

NICCOLÒ ZANOTTI

# APPUNTI DI FISICA NUCLEARE

OPEN SOURCE PUBLISHER

Copyright © 2022 Niccolò Zanