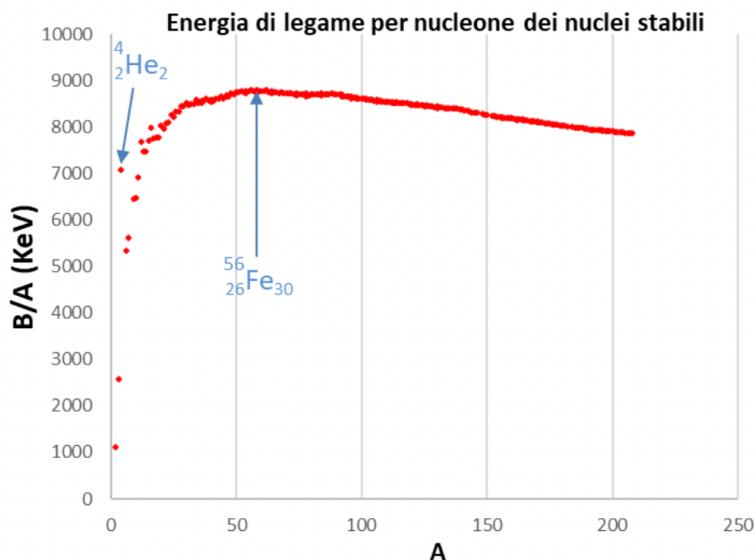
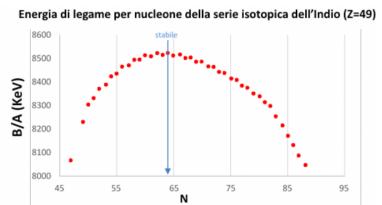


Figura 3: Energia di legame per nucleone(nuclei stabili).

quoziente B/A sale rapidamente raggiungendo un primo picco molto marcato ad oltre 7 MeV per nucleone nel nucleo di elio da cui risulta che la configurazione nucleare con due protoni e due neutroni è particolarmente stabile. Dopo essersi abbassato nel caso del litio ($A = 6$), il quoziente B/A sale con una certa regolarità fino ad un massimo corrispondente al ferro con 56 nucleoni dove B/A sfiora gli 8.8 MeV per nucleone. Al di là del ferro il quoziente B/A flette verso il basso con una certa regolarità. *Uno degli obiettivi dei modelli nucleari è quello di spiegare questo andamento.* Già nel caso del modello a goccia, il primo ad essere formulato, si ottengono risultati soddisfacenti.

Da ciò che è stato detto al punto precedente segue immediatamente che i nuclei più *leggieri* del ferro guadagnano in stabilità *aggregando*

ulteriori neutroni e protoni mentre i quelli più *pesanti* guadagnano in stabilità *perdendo* neutroni e protoni. Ciò significa che i processi di fusione dei nuclei leggeri e di fisione dei nuclei pesanti saranno esoenergetici indicando così le due possibili vie per la produzione di energia attraverso reazioni nucleari. Significa anche che le reazioni nucleari nell'ambito dei processi naturali spontanei (che evolvono sempre verso stati di maggiore stabilità) tenderanno a fondere i nuclei leggeri e a fissionare quelli pesanti. La natura ha scelto la fusione dei nuclei leggeri per produrre energia all'interno delle stelle attraverso cicli successivi che trovano la loro fine nella sintesi del ferro che rende la stella gravitazionalmente instabile fino determinarne la esplosione.

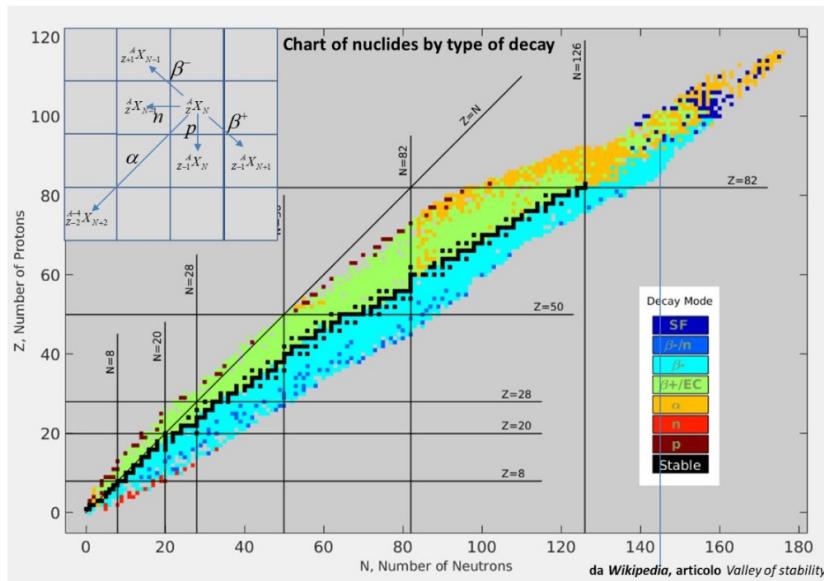


Figura 4: Chart of nuclides by type of decay.

La carta in figura 4 fornisce una visione d'insieme delle reazioni nucleari cui sono soggetti i nuclidi instabili. A colpo d'occhio è evidente che

- I nuclidi con un eccesso di neutroni tendono a ristabilire il corretto quoziente N/Z attraverso il decadimento β^- ;
- I nuclidi con un eccesso di protoni tendano in generale a ristabilire il corretto quoziente N/Z non attraverso il decadimento β^+ ma piuttosto attraverso il processo 'associato' di cattura elettronica energeticamente più vantaggioso EC;
- I nuclidi pesanti con un forte eccesso di protoni tendono invece a ristabilire il corretto quoziente N/Z attraverso il decadimento α .

decadimento in questione è quello preferenziale per tutti i nuclidi con eccesso di protoni al di sopra del piombo ($Z=82$);

- I nuclidi pesantissimi con oltre 100 protoni e 140 neutroni (ad esempio il californio $^{238}_{98}\text{Cf}_{140}$) sono soggetti a **fissione spontanea** (SF), ovvero alla frantumazione del nucleo in due nuclei più piccoli seguiti da un certo numero di nucleoni liberi perlopiù neutroni;
- Alcuni nuclidi leggeri con un forte eccesso di neutroni decadono **emettendo un neutrone** (n). Esempi noti sono alcuni isotopi del boro e del berillio.

A titolo di esempio si riportano in figura 5 alcune catene di decadimento radioattivo che terminano sugli isotopi stabili del piombo che vengono raggiunti attraverso una alternanza di decadimenti alfa e beta negativo

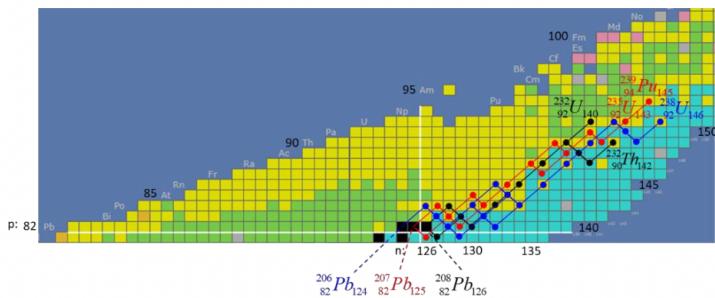


Figura 5: Catene del torio-232/uranio-232 (in nero), dell'uranio-235/plutonio-239 (in rosso) e dell'uranio-238 (blu).

Le emivite di ciascun passo della catena possono variare dalla frazione di secondo ai milioni di anni; l'esempio della catena del torio-232/uranio-232 è reperibile all'indirizzo https://en.wikipedia.org/wiki/Decay_chain#/media/File:Decay_Chain_Thorium.svg.

Lo studio del nucleo

0.4 La sezione d'urto

In quale modo i fisici possono esplorare la struttura di oggetti così piccoli quali sono gli atomi, i nuclei e le particelle subatomiche? Quali sono le grandezze fisiche sperimentalmente misurabili e quale tipo di informazioni su tali oggetti microscopici è effettivamente possibile ottenere da tali misure? Gli elementi fondamentali che caratterizzano l'esperimento di Rutherford(1909-1913) così come versioni più moderne sono i seguenti:

1. un **fascio incidente** di particelle proiettile;
2. un **bersaglio** contenente le particelle da studiare(atomi/nuclei /protoni/neutroni);
3. un **rivelatore** dietro/attorno al bersaglio capace di misurare le particelle emergenti³.

Nell'esperimento di Rutherford:

- fascio: particelle *alpha* di 5.6 MeV;
- bersaglio: gold foil con spessore di 8.6×10^{-6} cm
- rivelatore: vetro dipinto da *ZnS* scintillante al momento dell'incontro con particelle cariche.

Goal dell'esperimento: riconoscere le particelle emergenti e misurarne le grandezze cinematiche(energia, quantità di moto) al fine di ottenere informazioni sulla natura dell' **interazione** tra particella del fascio e particella del bersaglio.

Il termine **interazione** è un termine generico che può indicare sia la semplice deviazione di un certo angolo di una particella del fascio da parte di una particella del bersaglio che vere e proprie reazioni nel corso delle quali le particelle incidenti si trasformano in particelle di altro tipo Introduciamo la seguente notazione:

³ Il progresso tecnologico nel campo delle macchine acceleratrici ha reso possibile una variante dello schema descritto dove la collisione avviene tra le particelle di due fasci contrapposti. I 'collider', certamente più difficili da costruire permettono però di raggiungere, a parità delle tecnologie di accelerazione delle particelle, una maggiore energia della collisione.

- **Processi di diffusione(scattering):** le particelle emergenti dal bersaglio coincidono con quelle del raggio incidente;
- **Processi di produzione:** non vale quanto sopra.

Tra i processi di diffusione si distinguono processi:

- **elastici :** energia della particella incidente = energia particella emergente
- **anelastici:** energia della particella incidente \neq energia particella emergente

Dato che solitamente la particella proiettile è priva di struttura interna, a differenza di quella bersaglio, si ha diffusione

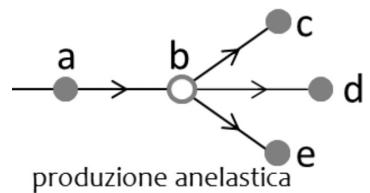
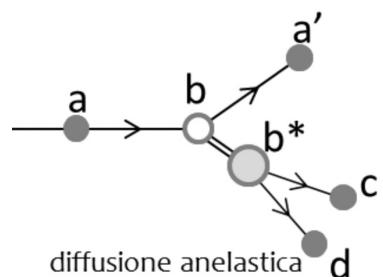
- **elastica:** se il bersaglio non modifica la sua struttura e non assorbe energia ($\Delta E_{cin}^{Tot} = 0$);
- **inelastica:** se il bersaglio modifica la sua struttura e assorbe energia.

A seguito della diffusione la particella bersaglio può decadere in nuove particelle in un processo noto come **produzione inelastica** (chiaramente l'elasticità non si può avere, sulla base della terminologia introdotta) caratterizzata da ($\Delta E_{cin}^{Tot} \neq 0$). Si parla di *diffusione profondamente inelastica* quando l'energia della particella proiettile è tale che la De Broglie wavelength ad essa associata risulta molto minore della dimensione della particella bersaglio \rightarrow si può definire la struttura interna (che varia durante il processo).

Vogliamo ora domandarci quale **grandezza fisica microscopica del bersaglio** sia possibile misurare con un arrangemento sperimentale alla Rutherford. Per cominciare, occorre tenere presente che nella pratica sperimentale si cerca di ottenere **un fascio di particelle proiettile con densità e velocità uniformi e costanti** da inviare su di un **bersaglio materiale chimicamente omogeneo**. In generale, in questa situazione, **si ottengono informazioni sui componenti microscopici del bersaglio confrontando il fascio di particelle uscente con quello entrante**. In particolare maggiore e il numero di grandezze fisiche del fascio emergente che vengono misurate (distribuzione spaziale, energia, quantità di moto, tipologia, etc...) più dettagliata risulterà l'informazione sui componenti microscopici del bersaglio.

Le assunzioni che faremo sono le seguenti:

1. il fascio di sezione trasversale Σ sia costituito da corpuscoli massivi puntiformi in moto con la stessa velocità v e densità spaziale n_f uniforme e costante;



2. il bersaglio sia costituito da sferette massive di raggio dato, distribuite con densità n_b uniforme all'interno di un sottile strato materiale di spessore Δx e area maggiore di Σ (in modo da utilizzare tutte le particelle del fascio);
3. l'interazione tra particella proiettile e particella bersaglio sia assimilabile ad un urto meccanico;
4. a seguito di tale interazione la particella proiettile venga deviata e dunque rilevata in una direzione diversa da quella del fascio.

Date queste condizioni, la probabilità che una singola particella proiettile $p_f^{(i)}$ interagisca con una singola particella del bersaglio $p_b^{(j)}$ vale

$$\frac{\sigma}{\Sigma}$$

dove σ è la sezione trasversale della particella bersaglio e Σ la sezione trasversale del fascio. In pratica, detto ΔN_f il numero di particelle del fascio che nel tempo Δt hanno avuto la possibilità di interagire con le ΔN_b particelle del bersaglio, si ha un *numero di particelle deflesse dalla direzione del fascio* a seguito dell'urto pari a

$$\Delta N_{def} = \sum_j^{\Delta N_b} \sum_i^{\Delta N_f} \frac{\sigma}{\Sigma} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma}$$

Ora si noti che le ΔN_f particelle del fascio sono contenute all'interno di un parallelepipedo di area Σ ed altezza $v\Delta t$ mentre le ΔN_b particelle del bersaglio sono contenute all'interno di un parallelepipedo di area Σ ed altezza Δx . Ricordando allora che le densità volumetriche di particelle del fascio e del bersaglio valgono rispettivamente n_f e n_b , si ottengono le seguenti espressioni:

$$\Delta N_f = \underbrace{\Sigma v \Delta t}_{\text{Volume}} n_f \quad \Delta N_b = \underbrace{\Sigma \Delta x}_{\text{Volume}} n_b$$

che sostituite forniscono il numero di particelle deflesse nel tempo Δt :

$$\Delta N_{def} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma} = (\Sigma v \Delta t n_f)(\Sigma \Delta x n_b) \frac{\sigma}{\Sigma}$$

e quindi un rate di deflessione

$$\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t} = (vn_f)(\Sigma \Delta x n_b) \sigma$$

Invertendo la relazione, otteniamo infine l'espressione della **sezione trasversale della particella bersaglio o sezione d'urto**

$$\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{dN_{def}}{dt}$$

(1)

L'interesse di questa espressione risiede nel fatto che mette in relazione una grandezza fisica microscopica, quale la sezione trasversale σ della particella bersaglio, con grandezze fisiche macroscopiche misurabili quali sono i parametri geometrici $n_f, n_b, \Sigma, \Delta x$ e $\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t}$.

La grandezza σ è detta **sezione d'urto totale** o **sezione totale d'interazione** ed è ciò che può essere misurato in un tipico arrangemento alla Rutherford (questa affermazione va presa cum grano salis poiché disponendo di un adeguato apparato si possono misurare le sezioni d'urto in funzione di specifiche variabili d'interesse), ha le **dimensioni di un'area** (in questo caso coincidente con l'area trasversale della particella bersaglio) e dunque si misura in m^2 (più propriamente in suoi sottomultipli), ed è la grandezza fisica che **caratterizza l'interazione tra la generica particella del fascio e la generica particella del bersaglio**. Ci attendiamo infine che tale espressione abbia una **validità generale** e che possa essere applicata non solo nel caso specifico dell'urto meccanico da noi esaminato (impossibile a livello microscopico!) ma anche nel caso più realistico in cui le particelle del fascio e del bersaglio interagiscono per mezzo di una interazione naturale.

Infatti, anche nel caso delle particelle subatomiche, nel quale la mutua interazione non è certo schematizzabile come un urto meccanico di sfere rigide, sarà sempre possibile introdurre la grandezza microscopica σ il cui valore, però, non sarà determinato dalla sezione trasversale della particella ma dalle proprietà della interazione e tra particella proiettile e particella bersaglio.

Dunque, in fisica nucleare e delle particelle elementari gli esperimenti su fasci misurano essenzialmente le sezioni d'urto della interazione elementare fascio-bersaglio. Quando si dispone di una teoria quantitativa di tale interazione la grandezza σ può essere calcolata anche teoricamente ed allora, attraverso il confronto con il valore determinato sperimentalmente, risulta possibile saggiare la bontà della teoria stessa. Nella fisica nucleare e delle particelle elementari il confronto tra teoria ed esperimento avviene quasi sempre attraverso le sezioni d'urto.

Se l'apparato sperimentale è costruito in modo opportuno risulta possibile andare oltre il semplice conteggio del numero di particelle deflesse e fornire informazioni sempre più stringenti. Ad esempio, con un apparato sperimentale disposto attorno al bersaglio e *opportunamente segmentato*, in un processo di scattering risulta possibile misurare la distribuzione angolare delle particelle del fascio deflesse dal bersaglio acquisendo un'ulteriore informazione sperimentale sulle proprietà della interazione in gioco.

In questo modo si potrà misurare la sezione d'urto d'interazione con la condizione ulteriore che la particella proiettile emerga all'interno di un certo angolo solido elementare $d\Omega$. Avremo allora la



seguente d'urto elementare (poiché infinitesimo risulta l'elemento di angolo solido)

$$d\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} d \left(\frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \right)$$

Sezione d'urto differenziale
rispetto all'angolo solido

in altri termini:

$$d\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d\dot{N}_{def} \text{ in } d\Omega}{d\Omega} d\Omega$$

dalla quale otteniamo l'espressione della **sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido** che è la grandezza misurata dal nostro ipotetico esperimento. Va da sé che l'integrale di tale sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido debba restituire la sezione d'urto totale

$$\boxed{\sigma = \iint_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \quad (2)$$

relazione che può essere assunta come definizione della sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido. Se il rivelatore permette di misurare anche l'energia della particella proiettile sarà possibile misurare il numero di particelle del fascio che nella unità di tempo emergono nell'angolo solido elementare $d\Omega$ all'interno dell'intervallo elementare dE . Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \right) \\ \frac{d^2\sigma}{dEd\Omega} &= \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d}{dE} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \text{ e } dE \right) \end{aligned}$$

Il nostro ipotetico esperimento misurerà allora la seguente **sezione d'urto doppiamente differenziale in funzione dell'angolo solido e della energia** definita dalla relazione

$$\sigma = \iint_{\Omega} \int_E \frac{d^2\sigma}{dEd\Omega} dE d\Omega$$

Gli esempi citati, pur riferendosi a casi particolari chiariscono il fatto, di validità generale, che *il tipo di sezione d'urto misurata dipende essenzialmente dalle caratteristiche tecniche del rivelatore.*

Nel caso più semplice si misurerà una sezione d'urto totale di interazione ma, disponendo di rivelatori via via più sofisticati, risulterà possibile misurare sezioni d'urto differenziali di interazione in funzione di un insieme di variabili cinematiche sempre più ampio.

0.5 Calcoli di sezioni d'urto

Vediamo due esempi di calcolo di sezioni d'urto :

- i. Sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido di un fascio di proiettili di sezione trascurabile su sfere di raggio R nella ipotesi che abbiano luogo urti classici elastici;

- ii. Sezione d'urto differenziale di Rutherford.

CASO i. Senza entrare nel dettaglio della meccanica dell'urto - assumendo un sistema di coordinate sferiche con asse z lungo l'asse centrale della sfera - sappiamo che sussiste una piena simmetria rispetto all'angolo e l'**angolo di emergenza** del proiettile è interamente determinato dal **parametro d'urto** b attarverso una relazione del tipo

$$b = b(\theta) \quad (3)$$

che codifica i dettagli dell'urto stesso.

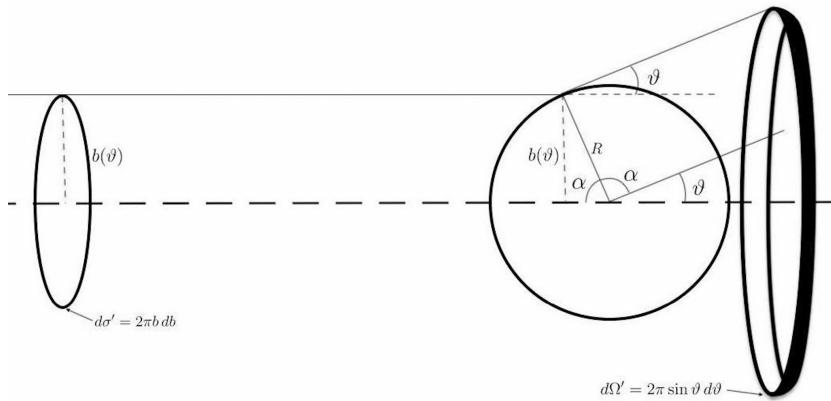


Figura 6: Calcolo della sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido di un fascio su sfere di raggio noto nell'ipotesi di urti classici elastici.

Facendo riferimento allo schema in figura 6 si ha

$$\begin{aligned} d\sigma' &= \int d\sigma = 2\pi b(\theta) db \\ d\Omega' &= \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\theta) d\theta = 2\pi \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

e inoltre dalla definizione di angolo solido:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Riusciamo quindi a scrivere la nostra sezione d'urto doppiamente differenziale, sulla base di (2):

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin(\theta) d\theta} \sin(\theta) d\theta d\varphi = bd\varphi db$$

Ciò significa che tutti i proiettili passanti per l'area elementare $bd\varphi db$ saranno deflessi dello stesso angolo solido elementare $d\Omega$. Da qui segue

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\theta) d\varphi d\theta = bd\varphi \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta$$

e dunque, infine, la sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\theta)} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (4)$$

valida classicamente non solo nel caso della sfera rigida ma in generale.

Per calcolare la sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido nel caso della sfera rigida di raggio R dobbiamo ora precisare la forma della (3). Si trova facilmente

$$\frac{b}{R} = \sin \alpha \quad \theta = \pi - 2\alpha$$

da cui

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Sostituendo nella (4) otteniamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left| \frac{d}{d\theta} R \cos \frac{\theta}{2} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

da cui, infine, la sezione d'urto differenziale della sfera rigida di raggio R

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (5)$$

E' immediato verificare che da questa espressione si ottiene una sezione d'urto totale $\sigma = \pi R^2$.

La formula (5) puo essere utilizzata *anche nel caso in cui l'interazione tra le particelle del fascio e quelle del bersaglio non consista in un urto meccanico* ma in una interazione mediata da una forza naturale.

CASO ii. Trattiamo allora il caso della **diffusione di Rutherford** di proiettili di carica elettrica positiva ze su bersagli di carica elettrica positiva Ze governata dalla forza

$$\mathbf{F} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

con potenziale associato

$$V = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Dalla seconda equazione cardinale si ha

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$$

per cui, come noto tale forza **conserva il momento angolare** del proiettile:

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} \wedge \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{cost}$$

Sezione d'urto differenziale di una sfera rigida

Ciò implica

$$\mathbf{L}_{t \rightarrow -\infty} = \mathbf{L}_t \quad (\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v})_{-\infty} = (\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v})_t$$

Tenendo conto delle seguenti condizioni al contorno

$$x_{-\infty} \leq 0, \dot{x}_{-\infty} = v_0 \quad y_{-\infty} = b, \dot{y}_{-\infty} = 0$$

la precedente si riscrive come (il secondo termine è stato scritto in coordinate polari piane)

$$(-x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \wedge (m\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + m\dot{y}\hat{\mathbf{j}})_{-\infty} = r\hat{\mathbf{r}} \wedge m(r\dot{\hat{\mathbf{r}}} + r\dot{\phi}\hat{\phi})$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} -\dot{x}y &= r^2\dot{\phi} \\ \dot{\phi} &= -\frac{v_0}{r^2}b \end{aligned} \tag{6}$$

Sfruttiamo ora la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} T_{-\infty} + V_{-\infty} &= T_\infty + V_\infty \\ V_{\pm\infty} &= -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\pm\infty}} = 0 \rightarrow T_{-\infty} = T_\infty \end{aligned}$$

ed otteniamo

$$v_0 = v_\infty \tag{7}$$

Fatte queste premesse conviene risolvere la sola **equazione del moto trasversale**:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{d}{dt}mv_y - \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \varphi = \frac{d}{dt}mv_y \\ mv_{y,t=+\infty} - mv_{y,t=-\infty} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \varphi dt \end{aligned}$$

Dalle condizioni al contorno

$$v_{y,t=+\infty} = v_{t=+\infty} \sin \theta \quad v_{y,t=-\infty} = 0 \quad \varphi_{t=+\infty} = \theta \quad \varphi_{t=-\infty} = \pi$$

e usando (6) si ottiene

$$mv \sin \theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \varphi \frac{r^2}{v_0 b} d\varphi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} (\cos \theta + 1)$$

da cui

$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \tag{8}$$

Ora possiamo derivare questa espressione

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \frac{1}{\sin^2 \theta / 2}$$

e sostituirla nella (4) assieme alla (7) ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right) \cot \frac{\theta}{2} \frac{1}{2 \sin \theta/2 \cos(\theta/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta/2}$$

da cui la **sezione d'urto differenziale di Rutherford**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (9)$$

un risultato valido anche in meccanica quantistica.

[Esercizio in dispensa pag 38.]

o.6 Le proprietà ondulatorie delle particelle microscopiche

Nel 1913, quando Geiger, Mursden e Rutherford compirono il loro esperimento, interpretarono le collisioni tra particelle del fascio e atomi del materiale in termini di urti governati dalle leggi della meccanica classica. Non potevano fare altrimenti, tuttavia di lì poco Bohr - sulla base dei lavori di Plank ed Einstein - e poi nella decade successiva De Broglie, Heisenberg, Schrödinger e Born modificheranno radicalmente il quadro interpretativo introducendo l'idea che **le particelle microscopiche, oltre a possedere proprietà corpuscolari, dovevano possedere anche proprietà ondulatorie**, per cui ad esse si doveva associare una lunghezza d'onda e frequenza (De Broglie) ed una funzione d'onda (Born), soluzione quest'ultima di una determinata equazione d'onda (Schrödinger), giungendo così alla formulazione della

D'altra parte, a partire dai lavori di Planck sul corpo nero (1900) e di Einstein sull'effetto fotoelettrico (1905), venne contemporaneamente affermandosi l'idea che i campi classici maxwelliani - dotati certamente di proprietà ondulatorie poiché capaci dei fenomeni della interferenza e diffrazione – dovevano essere costituiti da enti microscopici (poi chiamati quanti del campo) dotati anche di proprietà corpuscolari. Si affermo così il concetto di **quanto del campo come ente microscopico intrinsecamente 'ibrido' poiché dotato di proprietà sia ondulatorie che corpuscolari**. Dato questo stato di cose, si pose naturalmente la domanda se le particelle microscopiche ed i quanti del campo - entrambi dotati di proprietà sia corpuscolari che ondulatorie - dovessero essere pensati come enti distinti oppure no.

La risposta – fondamento del moderno punto di vista - fu data dalle teorie di campo quantizzato (formulate alla fine degli anni '20 da Dirac, Heisenberg, e Jordan) le quali assumono che **le particelle microscopiche osservate negli apparati sperimentali devono essere identificate con i quanti di specifici campi**, superando in tal modo la

ripartizione degli enti fisici in particelle materiali e campi affermata dalla fisica classica. Da ciò consegue che **il linguaggio naturale della fisica delle particelle debba essere quello della teoria dei campi quantizzati** tuttavia, quando le energie in gioco non sono così elevate da rendere necessaria una descrizione relativistica e soprattutto da rendere possibili processi di creazione e distruzione di particelle, **la descrizione offerta dalla meccanica quantistica ordinaria risulta appropriata.**

Per questo, alle basse e medie energie possiamo certamente assumere che la fisica nucleare possa essere ben descritta nell'ambito della meccanica quantistica mentre questo non è certamente più vero nella fisica nucleare alle alte energie dove possono avversi collisioni tra nucleoni ad energie di centinaia o migliaia di GeV per nucleone (Alice ha operato a 2.76 TeV per coppia di nucleoni) e risulta necessaria una descrizione dei processi basata sulle teorie di campo quantizzato.

Volendo richiamare in modo diretto ed euristico alcuni concetti di meccanica quantistica, si può cominciare scrivendo **le grandezze cinematiche fondamentali di una generica onda piana sinusoidale**, ovvero la **pulsazione** ed il **vettore d'onda** collegate tra loro nella **relazione di dispersione** che caratterizza le proprietà fisiche del mezzo in cui l'onda stessa si propaga

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \quad \omega = \omega(k)$$

Scriviamo anche **le grandezze cinematiche fondamentali di un generico corpuscolo libero** che corrispondono alle espressioni relativistiche della **energia e quantità di moto** collegate dalla **relazione energia-impulso**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (10)$$

Sulla base di considerazioni di natura assai generale, Einstein e De Broglie ipotizzarono che **le grandezze ondulatorie e corpuscolari fossero legate dalle seguenti relazioni** (valide sia nella meccanica quantistica che nella teoria dei campi quantizzati)

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k$$

per cui dedussero il seguente legame esplicito tra grandezze ondulatorie e corpuscolari valido per le particelle microscopiche e le non meglio precise 'onde quantomeccaniche' o 'onde di De Broglie' a loro associate

$$E = \hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p = \hbar k = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \omega^2 = k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (11)$$

Equazioni di De Broglie-Einstein

La relazione dispersione (relazione energia-impulso) indica chiaramente che le componenti di Fourier delle ‘onde quantomeccaniche’ si propagano come se il vuoto fosse un **mezzo dispersivo**. Se ad una particella materiale si devono associare grandezze ondulatorie ad essa si dovrà pure associare una fase ed una certa funzione della fase detta **funzione d’onda** il cui significato fisico dovrà essere precisato. Una data componente di Fourier di tale onda in forma piana dovrà comunque avere la seguente semplice espressione⁴

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \quad (12)$$

Come in un qualunque fenomeno ondulatorio, data la funzione d’onda si pone il problema di stabilire l'**equazione d’onda** ovvero l’equazione che ne governa la dinamica.

Trovare l’espressione formale della equazione d’onda in modo diretto per una data componente di Fourier non è difficile poiché sappiamo che una volta sostituita la funzione d’onda (12) essa non deve fare altro che restituire la relazione energia-impulso (10) o la relazione di dispersione (11). A questo scopo vale la pena introdurre le seguenti **operazioni di differenziazione**

$$\begin{aligned} -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r}, t) &= -i\hbar\nabla\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} = -i\hbar\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \frac{i}{\hbar}\mathbf{p} = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, t) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} = i\hbar\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = E\psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (13)$$

Le precedenti relazioni mostrano che gli operatori differenziali, agendo sulla generica componente di Fourier, ne determinano la rimoltiplicazione per i valori della quantità di moto ed energia, un fatto che suggerisce di definirli come **operatori della quantità di moto ed energia**:

- Operatore della **quantità di moto**

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla$$

- Operatore **dell’energia**

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Nel linguaggio degli operatori, le precenti espressioni possono allora essere rilette affermando che in una data componente di Fourier dell’onda quantomeccanica i **valori della quantità di moto e della energia sono autovalori degli operatori** \hat{P} ed \hat{E} mentre la funzione d’onda è un loro autostato

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, t) \quad \hat{E}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t)$$

⁴ L’utilizzo della notazione complessa non è casuale. Infatti alle due espressioni

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$
sono associate probabilità differenti

$$|\psi_1|^2 = \psi_0^2$$

$$|\psi_2|^2 = \psi_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

di cui solo la prima è in accordo con le verifiche sperimentali.

Introdotti gli operatori energia e quantità di moto, possiamo partire dalla relazione relativistica energia-impulso della particella libera ed ottenere la sua equazione d'onda. I passaggi sono i seguenti

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ E^2 \psi(\mathbf{r}, t) &= p^2 c^2 \psi(\mathbf{r}, t) + m^2 c^4 \psi(\mathbf{r}, t) \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\mathbf{r}, t) &= c^2 (-i\hbar \nabla) (-i\hbar \nabla) \psi(\mathbf{r}, t) + m^2 c^4 \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Si noti che **tale equazione è lineare per cui deve valere non solo per la data componente di Fourier ma – in modo del tutto generale - per una qualunque sovrapposizione di componenti di Fourier e dunque per una qualsiasi onda.**

Giungiamo così ad individuare l'**equazione d'onda** cercata detta **equazione di Klein-Gordon** valida per le '**onde quantomeccaniche libere scalari** (senza spin, essendo ψ scalare)

Equazione di Klein-Gordon

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (14)$$

Tale equazione fu trovata per la prima volta da Schrödinger il quale però non riuscì a fornire una interpretazione fisica consistente della funzione d'onda. Si trattava di un problema cruciale che poteva essere superato solo interpretando la funzione d'onda nel senso della teoria dei campi quantizzati. Non essendoci allora i presupposti per un passaggio di tal genere, Schrödinger rinunciò alla equazione d'onda relativistica e ripiegò sulla **equazione d'onda classica** la cui interpretazione sembrava meno problematica. Tale equazione la si può ottenere seguendo esattamente lo stesso tipo di procedimento partendo però dalla espressione **energia-impulso classica delle particelle libere**

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Compreso questo fatto, possiamo puntare direttamente a costruire l'**equazione d'onda non relativistica per le 'onde quantomeccaniche' in presenza di forze aggiungendo il loro potenziale alla espressione precedente**

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

Nel caso di una generica componente di Fourier otteniamo allora

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \rightarrow E \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla) (-i\hbar \nabla) \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Data la linearità della equazione, concludiamo che l'espressione ottenuta deve essere valida non solo per la generica componente di Fourier ma per una qualunque funzione d'onda. Definendo allora l'operatore tra parentesi come **operatore hamiltoniano** \hat{H} , otteniamo la seguente **equazione d'onda di Schrödinger** valida per le 'onde quantomeccaniche' scalari (senza spin) non relativistiche in presenza di forze

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (15)$$

Tale equazione rese possibile una interpretazione della funzione d'onda che - pur non essendo di validità generale - permetteva comunque di descrivere in modo appropriato i fenomeni quantomeccanici in regime non relativistico ovvero alle basse e medie energie dove non avvengono processi di creazione e/o distruzione di particelle. Tale interpretazione fu proposta da M. Born ed afferma che

Il modulo quadrato della funzione d'onda nella posizione \mathbf{r} ed al tempo t rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella materiale in quella posizione ed in quell'istante di tempo a seguito di una misura di posizione.

Questa ipotesi va a costituire uno dei fondamentali assiomi interpretativi della meccanica quantistica e comporta che l'espressione

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV \quad (16)$$

rappresenti la probabilità di misurare la particella materiale al tempo t all'interno del volume dV centrato nella posizione \mathbf{r} .

I fatti appena richiamati chiariscono che **l'interazione particella-proiettile/particella-bersaglio non deve essere pensata come un processo d'urto meccanico ma, piuttosto, come un processo di diffrazione/rifrazione dell'onda quantomeccanica associata alla particella proiettile a seguito della sua interazione con l'ostacolo-bersaglio**. Dunque essenzialmente un processo di 'ottica delle onde quantomeccaniche' dipendente dal tipo di interazione in gioco. Se il bersaglio è totalmente riflettente risulterà un processo di diffrazione simile a quello di un tratto di muro piazzato sul percorso di un'onda in acqua. Se il bersaglio è totalmente assorbente risulterà un processo di diffrazione simile a quello di un tratto di scogliera. Se invece il bersaglio opera come un potenziale di forza avremo un processo di rifrazione assimilabile alle distorsioni dei fronti d'onda determinate dalle variazioni di profondità del fondale. Al netto di questi dettagli è comunque evidente che **gli esperimenti fascio-bersaglio con particelle microscopiche devono essere interpretati in chiave ondulatoria**.

Ad esempio, se vogliamo esplorare la struttura di un nucleo atomico dovremo essere in grado di risolvere almeno i singoli nucleoni. Ma

Equazione d'onda di Schrödinger

l'interferenza di due onde provenienti da due diversi nucleoni è apprezzabile solo se i cammini differiscono di una quantità dell'ordine della lunghezza d'onda.

D'altra parte la differenza di tali cammini è anche dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone. Ciò significa che dovremo impiegare particelle proiettile aventi una lunghezza d'onda di De Broglie dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone ovvero dell'ordine di $1fm$. In questo modo saremo sensibili agli effetti diffrattivi-interferenziali indotti dalla struttura nucleare che potremo osservare raccogliendo le particelle diffuse su di un rivelatore capace di misurarne la posizione angolare. Per quanto riguarda invece la scelta del proiettile converrà utilizzare i neutroni dato che non risentono della interazione elettromagnetica che andrebbe a complicare il fenomeno (si tenga però presente che è più difficile avere a che fare con fasci e rivelatori di neutroni!).

Ricordando che

$$\frac{\hbar c}{200MeV} \simeq 1fm$$

si ha

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{1} fm^{-1} = \hbar 2\pi \frac{200MeV}{\hbar c} \simeq 1.2 \frac{GeV}{c}$$

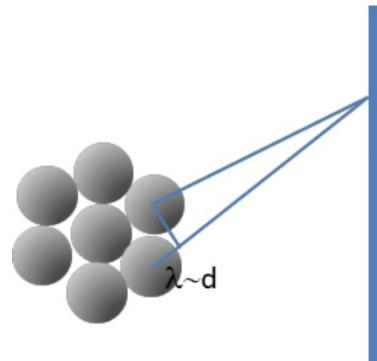
$$\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \simeq \sqrt{(1.2)^2 + (1.0)^2} \simeq 1.5GeV$$

da cui si verifica che con un fascio di particelle di circa $1.2GeV/c$ di impulso ed $1.5GeV$ di energia si raggiunge lo scopo. Se invece vogliamo esplorare la struttura del singolo nucleone dovremo avere un potere risolutivo almeno 100 volte superiore ovvero un impulso 100 volte maggiore e dunque fasci di particelle di impulso dell'ordine di $100GeV$.

0.7 Teoria della diffrazione di Kirchoff

Dato che l'interazione fascio-bersaglio consiste essenzialmente nella diffrazione delle onde di De Broglie associate alle particelle del fascio da parte delle particelle del bersaglio, la corretta soluzione del problema può essere ottenuta cercando l'espressione della funzione d'onda che:

1. soddisfa l'equazione di Schrödinger con potenziale nella regione in cui il fascio interagisce con il bersaglio;
2. soddisfa l'equazione d'onda di Schrödinger libera nella regione esterna alla interazione prima e dopo il bersaglio;
3. soddisfa la condizione al contorno di essere un'onda piana prima di incidere sul bersaglio.



Seguiremo un approccio che sottolinea l'identità tra onde classiche e onde di De Broglie utilizzando l'ottica classica. Come noto, la diffrazione delle onde scalari classiche da parte di una apertura puo' essere trattata in modo rigoroso per mezzo della **teoria di Kirchhoff**, la cui trattazione formale si trova nel famoso testo di Ottica Classica di Born⁵. In particolare, se una apertura A è investita da un'onda monocromatica, la funzione d'onda diffratta $\psi(\vec{r})$ in un generico punto dello spazio \vec{r} oltre lo schermo è data dalla seguente espressione:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[\psi(\vec{r}') (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\vec{r}') \right] d\mathbf{a}' \quad (17)$$

dove

- \vec{r} è il vettore posizione del punto di osservazione
- \vec{r}' è il vettore posizione di un punto dell'apertura
- $\psi(\vec{r}')$ è la funzione d'onda calcolata nel punto \vec{r}' dell'apertura
- \mathbf{n}' è la normale allo schermo nel punto \vec{r}' dell'apertura
- ∇' è il gradiente della funzione d'onda nel punto \vec{r}' dell'apertura
- k è il modulo del vettore d'onda della funzione d'onda incidente
- $s = |\vec{r} - \vec{r}'|$ è il modulo del vettore congiungente il punto dell'apertura con quello di osservazione

Dato che la funzione d'onda $\psi(\vec{r})$ compare in entrambi i membri, tale espressione richiede la conoscenza della funzione $\psi(\vec{r})$ stessa che si vuole determinare (questo fatto è noto come 'Paradosso di Kirchhoff'). Un circolo vizioso che viene evitato attraverso **l'approssimazione di Kirchhoff** la quale assume che la funzione $\psi(\vec{r})$ sia non nulla nei soli punti dell'apertura A ed ivi coincida con la funzione d'onda monocromatica incidente(eliminando così il problema dell'incurvatura dei fronti d'onda).

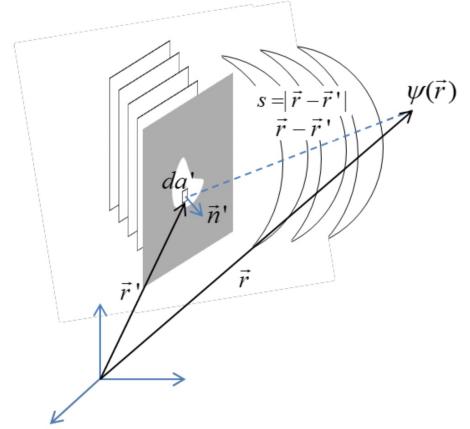
Consideriamo allora il caso di onda piana monocromatica diretta lungo l'asse delle z positive incidente su di uno schermo piano normale all'asse stesso. Si ha

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \psi_0 e^{ik \cdot \vec{r}} = \psi_0 e^{ik(\hat{k}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}))} = \psi_0 e^{ikz} \\ \mathbf{n}' &= \hat{k} \\ \psi(\vec{r}') &= \psi_0 e^{ik \cdot \vec{r}'} = \psi_0 e^{ik(\hat{k}(x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}))} = \psi_0 e^{ikz'} \end{aligned}$$

e inoltre

$$s = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

⁵ Emil Wolf Max Born. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 60th anniversary edition, 2019. ISBN 978-1-108-47743-7



Sviluppiamo ora i termini presenti nell'equazione di Kirchhoff:

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{iks}}{s} = ik \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial s}{\partial z'} - \frac{e^{iks}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial z'} = \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \frac{\partial s}{\partial z'}$$

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial z'} \psi_0 e^{ikz'} = ik \psi_0 e^{ikz'}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$= -\frac{1}{2s} 2(z - z') = -\frac{z - z'}{s} = \cos \theta$$

con

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{k}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$$

Da qui si ottiene lo sviluppo del primo termine presente nell'equazione di Kirchhoff (17):

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} = - \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \cos \theta$$

Sostituendo infine le espressioni di $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s}$ e di $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}')$ in (17) otteniamo

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \left[-\psi_0 e^{ikz'} \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \cos \theta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da'$$

Compiamo la seguente *approssimazione*: se il punto di osservazione è a grande distanza, al primo ordine il termine $1/s^2$ può essere trascurato. Abbiamo

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \left[-\psi_0 e^{ikz'} ik \frac{e^{iks}}{s} \cos \theta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da'$$

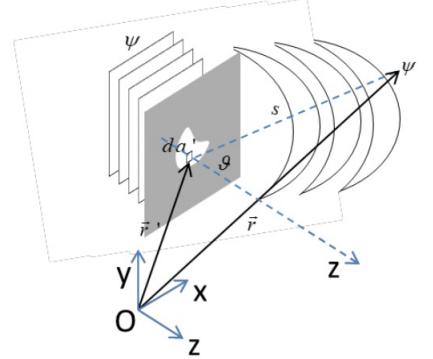
$$\psi(\mathbf{r}) \simeq -\psi_0 \frac{ik}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(kz+ks)}}{s} (\cos \theta + 1) da' \simeq -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(kz+ks)}}{s} da'$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $\theta \ll 1 \rightarrow \cos \theta \simeq 1$. Si noti che l'espressione integrale ottenuta corrisponde al ben noto principio di Huygens completato dal **fattore di obliquità** che modula l'ampiezza in modo tale da fornire le onde in avanti ed annullare quelle all'indietro. Nell'integrale appena ottenuto vogliamo esprimere la fase dell'esponenziale in forma generale attraverso vettori

$$k(s + z') = k(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + z') = k \left(\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right)$$

$$= k \left(r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right) \simeq k \left\{ r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right] + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right\}$$

$$= k \left(r + \frac{r'^2}{2r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right) = kr + k \frac{r'^2}{2r} - k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + k \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}'$$



$f(\theta) = 1 + \cos \theta$ fa sì che ci sia un fattore che modula l'ampiezza con casi limite

- $f(0) = 2$;
- $f(\pi) = 0$.

I valori assunti da r' sono molto minori rispetto a quelli di r ; in particolare se D è la dimensione lineare del foro e L la distanza dal punto di osservazione

$$k \frac{r'^2}{2r} \simeq \frac{D^2}{\lambda L}$$

Se $\frac{D^2}{\lambda L} \ll 1$ si parla di **regime di Fraunhofer** e il termine in questione può essere trascurato. Chiamando

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

si ha

$$k(s + z') \simeq kr - (k\mathbf{n} - k\mathbf{n}') \cdot \mathbf{r}'$$

Introducendo il **vettore d'onda trasferito** (che parametrizza lo spostamento del punto di osservazione dall'asse del fascio)

$$\mathbf{q} = k\mathbf{n} - k\mathbf{n}'$$

otteniamo infine

$$k(s + z') \simeq kr - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$$

Se il riferimento è interno alla apertura, a seguito della condizione di Fraunhofer si ha (sistema \simeq al centro del foro)

$$s \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \simeq r - r' \cos \theta \simeq r$$

da cui, si ottiene infine l'espressione cercata della **funzione d'onda in campo lontano (o di Fraunhofer) scatterata da una apertura A investita da un'onda monocromatica**

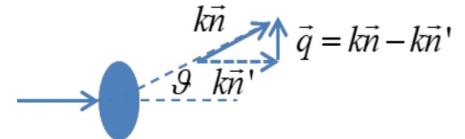
$$\psi(\mathbf{r}) \simeq -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{apA} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da' \quad (18)$$

Come anticipato, però, a noi interessa la situazione complementare, poiché vogliamo descrivere l'interazione fascio-bersaglio come diffrazione delle onde di De Broglie del fascio da parte di un ostacolo avente la forma del bersaglio.

La funzione d'onda ψ_{ostA} diffratta da uno schermo avente la forma di A , può essere ottenuta con il semplice **principio degli schermi complementari o principio di Babinet**.

La (18) fornisce la funzione d'onda diffratta dalla apertura A come integrale dei contributi degli elementi d'area di A . E' chiaro che la funzione d'onda ψ_{ostA} , diffratta da uno schermo avente la stessa forma di A , deve essere data da un integrale dei contributi degli elementi d'area della superficie complementare CA .

Ne consegue che la somma delle funzioni d'onda $\psi_{apA} + \psi_{ostA}$ debba essere data da un integrale dei contributi degli elementi d'area



del piano infinito contenente A , integrale che deve restituire l'onda monocromatica piana incidente

$$\psi_{apA}(\mathbf{r}) + \psi_{ostA}(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}}$$

Da questa relazione possiamo allora ricavare la seguente espressione della **funzione d'onda diffratta da uno schermo di area A investita da un'onda monocromatica**

$$\begin{aligned} \psi_{ostA}(\mathbf{r}) &= \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} - \psi_{apA}(\mathbf{r}) \\ &\simeq \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_A e^{-iq \cdot \mathbf{r}'} da' \end{aligned} \quad (19)$$

All'interno dell'integrale di superficie di questa espressione conviene introdurre la **funzione di profilo** Γ (nota anche come "funzione pupilla" in ottica classica) la quale, nel caso di una apertura A totalmente trasparente, risulta definita nel modo seguente

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{all'interno di } A \\ 0 & \text{all'esterno di } A \end{cases}$$

Si ha allora

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma e^{-iq \cdot \mathbf{r}'} da'$$

dove S_B (superficie del bersaglio) è il piano infinito contenente lo schermo/ostacolo A . Si noti che ammettendo valori di Γ interni ad A inferiori ad 1, descriviamo un ostacolo A non più totalmente assorbente come uno schermo, ma piuttosto parzialmente trasparente: nel caso limite in cui $\Gamma = 0$ abbiamo infatti un ostacolo A totalmente trasparente che non genera alcuna diffrazione e restituisce l'onda piana incidente.

Potremmo ottenere la massima generalità ammettendo che Γ possa dipendere dalla posizione \mathbf{r}' in A ed *assumere anche valori immaginari in modo da descrivere eventuali effetti assorbitivi*. Una simile funzione di profilo ci permette di estendere la diffrazione di un ostacolo A totalmente assorbente al caso generale della diffrazione di un ostacolo A modulante e variamente trasparente, capace di descrivere la diffrazione della funzione d'onda da parte della materia nucleare. Sulla base di queste considerazioni, la funzione d'onda assume la forma seguente

Ampiezza di scattering

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-iq \cdot \mathbf{r}'} da'}_{f(q)} \quad \Gamma(\mathbf{r}') \in \mathbb{C}$$

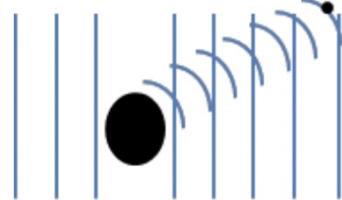
Introducendo l'**ampiezza di scattering**, che integra i contributi modulanti e assorbenti degli elementi d'area dell'ostacolo corrispondenti ad un certo vettore d'onda trasferito q

$$f(q) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da' \quad (20)$$

e da (19) otteniamo la seguente espressione della **funzione d'onda in campo lontano diffratta da un ostacolo modulante e assorbente**

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_0 \left(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(q) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (21)$$

Tale espressione mostra che la figura di diffrazione prodotta da un ostacolo in un dato punto dello spazio è il risultato della interferenza dell'onda piana incidente con l'onda sferica proveniente dall'ostacolo modulata dall'ampiezza di scattering.



o.8 Le sezioni d'urto in meccanica quantistica

Per definizione, la *probabilità che si verifichi una certa "interazione"* tra fascio e bersaglio corrisponde a

$$p_{int} = \frac{\sigma_{int}}{\Sigma}$$

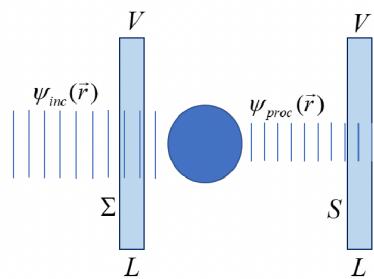
un fatto che ci permette di affermare che la sezione d'urto del processo altro non è che la frazione di sezione del fascio che produce eventi di quel processo di interazione.

D'altra parte, la meccanica quantistica ci permette di calcolare le densità volumetriche di probabilità attraverso la funzione d'onda. Consideriamo allora due volumi identici V le cui superfici d'ingresso Σ ed S sono attraversate dalle onde di De Broglie per tutta la loro larghezza $v\Delta t$.

L'integrale sul volume V della funzione d'onda incidente è proporzionale alla probabilità di misurare in V una particella del fascio, mentre l'integrale sul volume V della funzione d'onda associata al processo in esame (ad esempio alla diffusione) è proporzionale alla probabilità di misurare in V una particella del fascio che ha subito quel processo. Il quoziente tra i suddetti integrali di volume altro non è che la probabilità che abbia luogo il processo^{6,7}

$$p_{int} = \frac{\iiint_V |\psi_{proc}|^2 dV}{\iiint_V |\psi_{inc}|^2 dV} = \frac{\int_L v dt \iint_S |\psi_{int}|^2 dS}{\int_L v dt \iint_S |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} = \frac{\iint_S |\psi_{int}|^2 dS}{\iint_\Sigma |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (22)$$

Il termine a denominatore fa sì che sia rispettata la condizione di normalizzazione per cui il quoziente può davvero rappresentare una probabilità. Si pensi infatti ai casi limite (per definitezza consideriamo il processo in questione un processo di scattering):



⁶ Le precedenti considerazioni sarebbero assai semplificate introducendo l'espressione quantomeccanica della densità di corrente di probabilità che per ora non vogliamo introdurre.

⁷ Si ha una profonda analogia con l'ottica classica. Basti pensare al caso delle onde elettromagnetiche, per cui l'equivalente della relazione (22) sarebbe la valutazione del bilancio energetico tra l'energia dell'onda post processo (scattering/absorption) e quella di quella incidente pre processo. Il denominatore della (22) rappresenta quindi una "probabilità entrante", ovvero il fascio incidente appena prima di interagire con il bersaglio.

- $\psi_{scatt} = \psi_{inc}$: si ha l'onda incidente tutta sullo schermo per cui $p_{scatt} = 1$; misurando sullo schermo tutta l'onda iniziale significa che sicuramente c'è stata l'interazione di scattering che ha prodotto l'onda stessa;
- $\psi_{scatt} = 0$: l'interezza dell'onda viene assorbita dallo schermo per cui $p_{scatt} = 0$.

Eguagliando le due forme della probabilità otteniamo l'espressione quantomeccanica della **sezione d'urto integrale del processo**:

$$\sigma_{int} = \Sigma \frac{\iint_{S_0} |\psi_{int}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (23)$$

ed anche quella della **sezione d'urto elementare del processo**

$$d\sigma_{int} = \Sigma \frac{|\psi_{scatt}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (24)$$

dove l'elemento dS a numeratore si riferisce, come detto sopra, al generico elemento di superficie di uno schermo lontano S_0 su cui osserviamo il processo in esame.

Una quantità di interesse nell'analisi di esperimenti di scattering non risulta essere l'onda di scattering stessa ma piuttosto il rate a cui l'energia è diffusa ed assorbita dall'oggetto. Si evidenzia un'intima relazione tra il rate di perdita di energia da parte dell'onda incidente a seguito di questi processi e l'ampiezza dell'onda di scattering nella direzione in avanti(direzione di incidenza). Questa relazione è quantitativamente espressa dal **Teorema Ottico** (Optical cross-section theorem) che ora discuteremo.

Nel caso il processo in esame consista nella diffusione da parte dell'ostacolo, risulta possibile calcolare in pochi passaggi la sezione d'urto di scattering nell'angolo solido elementare. Infatti, dalla (19) si ottengono subito le seguenti espressioni delle funzioni d'onda incidente e di scattering

$$\psi_{inc} = \psi_0 e^{ik \cdot r} \quad \psi_{scatt} = \psi_0 f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

tenendo poi conto che l'elemento di superficie di un eventuale schermo S_0 di forma sferica può essere espresso come segue

$$dS = r^2 d\Omega$$

sostituendo nella (21) otteniamo

$$d\sigma_{scatt} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega}{\iint_{\Sigma} |\psi_0|^2 d\Sigma} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega}{|\psi_0|^2 \Sigma} = |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega$$

da cui, infine, si derivano le espressioni della **sezione d'urto di scattering differenziale e totale rispetto all'angolo solido**

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad \sigma_{scatt} = \iint_{\Omega} |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega \quad (25)$$

Tale espressione chiarisce che la sezione d'urto differenziale di scattering rispetto all'angolo solido è data dal modulo quadrato della ampiezza di scattering, dipendente dal vettore d'onda trasferito che parametrizza l'angolo rispetto alla direzione del fascio.

L'espressione (19) della funzione d'onda di diffrazione prodotta da un ostacolo ci permette pure il calcolo della sezione d'urto di assorbimento del fascio incidente. Tale sezione d'urto può essere ottenuta osservando che la probabilità incidente sulla superficie S_B deve essere assorbita dal bersaglio su S_B , oppure diffratta e osservata sullo schermo di osservazione S_O . Tenendo presente che la funzione d'onda incidente è non nulla sulla sezione del fascio Σ , mentre quella di assorbimento è non nulla sul bersaglio, si ottiene la relazione di bilancio:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 dS &= \iint_{S_O} |\psi_{diff_r}|^2 dS + \iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 d\Sigma \\ \iint_{bersaglio} |\psi_{ass}|^2 dS &= \iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma - \iint_{S_O} |\psi_{diff_r}|^2 dS \end{aligned}$$

Da quest'ultima e dalla (23) otteniamo allora la seguente espressione

$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{\iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 d\Sigma}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} = \Sigma \frac{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma - \iint_{S_O} |\psi_{diff_r}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma}$$

Se lo schermo di osservazione è sufficientemente lontano e soddisfa la **condizione di Fraunhofer** possiamo usare la funzione d'onda diffusa (21) con asse z normale allo schermo del bersaglio

$$\begin{aligned} |\psi_{inc}|^2 &= |\psi_0|^2 \\ |\psi_{diff_r}|^2 &= \left| \psi_0 \left(e^{ikz} + f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right|^2 \\ &= |\psi_0|^2 + |\psi_0|^2 \frac{|f(\mathbf{q})|^2}{r^2} + 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} \end{aligned}$$

Integrando sullo schermo si ha⁸:

$$\begin{aligned} \iint_{S_O} |\psi_0|^2 dS + \iint_{S_O} |\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 \frac{dS}{r^2} + \iint_{S_O} 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \\ = |\psi_0|^2 \Sigma^* + |\psi_0|^2 \sigma_{scatt} + 2|\psi_0|^2 \Re \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \end{aligned}$$

⁸ Nei conti Σ^* rappresenta la proiezione della sezione del fascio sullo schermo. Se il centro diffusore è piccolo (come nel caso di un singolo centro diffusore) gli angoli di scattering sono relativamente piccoli per cui possiamo approssimare la proiezione del fascio sullo schermo di osservazione con l'area del fascio incidente. Ergo $\Sigma^* \sim \Sigma$

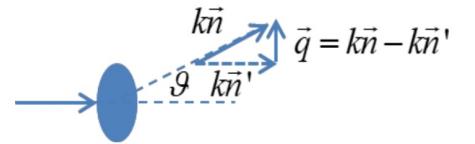
Per quanto riguarda la sezione d'urto di assorbimento si ha

$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 \Sigma - \left[|\psi_0|^2 \Sigma + |\psi_0|^2 \sigma_{scatt} + 2|\psi_0|^2 \Re \int \int_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right]}{|\psi_0|^2 \Sigma}$$

da cui otteniamo una prima forma della *absorption cross-section*

$$\sigma_{ass} = -\sigma_{scatt} - 2\Re \int \int_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \quad (26)$$

Per proseguire negli sviluppi è necessario calcolare l'integrale sullo schermo S_O . Assumendo l'origine del riferimento al centro dell'ostacolo e l'asse z normale al piano che lo contiene e dunque normale anche allo schermo lontano, otteniamo per la fase dell'esponenziale



$$\begin{aligned} r - z &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = z \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} - z \\ &\simeq z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) - z = \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z} \end{aligned}$$

Inoltre, se lo schermo è lontano la figura di diffrazione si estende sullo schermo stesso in misura trascurabile, per cui la coordinata z risulta dominare largamente le coordinate x ed y .

Risostituendo nell'integrale che compare nell'espressione di σ_{ass} abbiamo

$$\begin{aligned} -2\Re \int \int_{sch} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS &= -2\Re f(\mathbf{o}) \int \int_{sch} \frac{e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}}{z} dx dy \\ &= -\frac{2}{z} \Re f(\mathbf{o}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2z}x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2z}y^2} dy = -\frac{2}{z} \Re f(\mathbf{0}) \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \\ &= -\frac{2}{z} \Re f(\mathbf{0}) \frac{2iz}{k} \pi = -\frac{4\pi}{k} \Re i(\Re f(\mathbf{0}) + i\Im f(\mathbf{0})) \end{aligned}$$

ottenendo infine

$$\boxed{\sigma_{scatt} + \sigma_{ass} = \frac{4\pi}{k} \Im f(\mathbf{0})} \quad (27)$$

risultato noto come **teorema ottico**.

Teorema ottico

Questo afferma che la somma delle sezioni d'urto totale di scattering ed assorbimento, detta sezione d'urto totale d'interazione, egualia (a meno del fattore moltiplicativo, $\frac{4\pi}{k}$, la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti (ovvero a vettore d'onda trasferito nullo).

E' importante sapere che le sezioni d'urto totali di scattering e assorbimento possono essere espresse anche attraverso integrali della funzione di profilo sulla superficie del bersaglio S_B . Integrando

l'ampiezza di scattering su tutto l'angolo solido nella (25) si ottiene la seguente espressione della sezione d'urto totale di scattering in funzione del profilo (vedi Appendice A).

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da' \quad (28)$$

D'altra parte sulla base della (20) il secondo membro del teorema ottico si riscrive come

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{k} \Im[f(\mathbf{0})] &= \frac{4\pi}{k} \Im \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Re\Gamma(\mathbf{r}') + i\Im\Gamma(\mathbf{r}') da' \\ &= 2\Im \iint_{S_B} i\Re\Gamma(\mathbf{r}') - \Im\Gamma(\mathbf{r}') da' = \iint_{S_B} 2\Re\Gamma(\mathbf{r}'), da' \end{aligned}$$

da cui si ottiene la seguente espressione della **sezione d'urto totale di interazione** in funzione del profilo:

$$\sigma_{tot} = \iint_{S_B} 2\Re\Gamma(\mathbf{r}'), da' \quad (29)$$

Sostituendo la (28) e la (29) nella (27) otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_{ass} + \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da' &= \iint_{S_B} 2\Re\Gamma(\mathbf{r}'), da' \\ \sigma_{ass} &= \iint_{S_B} (2\Re\Gamma(\mathbf{r}') - |\Gamma(\mathbf{r}')|^2) da' \end{aligned}$$

da cui, osservando che

$$\begin{aligned} |1 - \Gamma|^2 &= (1 - \Re\Gamma)^2 + (\Im\Gamma)^2 = 1 + |\Gamma|^2 - 2\Re\Gamma \\ 2\Re\Gamma - |\Gamma|^2 &= 1 - |1 - \Gamma|^2 \end{aligned}$$

perveniamo infine alla seguente espressione della **sezione d'urto totale di assorbimento** in funzione del profilo

$$\sigma_{ass} = \iint_{S_B} (1 - |1 - \Gamma|^2) da' \quad (30)$$

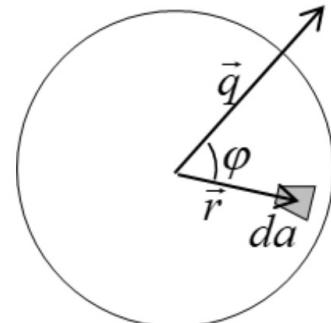
0.9 Difrazione di un disco assorbente

Possiamo usare le formule del precedente paragrafo per calcolare le sezioni d'urto del processo di **difrazione di un'onda piana su di un ostacolo circolare di raggio R completamente assorbente**.

Adottando un sistema di coordinate polari con l'origine al centro del disco, la **funzione di profilo del disco nero** è definita dalle condizioni

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Si assume un riferimento con l'origine al centro del disco e l'asse z normale al piano che lo contiene.



Con questa scelta, se ci limitiamo a considerare angoli di scattering non troppo grandi, il vettore \mathbf{q} giace in un piano parallelo a al piano xy e si ha

$$\mathbf{q} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = k(\sin \theta \hat{\mathbf{r}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') \simeq k \sin \theta \hat{\mathbf{r}}_r$$

il vettore \mathbf{r} , che identifica i punti del disco circolare (per comodità lasciamo cadere l'accento), giace sul piano del bersaglio xy a formare un angolo φ con \mathbf{q} per cui si ha $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \varphi$, ed infine - adottate le coordinate cilindriche - l'elemento d'area vale $da = rd\varphi dr$.

L'ampiezza di scattering (20) si scriverà come

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Gamma(r) e^{-iq \cos \varphi r} r d\varphi dr \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^R r \left[\int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right] dr \\ &= ik \underbrace{\int_0^R \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right] dr}_{J_0(qr)} \end{aligned}$$

dove $J_0(qr)$ è nota come **funzione di Bessel di ordine zero** (vedi Appendice B):

$$J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi$$

Abbiamo allora la seguente espressione dell'ampiezza di scattering:

$$f(\mathbf{q}) = ik \int_0^R r J_0(qr) dr \quad (31)$$

che può essere integrata per ottenere (vedi Appendice C)

$$f(\mathbf{q}) = ik \frac{R}{q} J_1(qR)$$

dove $J_1(qR)$ è la **funzione di Bessel di ordine 1**. Tenendo ora conto che $q = k \sin \theta$ otteniamo infine

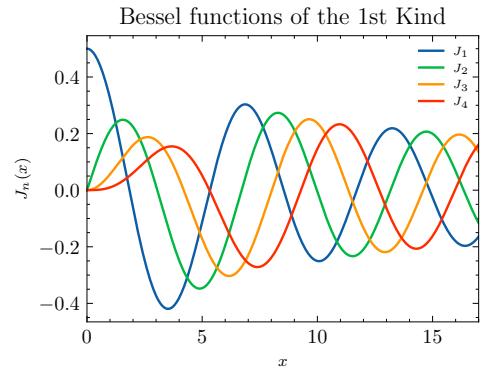
$$f(\mathbf{q}) = i \frac{R}{\sin \theta} J_1(kR \sin \theta) \quad (32)$$

e da (25) segue l'espressione della **sezione d'urto differenziale di scattering del disco assorbente**

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1(kR \sin \theta) \quad (33)$$

Tenendo conto ora della funzione profilo considerata dalla (28) si ottiene la seguente espressione

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r})|^2 da = \iint_{S_B} da$$



dalla quale segue la **sezione d'urto totale di scattering del disco assorbente**

$$\sigma_{scatt} = \pi R^2 \quad (34)$$

Calcoliamo la forward scattering amplitude:

$$f(\mathbf{0}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_O} \Gamma(\mathbf{r}) da = \frac{ik}{2\pi} \iint_{disco} da = \frac{ik}{2\pi} \pi R^2 = i \frac{kR^2}{2}$$

e ricordando il teorema ottico abbiamo

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \Im f(\mathbf{0}) = \frac{4\pi}{k} \Im \left(i \frac{kR^2}{2} \right) = \frac{4\pi}{k} \frac{kR^2}{2}$$

da segue la **sezione d'urto totale d'interazione del disco assorbente**

$$\sigma_{tot} = 2\pi R^2 \quad (35)$$

Dal teorema ottico infine

$$\sigma_{ass} = \sigma_{tot} - \sigma_{scatt} = 2\pi^2 - \pi R^2$$

da cui segue l'espressione della **sezione d'urto totale di assorbimento del disco assorbente**

$$\sigma_{ass} = \pi R^2 \quad (36)$$

Troviamo allora che la sezione d'urto totale d'interazione di un'onda piana su di un disco assorbente è il doppio della superficie del disco stesso, poiché sia la sezione d'urto totale di scattering che quella di assorbimento hanno entrambe il valore di quella superficie.

0.10 Il raggio nucleare

Nell'ottica, forma, dimensioni ed altre proprietà di un oggetto possono essere studiate inviando su di esso onde luminose e registrando le onde emergenti su di uno schermo. Scegliendo la lunghezza d'onda della luce in modo da avere il potere risolutivo desiderato, sullo schermo apparirà una figura di diffrazione con una distribuzione dell'intensità luminosa che caratterizza l'oggetto illuminato. Data l'onda incidente quindi, il problema sarà quello di risalire dalla distribuzione della intensità luminosa osservata alle proprietà dell'oggetto illuminato.

In fisica nucleare e subnucleare le cose vanno esattamente nello stesso modo. L'oggetto da studiare può essere un nucleo oppure - se si dispone di sufficiente potere risolutivo (ovvero di un fascio di sufficiente energia) - un nucleone o addirittura una sua parte. Tale oggetto potrà essere illuminato non solo con fasci di luce (tipicamente nella regione dei raggi X e gamma) ma anche con fasci di 'onde materiali' (nel senso di De Broglie) di elettroni, protoni, neutroni ed

altre particelle ancora, con le quali e in generale piu facile ottenere piccole lunghezze d'onda e dunque elevate risoluzioni. Le 'onde materiali' emergenti potranno essere registrate come 'particelle' da superfici sensibili (rivelatori), distribuite spazialmente in un modo caratteristico dipendente dalle proprieta dell'oggetto illuminato.

Cio premesso, i ragionamenti che potrebbero guidare un esperimento per la **misura delle dimensioni del nucleo atomico** sono i seguenti:

1. *Scelta delle particelle del fascio.* L'uso di fasci di elettroni permetterebbe di ottenere dati molto precisi sia per la qualita dei fasci disponibili che per la puntiformita delle particelle e l'eccellente conoscenza teorica della interazione elettromagnetica. E' pero chiaro che gli elettroni restituirebbero una 'radiografia' della distribuzione nucleare dei soli protoni. Volendo ottenere informazioni sulla distribuzione di tutti i nucleoni sarebbe meglio utilizzare fasci di *neutroni* i quali - interagendo solo fortemente - 'vedrebbero' sia i protoni che i neutroni senza il 'disturbo' addizionale della interazione elettromagnetica che invece si avrebbe usando fasci di *protoni*. Tali vantaggi competono pero con la qualita inevitabilmente inferiore dei fasci di neutroni;
2. *Scelta della energia del fascio.* La scelta della energia e essenzialmente dettata dal potere risolutivo che si vuole avere nello studio della struttura del nucleo per cui la lunghezza d'onda di De Broglie delle particelle del fascio deve essere almeno dell'ordine di grandezza delle dimensioni nucleari. Nel caso dei neutroni, si avrebbe una risoluzione dell'ordine di 10 fm ($1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$) con circa 10 MeV di energia cinetica

$$\lambda \simeq 10\text{ fm} \simeq 10 \frac{1}{200} \frac{\hbar c}{\text{MeV}} \simeq \frac{1}{20} \frac{\hbar c}{\text{MeV}}$$

Sfruttando ora il fatto che $v \ll c$ si ha

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2c^2}{m^2c^4} - mc^2 \right) \simeq \frac{p^2}{2m} \simeq \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ &\simeq 2\pi^2 \frac{\hbar c^2}{mc^2 \lambda^2} \simeq 20 \frac{\hbar^2 c^2}{1000 \text{MeV}_1} \frac{1}{400} \frac{\hbar^2 c^2}{\text{MeV}^2} \simeq 8 \text{MeV} \end{aligned}$$

3. *Processi in gioco.* Difficilmente un esperimento puo prescindere da una qualche ipotesi/conoscenza dei processi che avranno luogo nelle condizioni scelte. **Assumendo che i neutroni da 10 MeV non riescano a trapassare il nucleo atomico, questo potra essere assimilato ad un disco assorbente.**

Sulla base di queste considerazioni si potra costruire un esperimento per determinare il raggio nucleare, attraverso la misura delle

sezioni d'urto totali e di scattering di neutroni su bersagli materiali. Ipotizzando che il nucleo possa essere descritto da un disco assorbente si ha la seguente espressione della sezione d'urto totale (35)

$$\sigma = 2\pi R^2$$

Si possono allora determinare i raggi nucleari misurando la sezione d'urto totale di neutroni di circa 10 MeV su bersagli materiali puri contenenti i diversi tipi di nucleo. Dato che sia le interazioni elastiche che inelastiche rimuovono i neutroni del fascio, la sezione d'urto totale di interazione potrà essere misurata contanto i neutroni persi dal fascio stesso. In figura 7 è mostrato un grafico della **sezione d'urto totale e di assorbimento** di neutroni da 14 MeV in funzione della radice cubica del numero di nucleoni A del nucleo.

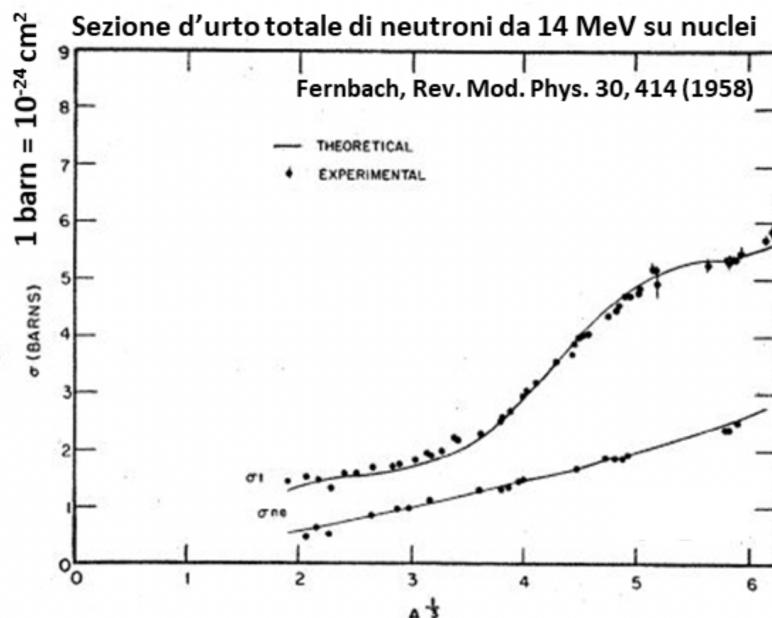


Figura 7: Sezione d'urto totale di neutroni da 14 MeV su nuclei.

Ci serve un modello capace di fornire una relazione tra la sezione d'urto totale ed il numero di nucleoni del nucleo. Per cominciare, potremmo modellizzare il nucleo come un **aggregato sferico di nucleoni** a loro volta assimilati a piccole sfere. Ipotizzando che la forza che lega neutroni e protoni sia a **corto raggio** con raggio d'azione dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone, il nucleo tenderà ad avere una **densità volumetrica uniforme** per cui potremo scrivere le seguenti relazioni

$$V_{Nuc} \simeq \frac{4}{3}\pi R^3 \quad V_{Nuc} \simeq A \frac{4}{3}\pi r_0^3$$

dalle quali si ottiene la seguente relazione tra raggio nucleare e numero atomico

$$R \simeq r_0 A^{1/3}$$

Immaginando ora il nucleo come un disco assorbente, possiamo sostituire questa relazione nella (35) ed ottenere la seguente formula con la quale interpretare i dati

$$\sigma = 2\pi r_0^2 (A^{1/3})^2$$

In prima approssimazione la formula funziona. Si noti infatti che i dati hanno effettivamente un andamento ad arco di parabola nella variabile $A^{1/3}$ ma, contrariamente alla previsione della formula, intersecano l'asse verticale ($A = 0$) ad un valore di sezione d'urto non nullo. Ciò significa che dobbiamo aggiungere un termine costante alla sezione d'urto di cui sopra ottenibile solo con l'aggiunta di un termine costante nella espressione del raggio nucleare

$$R_{Nuc} = r_0 A^{1/3} + b \quad (37)$$

Hans Bethe suggerì che tale termine dovesse interpretarsi come una specie di '**'alone nucleare'**(nuclear skin), di spessore costante ed uguale per tutti nuclei, dovuto al raggio finito della interazione forte tra nucleoni. Stimando in circa 0.5 barn il valore approssimativo della sezione d'urto totale ad $A = 0$ possiamo estrarre la corrispondente stima di b

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi R^2 = 2\pi(r_0 A^{1/3} + b)^2 \quad \sigma(A^{1/3} = 0) = 2\pi b^2 \\ b &= \sqrt{\frac{\sigma(A^{1/3} = 0)}{2\pi}} \sim 2.8 \text{ fm} \end{aligned}$$

Il valore meglio compatibile con i dati sperimentali oggi disponibili è circa $b = 2.4 \text{ fm}$. Una volta determinata la 'skin' nucleare possiamo determinare anche il raggio del nucleone r_0 .

Leggendo il valore della sezione d'urto totale d'interazione corrispondente ad un secondo nucleo (ad esempio $A^{1/3} = 4$ dove $\sigma = 2.8$ barn) possiamo ottenere la seguente stima di r_0

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi R^2 = 2\pi(r_0 A^{1/3} + b)^2 \quad r_0 = \frac{1}{A^{1/3}} \left(\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} - b \right) \\ r_0 &\simeq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{2.8 \times 10^{-24}}{2\pi}} - 2.4 \times 10^{-13} \right) \simeq 1.1 \text{ fm} \end{aligned}$$

Il valore meglio compatibile con i dati sperimentali oggi disponibili fornisce $r_0 = 1.24$. In sintesi, dato il numero di nucleoni A , la (37) - completata dai valori sperimentali della skin nucleare e del raggio del nucleone - permette di calcolare in modo preciso il **raggio dei nuclei**

nello stato fondamentale di minima energia dove il nucleo assume una forma sferica.

Informazioni più dettagliate sulla geometria del nucleo possono essere ottenute da esperimenti capaci di misurare la sezione d'urto differenziale di scattering. Modellizzando il *nucleo come un disco circolare assorbente* (vedi assunzione fatta sui processi in gioco) la una sezione d'urto differenziale di scattering sarà data dalla espressione (33)

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1^2 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \right)$$

che va confrontata con i dati sperimentalni mostrati a fianco.

Si nota subito che i dati mostrano un andamento con l'angolo θ di tipo diffrattivo, in prima approssimazione compatibile con quello di una funzione di Bessel del primo ordine.

È interessante considerare la sezione d'urto differenziale in avanti, ovvero per θ prossimo a zero. Sviluppando asintoticamente la funzione di Bessel per piccoli valori dell'argomento si ha (9.4.4 Abramowitz-Stegun⁹)

$$J_1(z) \sim \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}z^3$$

da cui - sostituendo - otteniamo la **sezione d'urto differenziale di scattering in avanti** dalla quale si puo ottenere una nuova **stima del raggio nucleare**

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1^2 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \right) \sim \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{4} \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta \sim \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2}$$

Dalla figura si vede chiaramente che tale sezione d'urto a $\theta = 0$ aumenta rapidamente con il numero di nucleoni A .

A titolo di esempio potremmo determinare il raggio nucleare leggendo sul grafico il valore della sezione d'urto sul picco di diffrazione. Calcolando la lunghezza d'onda di De Broglie dei neutroni del fascio:

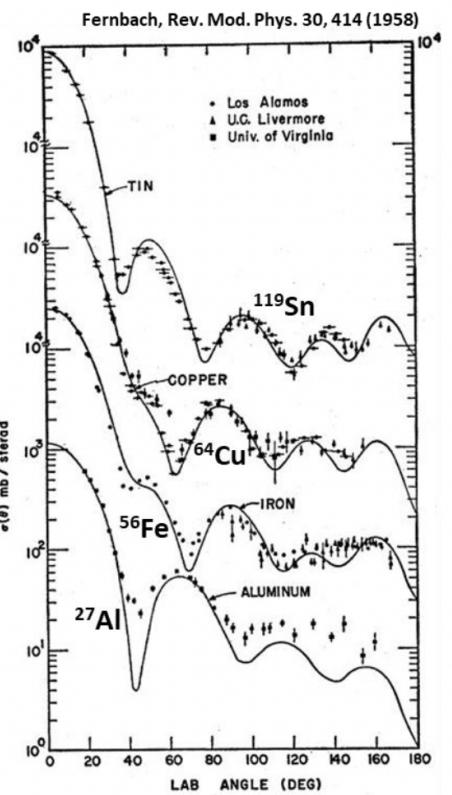
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m\lambda^2} \lambda = \sqrt{\frac{2\pi^2}{mc^2 E}} \hbar c = 7.5 \text{ fm}$$

nel caso del **picco centrale di diffrazione dell'alluminio** si ottiene

$$R = \sqrt[4]{\frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}} = 5.2 \text{ fm}$$

Una seconda possibilita consiste nel lavorare sui minimi di diffrazione la cui spaziatura - come noto dall'ottica - deve dipendere dal raggio del disco ovvero dal raggio nucleare. Notiamo subito che l'andamento della sezione d'urto di diffusione per angoli non nulli dovrebbe essere governato dal quadrato della funzione di Bessel del primo ordine. Ora è noto che le funzioni di Bessel si annullano

Sezione d'urto differenziale di diffusione di neutroni da 14 MeV su nuclei



⁹ Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964

ripetutamente, un fatto che però non trova corrispondenza nell'andamento delle sezioni d'urto di diffusione misurate che, pur avendo dei minimi pronunciati, non si annullano mai (vedi figura). Questo fatto indica che *modellizzare il nucleo come un disco completamente assorbente non è del tutto appropriato e che esiste un certo grado di trasparenza del nucleo rispetto ai neutroni incidenti*. Trascurando per ora questo fatto ed assumendo che i minimi della sezione d'urto corrispondano agli zeri della funzione di Bessel, abbiamo nel caso del primo zero (9.5.14 Abramowitz-Stegun)

$$J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta\right) = 0 \quad \text{se} \quad \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta = 3.832$$

da cui si ottiene la seguente espressione

$$R = \frac{3.832}{2\pi} \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

che fornisce un'altra *stima del raggio nucleare* a partire dalla posizione angolare del primo minimo della sezione d'urto differenziale di scattering.

Posizionandoci sul primo minimo di diffrazione dell'alluminio - molto marcato - otteniamo il valore seguente

$$R = \frac{3.832\lambda}{2\pi \sin \theta} = 6.12 \text{ fm}$$

in ottimo accordo con la stima ottenuta dalla (37)

$$R_{Nuc} = r_0 A^{1/3} + b \simeq 6.12 \text{ fm}$$

La lettura diretta dei dati che abbiamo commentato e solo un modo per prendere confidenza con i dati stessi. Per estrarre in modo corretto tutto il contenuto informativo, sarebbe necessario eseguire un 'fit' utilizzando il corrispondente chi-quadrato come criterio di bontà e affidabilità della funzione teorica adottata. In questo modo otterremmo un solo valore del raggio nucleare piuttosto che i due stimati e, soprattutto, verificheremmo che l'ipotesi che il nucleo assorba totalmente i neutroni incidenti è troppo drastica poiché non riesce a riprodurre correttamente l'andamento delle sezioni d'urto di diffusione. I dati richiedono l'ipotesi che il nucleo sia parzialmente trasmittente un po' come accade alla luce incidente su di una sfera di vetro solo parzialmente opaca. Dato che nel caso della luce si descriverebbe un simile comportamento per mezzo di un indice di rifrazione dotato sia di una parte reale che immaginaria, si è pensato di modellizzare il nucleo per mezzo di un potenziale complesso (dotato sia di una parte reale che immaginaria) dando origine al cosiddetto **modello ottico del nucleo**¹⁰, capace di descrivere perfettamente i dati sperimentali disponibili (la parte reale del potenziale è solitamente assunta nella forma di Saxon-Woods mentre quella immaginaria nella forma di una gaussiana).

¹⁰ Description of atomic nuclei as similar to cloudy crystal balls in that, when struck by a beam of particles, they partially absorb the beam, partially scatter it, and partially transmit it in a way analogous to the behaviour of light. The nuclear optical model has proved very successful in explaining nuclear reactions in which the incident (striking) particles have energies of about 10^6 to 10^9 eV.

0.11 Energia di legame nucleare

Importanti indicazioni sulle proprietà della forza nucleare che unisce i nucleoni nel nucleo provengono dalle misure sperimentali della **energia di legame** compiute in modo sistematico a partire dagli anni '20. Introduciamo ora il concetto di energia di legame del nucleo per mezzo di un semplice esempio.

Si immagini un sistema formato da due sferette omogenee di massa m e raggio R , soggette alla mutua attrazione gravitazionale, disposte in quiete l'una accanto all'altra con una energia potenziale iniziale E_i . Sappiamo che per separare le sferette dobbiamo applicare su una di esse una forza esterna uguale e contraria a quella attrattiva in modo da portarla all'infinito (avendo avuto cura di fissare l'altra!). Nel linguaggio della meccanica dobbiamo compiere lavoro contro la forza attrattiva gravitazionale che tiene unite le sferette, nel più generale linguaggio della energia dobbiamo fornire energia al sistema legato in modo da separarlo nei suoi componenti portandolo ad una energia potenziale finale che indicheremo con E_f (in questo caso nulla). Tale energia viene detta **energia di legame del sistema** e soddisfa la seguente relazione

$$\Delta E = E_i = E_f \quad (38)$$

Ora immaginiamo di volerla determinare. In linea di principio potremmo utilizzare **tre diversi metodi**:

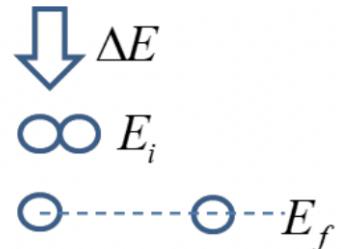
1. Disponendo di una espressione esplicita della forza, potremmo calcolarla teoricamente

$$\Delta E = \int_{2R}^{\infty} \mathbf{F}_{est} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2R}^{\infty} G \frac{m^2}{r^2} dr = G \frac{m^2}{2R}$$

2. Non disponendo della espressione teorica potremmo misurare ripetutamente la forza applicata sulla sferetta e sommare in modo da ottenere il lavoro compiuto

$$\Delta E = \int_{2R}^{\infty} \mathbf{F}_{est} \cdot d\mathbf{l}$$

3. Non disponendo della espressione teorica potremmo anche affidarci alla teoria della relatività ristretta (TRR). Sappiamo infatti che ad ogni forma di energia E corrisponde una massa inerziale equivalente M data dalla ben nota equazione $M = E/c^2$. Su questa base, dato che il contenuto energetico del sistema iniziale legato e del sistema finale separato sono diversi, dobbiamo aspettarci che diverse siano pure le corrispondenti masse inerziali. In particolare da $\Delta E = E_i = E_f$ otteniamo $E_f > E_i$ (poiché $\Delta E > 0$) da cui



discende pure che $M_f > M_i$. Dalle espressioni relativistiche

$$E_f = M_f c^2 \quad E_i = M_i c^2$$

otteniamo allora la seguente differenza di massa detta **difetto di massa del sistema legato**

$$(M_f - M_i) = \frac{\Delta E}{c^2}$$

la quale offre una terza via per accedere all'energia di legame.

Nel caso di un sistema macroscopico di due masse legate dalla forza gravitazionale, il metodo 1 risulta praticabile poiché conosciamo l'espressione teorica della forza. Superando un certo numero di difficoltà sperimentali potremmo anche utilizzare il metodo 2. Certamente nessun fisico sperimentale sarebbe però in grado di utilizzare il metodo 3 dato che dovrebbe misurare il seguente difetto di massa

$$(M_f - M_i) = \frac{\Delta E}{c^2} = G \frac{m^2}{2Rc^2} = 5.6 \times 10^{-54} MeV$$

Nel caso della interazione forte tra nucleoni le cose vanno diversamente. Il metodo 1 richiederebbe una conoscenza della forte che non abbiamo poiché - appunto - dobbiamo ancora determinarne le proprietà. Il metodo 2 è chiaramente inapplicabile ad un sistema microscopico. Il metodo 3, basato sulla TRR, potrebbe essere applicabile qualora il difetto di massa del sistema fosse consistente. Ora i dati sperimentali mostrano che **l'energia potenziale dell'interazione attrattiva tra nucleoni e tale da fornire un apprezzabile contributo negativo alla inerzia del nucleo**, generando una differenza misurabile tra la massa dei nucleoni componenti e quella del nucleo stesso.

Sulla base di quanto detto, siamo ora in grado di fornire la seguente **definizione operativa della energia di legame** ovvero della *energia necessaria per separare il nucleo nei nucleoni componenti*

$$B\left(\frac{A}{Z}X_N\right) = [Nm_n + Zm_p - m_N\left(\frac{A}{Z}X_N\right)]c^2 \quad (39)$$

dove m_n, m_p, m_N sono rispettivamente le masse del neutrone, del protone e del nucleo¹¹. La formula (39), attraverso la misura sistematica delle masse nucleari, rende possibile la determinazione dell'energia di legame dei nuclidi che può essere tabulata in funzione di una qualunque coppia tra le variabili A, Z ed N (vedi o.3). Limitando la rappresentazione ai soli nuclidi stabili (nel caso vi fosse più di un isotopo stabile si sceglie quello più abbondante) si ottiene l'energia di legame media per nucleone B/A in funzione di A riportata in Figura 3 e riportata nella pagina seguente. Il quoziente B/A da

¹¹ Vale la pena precisare che le masse nucleari sono misurabili con minore precisione di quelle atomiche per cui è utile ricavare le prime delle seconde attraverso la relazione

$$m_A\left(\frac{A}{Z}X_N\right) = m_N\left(\frac{A}{Z}X_N\right) + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i^{el}$$

dove m_A è la massa dell'atomo corrispondente al nucleo in esame.

una indicazione quantitativa del grado di stabilità del nuclide e permette di stabilire se una data reazione nucleare sia esoenergetica o endoenergetica e, dunque, se possa avvenire spontaneamente oppure no. Dal grafico in figura 8 possiamo trarre alcune conclusioni

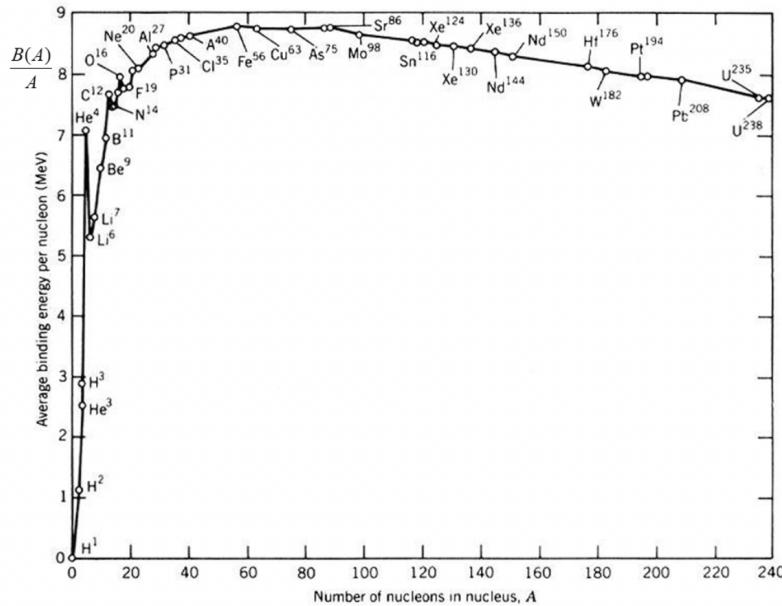


Figura 8: Grafico dell'energia di legame media per nucleone in funzione del numero di nucleoni A .

general:

1. Ci sono configurazioni nucleari particolarmente stabili quali 4He , ^{12}C , ^{16}O , ...
2. a parte queste eccezioni, l'energia di legame media per nucleone ha un andamento regolare. Aumenta rapidamente con il numero di nucleoni fino ad un valore dell'ordine degli 8 MeV per poi diminuire assai lentamente
3. i nucleo più stabili sono ^{56}Fe e ^{62}Ni . Cio significa che i nuclei pesanti alla sua destra possono raggiungere configurazioni più stabili (B/A più elevato) diminuendo il numero di nucleoni A , ovvero frazionandosi in nuclei più piccoli. Mentre i nuclei leggeri alla sua sinistra possono raggiungere configurazioni più stabili (B/A più elevato) aumentando A , ovvero aggregandosi in nuclei più grandi. Detto in altri termini ciò significa che le **reazioni di fissione dei nuclei pesanti e e quelle di fusione dei nuclei leggeri sono esoenergetiche** ovvero producono energia qualora si sia in grado di innescarle;
4. dal punto precedente conseguе che le **reazioni di fusione dei nuclei leggeri e fissione dei nuclei pesanti** costituiscono la doppia

opportunità offerta dalla fisica nucleare per la produzione di energia.

La via della *fusione nucleare* è stata scelta dalle stelle. Oggi sappiamo che una stella come il sole ricava la quasi totalità della energia (circa il 98%) dalla fusione di nuclei d'idrogeno in nuclei di elio. L'energia prodotta dalle reazioni di fusione fluisce verso l'esterno. Tale flusso, nella forma di energia cinetica dei prodotti delle reazioni di fusione, fornisce la spinta verso l'esterno capace di opporsi alla contrazione gravitazionale mantenendo il sole in una situazione di equilibrio di forze detto equilibrio idrostatico¹².

Dal grafico si può leggere il decorso del processo una volta esaurito l'idrogeno: la contrazione gravitazionale prenderà il sopravvento comprimendo la materia fino al punto da innescare le reazioni di fusione di tre nuclei di elio in un nucleo di carbonio stabilendo un nuovo periodo di equilibrio. Le fasi di equilibrio e contrazione si alterneranno fino alla fusione del silicio in ferro quando la contrazione gravitazionale - non potendo innescare altre reazioni di fusione - procederà inarrestabile facendo collassare la stella che espellerà in modo esplosivo gli strati più esterni lasciando un residuo compatto di materia in uno stato degenero.

La via della *fissione nucleare* trova invece una sua applicazione nei reattori nucleari. Alcuni nuclidi detti *fissili* - quali ad esempio l'²³⁵₉₂U ed il ²³⁹₉₄Pu - possiedono elevate sezioni d'urto di cattura di neutroni termici (neutroni con energie dell'ordine di 0.03 eV, comparabili con quella di agitazione termica a temperatura ambiente) e, a seguito della cattura neutronica, tendono a spezzarsi in due nuclei leggeri più alcuni neutroni liberi di qualche MeV di energia.

E' chiaro che irradiando con neutroni termici un *nocciolo materiale* contenente materiale fissile, la elevata energia cinetica (quasi 200 MeV) dei nuclidi prodotti dalla fissione diffonderà all'esterno come *calore asportato* da un *fluido refrigerante* mentre i *neutroni liberi* potranno indurre ulteriori reazioni di fissione del materiale dando luogo ad una *reazione a catena*. Come detto però, affinchè ciò avvenga in misura sufficiente, è necessario abbassare l'energia di tali neutroni liberi da qualche MeV al livello termico, funzione cui provvede il *materiale moderatore*. Fondamentale è poi la possibilità di controllare la rapidità di sviluppo delle reazioni a catena che solitamente viene ottenuta inserendo o togliendo dal nocciolo apposite *barre di controllo* capaci di assorbire i neutroni prodotti dalla fissione.

Un tipico reattore a fissione può avere un *nocciolo* costituito da una miscela di ²³⁵₉₂U (fino al 5%) e ²³⁸₉₂U. Dato che nell'uranio naturale la frazione dominante è quella dell'isotopo ²³⁸₉₂U - mentre ²³⁵₉₂U è presente con frazione ell'ordine dello 0.7 % - ne consegue che l'uranio naturale deve essere *arricchito* (vi si aggiunge ²³⁵₉₂U puro separato

¹² I fisici delle particelle elementari trovano naturale misurare le masse atomiche e nucleare in unità di eV/c^2 ma, i fisici nucleari e soprattutto i chimici, biochimici, e i biologi molecolari preferiscono usare una scala di massa la cui unità è prossima a quella del protone e del neutrone. Si tratta della **unità di massa atomica** (simbolo **u**) definita come la dodicesima parte della massa dell'atomo di carbonio-12. È evidente che tale unità di massa, a causa dell'inerzia negativa associata all'energia di legame del nucleo deve essere inferiore sia alla massa del protone che a quella del neutrone:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} M_A(^{12}_6C) &= \frac{1}{12} \left[M_N ^{12}_6C + 6m_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^6 B_i^{e^-} \right] \\ &= \left[\frac{1}{12} 6m_n + 6m_p - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{12} B_i^{nucl} + 6m_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^6 B_i^{e^-} \right] \\ &\simeq \frac{m_n + m_p + m_e}{2} - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \frac{B_i^{nucl}}{c^2} \simeq 931.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Infatti la conversione tra *u* e eV/c^2 è ovvero 1% inferiore alla massa del neutrone e del protone.

dall' $^{238}_{92}\text{U}$ ad esempio attraverso centrifugazione basata sulla diversa massa dei nuclidi). Il *fluido refrigerante* è spesso costituito da *acqua pressurizzata* che cede il calore assorbito all'interno del nocciolo ad un contenitore che trasforma acqua in vapore che a sua volta muove le turbine che azionano gli alternatori per la produzione e l'immissione in rete della energia elettrica. Il moderatore è spesso costituito da acqua pesante (acqua con elevatissime frazioni di deuterio essendo 156 ppm la frazione nell'acqua naturale) o grafite distribuite all'interno del nocciolo, mentre le barre di controllo sono costituite da metalli quali cadmio e indio che vengono inserite od estratte dal nocciolo con la funzione di modulare la quantità di energia prodotta.

Richiami di Meccanica Quantistica

0.12 Osservabili e valori di aspettazione

I sistemi fisici microscopici in regime non relativistico sono descritti dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ che si assume descriva in modo completo lo stato fisico della particella, ovvero dica tutto ciò che può essere detto su di essa. Il significato fisico della funzione d'onda è definito dalla **ipotesi di Born**:

Il modulo quadrato della funzione d'onda fornisce la densità di probabilità di localizzazione della particella nel punto \mathbf{r} al tempo t a seguito della interazione con un apparato di misura:

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

Tale ipotesi comporta la **condizione di normalizzazione**, ovvero che l'integrale del modulo quadrato della funzione d'onda sul volume occupato dal sistema microscopico debba essere pari ad uno, e stabilisce che in meccanica quantistica la **grandezza fisica osservabile** sia il modulo quadrato della funzione d'onda piuttosto che la funzione d'onda stessa.

Si assume infine che l'evoluzione temporale della funzione d'onda sia governata dalla equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}\psi \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

la quale richiede che sia noto l'operatore hamiltoniano del sistema microscopico. Come possiamo arrivare al **valore di aspettazione** di posizione e quantità di moto? Calcolo del valore medio della posizione di una particella. Nel caso di un'onda piana:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i/\hbar(p \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

se p ed E fossero sempre definiti avrei che tutte le posizioni nel piano hanno la stessa probabilità di essere misurate. Per cui una misurazione ripetuta potrebbe portare ad un esito diverso della posizione. \implies ragionamento in termini statistici \implies posso solo

conoscere il **valore medio** della posizione.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV & \quad \langle \mathbf{r} \rangle = \sum_i^n \frac{\mathbf{r}_i p_i}{\sum_i^n p_i} \\ \langle \mathbf{r} \rangle &= \frac{\iiint_V \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV}{\iiint_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV} \end{aligned} \quad (40)$$

dove il denominatore è unitario dalla condizione di normalizzazione.
A questo punto si ha, con ψ^* complesso coniugato,

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t) dV$$

ovvero la *media delle posizioni corrisponde alla media del vettore posizione \mathbf{r} pesata dal modulo quadro della funzione d'onda*.

Meno immediato e comprendere come calcolare ad esempio la quantità di moto della particella. Ragionando ancora una volta in modo euristico possiamo richiamare le espressioni (13) scritte per una data componente di Fourier della funzione d'onda

$$-i\hbar\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{P}\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, t) \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{E}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t)$$

Si vede che nel caso in cui la funzione d'onda abbia quantità di moto ed energia definite (ovvero nel caso in cui la funzione d'onda coincida con una data componente di Fourier) allora gli operatori a primo membro estraggono da essa i corrispondenti valori ponendoli nella posizione di autovalori ovvero di moltiplicatori. In meccanica quantistica si assume che tale fatto abbia valida generale:

Se in uno stato quantomeccanico ψ un osservabile ha un valore definito o allora lo stato ψ è autostato del corrispondente operatore O con autovalore o ($O\psi = o\psi$).

Proseguiamo nel ragionamento, operando sulla prima delle equazioni precedenti (prima moltiplicando per ψ^* e poi integrando ambo i membri) si ha

$$\begin{aligned} -i\hbar\nabla\psi &= \mathbf{p}\psi \implies \psi^*(-i\hbar\nabla)\psi = \mathbf{p}\psi^*\psi \\ \iiint_V \psi^*(-i\hbar\nabla)\psi dV &= \iiint_V \mathbf{p}\psi^*\psi dV = \mathbf{p} \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la normalizzazione della funzione d'onda. Si noti che tale espressione, valida nel caso di una data componente di Fourier, è strutturalmente analoga alla posizione media delle posizioni della particella microscopica (40) valida invece in generale. Non è difficile mostrare che nel caso di un generico *pacchetto d'onde* il valore medio della quantità di moto della particella continua ad essere dato da questo integrale per cui scrivremo

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \iiint_V \psi^* \hat{P}\psi dV = \iiint_V \psi^* (-i\hbar\nabla)\psi dV$$

Inoltre, essendo le grandezze fisiche espresse da numeri reali, gli operatori associati alle variabili dinamiche dovranno essere **hermitiani**.

Giungiamo allora a formulare uno degli assiomi della meccanica quantistica nella seguente forma:

Ad ogni grandezza fisica misurabile o (osservabile) di un dato sistema microscopico, risulta associato un operatore lineare complesso hermitiano O . Il valore medio delle misure della osservabile o al tempo t in un certo stato quantomeccanico $\psi(\mathbf{r}, t)$ è dato dal seguente integrale detto **valore di aspettazione**

$$\langle o \rangle = \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{O} \psi(\mathbf{r}, t) dV \quad (41)$$

Quanto detto rende evidente che, dato un sistema quantomeccanico, si pone il problema fondamentale di individuare le grandezze fisiche osservabili e di determinare i corrispondenti operatori associati. La fisica atomica, ma ancor più la fisica delle particelle, chiariscono che un criterio generale non esiste e che sia le osservabili che le loro espressioni operatoriali possono essere trovate solo fondandosi sui dati sperimentali.

Cio non toglie che si sia verificato che le espressioni operatoriali delle variabili dinamiche classiche possano essere trovate (sia pure con alcune limitazioni che per ora tralasciamo) attraverso una procedura, detta **principio di corrispondenza** (che applicheremo al caso del momento angolare), la quale però non può essere applicata nel caso di variabili dinamiche che non abbiano un corrispondente classico. In tali casi l'unica guida rimangono i dati sperimentali ed il percorso può essere lungo e tortuoso.

0.13 Definizione ed indefinizione delle osservabili

Una volta compreso in che modo debbano calcolarsi le variabili dinamiche di un sistema quantomeccanico è necessario accennare ad un delicato problema già sullo sfondo di alcune nostre considerazioni. Riprendiamo l'esempio dell'onda piana progressiva visto poco fa.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i/\hbar(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Con tutta evidenza tale espressione descrive una *particella avente quantità di moto ed energia definite ma posizione spaziale e temporale completamente indefinite*. Infatti, fissato il tempo, le superfici equifase dell'onda risultano essere piani perpendicolari al vettore quantità di moto. Cio significa che il modulo quadrato della funzione d'onda assumera un valore uniforme sui punti di tali superfici (in realtà nel

caso di una singola componente di Fourier su tutti i punti dello spazio). A sua volta ciò significa che la particella potrà essere localizzata con densità di probabilità uniforme su tutti i punti della superficie di un piano perpendicolare alla quantità di moto che equivale ad affermare che la *posizione della particella è assolutamente indefinita*.

Un minimo di conoscenza delle proprietà delle onde riconosce in questo fatto qualcosa di noto poiché sappiamo bene che *una qualunque componente di Fourier di un'onda piana possiede vettore d'onda e pulsazione definite ma posizione spaziale e temporale assolutamente indefinite*.

Sappiamo anche che per avere onde con posizione spaziale e temporale meglio definite è necessario sovrapporre componenti di Fourier di diverso vettore d'onda e pulsazione andando a costituire i cosiddetti pacchetti d'onde.

Infine dalla **fisica classica** sappiamo che nei pacchetti d'onde valgono le cosiddette **relazioni di indeterminazione**¹³ che esprimono queste proprietà in forma quantitativa approssimata

$$\Delta k_x \Delta x \simeq 2\pi \quad \Delta \omega \Delta t \simeq 2\pi$$

dove, data una direzione x dello spazio, Δk_x e $\Delta \omega$ stimano la dispersione del vettore d'onda e della pulsazione del pacchetto, mentre Δx e Δt ne stimano la dispersione spaziale e temporale.

In generale si può dimostrare che valgono le seguenti relazioni

$$\Delta k_x \Delta x \simeq 2\pi$$

$$\Delta k_y \Delta y \simeq 2\pi$$

$$\Delta k_z \Delta z \simeq 2\pi$$

$$\Delta \omega \Delta t \simeq 2\pi$$

Nel caso in cui si abbia un pacchetto d'onda che contenga solo una componente di Fourier si avrebbe $\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = 0$ con una conseguente indeterminazione sulle posizioni tendente a ∞ .

Consideriamo il caso di un'onda piana, di lunghezza d'onda λ e vettore d'onda $k = k_x \hat{i}$, che viene fatta passare attraverso una fenditura ampia d (vedi Figura 9).

Il fronte d'onda viene tagliato dalla fenditura stessa: il fronte d'onda lungo y ha un'incertezza $\Delta y = d$. Dalle relazioni precedenti so che viene introdotto un errore $\Delta k_y \simeq \frac{2\pi}{d}$. La fenditura ha deviato il vettore d'onda k ed ora ha una certa angolazione θ \Rightarrow il fronte d'onda che si incurva (in accordo con il Princípio di Huygens-Fresnel). L'angolo di apertura vale quindi

$$\theta \simeq \frac{\Delta k_y}{k_x} \simeq \frac{2\pi}{d \frac{2\pi}{\lambda}} \simeq \frac{\lambda}{d}$$

¹³ The general idea is present in *any system where there are plane waves*. A physically realizable wave is always in the form of a wave packet which is finite in extent. A wave packet is built up by superposing waves with definite wave number. By simple Fourier analysis, a highly localized packet will require a wide spread of wave vectors, whereas a packet with a large spacial extent can be composed of wave numbers quite close to a specific value

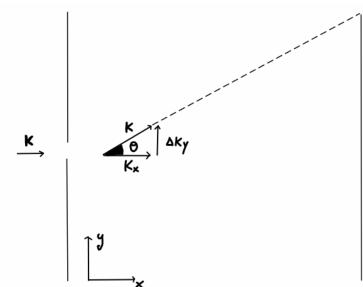
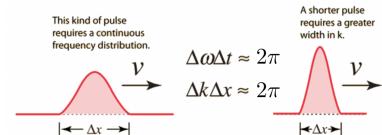


Figura 9: Esperienza classica per evidenziare l'effetto dell'indeterminazione.

In ultima analisi quindi il fronte d'onda viene **limitato spazialmente** e dà luogo al fenomeno della **diffrazione**.

Vogliamo ora trovare l'analogo delle relazioni di indeterminazione in **meccanica quantistica**. Partiamo dalle relazioni

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad E = \hbar\omega \quad p_x = \hbar k_x$$

e arriviamo a

$$\Delta p_x \Delta x \simeq h \quad (42)$$

$$\Delta p_y \Delta y \simeq h \quad (43)$$

$$\Delta p_z \Delta z \simeq h \quad (44)$$

$$\Delta E \Delta t \simeq h \quad (45)$$

relazioni note come **relazioni di indeterminazione di Heisenberg** le quali affermano che

1. se la misura della posizione di un corpuscolo materiale lungo una certa direzione ha una incertezza Δx allora una simultanea misura della quantità di moto lungo la stessa direzione ha una incertezza Δp_x tale che il loro prodotto sia dell'ordine della costante di Planck;
2. se la misura della posizione temporale di un corpuscolo materiale ha una incertezza Δt allora una simultanea misura della energia ha una incertezza ΔE tale che il loro prodotto sia dell'ordine della costante di Planck.

Un analogo quantistico dell'esperimento precedente può consistere nell'inviare un elettrone con quantità di moto $\mathbf{p} = p_x \hat{i}$ verso una fenditura di ampiezza d . Nel momento in cui l'elettrone passa in mezzo alla fenditura possiamo sicuramente dire che la sua posizione assume un qualche valore *all'interno del range* della fenditura (vedi Figura 10). Si ha quindi che il passaggio attraverso essa e la conseguente limitazione sulla posizione della posizione *equivale ad un'operazione di misura* sulla particella.

$$\Delta y \simeq d \quad \Delta p_y \simeq \frac{h}{d}$$

con angolo di inclinazione

$$\theta \simeq \frac{\Delta p_y}{p_x} \simeq \frac{h}{d \frac{h}{\lambda}} \simeq \frac{\lambda}{d}$$

L'incompatibilità tra le variabili dinamiche di un sistema quanto-mecanico è espressa in forma precisa da un fondamentale teorema della meccanica quantistica il quale stabilisce che

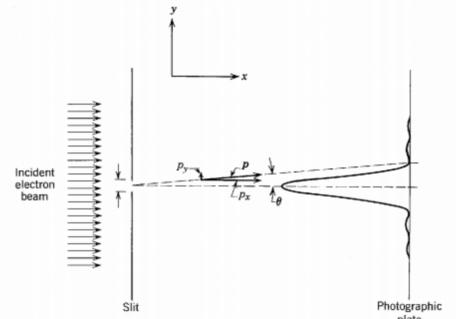


Figura 10: Esperienza quantistica per evidenziare l'effetto dell'indeterminazione.

Il prodotto delle deviazioni standard delle misure di due grandezze fisiche a e b in uno stato ψ è limitato inferiormente dal valore di aspettazione del commutatore dei loro operatori diviso il fattore $2i$

$$\boxed{\sigma_a \sigma_b \geq \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}{2i} \psi(\mathbf{r}, t) dV} \quad (46)$$

A titolo di esempio possiamo considerare proprio le variabili dinamiche di posizione e quantità di moto

$$a = p_x \quad b = x$$

con corrispondente operatori

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad x$$

e calcolarne il commutatore

$$\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X}$$

per cui calcoliamo i due termini

$$\begin{aligned} \hat{X}\hat{P}_x\psi &= x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi \\ \hat{P}_x(\hat{X}\psi) &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) (x\psi) = -i\hbar \left(\psi - x \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) = -i\hbar\psi - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi \end{aligned}$$

ed otteniamo

$$(\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X})\psi = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi - \left[-i\hbar\psi - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi \right] = i\hbar\psi$$

da cui il valore del commutatore

$$\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X} = i\hbar\hat{1}$$

che sostituito nella (46) fornisce

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_{p_x} &\geq \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X}}{2i} \psi(\mathbf{r}, t) dV = \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{i\hbar\hat{1}}{2i} \psi(\mathbf{r}, t) dV \\ \sigma_x \sigma_{p_x} &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

che esprime in forma rigorosa il principio di indeterminazione per le misure della posizione e quantità di moto.

0.14 Momento angolare orbitale

Il momento angolare orbitale è un ottimo esempio per comprendere come si possa utilizzare il *principio di corrispondenza* per costruire

l'operatore quantomeccanico di una variabile dinamica a partire dalla sua espressione classica

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$$

L'idea è quella di ottenere l'espressione quantomeccanica dell'operatore associato attraverso la sostituzione diretta delle variabili classiche con i corrispondenti operatori quantistici. Richiamando allora gli operatori posizione e quantità di moto, otteniamo la seguente espressione della terna ordinata di operatori che costituiscono **l'operatore momento della quantità di moto**

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{r} \wedge (-i\hbar \nabla) = -i\hbar \mathbf{r} \wedge \nabla \quad (47)$$

la quale, nel sistema di coordinate cartesiano, assume la seguente forma

$$\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (48)$$

Dato che le proprietà generali di un operatore possono essere studiate attraverso le sue relazioni di commutazione, utilizziamo la forma cartesiana esplicita per calcolare i commutatori della terna di operatori. Si ottiene facilmente

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x \quad (49)$$

Verifichiamo allora che uno stato quantomeccanico non ammette valori definiti del momento della quantità di moto lungo x, y e z poiché la proiezione lungo x è incompatibile con quella lungo y , quella lungo z con quella lungo x e quella lungo y con quella lungo z .

Cio significa che *in uno stato quantomeccanico il momento angolare può assumere valori definiti lungo una sola direzione* che solitamente si assume come asse z . Consideriamo ora l'operatore **modulo quadrato del momento angolare**

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (50)$$

Sempre con calcolo diretto si ottengono facilmente i seguenti commutatori

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_y] = [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad (51)$$

Dalle relazioni di commutazioni (49) e (51), concludiamo allora che **uno stato quantomeccanico ammette valori definiti del quadrato del momento angolare e della sua componente lungo z** (vedi Figura 11).

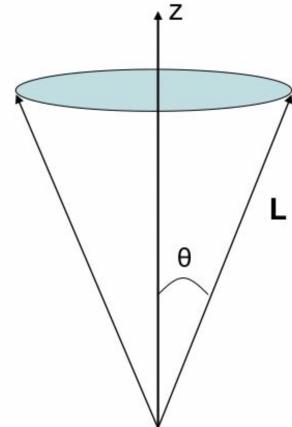


Figura 11: Il set dei possibili valori di \hat{L}_x e \hat{L}_y descrive un cono attorno ad \hat{L}_z

Giunti a questo punto si pone il problema di stabilire quali siano i valori definiti del quadrato del momento angolare e della sua componente lungo z e quali siano le espressioni della funzione

d'onda dei corrispondenti stati quantomeccanici. Per rispondere a queste domande occorre risolvere le equazioni agli autovalori degli operatori. In particolare, gli **autovalori forniranno i possibili valori del quadrato del momento angolare e della sua terza componente**, mentre le corrispondenti **autofunzioni** forniranno le espressioni delle **funzioni d'onda** degli stati quantomeccanici:

$$\hat{L}^2\psi = \lambda\psi$$

$$\langle \hat{L}^2 \rangle = \iiint_V \psi^* \hat{L}^2 \psi dV = \lambda \iiint_V \psi \psi^* dV = \lambda$$

$$\hat{L}^2\psi = \lambda'\psi \quad \hat{L}_z\psi = \lambda''\psi$$

Sviluppando il conto (vedi un testo di QM) si ha

$$\hat{L}^2\psi_{l,m} = l(l+1)\hbar^2\psi_{l,m} \quad l = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{L}_z\psi_{l,m} = m\hbar\psi_{l,m} \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

Siamo dunque ad un operatore **quantizzato** ovvero che può assumere valori **discreti**: i numeri interi l ed m descrivono compiutamente lo stato quantomeccanico e vengono detti numeri quantici del momento angolare.

In particolare le coppie di valori l ed m individuano specifiche funzioni d'onda $\psi_{l,m}(\theta, \phi)$ dette **armoniche sferiche**. This peculiar set of functions comes out in the classical theory as well when considering the modes of oscillation of a 2-dimensional membrane.

I possibili valori del quadrato del momento angolare sono dati dalla successione discreta $l(l+1)\hbar^2$ dove $l = 0, 1, 2, \dots$ mentre i possibili valori del momento angolare lungo z sono dati dalla successione discreta $m\hbar$ dove $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ ovvero da una sequenza di $2l+1$ valori interi dipendente da l .

0.15 Momento angolare intrinseco o spin

Lo spin delle particelle microscopiche è un esempio di variabile dinamica che, pur suggerita da inesatte analogie con la fisica classica, risulta essere di fatto una grandezza fisica di natura esclusivamente quantomeccanica.

Nella meccanica classica i corpi materiali puntiformi possiedono al più solo momento angolare orbitale mentre quelli estesi possono essere portatori anche di un momento angolare intrinseco (spin). Scegliendo il polo di riduzione coincidente con il centro di massa del corpo materiale, il momento angolare orbitale si annulla e l'unico momento angolare residuo del corpo esteso è quello intrinseco che si manifesta come rotazione del corpo stesso attorno ad un asse baricentrico.

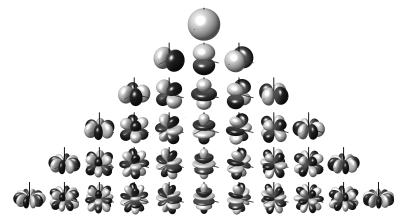


Figura 12: Rappresentazione grafica delle prime armoniche sferiche.

Date queste premesse, ci si può domandare se anche le particelle microscopiche possiedono un momento angolare intrinseco (spin) in aggiunta al momento angolare orbitale. I fatti sperimentali mostrano che la risposta è affermativa e che il momento angolare intrinseco o spin deve essere introdotto anche nel caso delle particelle microscopiche. Vi sono però delle sostanziali differenze

- **meccanica classica:** un momento angolare intrinseco o residuo può esistere solo per i *corpi estesi* (non puntiformi) e questo si interpreta come la somma dei momenti angolari orbitali di tutte le parti che lo compongono;
- **meccanica quantistica:** un momento angolare intrinseco o di spin può esistere anche per le particelle puntiformi e come tale non è riducibile in nessun modo a somme di momenti angolari orbitali delle parti del sistema;
- **meccanica classica:** il modulo del momento angolare intrinseco può assumere con *continuità qualunque valore*, ha un carattere estrinseco e descrive essenzialmente lo stato cinematico di rotazione del sistema rispetto ad un prefissato riferimento;
- **meccanica quantistica:** il modulo del momento angolare intrinseco può assumere un solo valore *fisso ed immutabile*. A seguito di tale invarianza perde il suo carattere estrinseco di natura cinematica ed assume - al pari della massa e delle cariche interne del corpuscolo - lo status di grandezza fisica intrinseca preposta alla descrizione di una nuova proprietà statica della particella.

Per questi ed altri motivi possiamo affermare che *lo spin è una variabile dinamica essenzialmente quantistica* senza una diretta corrispondenza classica.

Pauli pensò che fosse necessario introdurre una **terna di operatori di spin**

$$S_x \quad S_y \quad S_z$$

soddisfacenti le regole di commutazione ‘tipo momento angolare’

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (52)$$

ed operano sullo **spazio degli stati di spin**, uno ‘spazio interno’ diverso da quello su cui operano gli operatori del momento angolare orbitale (lo spin è dunque un nuovo grado di libertà del sistema microscopico).

In analogia con il caso del momento della quantità di moto, le regole di commutazione (52) implicano che **uno stato quantomeccanico ammette valori definiti del modulo quadrato dello spin e della sua terza componente**.

In particolare, risolta l'equazione agli autovalori degli operatori quadrato del momento angolare di spin e della sua terza componente si puo ottenere l'insieme degli autovalori e delle autofunzioni (si veda un testo di QM):

$$\begin{aligned}\hat{S}^2 \eta_{s,s_z} &= s(s+1)\hbar^2 \eta_{s,s_z} & s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ \hat{S}_z \eta_{s,s_z} &= s_z \hbar \eta_{s,s_z} & s_z = -s, -s+1, \dots, s-1, s\end{aligned}\quad (53)$$

dove s_z compie salti unitari tra un valore di s e il seguente. I numeri interi e/o seminteri s e s_z descrivono compiutamente lo stato quantomeccanico di spin e vengono detti **numeri quantici dello spin**. Essi permettono di calcolare i possibili valori dello spin (autovalori) ed individuano i corrispondenti *vettori di stato* η_{s,s_z}

Ad esempio:

- Se $s = 0, s_z = 0$ si ha $s(s+1)\hbar^2 = 0$, $s_z\hbar = 0$ con vettore di stato $\eta_{0,0}$ (in tal caso si dice che la particella non ha spin);
- Se $s = \frac{1}{2}, s_z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ si ha $s(s+1)\hbar = \frac{3}{4}\hbar^2$, $s_z\hbar = -\frac{1}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar$ con vettori di stato $\eta_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$;
- Se $s = 1, s_z = -1, 0, 1$ si ha $s(s+1)\hbar = 6\hbar^2$, $s_z\hbar = -\hbar, 0, +\hbar$ con vettori di stato $\eta_{1,-1}, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}$.

Si verifica così che, fissato il numero quantico di spin s , lo spazio interno degli stati di spin possiede $2s+1$ vettori di stato *vettori di stato* η_s, η_{s_z} linearmente indipendenti ed eventualmente normalizzati per cui deduciamo che **lo spazio degli stati di spin corrispondente al numero quantico è uno 'spazio interno' complesso di $2s+1$ dimensioni**.

Da quanto detto segue che lo stato quantomeccanico di una particella microscopica di spin s dovrà essere rappresentato nello *spazio prodotto* dello spazio degli stati quantomeccanici 'ordinari' già visto, con lo spazio degli stati di spin, ovvero dalla funzione d'onda 'estesa'

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \eta_{s,s_z}$$

dove η è il vettore di spin.

Da quanto detto segue che lo stato quantomeccanico di una particella microscopica di spin s dovrà essere rappresentato nello *spazio prodotto* dello spazio degli stati quantomeccanici 'ordinari' già visto, con lo spazio degli stati di spin, ovvero dalla funzione d'onda 'estesa' o vettore di stato

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \eta_{s,s_z}$$

L'analogo classico più vicino all'onda piana, con $\eta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ ampiezza spinoriale,

$$\eta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \psi_0 e^{i/\hbar(p \cdot r - Et)}$$

è un'onda piana di campo elettrico

$$E_0 \sin(k \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Premesso che nel caso di spin $s = 0$ la funzione d'onda 'estesa' si riduce alla ordinaria funzione d'onda, il caso immediatamente seguente è quello dello spin $s = 1/2$ cui corrispondono due 'versori' indipendenti $\eta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ e $\eta_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ e dunque uno spazio degli stati di spin a due dimensioni. I costituenti dell'atomo, ovvero gli elettroni i neutroni ed i protoni, hanno spin s sono pertanto descritti da vettori di stato del tipo seguente

$$\psi(\mathbf{r}, t)\eta_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad \psi(\mathbf{r}, t)\eta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

Usando una terminologia diffusa, il primo potrebbe descrivere un protone nello stato Ψ con spin 'giu' ed il secondo un protone nello stato Ψ con spin 'su'.

E' importante sottolineare che l'introduzione di uno 'spazio interno complesso' per la descrizione degli stati di spin delle particelle microscopiche costituisce un precedente teorico di grande rilevanza. Infatti essa suggerisce che eventuali *gradi di libertà interni* delle particelle microscopiche richiesti dai dati sperimentali possano essere descritti in ambito quantomeccanico semplicemente introducendo opportuni *spazi vettoriali complessi* dotati della giusta dimensionalità.

La fisica delle particelle sfrutterà a fondo questa possibilità, ma già la fisica nucleare se ne servì sin dai suoi esordi. Infatti, pochi anni dopo l'introduzione dello spin da parte di W. Pauli nel 1924 (va detto con successivi contributi da parte di Kronig, Uhlenbeck e Goudsmith), Heisenberg (1932) introdusse uno 'spazio complesso interno' dove protone e neutrone erano pensati come stati differenti di una unica particella, il nucleone. Una idea rivoluzionaria che poggiava sul fatto sperimentale che le loro masse erano molto prossime e che per quanto riguarda le interazioni forti neutrone e protone erano sostanzialmente intercambiabili. Nel 1937, Wigner fornirà la formulazione generale di tale idea introducendo lo *spazio di isospin*, progenitore di tutti gli spazi complessi interni di cui si servirà la fisica delle particelle.

Esempio - Spazio di spinori 2 dimensionale. Fino ad ora gli operatori dello spin sono stati indicati in modo simbolico, essenzialmente definiti dalle leggi di commutazione (52) e dalle equazioni agli autovalori (53). Nel caso dello spin $s = 1/2$ vogliamo dare a questi operatori un'espressione matriciale. Consideriamo uno spazio di spinori identificato da

$$s = \frac{1}{2} \quad s_z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

per cui si hanno gli spinori

$$\xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad \xi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

Per quanto riguarda gli operatori di spin si ha

$$\hat{S}^2 \xi_{\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \hbar^2 \xi_{\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}$$

e

$$\hat{S}_z \xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \hbar \xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad \hat{S}_z \xi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \hbar \xi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

Lo spazio è chiaramente bidimensionale dove le direzioni sono identificate dai 2 spinori: Nel momento in cui si utilizza uno spazio astratto per rappresentare lo spin è necessario che valga la condizione della sovrapposizione di stati che giustifica la spazializzazione dello spin. A livello classico tale richiesta in uno spazio ordinario sarebbe quella che tutte le posizioni intermedie fossero accessibili.

In ogni caso siamo interessati solamente agli stati normalizzati, e dunque non è fondamentale operare in tutto lo spazio, bensì possiamo restringerci alla sfera unitaria.

Per dare una forma più semplice e concreta agli spinori, eseguiamo la seguente identificazione

$$\xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli operatori \hat{S} assumeranno forma matriciale in tale rappresentazione

$$S_{x,y,z} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Dovendo rispettare la condizione che S sia *autoaggiunta* la costruiamo come

$$S_{x,y,z} = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix}$$

Volendo però stare in totale generalità scriveremo

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che qualunque matrice è combinazione lineare di queste 4 matrici

$$M = a I_{2 \times 2} + b \sigma_1 + c \sigma_2 + d \sigma_3$$

Tali matrici di base sono le cosiddette **matrici di Pauli**. Osserviamo che la matrice identità non può far parte in questa base, altrimenti si andrebbe a perdere la condizione di non commutazione propria degli operatori di spin (essa commuta con tutte le matrici). La

rappresentazione matriciale di \hat{S}_z sarà la seguente

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\hbar I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \hat{S}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar \end{pmatrix}$$

Quindi \hat{S}_z deve essere **diagonale con i valori di spin sulla diagonale**.

Quindi quella appena scritta è una base ortonormale (essendo già i vettori normalizzati) di \hat{S}_z

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$$

Svolgendo il conto vediamo che anche la relazione di commutazione

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y$$

è rispettata. In conclusione

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$$

Un vettore generico di spin generico si scrive come

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Scelta una base ortonormale verifichiamo che

$$\hat{S}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} I = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

risultato che ci aspettavamo. Un aspetto piuttosto rilevante è che abbiamo visto che \hat{S} ed \hat{S}_z sono gli unici operatori a poter essere diagonalizzati contemporaneamente \implies torna con l'interpretazione fisica sulla misurazione quantistica.

0.16 La somma dei momenti angolari

Sia nei sistemi classici che quantomeccanici accade di dovere calcolare il momento angolare di un sistema formato da due sottosistemi aventi ciascuno un dato momento angolare, come si deve fare?

- *Fisica classica:* ai momenti angolari sono associati vettori, pertanto al momento angolare del sistema complessivo si associa la somma vettoriale dei momenti angolari dei due sottosistemi. Dati allora i momenti angolari J_1 e J_2 dei due sottosistemi, il momento

angolare del sistema complessivo sarà dato dalla somma vettoriale $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ calcolata con la regola del parallelogramma e dipendente da moduli direzioni e versi relativi dei vettori sommati. In particolare, il modulo di tale momento angolare assumera la seguente serie continua di valori

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \quad ||\mathbf{J}_1| - |\mathbf{J}_2|| \leq |\mathbf{J}| \leq |\mathbf{J}_1| + |\mathbf{J}_2||$$

- *Meccanica quantistica:* ai momenti angolari sono associati operatori, al momento angolare del sistema complessivo si associa allora la somma operatoriale degli operatori momento angolare dei due sottosistemi. Dati allora gli operatori momento angolare \hat{j}_1 e \hat{j}_2 dei due sottosistemi, l'operatore momento angolare del sistema complessivo sarà dato dalla somma operatoriale $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$. In accordo con le regole generali della meccanica quantistica, si pone allora il problema di determinare autovalori e autostati di tale operatore somma dei momenti angolari.

In relazione a questo problema, è semplice mostrare con prova diretta che se gli operatori \hat{j}_1 e \hat{j}_2 soddisfano le relazioni di commutazione (51) o (52) allora anche l'operatore $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$ soddisferà relazioni di commutazione dello stesso tipo. Ciò significa che gli operatori $J^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ e $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$ avranno in generale i seguenti autovalori

$$\begin{aligned} j(j+1)\hbar^2 \quad & j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \\ m\hbar \quad & m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

Sulla base di considerazioni generali non è possibile dire di più, per cui risulta necessario citare i risultati del **teorema della somma dei momenti angolari** in meccanica quantistica.

Dati allora due stati quantomeccanici con momento angolare definito ϕ_{j_1, m_1} e ϕ_{j_2, m_2} autostati degli operatori \hat{j}_1, \hat{j}_{1z} e \hat{j}_2, \hat{j}_{2z} tali che

$$\begin{aligned} \hat{j}_1^2 \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) &= j_1(j_1+1)\hbar \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) \quad j_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \\ \hat{j}_{1z} \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) &= m\hbar \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) \quad m_1 = -j_1, -j_1+1, \dots, j_1-1, j_1 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_2^2 \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) &= j_2(j_2+1)\hbar \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) \quad j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \\ \hat{j}_{2z} \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) &= m\hbar \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) \quad m_2 = -j_2, -j_2+1, \dots, j_2-1, j_2 \end{aligned} \quad (55)$$

Lo stato quantomeccanico complessivo $\psi_{j, m}$ è autostato degli operatori $J^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ e $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$ dove i loro numeri quantici j ed m soddisfano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \hat{j}^2 \psi_{j, m}(\mathbf{r}) &= j(j+1)\hbar \psi_{j, m}(\mathbf{r}) \quad |j_1 - j_2| < j < |j_1 + j_2| \\ \hat{J}_z \psi_{j, m}(\mathbf{r}) &= m\hbar \psi_{j, m}(\mathbf{r}) \quad m = m_1 + m_2 \end{aligned} \quad (56)$$

Si noti che, contrariamente al caso classico dove la somma di due momenti angolari fornisce un ben preciso momento angolare totale, nel caso quantistico la ‘somma’ di due stati di momento angolare fornisce una serie di possibili *stati di momento angolare* totale in accordo con le (56). Con tutta evidenza, si tratta di una conseguenza delle indefinizioni delle componenti x e y dei momenti angolari sommati (ma non delle componenti z invece perfettamente definite) che rende però necessario precisare la relazione esistente tra gli ϕ_{j_1, m_1} e ϕ_{j_2, m_2} dei sottosistemi componenti e lo stato $\psi_{j, m}$ del sistema complessivo. Si può dimostrare che vale la seguente relazione

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{\substack{j=|j_1-j_2| \\ m=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \phi_{jm} \quad (57)$$

dove i coefficienti moltiplicativi sono detti **Coefficienti di Clebsch-Gordan**. E’ utile sottolineare ancora una volta che tale relazione mostra che mettendo assieme due sistemi in stati di momento angolare definito ϕ_{j_1, m_1} e ϕ_{j_2, m_2} si ottiene un sistema in uno stato di momento angolare indefinito, dato dalla sovrapposizione coerente di stati di diverso momento angolare $\psi_{j, m}$ pesati ciascuno dai coefficienti di Clebsch-Gordan.

Naturalmente si può porre anche il problema inverso. Ovvero, dato un sistema in uno stato di momento angolare definito $\psi_{j, m}$ e dati i numeri quantici j_1 e j_2 dei sottosistemi componenti, determinare i possibili stati di momento angolare ϕ_{j_1, m_1} e ϕ_{j_2, m_2}

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{m_1=-j_1} \sum_{\substack{m_2=-j_2 \\ m_1+m_2=m}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j, m} \phi_{j_1, m_1} \phi_{j_2, m_2} \quad (58)$$

Ci si può chiedere cosa succeda nel caso in cui gli stati vengano composti nell’ordine inverso ovvero $\phi_{j_2, m_2} \phi_{j_1, m_1}$ invece di $\phi_{j_1, m_1} \phi_{j_2, m_2}$. Lungi dall’essere una semplice curiosità, le proprietà della composizione rispetto allo scambio degli stati intervengono nell’operazione di scambio delle particelle, cruciale quando si vogliono determinare le loro proprietà collettive come vedremo già nel prosieguo di questo capitolo. Scriviamo allora le rispettive serie di Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} \phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} &= \sum_{\substack{j=|j_1-j_2| \\ m=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \psi_{jm} \\ \phi_{j_2 m_2} \phi_{j_1 m_1} &= \sum_{\substack{j=|j_1-j_2| \\ m=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{jm}^{j_2 m_2 j_1 m_1} \psi_{jm} \end{aligned}$$

Dalla analisi diretta delle tavole di Clebsch-Gordan oppure anche da considerazioni di ordine piu generale si ottiene la seguente formula

$$C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} = (-1)^{j-j_1-j_2} C_{jm}^{j_2 m_2 j_1 m_1}$$

Esempio

In figura 13 si possono osservare i coefficienti di Clebsch-Gordan per composizioni di stati con momento angolare $J_1 = 2$ e $J_2 = 1/2$.

				Notation:		Coefficients		
				J	J	...		
				m_1	m_2			
$2 \times 1/2$		$\begin{matrix} 5/2 \\ +5/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5/2 & 3/2 \\ +3/2 & +3/2 \end{matrix}$					
$+2 +1/2$	1	$\begin{matrix} +2 -1/2 \\ +1 +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/5 & 4/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5/2 & 3/2 \\ +1/2 & +1/2 \end{matrix}$				
		$\begin{matrix} +1 -1/2 \\ 0 +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{matrix}$				
			$\begin{matrix} 0 -1/2 \\ -1 +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5/2 & 3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{matrix}$			
				$\begin{matrix} -1 -1/2 \\ -2 +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & -4/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5/2 \\ -5/2 \end{matrix}$		
					$\begin{matrix} -2 -1/2 \end{matrix}$	1		

Figura 13: Tavola dei coefficienti di Clebsch-Gordan per composizioni di stati con $J_1 = 2$ e $J_2 = 1/2$. Un simbolo di radice quadrata è da intendersi applicato ad ogni coefficiente.

In relazione alla (57) dalla tavola otteniamo le seguenti composizioni

$$\psi_{2,2}\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{1}\psi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$$

$$\psi_{2,2}\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}\psi_{\frac{5}{2},\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{5}}\psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}$$

vediamo allora che componendo gli stati di momento angolare definito $(2,2)$ e $(1/2,-1/2)$ otteniamo uno stato di momento angolare complessivo indefinito, sovrapposizione degli stati $(5/2,3/2)$ e $(3/2,3/2)$ con certi pesi. Secondo le regole generali della meccanica quantistica ciò significa che, qualora facessimo una misura di momento angolare dell'intero sistema, lo stato cambierebbe repentinamente 'collassando' su uno dei due stati componenti e precisamente avremmo probabilità $1/5$ di farlo 'collassare' nello stato $(5/2,3/2)$ e probabilità $4/5$ di farlo 'collassare' nello stato $(3/2,3/2)$.

In relazione alle (58) dalla tavola otteniamo anche

$$\psi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\psi_{2,1}\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{5}}\psi_{2,0}\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

vediamo allora che, dati due sottosistemi con numeri quantici del momento angolare $j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2}$, lo stato di momento angolare complessivo definito $(5/2, 1/2)$ è una sovrapposizione degli stati $(2,1) \times (1/2, -1/2)$ e $(2,0) \times (1/2, 1/2)$ con certi pesi. Secondo le regole generali della meccanica quantistica ciò significa che, qualora facessimo una misura di momento angolare dei due sottosistemi avremmo probabilità $2/5$ di farli ‘collassare’ negli stati $(2,1)$ e $(1/2, -1/2)$ e probabilità $3/5$ di farli collassare negli stati $(2,0)$ e $(1/2, 1/2)$.

Un esempio di tavola di Coefficienti di Clebsch-Gordan si trova al seguente URL:

<https://pdg.lbl.gov/2013/reviews/rpp2013-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>

0.17 Stati quantomeccanici di due particelle identiche

Lo studio dei sistemi quantomeccanici formati da particelle identiche conduce a nuove sorprendenti proprietà che non trovano alcuna analogia nella fisica classica. Entreremo nel vivo di questo affascinante problema con un esempio.

Immaginiamo che, in ambito macroscopico e dunque soggetti alle leggi della fisica classica, in una certa porzione di spazio si muovano due piccole sferette, illuminate ad intervalli di tempo regolari da una luce stroboscopica (vedi Figura 14). Il lampo luminoso al tempo t' mostrerà le due sferette nelle posizioni \vec{r}'_1 ed \vec{r}'_2 , quello al tempo t'' in \vec{r}''_1 ed \vec{r}''_2 .

Con tutta evidenza, se le due sferette sono *diverse* non esiste alcun problema nell’associare ad ogni posizione la propria sferetta nei due istanti di tempo. Si dice allora che *in meccanica classica due particelle diverse sono sempre distinguibili*.

Cio vale anche nel caso in cui le due sferette siano *identiche*. Infatti, se da un lato è vero che l’identità genera una ambiguità poiché non sapremmo dire se la sferetta in $\vec{r}''_1(\vec{r}''_2)$ al tempo t'' fosse quella che al tempo t' si trovava in \vec{r}'_1 o \vec{r}'_2 ; dall’altro si tratta di un’ambiguità non essenziale che può essere superata qualora note al tempo t' non solo le posizioni delle sferette, ma anche le loro velocità v'_1 e v'_2 , dato che al tempo t'' ciascuna sferetta dovrà trovarsi non troppo lontano dalla direzione della propria velocità al tempo t' . Poiché in ambito macroscopico non ci sono limitazioni nel conoscere in ogni istante di tempo le posizioni e le velocità delle particelle in gioco, concludiamo – come anticipato – che **nella meccanica classica sia le particelle diverse che quelle identiche sono sempre distinguibili**.

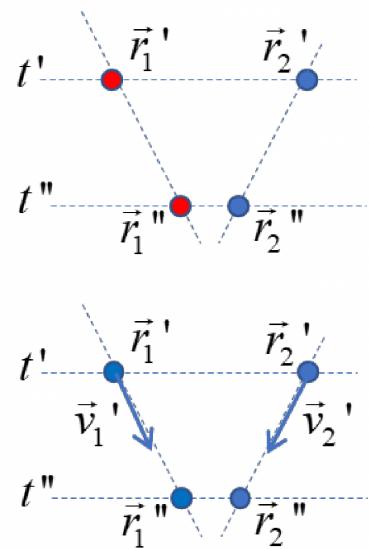


Figura 14: Set of two particles in two different classical states.

Cosa accade nell'ambito microscopico governato dalla meccanica quantistica? E' semplice rendersi conto che nel caso di *particelle diverse* una ipotetica misura di massa, carica o di una qualunque variabile interna capace di determinarne l'identità ci permetterà di assegnare ad ogni particella la propria posizione, in ogni istante di tempo senza ambiguità. Analogamente al caso macroscopico concludiamo allora che **nella meccanica quantistica due particelle diverse sono sempre distinguibili**.

Assai diverso è il caso in cui si abbia a che fare con *particelle identiche*. Infatti - a differenza di ciò che accade nella meccanica classica – uno stato quantomeccanico non può possedere in ogni istante di tempo sia posizioni che velocità definite (principio di indeterminazione).

Se al tempo t' sono definite le posizioni r'_1 e r'_2 delle particelle identiche, risulteranno allora indefinite le loro velocità v'_1 e v'_2 , pregiudicando la possibilità di attribuirgli univocamente una posizione al tempo t'' . Se, invece, al tempo t' sono definite le velocità v'_1 e v'_2 delle particelle identiche (ovvero sono descritte da onde piane progressive), risulteranno allora indefinite le loro posizioni r'_1 e r'_2 che in nessun istante di tempo potranno essere univocamente assegnate alle particelle (vedi Figura 15). Giungiamo allora a concludere che **nella meccanica quantistica due particelle identiche sono sempre indistinguibili**.

Quest'ultimo caso può guidarci alla *costruzione della funzione d'onda del sistema quantomeccanico di due particelle identiche*. Per cominciare immaginiamo che il volume spaziale (vedi figura) sia occupato dalle onde di De Broglie piane e progressive delle due particelle che ipotizziamo abbiano energia e quantità di moto (E_1, \mathbf{p}_1) e (E_1, \mathbf{p}_1) . Una misura di posizione eseguita sul sistema osserverà allora le due particelle in due posizioni che indichiamo con r_1 ed r_2 . Dato che le funzioni d'onda delle due particelle occupano l'intero volume, la misura di posizione potrà avere i seguenti esiti

esito 1: (E_1, \mathbf{p}_1) in \mathbf{r}_1 e (E_2, \mathbf{p}_2) in \mathbf{r}_1

esito 2: (E_2, \mathbf{p}_2) in \mathbf{r}_1 e (E_1, \mathbf{p}_1) in \mathbf{r}_1

Indicate allora con la seguente notazione le funzioni d'onda delle due particelle

$$\psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}, t) = A_{E_1, \mathbf{p}_1} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} - E_1 t)}$$

$$\psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}, t) = A_{E_2, \mathbf{p}_2} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} - E_2 t)}$$

L'esito 1 avrà densità di probabilità

$$\propto |\psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_1, t)|^2 |\psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_2, t)|^2$$

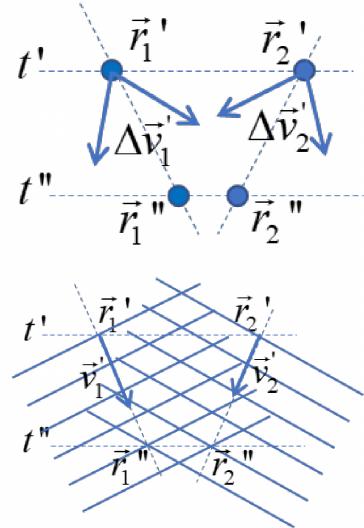


Figura 15: Set of two particles in two different quantum states.

e l'esito 2 densità di probabilità

$$\propto |\psi_{E_2, p_2}(\mathbf{r}_1, t)|^2 |\psi_{E_1, p_1}(\mathbf{r}_2, t)|^2$$

In accordo con i principi generali della meccanica quantistica ciò significa che la funzione d'onda del sistema delle due particelle deve essere data dalla seguente sovrapposizione coerente

$$\psi_{sist} = \alpha \psi_{E_1, p_1}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_2, p_2}(\mathbf{r}_2, t) + \beta \psi_{E_2, p_2}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_1, p_1}(\mathbf{r}_2, t) \quad (59)$$

governata da due coefficienti complessi α e β sui quali, per ora, non sappiamo dire di più, fatto che genera una ambiguità nota con il nome di **degenerazione di scambio**.

Si noti che ancora non abbiamo imposto che le particelle del sistema siano identiche. Vedremo che sarà proprio questo requisito che rimuoverà la degenerazione di scambio. Il modo per esprimere formalmente in meccanica quantistica l'identità delle particelle o **principio di indistinguibilità delle particelle** è quello di richiedere che *a seguito dello scambio delle particelle tutte le grandezze fisiche osservabili rimangano immutate*. Dato che **in meccanica quantistica ciò che è osservabile non è la funzione d'onda ma il suo modulo quadrato**, dobbiamo allora richiedere che

$$|\psi_{sist}^{scambio}|^2 = |\psi_{sist}|^2 \quad (60)$$

un fatto che non esclude che la funzione d'onda, invece, possa modificarsi a seguito dello scambio.

A questo punto non dobbiamo far altro che costruire $\psi_{sist}^{scambio}$ a partire da (61) ed imporre la validità di (60)¹⁴:

¹⁴ Introduciamo la notazione

$$|\alpha \psi_2(\mathbf{r}_1) \psi_1(\mathbf{r}_2) + \beta \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2)|^2 = |\alpha \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2) + \beta \psi_2(\mathbf{r}_1) \psi_1(\mathbf{r}_2)|^2$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv \psi_{E_1, p_1} \\ \psi_2 &\equiv \psi_{E_2, p_2} \end{aligned}$$

da cui si ottengono le condizioni seguenti

$$\begin{aligned} |\beta|^2 &= |\alpha|^2 & \alpha \bar{\beta} &= \beta \bar{\alpha} \\ \alpha &= ae^{ia'} & \beta &= be^{ib'} \\ b^2 &= a^2 & abe^{i(a'-b')} &= abe^{-i(a'-b')} \\ b &= \pm a & a' - b' &= 0 \\ \alpha &= ae^{ia'} & \beta &= \pm ae^{ia'} \end{aligned}$$

Dato che il fattore e^{ia} può essere raccolto a fattor comune e riassorbito come coefficiente di normalizzazione, otteniamo la seguente espressione della **funzione d'onda del sistema quantomeccanico di due particelle identiche**

$$\psi_{sist} = \psi_{E_1, p_1}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_2, p_2}(\mathbf{r}_2, t) \pm \psi_{E_1, p_1}(\mathbf{r}_2, t) \psi_{E_2, p_2}(\mathbf{r}_1, t). \quad (61)$$

Giungiamo così alla conclusione che **un sistema quantomeccanico di due particelle identiche e descritto da una funzione d'onda simmetrica o antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle stesse.**

Una prima sorprendente conclusione di ordine generale riguarda il fatto che ci sono due diversi modi di costruire la funzione d'onda di un sistema di due o più particelle microscopiche identiche, modi che permettono di separare le particelle microscopiche in due grandi famiglie. La famiglia delle particelle che richiedono uno stato quantomeccanico simmetrico rispetto allo scambio (opzione con segno positivo) e la famiglia delle particelle che richiedono uno stato quantomeccanico antisimmetrico rispetto allo scambio (opzione con segno negativo), in sostanza una **delle particelle basata sulle loro proprietà collettive.** Abbiamo:

- **particelle di Bose-Einstein o bosoni**, che richiedono simmetria. Sono bosoni i mediatori delle forze elementari, detti *di gauge*;
- **particelle di Fermi-Dirac o fermioni**, che richiedono antisimmetria e per loro vale il **principio di esclusione di Pauli**: due fermioni non possono disporsi nello stesso stato quantomeccanico poiché ciò annullerebbe la funzione d'onda del sistema (61). Le particelle atomiche (come ogni quark e leptone) sono fermioni.

Vi è inoltre uno strettissimo legame tra spin e proprietà collettive di simmetria, dato dal fondamentale **teorema spin-statistica**: particelle identiche di spin *intero* sono *bosoni*, mentre di spin *semi-intero* sono *fermioni*. Nel vuoto, a differenza che nei mezzi materiali e nel caso di eccitazioni collettive, le particelle microscopiche si comportano sempre in accordo a tale teorema e non vi sono situazioni di simmetria mista.

I primi modelli nucleari

Esamineremo ora alcuni modelli che sono stati costruiti per finalizzare la descrizione del nucleo.

Una classificazione di alcuni modelli nucleari in base al tipo di interazione tra nucleoni è la seguente:

Models with strong interaction
between nucleons:

- **Liquid drop model** (Modello a goccia);
- **Shell model** (Modello a shell);
- α -particle model.

Nucleons interact with the nearest neighbors and practically don't move: mean free path

$$\lambda \ll R$$

Models of non-interacting
nucleons :

- **Fermi gas model** (Modello a gas di fermioni);
- Optical model (Modello ottico).

Nucleons move freely inside the nucleus: mean free path

$$\lambda \sim R$$

(R being the nuclear radius)

0.18 Il modello nucleare a goccia

Il grafico (Fig. 8) della energia di legame media per nucleone commentato in precedenza contiene un certo numero di importanti indicazioni sulle proprietà della forza nucleare che sono alla base di un primo modello del nucleo - suggerito da Bohr nel 1935 - fondato essenzialmente sul **raggio finito** della interazione nucleare. Similmente alle forze intramolecolari a corto raggio nei liquidi, tale fatto determina una certa analogia tra il comportamento dei nucleoni nel nucleo e le diverse porzioni di un fluido meccanico incompressibile, ragione che giustifica il nome spesso usato di **modello a goccia**.

Il suddetto modello ha base **fenomenologica**; la sola ipotesi dell'andamento a corto raggio della forza non è sufficiente a giustificare l'andamento reale

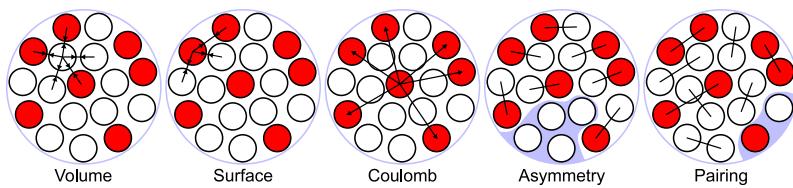


Figura 16: Rappresentazione grafica del significato fisico dei termini presenti nel nuclear liquid drop model.

Come accennato, l'energia di legame tende ad assumere rapidamente il valore medio di circa 8MeV per nucleone (saturazione) il che indica una energia di legame del nucleo proporzionale al numero di nucleoni

$$\frac{B}{A} \simeq 8\text{MeV} \quad B \simeq 8\text{MeV} \times A \quad (62)$$

Ora, se la forza nucleare si comportasse come una forza a lungo raggio (come le forze gravitazionali o elettromagnetiche) ogni nucleone interagirebbe con tutti i rimanenti altri per cui dovremmo attenderci una energia di legame del nucleo tendenzialmente *proporzionale al numero di coppie* di nucleoni e dunque quadratica in A

$$B \propto \frac{A(A - 1)}{2} \propto A^2$$

Poiché i dati sulla energia di legame escludono questo tipo di comportamento, dobbiamo concludere che ogni nucleone del nucleo interagisce solo con un numero di fisso di nucleoni vicini per cui concludiamo che **l'interazione forte ha un raggio d'azione finito** dell'ordine di grandezza delle dimensioni del nucleone stesso.

Tale conclusione è in perfetto accordo con i dati sulla sezione d'urto di neutroni su nuclei analizzati in precedenza che indicavano un **volumetrico proporzionale al numero di nucleoni**, ovvero una densità volumetrica di nucleoni uniforme sul volume nucleare, fatto spiegabile solo postulando la esistenza di una forza d'interazione tra nucleoni a corto raggio.

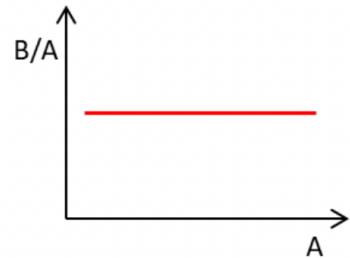
Il primo tentativo di superare questo limite consiste nell'introdurre un termine, sulla base della (62)

$$B = a_v A \quad (63)$$

dove la costante a_v viene detta **termine di volume**.

Con un tale andamento B/A , però, si finisce per ottenere una sovrastima del volume. La deviazione più rilevante si manifesta per valori piccoli di A dove l'energia media di legame è molto inferiore a quanto previsto dalla formula.

Si può allora osservare che, assumendo la forza nucleare a corto raggio, si deve tenere conto che un nucleone prossimo alla superficie



del nucleo interagira con un numero di nucleoni inferiore a quello con cui interagirebbe qualora si trovasse all'interno del nucleo stesso. Ciò comporta che i nucleoni superficiali contribuiranno in misura minore alla energia di legame nucleare di quelli interni al volume. Assumendo il nucleo di **forma sferica**, il numero di nucleoni prossimi alla superficie sarà proporzionale a R^2 . Dalla trattazione precedente (37) sappiamo che (omettendo il termine di 'skin' nucleare)

$$R_{\text{nuc}} = r_0 A^{1/3}$$

$$4\pi R^2 = 4\pi(r_0 A^{1/3})^2 \implies R_{\text{nuc}} \propto A^{2/3}$$

per cui vi deve essere un termine che deve provocare un difetto di energia di legame proporzionale ad $A^{2/3}$:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3}$$

dove la costante a_s viene detta **termine di superficie**. L'andamento di B/A con questa ulteriore correzione può apprezzarsi a lato.

Un ulteriore miglioramento può essere ottenuto tenendo presente che i protoni del nucleo si *respingono elettrostaticamente* diminuendo quindi il lavoro necessario per separarli dal nucleo stesso. In effetti se, per assurdo, si avesse un nucleo composto solo di protoni (senza neutroni) il lavoro da spendere per mantenerne la configurazione sarebbe sicuramente maggiore.

Ipotizzando una *distribuzione di protoni uniforme* nel volume nucleare (ricordiamo essere sferico dall'ipotesi precedente), otteniamo la seguente espressione del lavoro fatto dalle forze coulombiane repulsive per separare la carica nucleare

$$\delta L = \int_R^\infty \left(\frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right) (dr \hat{r}) = -\frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_R^\infty = -\frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \delta q = \rho 4\pi R^2 dR$$

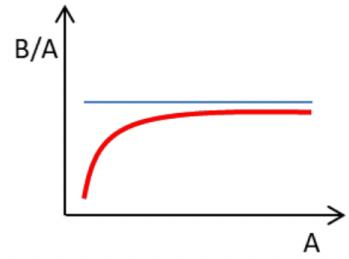
$$\delta L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\rho \frac{4}{3}\pi R^3 \right) (\rho 4\pi R^2 dR) = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} R^4 dR$$

$$L = \int \delta l = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R_0^5 \quad Q = \rho \frac{4}{3}\pi R_0^3 = Ze$$

$$L = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R_0} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \implies L \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Ne consegue che la energia di legame nucleare dovrà essere corretta sottraendo un termine proporzionale a $Z^2/A^{1/3}$ per cui l'espressione dell'energia di legame acquisirà la forma seguente

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (64)$$



dove la nuova costante a_c viene detta **termine coulombiano**. Il termine coulombiano deve chiaramente annullarsi per $A = 1$ (non c'è interazione elettrostatica) per cui l'unica forma possibile è

$$L \propto \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (65)$$

L'andamento B/A risulta ulteriormente migliorato (si tenga presente che nei nuclei stabili si ha approssimativamente $Z = A/2$ per cui il termine coulombiano sottrae un contributo crescente con $A^{5/3}$).

Se il modellino fenomenologico costruito finora fosse completo dovremmo concludere che i nuclei più stabili ($B = B_{max}$) sono quelli con $Z = 0$ ovvero i nuclei di soli neutroni. Tale fatto è paleamente contraddetto dai dati sperimentali i quali mostrano che i nuclei stabili hanno un numero di protoni di poco inferiore a quello dei neutroni (la differenza tra neutroni e protoni tende a crescere con il numero atomico). Il nostro modello – basato sulla natura a corto raggio della interazione nucleare – non offre alcun appiglio per dare un fondamento fisico a questo stato di cose che potrà essere spiegato solo nel contesto della meccanica quantistica attraverso il *principio di esclusione di Pauli*. In questa situazione l'unica possibilità è quella di introdurre un termine 'ad hoc' capace di descrivere i dati sperimentali.

Bisogna quindi fare in modo che il modello ci dica che i nuclei più stabili sono quelli con lo stesso numero di protoni e neutroni. Raggiungiamo l'obiettivo introducendo un nuovo termine del tipo:

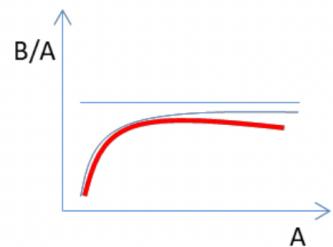
$$Z \simeq \frac{A}{2} \quad A - 2Z \simeq 0$$

Ricordando però che con il crescere di A , Z tende ad essere via via più piccolo di $A/2$ (il quoziente protoni/neutroni diminuisce con A), tale termine correttivo dovrà seguire una legge inversa ad A modulata da un qualche esponente. I dati indicano che la prima potenza è sufficiente per cui abbiamo la seguente espressione della energia di legame nucleare

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_a (A - 2Z)^2}{A}$$

dove la nuova costante a_a viene detta **termine di asimmetria**. Notiamo che la presenza di A a denominatore è giustificata osservando l'andamento dei dati sperimentali nel grafico visto in precedenza: tanto più A è grande tanto più B/A devia dalla tangente alla curva (quindi verso il basso).

Per completare il modello è necessario tenere conto di un ulteriore proprietà dei nuclei. I dati sperimentali mostrano che tra i 254 nuclei stabili noti ben 148 sono del tipo **pari-pari** (un numero pari sia di



protoni che di neutroni), 101 sono del tipo **pari-dispari** (un numero pari di protoni ma dispari di neutroni o viceversa) e solo 5 sono del tipo dispari-dispari (riportati in tabella 1).

² H
⁶ Li
¹⁰ B
¹⁴ N
^{180_m} Ta

Similmente, tra i 35 nuclei a lunga vita media si hanno 22 pari-pari, 9 pari-dispari e 4 dispari-dispari.

Tali dati sembrano suggerire che per qualche motivo la forza forte tra nucleoni da luogo a nuclei di maggiore stabilità quando vengono legati **numeri pari** di neutroni e protoni, un fatto che trova una sua diretta evidenza nell'andamento della energia di legame per nucleone della serie isotopica dello xenon in Figura 17. Tali dati sembrano suggerire che per qualche motivo la forza forte tra nucleoni da luogo a nuclei di maggiore stabilità quando vengono legati **numeri pari** di neutroni e protoni, un fatto che trova una sua diretta evidenza nell'andamento della energia di legame per nucleone della serie isotopica dello xenon.

Tenendo presente che il nucleo di Xenon ha $Z = 54$ protoni, si può infatti constatare che gli isotopi con un numero pari di neutroni hanno una maggiore energia di legame per nucleone. Per rendere conto di questo fatto si introduce un nuovo coefficiente detto di **pairing**

$$a_p \frac{\delta}{A^{3/4}}$$

con

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{pari-pari} \\ 0 & \text{pari-dispari} \\ -1 & \text{dispari-dispari} \end{cases}$$

Giungiamo così alla seguente espressione complessiva della energia di legame nucleare detta anche **formula semiempirica della energia di legame nucleare** o **formula di Weizsäcker** della energia di legame nucleare

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta}{A^{3/4}} \quad (66)$$

Essa dipende da 5 parametri (vedi Fig. 16) il cui valore numerico viene determinato adattando la formula ai dati sperimentali di B/A .

A titolo di esempio, una possibile combinazione di valori è la seguente (i valori sono in MeV):

$$a_v = 15.5 \quad a_s = 16.8 \quad a_c = 0.72 \quad a_a = 23.0 \quad a_p = 34.0 \quad (67)$$

Tabella 1: Tabella dei nuclei stabili con both A, Z dispari. L' m ad apice indica la metastabilità del nuclide.

Si veda https://en.wikipedia.org/wiki/Metastability#Nuclear_physics a tale proposito.

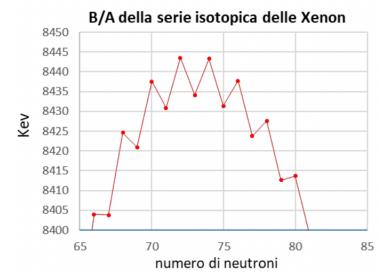


Figura 17: Andamento dell'energia di legame per la serie isotopica dello Xenon.

La formula della energia di legame nucleare è utile - come strumento di calcolo - perchè suggerisce una prima interpretazione del nucleo e delle forze che lo tengono insieme.

Da essa deduciamo che le forze tra nucleoni devono essere **molto intense** ma a **short range** (proprietà di saturazione), producono una distribuzione spaziale tendenzialmente uniforme di nucleoni e conducono ad una espressione della energia di legame con termini di volume e superficie in analogia con quanto accade per i liquidi, ragione che giustifica il nome spesso usato di **modello nucleare a goccia**.

Il *modello a gas di fermioni* (giustificabile con considerazioni quanto-meccaniche) riesce a rendere conto del termine a_a mentre fallisce per quello di pairing. Vedremo, infine, che il *modello a shell* sarà quello più preciso.

0.19 Il nucleo come gas di fermioni

Il modello a goccia del nucleo - essenzialmente fondato sulla natura a corto raggio delle interazioni forti - riesce a descrivere alcune proprietà del nucleo tra le quali l'esistenza di una energia di legame con termini di volume, superficie e coulombiano. Non riesce invece a rendere conto in nessun modo dei termini di asimmetria e accoppiamento, chiaramente richiesti dai dati sperimentali, ma che devono essere introdotti 'a mano' nella formula di Weizsäcker. Tale fatto dimostra che oltre alla natura a corto raggio delle interazioni forti, nel nucleo giocano un ruolo di rilievo altre proprietà trascurate dal modello a goccia, presumibilmente legate alla natura quantomeccanica dei suoi costituenti. Il modello nucleare a gas di fermioni introduce nel gioco alcuni essenziali proprietà quantomeccaniche in una forma il più possibile semplificata.

0.19.1 Aspetti generali

Le considerazioni fisiche che conducono alla formulazione del modello a gas di fermioni possono essere riassunte nei seguenti punti:

- l'interazione forte che lega protoni e neutroni nel nucleo e a corto raggio e dell'ordine del raggio dei nucleoni stessi;
- ogni nucleone sarà quindi soggetto alla forza forte dei nucleoni immediatamente a contatto che tenderanno così a disporsi con densità volumetrica approssimativamente costante;
- ciò comporta che la risultante delle forze agenti sul singolo nucleone sia mediamente nulla quando questo si trova all'interno al

nucleo e mediamente non nulla e diretta verso il centro quando questo si trova sulla superficie del nucleo;

- riassumersi in una forza dipendente dalla posizione, nulla all'interno di un volume sferico di raggio R (raggio nucleare) e non nulla e centrale sulla sua superficie;
- essendo $F = -\text{grad } U$, tale forza può essere descritta da un potenziale nullo all'interno del volume sferico di raggio R , che sale con una certa ripidità in corrispondenza della superficie sferica, fino a raggiungere un valore costante al di fuori di essa.

In sintesi, una **buca sferica di potenziale di raggio R** all'interno della quale vanno a collocarsi sia i neutroni che i protoni.

Dato questo assetto delle forze, la meccanica quantistica fa il resto.
Infatti sappiamo che

- una particella microscopica vincolata a rimanere in una regione di spazio limitata (nel nostro caso all'interno della buca di potenziale) deve annullare la propria funzione d'onda più o meno sulla superficie di tale regione ed all'esterno di essa;
- ciò comporta la quantizzazione delle lunghezze d'onda di De Broglie dei neutroni e dei protoni e, con esse, della loro energia (fenomeno analogo alla quantizzazione delle lunghezze d'onda in una corda vibrante) cosicché gli stati quantomeccanici vanno a costituire una serie discreta e numerabile;
- dato che protoni e neutroni hanno spin $s = \frac{1}{2}$, essi vanno a costituire due insiemi di fermioni identici soggetti alle restrizioni del principio di esclusione;
- organizzando la serie discreta degli stati quantomeccanici possibili secondo i valori crescenti delle loro energie, il principio di esclusione permette di collocare in ciascuno di essi un solo protone ed un solo neutrone;
- nello stato fondamentale di minima energia del nucleo, neutroni e protoni nucleari riempiranno allora dal basso tutti gli stati quantomeccanici fino ad un livello energetico massimo detto **livello di Fermi** (nello stato fondamentale di minima energia dunque, i neutroni ed i protoni non sono immobili ma possiedono una certa energia cinetica crescente).

Le precedenti considerazioni ci conducono a concludere che la *natura della forza media nucleare*, combinata con la *natura quantomeccanica dei suoi costituenti*, **assimila il nucleo nel suo stato fondamentale ad un doppio gas di neutroni e protoni in condizioni di massima**

degenerazione. Parliamo di ‘gas’ poiché neutroni e protoni – come si è detto – si muovono essenzialmente liberi all’interno del volume nucleare subendo le sole forze di contenimento delle pareti nucleari. Il termine ‘doppio’ ricorda che le restrizioni del principio di esclusione si applicano separatamente ai protoni ed ai neutroni. Infine, il termine ‘degenerazione’ si riferisce al fatto che gli stati quantomeccanici quantizzati si riempiono tutti a partire da quelli meno energetici fino al livello di Fermi. Come noto, tale condizione si realizza nei **gas di fermioni identici alle bassissime temperature che trovano così una loro sorprendente relazione con il nucleo nel suo stato fondamentale**. Da questo punto di vista la differenza è solo quantitativa poiché i gas quantomeccanici contano un numero di elementi dell’ordine del numero di Avogadro mentre il doppio gas nucleare risulta costituito da decine di unità un fatto che – come già osservato – rende sostanzialmente inapplicabili i metodi della meccanica statistica.

Nel prosieguo, l’approccio del modello a gas di fermioni verrà utilizzato per costruire una formula della energia di legame più evoluta di quella fornita dal modello a goccia nella speranza che la meccanica quantistica possa rendere conto dei termini introdotti in modo puramente fenomenologico nella formula di Weizsäcker.

0.19.2 La funzione d’onda del nucleone

Il primo passo è quello di scrivere la funzione d’onda di N neutroni e Z protoni soggetti alla buca di potenziale sferica che descrive la forza media agente su di loro all’interno del nucleo. Senza perdere in generalità, possiamo semplificare i calcoli immaginando una *buca di potenziale cubica di lato L* all’interno della quale si trova un emphnucleone (protone o neutrone) in uno stato quantomeccanico descritto da un’onda piana di De Broglie

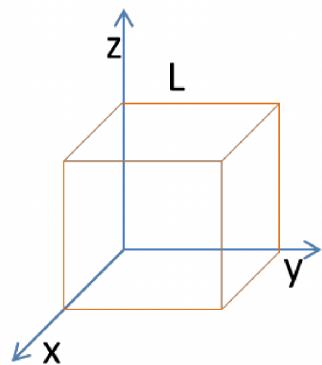
$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = A e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} = (A e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} e^{\frac{i}{\hbar}p_y y} e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

Con tutta evidenza, per descrivere correttamente lo stato quantomeccanico del nucleone, tale emphfunzione d’onda dovrà annullarsi sulla superficie cubica.

Gli esponenziali complessi non possono annullarsi per cui è necessario ipotizzare che la funzione d’onda contenga solo le parti sinusoidali o cosinusoidali di tali esponenziali

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin\left(\frac{1}{\hbar}p_x x\right) \sin\left(\frac{1}{\hbar}p_y y\right) \sin\left(\frac{1}{\hbar}p_z z\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (68)$$

In questa forma è agevole imporre l’annullamento della funzione d’onda sulle pareti della cavità nucleare ovvero sui piani $x = 0$, $x = L$; $y = 0$, $y = L$; $z = 0$, $z = L$. Ragionando ad esempio lungo la



direzione x abbiamo le condizioni

$$\frac{1}{\hbar} p_x x|_{x=0,L} = 0$$

sempre soddisfatta in $x = 0$ e soddisfatta in $x = L$ solo se

$$\frac{1}{\hbar} p_x L = n_x \pi \quad n_x = 1, 2, \dots, N$$

Dato che condizioni analoghe si trovano immediatamente anche nelle direzioni y e z , giungiamo alla conclusione che le componenti cartesiane della *quantità di moto* del nucleone soddisfano le seguenti *condizioni di quantizzazione*

$$p_x = n_x \frac{\pi \hbar}{L} \quad p_y = n_y \frac{\pi \hbar}{L} \quad p_z = n_z \frac{\pi \hbar}{L} \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots, n \quad (69)$$

Come anticipato, ciò comporta che pure l'*energia* del nucleone soddisfi la seguente *condizione di quantizzazione*

$$E = \frac{p^2}{2M} = \frac{1}{2M} \left(\frac{\pi \hbar}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots, n \quad (70)$$

dove l'energia considerata è la cinetica in quanto nel modello che stiamo costruendo $V(r) = 0$ per $r < R$. Sostituendo le (69) nella (68) ed imponendo la condizione di normalizzazione sul volume nucleare

$$\begin{aligned} \iiint_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV &= 1 \iff 1 = A^2 \prod_{i=1}^3 \int_0^L \sin^2 \left(n_{x_i} \frac{\pi x_i}{L} \right) dx_i \\ 1 &= A^2 \left(\frac{L}{2} \right)^3 \implies A = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \end{aligned}$$

otteniamo la **funzione d'onda del nucleone nel volume nucleare cubico di lato L**

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \left(n_x \frac{\pi x}{L} \right) \sin \left(n_y \frac{\pi y}{L} \right) \sin \left(n_z \frac{\pi z}{L} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (71)$$

Si comprende allora che gli stati quantomeccanici del nucleone vanno a costituire una *sequenza discreta e numerabile di stati univocamente identificati da una terna ordinata di numeri naturali (non nulli e positivi) n_x, n_y, n_z detti numeri quantici dello stato.*

0.19.3 Nucleoni e principio di esclusione

Prima proseguire sono necessarie alcune precisazioni. A rigore, la funzione d'onda (71) descrive lo stato di uno dei nucleoni del nucleo dato che soddisfa le condizioni imposte dal potenziale nucleare medio. Lo stato del nucleo nel suo complesso è allora descritto dal prodotto tensoriale di 'A' funzioni del tipo (71), ciascuna con la

propria terna n_x, n_y e n_z di *numeri quantici di stato*. Ciò premesso, si capisce che non fa differenza descrivere lo stato del nucleo nel modo suddetto oppure immaginare di utilizzare una sola funzione d'onda del tipo (71) specificando però per ciascuna terna n_x, n_y, n_z il numero di nucleoni che vi risiedono. Questo seconda possibilità, basata sui *numeri di occupazione* dello stato, risulta particolarmente utile nel caso dei fermioni dove il principio di esclusione limita i numeri di occupazione ai soli valori '0' ed '1'. Nel prosieguo interpreteremo la funzione d'onda in questo modo.

Fatta questa precisazione possiamo proseguire ricordando che, in accordo con i principi generali della meccanica quantistica, la funzione d'onda (71) descrive nel modo più completo possibile lo stato del nucleo per cui è attraverso di essa che si possono calcolare tutte le grandezze fisiche d'interesse. Nel prosieguo deriveremo la *distribuzione energetica cumulativa* dei nucleoni, necessarie per calcolare le *energie medie dei nucleoni* a loro volta necessarie per il calcolo delle *energie di legame*. Vediamo di cosa si tratta.

Per cominciare domandiamoci quale sia il *numero di stati quantomeccanici che possiedono una energia minore o uguale ad un certo prefissato valore*.

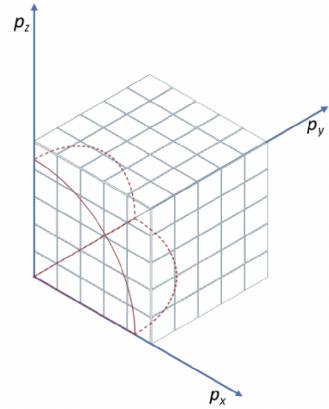
Dato il legame esistente tra energia e quantità di moto, si deve calcolare il numero di stati aventi modulo della quantità di moto minore od uguale ad un certo prefissato valore.

Utilizzando una tecnica impiegata nel caso della radiazione elettromagnetica di cavità, introduce lo *spazio tridimensionale delle quantità di moto* di assi p_x, p_y e p_z . Tenendo conto delle relazioni di quantizzazione (69), si comprende immediatamente che i valori delle quantità di moto accessibili al nucleone si collocano nell'ottante positivo dello spazio (data la positività di n_x, n_y e n_z), sulle intersezioni di un grigliato tridimensionale di passo $\frac{\pi\hbar}{L}$. A ciascuna di tali intersezioni corrisponde una determinata terna ordinata di numeri quantici n_x, n_y e n_z e, con essa, un determinato stato quantomeccanico (71).

Ciò premesso, si capisce che il *numero di stati quantomeccanici aventi modulo della quantità di moto uguale o inferiore ad un prefissato valore* \tilde{p} è approssimativamente uguale al quoziente tra il volume dell'ottante di sfera di raggio \tilde{p} ed il volumetto cubico del grigliato

$$n_s = \frac{1}{8} \frac{\frac{4}{3}\pi\tilde{p}^3}{\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^3} = \frac{L^3}{6\pi^2\hbar^3}\tilde{p}^3$$

dove abbiamo posto $L^3 = V$. Un attimo di attenzione chiarisce che tale formula in realtà sovrastima il numero di stati quantomeccanici. Infatti, tutti gli stati quantomeccanici interni all'ottante sferico di cui sopra, ma giacenti sui tre piani coordinati $p_x = 0, p_y = 0$ e $p_z = 0$, annullano la funzione d'onda (71) e corrispondono pertanto ad un



medesimo stato quantico che deve essere contato una volta sola. E' facile capire che il numero di tali stati è uguale al quoziente tra le aree dei tre quarti di circonferenza di raggio \tilde{p} dell'ottante sferico e l'areola quadrata associata a ciascuno stato quantomeccanico

$$n_0 = \frac{\frac{3}{4}\pi\tilde{p}^2}{\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^2} = \frac{3}{4}\frac{L^2}{\pi\hbar^2}\tilde{p}^2 = \frac{S}{8\pi\hbar^2}\tilde{p}^2$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo introdotto la superficie della scatola cubica $S = 6L^2$. Troviamo allora che *il numero di stati quantici tali che $0 < |p| < \tilde{p}$* in realtà vale

$$n_s = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3}\tilde{p}^3 - \frac{S}{8\pi\hbar^2}\tilde{p}^2$$

Dato che, secondo il principio di esclusione di Pauli, ciascuno stato quantistico della funzione d'onda orbitale può alloggiare al massimo due fermioni identici (uno per ciascuno dei due stati di spin del nucleone descritti da uno spinore che abbiamo omesso) concludiamo che **il numero di neutroni o protoni identici che possono essere contenuti nel volume nucleare V di superficie S con valore massimo dell'impulso P_F** è dato dalla espressione seguente

$$n_F = \frac{VP_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \left(1 - \frac{3\pi\hbar}{4} \frac{S}{VP_F} \right) \quad (72)$$

Essa costituisce la formula fondamentale del modello a gas di fermioni, base di ogni successivo sviluppo del modello stesso. La (72) permette di stimare immediatamente alcune grandezze fisiche fondamentali del modello. Trascurando il termine di superficie che si può mostrare essere assai più piccolo di quello di volume, ricaviamo l'espressione dell'impulso di fermi in funzione del numero di fermioni nucleari (tenendo conto del fatto che $\frac{\hbar S}{V} \ll 1$)

$$P_F \simeq \hbar \left(\frac{3\pi^2 n_F}{V} \right)^{1/3} \quad (73)$$

Le ipotesi di *stabilità* del nucleo e dell'occupazione dello *stato di minima energia* si traducono in

$$V \simeq \frac{4}{3}\pi r_0^3 A \quad e \quad n_p \simeq n_s \simeq \frac{A}{2}$$

per cui usando la (73) possiamo ottenere una stima del valore **dell'impulso di Fermi** dei protoni e neutroni nucleari

$$P_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{r_0} \simeq 1.52 \frac{\hbar}{1.2 \times \frac{1}{200} \frac{\hbar c}{MeV}} \simeq 254 \frac{MeV}{c}$$

Dunque, *nel nucleo prossimo allo stato fondamentale, esiste una frazione di nucleoni con un impulso piuttosto rilevante*. Inoltre, *l'impulso di Fermi dei*

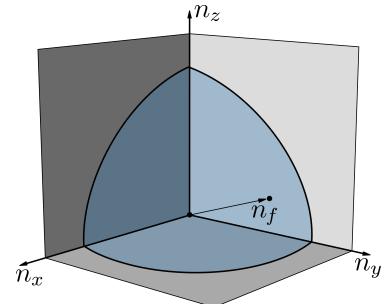


Figura 18: Fermi surface.

protoni e neutroni risulta essere indipendentemente dal tipo e dimensioni del nucleo, un fatto che non ci sorprende solo a posteriori.

E' immediato allora stimare la **energia cinetica di Fermi** dei protoni e neutroni nucleari

$$E_F = \frac{P_F^2}{2M_{n,p}} \simeq 34 \text{ MeV} \quad (74)$$

ed anche la **profondità della buca di potenziale nucleare** che sarà approssimativamente uguale alla somma della energia di Fermi con la energia media di separazione dei nucleoni che vale circa 8 MeV (vedi Fig. 8)

$$V_0 \simeq E_F + \frac{B}{A} \simeq (34 + 8) \text{ MeV} \simeq 42 \text{ MeV} \quad (75)$$

entrambi indipendenti da A e dunque approssimativamente valide per tutti i nuclei.

0.19.4 L'espressione dell'energia di legame

Si noti che l'energia cinetica dei nucleoni non è molto inferiore alla profondità della buca (è inferiore di 8 MeV appunto) per cui il nucleo è un insieme di nucleoni debolmente legati.

Nel caso dei nuclei stabili pesanti dobbiamo tenere conto che il numero di neutroni eccede quello dei protoni per cui dalla (?? .30) e (?? .31) otteniamo che l'impulso e la energia di Fermi dei neutroni supera quello dei protoni

$$P_F^n > P_F^p \quad E_F^n > E_F^p$$

e così pure per la (?? .32) la profondità della buca di potenziale dei neutroni supera quella dei protoni

$$V_0^n > V_0^p$$

Se ora teniamo conto che i protoni - a causa della carica elettrica che possiedono - sono soggetti ad un potenziale repulsivo coulombiano sostanzialmente apprezzabile solo quando quello nucleare si azzera, abbiamo che i potenziali complessivi di neutroni e protoni devono avere l'andamento approssimato mostrato in Figura 19.

Queste considerazioni chiariscono le linee di ragionamento che possono condurre alla costruzione della formula della energia di legame basata sul modello a gas di fermioni.

Un **neutron porta un contributo medio alla energia di legame nucleare** pari alla differenza tra la profondità della buca di potenziale e la sua energia cinetica media

$$b_n = V_0 - \langle T_n \rangle$$

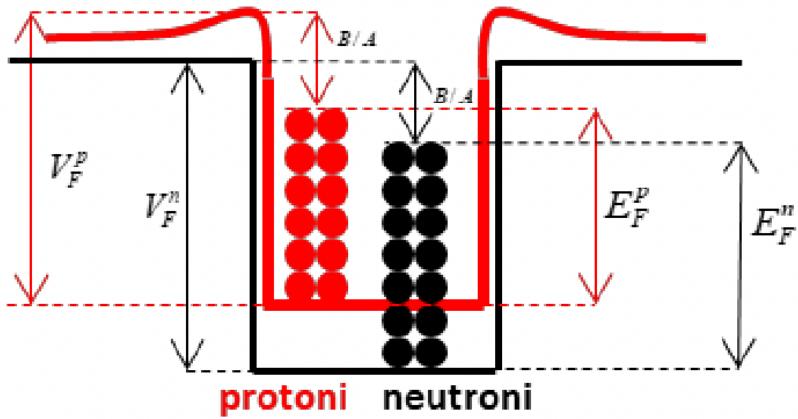


Figura 19: Scheme of Fermi gas model potential.

Per un protone si deve ragionare allo stesso modo aggiungendovi però la repulsione coulombiana che rende la buca del potenziale totale meno profonda. La repulsione coulombiana media per protone ha la seguente espressione (8-1 Feynman¹⁵)

$$\langle V_{coul} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k, j > k}}^Z \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

e dipende dalla disposizione spaziale dei protoni. Ipotizzando una distribuzione spazialmente uniforme (problema della sfera uniformemente carica) otteniamo

$$U_{coul}^{tot} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \hbar c \frac{Z^2}{R} = \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R}$$

dove $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ è la costante adimensionale di struttura fina e R è il raggio della distribuzione sferica di carica ovvero il raggio nucleare. Invocando un ragionamento già fatto per il modello a goccia quando si è parlato del termine coulombiano (si veda (65)) nel nostro modello la precedente si riscrive come

$$U_{coul}^{tot} = \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z(Z-1)}{R} .$$

Possiamo ora scrivere il contributo medio del protone alla energia di legame nucleare b_p ¹⁶

$$\langle U_{coul}^{tot} \rangle = \frac{U_{coul}^{tot}}{Z}$$

$$b_p = V_0 - \langle T_p \rangle - \frac{1}{Z}$$

¹⁵ Richard Feynman. *The Feynman Lectures on Physics. 2nd volume*. Caltech, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_08.html

¹⁶ Osserviamo che b_n e b_p sono stati stimati teoricamente a partire dal modello a gas di Fermi e non tramite considerazioni sul difetto di massa come in precedenza. Di fatto si vuole migliorare il precedente modello fenomenologico (a goccia) cercando di ricavare la dipendenza di B da A e Z .

Tenendo ora conto espressione e dell'analoga per i neutroni possiamo comporre la seguente **espressione della energia di legame nucleare**

$$B = Nb_n + Zb_p = AV_0 - N\langle T_n \rangle - Z\langle T_p \rangle - \frac{3}{5}\alpha\hbar c \frac{Z(Z-1)}{R} \quad (76)$$

o.19.5 Il calcolo dell'energia di legame

Per sviluppare l'energia di legame è ora necessario calcolare le energie cinetiche medie dei neutroni e protoni nucleari. Si ha

$$\langle T \rangle = \frac{\sum_i T_i n'_i}{\sum_i n'_i} \quad , \quad n'_i \stackrel{def}{=} \Delta_i n = n_{i+1} - n_i \quad i = 0, \dots, \bar{n}$$

dove \bar{n} è il numero di protoni/neutroni propri del livello di Fermi. Ora, immaginando un addensamento di strati energetici tra 0 ed il livello di fermi E_F , possiamo effettuare il passaggio al continuo

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{P_F} \frac{p^2}{2m} dn}{\int_0^{P_F} dn} \quad (77)$$

dove dn indica il numero di neutroni/protoni con impulso compreso tra p e $p + dp$.

Il differenziale della (72) fornisce tale numero di neutroni/protoni

$$dn = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp - \frac{S}{2\pi \hbar^2} pdp$$

che può essere sostituito nella (77) ottenendo

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\int_0^{P_F} \frac{p^2}{2m} \left(\frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp - \frac{S}{2\pi \hbar^2} pdp \right)}{\frac{V}{\pi^2 \hbar^3} P_F^3 - \frac{S}{4\pi \hbar^2} P_F^2} = \frac{\frac{VP_F^5}{10m\pi^2 \hbar^3} - \frac{SP_F^4}{16m\pi \hbar^2}}{\frac{V}{\pi^2 \hbar^3} P_F^3 - \frac{S}{4\pi \hbar^2} P_F^2} \\ &= \frac{\frac{VP_F^5}{10m\pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{10m\pi^2 \hbar^3}{VP_F^5} \frac{SP_F^4}{16m\pi \hbar^2} \right)}{\frac{VP_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{3\pi^2 \hbar^3}{VP_F^3} \frac{S}{4\pi \hbar^2} P_F^2 \right)} = \frac{3}{10m} P_F^2 \frac{1 - \frac{5\pi \hbar}{8} \frac{S}{VP_F}}{1 - \frac{3\pi \hbar}{4} \frac{S}{VP_F}} \end{aligned}$$

Tramite un'espansione in serie di Taylor al primo ordine

$$\begin{aligned} a &= \frac{5\pi \hbar}{8P_F} \quad b = \frac{3\pi \hbar}{4P_F} \quad x = \frac{S}{V} \\ \frac{1 - ax}{1 - bx} &= 1 + (b - a)x + O(x^2) \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &\simeq \frac{3P_F^2}{10m} \left(1 - \frac{\frac{5\pi \hbar}{8} S}{VP_F} + \frac{3\pi \hbar}{4} \frac{S}{VP_F} \right) \\ &= \frac{3}{10m} P_F^2 \left(1 + \frac{\pi \hbar S}{8VP_F} \right) \end{aligned} \quad (78)$$

Tenendo conto solo del termine dominante, possiamo migliorare la stima (74) del valore della energia cinetica media dei neutroni e protoni nucleari

$$\langle T \rangle \simeq \frac{3}{10m} P_F^2 \simeq \frac{3}{5} E_F \simeq \frac{3 \times 34}{5} \simeq 21 \text{ MeV}$$

Ritornando alla (78) è chiaro che si vuole disporre di una espressione della energia cinetica media dove compaiano i parametri nucleari (N, Z, V, S) e non il valore dell'impulso di Fermi. Ciò significa che conviene eliminare la variabile P_F nella (78) utilizzando la (72), che nel contesto delle approssimazioni utilizzate¹⁷ si approssima a

$$n_F = \frac{VP_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \left(1 - \frac{3\pi\hbar}{4} \frac{S}{VP_F}\right) \simeq \frac{VP_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

da cui

$$P_F = \left(\frac{3\pi^2\hbar^3 n_F}{V}\right)^{1/3} \quad (79)$$

Sostituendo (79) in (78)

$$\langle T \rangle \simeq \frac{3}{10m} P_F = \left(\frac{3\pi^2\hbar^3 n_F}{V}\right)^{2/3} + \frac{3}{80m} \frac{\pi\hbar S}{V} \left(\frac{3\pi^2\hbar^3 n_F}{V}\right)^{1/3}$$

da cui, infine, l'espressione cercata della energia cinetica media dei fermioni in funzione dei parametri nucleari

$$\langle T \rangle \simeq \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4 n_F^2}{3V^2}\right)^{1/3} + \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5 n_F}{9V^4}\right)^{1/3} S$$

Sostituendo questa espressione nella (76) ci avviamo verso l'espressione finale della energia di legame

$$\begin{aligned} B &\simeq AV_0 - N \left[\frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4 N^2}{3V^2}\right)^{1/3} + \left(\frac{9\hbar^2}{80m} \frac{\pi^5 N}{9V^4}\right)^{1/3} S \right] \\ &\quad - Z \left[\frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4 Z^2}{3V^2}\right)^{1/3} + \left(\frac{9\hbar^2}{80m} \frac{\pi^5 Z}{9V^4}\right)^{1/3} S \right] \\ &\quad - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z(Z-1)}{R} \\ &= AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5}{9}\right)^{1/3} \frac{S(N^{4/3} + Z^{4/3})}{V^{4/3}} \\ &\quad - \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4}{3}\right)^{1/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{V^{2/3}} - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z(Z-1)}{R} \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto una unica massa per protone e neutrone. Ora dobbiamo ricordare che nel nucleo V, R, N e Z sono variabili correlate

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad S = 4\pi r_0^2 A^{2/3} \quad R = r_0 A^{1/3}$$

¹⁷ Per arrivare a (78) si è sviluppato in serie di Taylor. Tale serie risulta convergente nel caso in cui $|b| < \frac{1}{|x|}$, cioè se

$$\frac{3\pi\hbar}{4} \frac{S}{VP_F} \ll 1$$

condizione che permette di compiere l'approssimazione svolta.

per cui sostituendo nella precedente

$$\begin{aligned}
 & AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5}{9} \right)^{1/3} \frac{4\pi r_0^2 A^{2/3} (N^{4/3} + Z^{4/3})}{\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3 A \right)^{4/3}} \\
 & - \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4}{3} \right)^{1/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3 A \right)^{2/3}} - \frac{3}{5}\alpha\hbar c \frac{Z(Z-1)}{r_0 A^{1/3}} \\
 & AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5}{9} \right)^{1/3} \frac{3^{4/3}}{4^{1/3}\pi^{1/3}r_0^2} \frac{N^{4/3} + Z^{4/3}}{A^{2/3}} \\
 & - \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4}{3} \right)^{1/3} \frac{3^{2/3}}{4^{2/3}\pi^{2/3}r_0^2} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} - \frac{3}{5}\alpha\hbar c \frac{Z(Z-1)}{r_0 A^{1/3}} \\
 = & AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{9\pi^4}{4} \right)^{1/3} \frac{3^{4/3}}{4^{1/3}\pi^{1/3}r_0^2} \frac{N^{4/3} + Z^{4/3}}{A^{2/3}} \\
 & - \frac{9\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{16} \right)^{1/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} - \frac{3}{5}\alpha\hbar c \frac{Z(Z-1)}{r_0 A^{1/3}}
 \end{aligned}$$

da cui infine

$$\begin{aligned}
 B = & AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{N^{4/3} + Z^{4/3}}{A^{2/3}} \\
 & - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} - \frac{3}{5}\alpha\hbar c \frac{Z(Z-1)}{r_0 A^{1/3}} \quad (80)
 \end{aligned}$$

Per avere questa espressione in una forma confrontabile con l'espressione empirica della energia di legame nucleare conviene passare alle variabili

$$A = (N + Z) \quad \delta = (N - Z) \quad N = \frac{A + \delta}{2} \quad Z = \frac{A - \delta}{2}$$

tenendo anche presente che la variabile δ , nel caso dei nuclei stabili, tende ad essere piccola.

Possiamo allora approssimare con il seguente sviluppo in serie, trattenendo anche i termini del secondo ordine

$$(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2$$

I termini in N , Z e A della (80) prendono allora le seguenti forme

$$\begin{aligned}
 \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} &= \frac{(A + \delta)^{5/3} + (A - \delta)^{5/3}}{2^{5/3}A^{2/3}} = \frac{A}{2^{5/3}} \left[\left(1 + \frac{\delta}{A} \right)^{5/3} + \left(1 - \frac{\delta}{A} \right)^{5/3} \right] \\
 &\simeq \frac{A}{2^{5/3}} \left[1 + \frac{5}{3} \left(\frac{\delta}{A} \right) + \frac{5}{9} \left(\frac{\delta}{A} \right)^2 + 1 - \frac{5}{3} \left(\frac{\delta}{A} \right) + \frac{5}{9} \left(\frac{\delta}{A} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{\delta}{A} \right)^2 \right] \simeq \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{N^{4/3} + Z^{4/3}}{A^{2/3}} &= \frac{(A + \delta)^{4/3} + (A - \delta)^{4/3}}{2^{4/3} A^{2/3}} = \frac{A}{2^{4/3}} \left[\left(1 + \frac{\delta}{A}\right)^{4/3} + \left(1 - \frac{\delta}{A}\right)^{4/3} \right] \\ &\simeq \frac{A}{2^{4/3}} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{\delta}{A}\right) + \frac{2}{9} \left(\frac{\delta}{A}\right)^2 + 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\delta}{A}\right) + \frac{2}{9} \left(\frac{\delta}{A}\right)^2 \right] \\ &= \frac{A}{2^{1/3}} 1 + \frac{5}{9} \left(\frac{\delta}{A}\right)^2 \simeq \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{N - Z}{A}\right)^2 \right]\end{aligned}$$

Sostituendo $N = A - Z$ otteniamo infine le seguenti espressioni

$$\begin{aligned}\frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} &\simeq \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{A - 2Z}{A}\right)^2 \right] \\ \frac{N^{4/3} + Z^{4/3}}{A^{2/3}} &\simeq \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{A - 2Z}{A}\right)^2 \right]\end{aligned}$$

che sostituite nella (80) permettono di sviluppare ulteriormente l'espressione della energia di legame

$$\begin{aligned}B &\simeq AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \frac{A^{2/3}}{2^{1/3}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{A - 2Z}{A}\right)^2 \right] \\ &\quad - 3 \frac{\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{A - 2Z}{A}\right)^2 \right] - \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \\ AV_0 &- \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} A^{2/3} - \frac{\hbar^2}{40mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} \frac{(A - 2Z)^2}{A^{4/3}} \\ &- \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} A - \frac{\hbar^2}{6mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\end{aligned}$$

che ora riscriviamo nella sua forma finale

$$\begin{aligned}B &\simeq \left[V_0 - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \right] A - \left[\frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} \right] A^{2/3} - \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \\ &\quad - \left[\frac{\hbar^2}{6mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \right] \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \left[\frac{\hbar^2}{40mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} \right] \frac{(A - 2Z)^2}{A^{4/3}}\end{aligned}\tag{81}$$

Abbiamo così ottenuto l'espressione della **energia di legame nucleare nell'ambito del modello a gas di fermioni**.

Si noti che i coefficienti dei termini in A e Z dipendono - oltre che da costanti fisiche ben note - da due soli parametri nucleari: la profondità della buca di potenziale V_0 ed il raggio del nucleone r_0 confermando la notevole capacità predittiva del modello. Fatto ancor più rilevante, vengono correttamente previsti i termini di volume, superficie, coulombiano e asimmetria della espressione del modello a

goccia (66):

$$\begin{aligned} a_v &= V_0 - 3 \frac{\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \\ a_s &= \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} \\ a_c &= \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0} \\ a_a &= \frac{\hbar^2}{6mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

Tali termini vengono così ricondotti ai principi generali della meccanica quantistica e possono ora fondarsi su di un meccanismo fisico di validità generale.

Ad esempio, tenendo presente il procedimento seguito, possiamo verificare che i termini di volume e superficie sono essenzialmente dovuti alla quantizzazione degli stati dei nucleoni a seguito del loro confinamento all'interno del volume nucleare.

Il termine coulombiano è trattato allo stesso modo del modello a goccia.

Il termine di asimmetria, invece, è ricondotto al principio di esclusione di Pauli e dunque ad uno dei fatti più profondi della meccanica quantistica: nello stato nucleare di minima energia risulta energeticamente conveniente legare tra loro numeri confrontabili di protoni e neutroni piuttosto che soli neutroni, spiegando così una delle proprietà più controintuitive dei nuclei. Se si tiene poi conto della mutua repulsione dei protoni si capisce anche la tendenza a legare numeri di neutroni eccedenti rispetto ai protoni.

Meno fortuna ha il termine di accoppiamento. D'altra parte gli ingredienti immessi nel modello non potevano in nessun modo condurre al risultato di una maggiore stabilità dei nuclei pari-pari, un fatto che richiede evidentemente un potenziale più appropriato che tenga conto anche dello spin dei nucleoni.

In generale, il successo del modello a gas di fermioni dimostra che *la maggior parte delle proprietà dei nuclei in prossimità dello stato fondamentale sono legate alle proprietà collettive dei nucleoni in condizioni di forte degenerazione piuttosto che alle specifiche proprietà della forza nucleare* la quale viene riassunta in una semplice forza di contenimento dei nucleoni.

Si può mettere alla prova in modo ancora più severo il modello calcolando esplicitamente i valori dei diversi termini e confrontandoli con quelli empirici. Sostituendo i valori numerici otteniamo (i valori sono in MeV)

$$a_v \simeq 22 \quad a_s \simeq 14.6 \quad a_c \simeq 0.070 \quad a_a \simeq 10.5$$

Ad esclusione del termine di accoppiamento di cui abbiamo detto, l'accordo è relativamente soddisfacente (vedi set di valori (67)) ed è assai degno di nota il fatto che tale accordo sia ottenuto introducendo due soli parametri liberi (la profondità della buca di potenziale nucleare V_0 ed il raggio del nucleone r_0).

0.20 Il modello a Shell

Dobbiamo ora domandarci quale possa essere il motivo del successo solo parziale del modello a gas di Fermi nella descrizione della energia di legame dei nuclei stabili.

Il suo successo è certamente dovuto al fatto che riconosce il **ruolo determinante giocato dalla meccanica quantistica** che si manifesta

- nella discretizzazione degli stati quantomeccanici e delle loro energie;
- nella possibilità di collocare in ciascuno stato quantomeccanico un solo nucleone (principio di esclusione di Pauli).

Il suo insuccesso, invece, è probabilmente dovuto alla eccessiva **semplificazione delle forze nucleari** in gioco poiché si ipotizza che le complesse interazioni che ogni nucleone ha con i suoi vicini possano riassumersi in una **interazione efficace dipendente dalla posizione, nulla all'interno del volume nucleare e di modulo assai elevato e centripeta sulla sua superficie** (buca sferica di potenziale). Tali assunzioni devono essere riviste criticamente.

0.20.1 Il potenziale nucleare medio

Come già osservato quando costruimmo il modello nucleare a gas di fermioni, la risultante delle forze percepita dal singolo nucleone si dovrebbe riassumere in una forza mediamente nulla all'interno del volume nucleare e mediamente non nulla e centripeta in prossimità della superficie nucleare. Dunque, un potenziale medio a forma di scatola – se assumiamo la descrizione più drastica – o di forma fisicamente più plausibile con variazioni di potenziale meglio raccordate.

Rimandando per ora il problema della forma concreta del potenziale, sappiamo che - sulla base della meccanica quantistica – gli stati quantomeccanici e le energie dei nucleoni soggetti ad un tale potenziale risulteranno discretizzati. D'altra parte, il principio di Pauli permette di occupare ciascun stato quantomeccanico con un solo nucleone (qualora si tenga conto anche dello spin) per cui su ogni livello energetico potranno risiedere solo un ben definito

numero di neutroni e protoni. Dato che un nucleo nello stato fondamentale possiede la minima energia, deduciamo che i neutroni ed i protoni andranno a riempire dal basso i diversi livelli energetici nucleari fino a raggiungere due livelli massimi detti *livelli di Fermi* in completa analogia con un gas di fermioni degenere alle bassissime temperature.

Ora, immaginiamo che un neutrone (protone) del nucleo collida con un secondo neutrone (protone). A seguito della collisione il neutrone (protone) dovrebbe variare la propria energia ma, essendo gli stati quantomeccanici dei livelli energetici completamente occupati, tale variazione avverrà solo nel caso in cui l'energia scambiata sia sufficiente a farlo saltare oltre il livello di Fermi (fenomeno chiamato 'Pauli blocking'). Dato che nella maggioranza dei casi ciò non avviene, *il moto del neutrone (protone) risulterà essenzialmente imperturbato* come se gli altri neutroni (protoni) non esistessero affatto e si svilupperà seguendo 'traiettorie' regolari ben diverse dalle traiettorie degli atomi/molecole di un gas classico continuamente spezzate dalle reciproche collisioni.

A causa del 'Pauli blocking' (vedi sidenote pag 10) dunque, **l'interazione efficace che governa il moto dei nucleoni nel nucleo non è di tipo stocastico ma piuttosto assimilabile ad una forza posizionale descrivibile quindi da un potenziale.**

Verificata la esistenza di un potenziale nucleare si apre il problema della sua forma che non è detto possa ridursi alla buca sferica di potenziale assunta dal modello a gas di fermioni. Benchè capace di riprodurre alcune importanti proprietà del nucleo, questa ipotesi deve essere sottoposta a verifica sperimentale. *In che modo, allora, si può determinare la forma del potenziale nucleare?*

La forma del potenziale determina il numero di stati quantomeccanici di ogni possibile livello energetico (ovvero il grado di degenerazione) ed anche la loro spaziatura. D'altra parte il principio di esclusione lascia risiedere un solo nucleone in ogni stato quantomeccanico e dunque un numero di nucleoni pari al grado di degenerazione in ogni livello energetico. Ciò significa che contando i nucleoni sui diversi livelli energetici possiamo ottenere informazioni stringenti sulla forma del potenziale nucleare. *In che modo allora si possono contare i protoni ed i neutroni alloggiati nei livelli energetici nucleari?*

Sappiamo che in un nucleo nello stato fondamentale i neutroni ed i protoni vanno ad occupare tutti gli stati quantomeccanici dei diversi livelli energetici fino a raggiungere i rispettivi livelli di Fermi.

Dato un nucleo di N neutroni e Z protoni, l'energia che dobbiamo fornire ai neutroni per estrarne uno eguaglia la differenza tra la

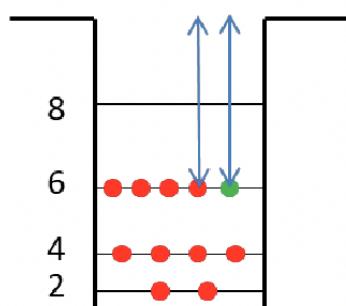
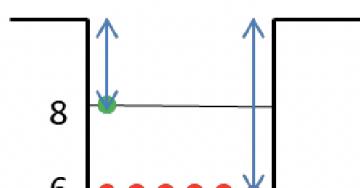


Figura 20: Energetic scheme of a nucleon in the minimum energy state. The highest-energy state is Fermi level.



profondità energetica della buca di potenziale e l'energia del livello di Fermi dei neutroni, ovvero $V_0 - E_l$ (vedi Figura 20). Consideriamo allora l'isotopo con $N+1$ neutroni e Z protoni e domandiamoci ancora una volta quanta energia si debba fornire ai neutroni per estrarne uno dal nucleo. Ci sono due possibili risposte:

- se il livello di Fermi dei neutroni del nucleo (N, Z) era incompleto, il neutrone in più andrà a collocarsi sullo stesso livello energetico (figura 20) e l'energia necessaria sarà ancora $V_0 - E_l$;
- se il livello di Fermi dei neutroni del nucleo (N, Z) era completo il neutrone in più andrà a collocarsi sul livello energetico successivo e l'energia necessaria avrà un valore inferiore ovvero $V_0 - E_{l+1}$ (vedi Figura 21).

Giungiamo allora alla conclusione che *le energie di separazione del neutrone in una serie isotopica e del protone in una serie isotonica devono subire bruschi salti in basso in corrispondenza del completamento dei rispettivi livelli energetici nucleari.*

I dati sperimentali delle energie di separazione dei neutroni e protoni nucleari confermano l'andamento previsto. Nei grafici in Figura 22 a lato è infatti possibile osservare diversi salti verso il basso della energia di separazione del neutrone nel caso delle serie isotopiche dell'Ossigeno, del Calcio e del Piombo che permettono di esplorare rispettivamente numeri bassi, medi ed elevati di neutroni nucleari.

Si vedono chiaramente i completamenti dei livelli energetici nucleari dei neutroni in corrispondenza dei numeri 8 (ossigeno), 20, 28 (calcio) e 126 (piombo). Dati analoghi mostrano altri completamenti in corrispondenza dei numeri 50 e 82.

La stessa serie di numeri può essere ottenuta anche per i protoni dalla analisi dei dati sperimentali sulle serie isotoniche.

In sintesi possiamo affermare che *i dati sperimentali sulla energia di separazione dei neutroni e dei protoni indicano che i livelli energetici nucleari ('shell' nucleari) si completano in corrispondenza dei numeri 8, 20, 28, 50, 82 e 126 detti numeri magici.*

Si pone ora il problema di stabilire se il potenziale nucleare a forma di **buca sferica infinita** sia in grado di riprodurre i numeri magici nucleari. Premesso che già sappiamo che questo potenziale non è adeguato poiché prevede una energia di separazione infinita per neutroni e protoni, da un punto di vista generale si tratta di **risolvere l'equazione di Schrödinger trovando le autofunzioni** e gli

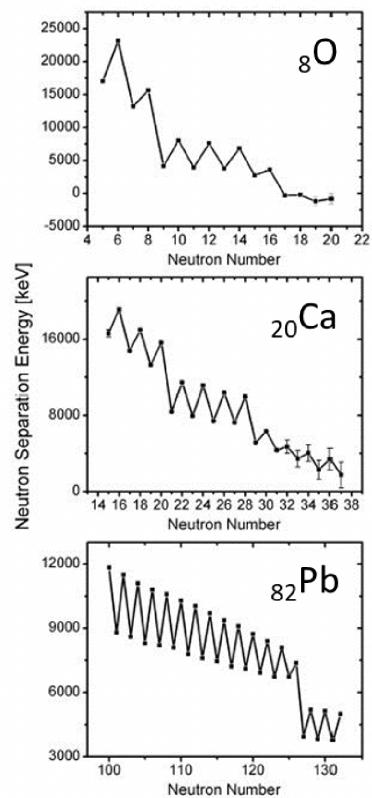


Figura 22: Energetic scheme of a nucleon in the minimum energy state. The highest-energy state is Fermi level.

autovalori dell'operatore hamiltoniano costruito con il potenziale

$$V(r) = \begin{cases} 0 & se \quad r < R \\ +\infty & se \quad r > R \end{cases}$$

Adottato un *sistema di coordinate sferiche* e tenuto conto che l'hamiltoniano non contiene termini dipendenti dal tempo, l'equazione di Schroedinger può essere risolta sostituendo la seguente espressione generale della funzione d'onda separata nelle variabili spaziali e nella variabile temporale

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(r, \theta, \phi) e^{\frac{i}{\hbar} Et}$$

Dato che il potenziale non dipende dalle variabili angolari, la parte spaziale della funzione d'onda può essere a sua volta separata nelle variabili angolari stesse e nella variabile radiale

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta, \phi)$$

Svolgendo i calcoli è possibile mostrare che *la parte spaziale della funzione d'onda* deve avere la seguente espressione

$$\varphi(r, \theta, \phi) = j_l(kr)Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

dove le $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ sono le già viste *armoniche sferiche*, la famiglia di autofunzioni degli operatori quadrato e terza componente del momento angolare che soddisfano le seguenti *equazioni agli autovalori*

$$\begin{aligned} L^2 Y_{l,m}(\theta, \phi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}(\theta, \phi) & l &= 0, 1, 2, \dots \\ L_z Y_{l,m}(\theta, \phi) &= m\hbar Y_{l,m}(\theta, \phi) & m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \end{aligned}$$

mentre le $j_l(kr)$ sono le altrettanto già viste *funzioni di Bessel* dipendenti in questo caso dal numero quantico del momento angolare l .

Ora, affinché *la funzione d'onda possa annullarsi in $r = R$* (si ricordi che è una delle condizioni al contorno della equazione di Schrödinger per questo problema) si deve avere

$$j_l(kR) = 0$$

da cui otteniamo la seguente condizione

$$kR = z_{l,n}$$

dove, $z_{l,n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) *descrive la serie infinita di valori crescenti dell'argomento che annullano la funzione di Bessel $j_l(z)$ di ordine l* ed n viene detto *numero quantico principale*. Tale relazione conduce evidentemente alla *quantizzazione del modulo del vettore d'onda k*

$$k = \frac{1}{R} z_{l,n}$$

Dato che nel problema in esame l'energia possiede solo il termine cinetico ($U=0$ all'interno del volume sferico), sostituendo la precedente relazione giungiamo alla seguente espressione dei *livelli energetici della buca di potenziale sferica infinita*

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} z_{l,n}^2 \quad (82)$$

dalla quale si evince che

- l'energia dipende dal numero quantico del momento angolare l e dal numero quantico principale n e per ogni fissato l (ordine della funzione di bessel) aumenta con n (termine ennesimo della serie di zeri);
- ad ogni valore della energia, ovvero ad ogni coppia di valori di l ed n , corrispondono $(2l + 1)$ funzioni d'onda diverse nella sola parte angolare: $Y_{l,l}, Y_{l,-l+1} \dots Y_{l,-l}, Y_{l,l}$, fatto che si riassume dicendo che il livello energetico l, n ha una degenerazione di ordine $(2l + 1)$.

Quasi sempre si utilizza la **notazione atomica** dove il numero quantico n è indicato esplicitamente al primo posto mentre il numero quantico l è indicato al secondo posto per mezzo della convenzione seguente

$$l = 0 \rightarrow s \quad l = 1 \rightarrow p \quad l = 2 \rightarrow d \quad l = 3 \rightarrow f \quad l = 4 \rightarrow g \quad \dots$$

3Zeros of Bessel's Functions of the First Kind					
Number of Zeros	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.0152	14.37254
4	11.79153	13.32369	14.79595	16.22347	17.61597
5	14.93092	16.47063	17.95982	19.40941	20.82693

Utilizzando allora la formula (82) e tenendo conto della tabella qui riportata degli zeri delle funzioni di Bessel otteniamo i *livelli energetici della buca di potenziale sferica infinita* indicati in figura 23.

Raggruppando ora i livelli energetici vicini non risolvibili sperimentalmente, possiamo calcolare facilmente i numeri cumulativi dei diversi gruppi che andranno a costituire i numeri magici della buca di potenziale sferica infinita.

Otteniamo così i numeri marcati in rosso: 2, 8, 20, 34, 58, La serie empirica di numeri magici 8, 20, 28, 50, 82 e 126 non è riprodotta in modo soddisfacente per cui dobbiamo concludere che *la forma del potenziale deve essere modificata*.

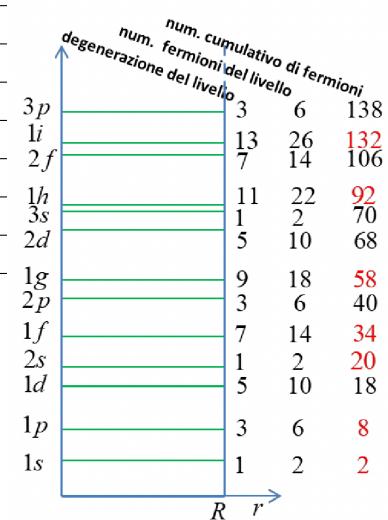


Figura 23: Energetic scheme of a nucleon in the minimum energy state. The highest-energy state is Fermi level.

Una prima ovvia modifica non può essere che quella di richiedere che il potenziale abbia una *profondità finita e non infinita* con una *risalita ripida ma non verticale* in $r = R$ così da essere privo di punti assai poco fisici di non derivabilità. Una espressione semplice che soddisfi questi requisiti è data dal **potenziale di Saxon-Wood**

$$V_{SW}(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left\{\left(\frac{r-R}{d}\right)\right\}}$$

dove V_0 è la profondità della buca di potenziale (dell'ordine di 50 MeV), $R = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1.24 \text{ fm}$) è il raggio nucleare e $d = 0.52 \text{ fm}$ lo spessore dell'alone nucleare.

I livelli energetici del potenziale sferico di Saxon-Woods, confrontati con quelli della buca di potenziale sferica infinita, sono mostrati in figura 24. Come si vede risultano confermati i numeri magici 2, 8 e 20, quest'ultimo con maggior nettezza del caso precedente, mentre i numeri magici più alti sono errati. In particolare, il numero magico 28 sembra davvero problematico poiché nessuno dei livelli successivi al 2s porta con sé 8 nucleoni (il livello $1f$ ne porta ben 14!).

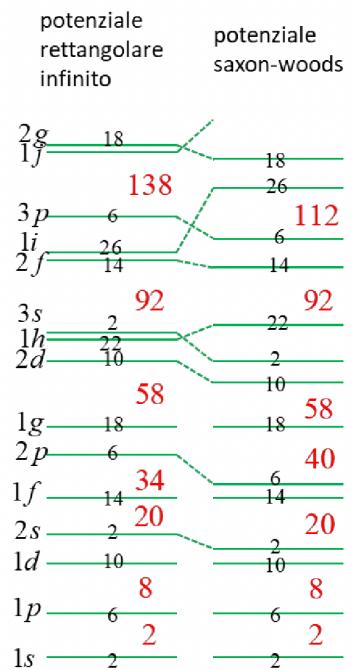


Figura 24: Energetic scheme

Appendice A : Integrazione sull'angolo solido della sezione d'urto di scattering

Integriamo la sezione d'urto di scattering sullo schermo S_O su cui si osserva la diffrazione in approssimazione di far field(schermo lontano). Supporremo inoltre lo schermo molto esteso rispetto all'estensione della figura di diffrazione.

$$\sigma_{scatt} = \iint_{\Omega} |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega = \iint_{S_O} \frac{|f(\mathbf{q})|^2}{r^2} da$$

Ora, sostituendo l'espressione della scattering amplitude (20) ed utilizzando l'identità $|f|^2 = \bar{f}f$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_{scatt} &= \iint_{S_O} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} da' \right) \left(-\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}''} da'' \right) \right] da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_O} \left(\frac{1}{r^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')} da'' da' \right) da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} \left(\iint_{S_O} \frac{1}{r^2} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')} da \right) da'' da' \end{aligned} \quad (83)$$

Vogliamo ora sviluppare la fase dell'esponenziale. Assumendo un sistema di coordinate cartesiano con l'asse z orientato normalmente agli schermi, la coordinata z del secondo schermo assume valori grandi, si hanno allora le relazioni seguenti

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \simeq z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \simeq z$$

Per quanto riguarda il vettore d'onda trasferito, definendo $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ nell'approssimazione di $z \gg x, y$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= k(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}') = k \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \hat{\mathbf{k}} \right) \simeq k \left(\frac{x}{z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z} \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \right) = k \left(\frac{x}{z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z} \hat{\mathbf{j}} \right) \\ \mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'') &\simeq \left(\frac{x}{z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z} \hat{\mathbf{j}} \right) \cdot [(x'' - x') \hat{\mathbf{i}} + (y'' - y') \hat{\mathbf{j}} + (z'' - z') \hat{\mathbf{k}}] = \frac{kx}{z} (x'' - x') + \frac{ky}{z} (y'' - y') \end{aligned}$$

che sostituite nella (83) forniscono

$$\sigma_{scatt} = \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} \left(\iint_{S_O} \frac{1}{z^2} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') e^{i\frac{kx}{z}(x''-x') + i\frac{ky}{z}(y''-y')} dx dy \right) da'' da'$$

Nelle nostre ipotesi $S_O \gg S_B$, per cui sviluppiamo la precedente come

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} da'' da' \frac{1}{z^2} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') \frac{4\pi^2 z^2}{k^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{x}{z}(x''-x'')} \frac{x}{z} dk \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{y}{z}(y''-y')} \frac{y}{z} dk \right)$$

Utilizzando ora l'espressione esponenziale della delta di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x)$$

riscriviamo

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') \delta(x'' - x') \delta(y'' - y') dx'' dy'' dx' dy'$$

Tenendo ora conto di

- $z'' = z'$ avendo scelto il riferimento con l'asse z normale al piano di integrazione;
- le delta di dirac bloccano gli integrali ai valori $x'' = x', y'' = y'$;
- $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}'$ (gli assi z e z' sono collineari).

in definita abbiamo

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') dx' dy' = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 dx' dy'$$

Abbiamo quindi ritrovato la (28):

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da'$$

Appendice B : Funzione di Bessel di ordine zero

La rappresentazione integrale della funzione di Bessel di ordine zero che si incontra più di frequente è la seguente (vedi 9.1.18 Abramowitz-Stegun¹⁸⁾)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi$$

Da qui si trova facilmente

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{ix \cos \varphi} + e^{-ix \cos \varphi}}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} d\varphi + \int_0^\pi e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} e^{ix \cos(\varphi' - x)} d(\varphi' - x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi'} d\varphi' + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

da cui infine

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi$$

¹⁸ Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964

Appendice C : Integrazione della funzione di Bessel di ordine zero

Le derivate delle funzioni di Bessel possono essere espresse attraverso altre funzioni di Bessel(vedi 9.1.30 Abramowitz-Stegun¹⁹). Da questa formula si trova la relazione seguente

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) = J_0(z)$$

Dalla (31) abbiamo

$$\begin{aligned} f(q) &= ik \int_0^R r J_0(qr) dr \\ &= i \frac{k}{q^2} \int_0^{qR} z J_0(z) dz \\ &= i \frac{k}{q^2} \int_0^{qR} z \frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) dz \\ &= i \frac{k}{q^2} z J_1(z) \Big|_0^{qR} \end{aligned}$$

da cui infine

$$f(q) = i \frac{kR}{q} J_1(qR)$$

¹⁹ Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964

Bibliografia

Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964.

Richard Feynman. *The Feynman Lectures on Physics. 2nd volume.* Caltech, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_08.html.

Emil Wolf Max Born. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 60th anniversary edition, 2019. ISBN 978-1-108-47743-7.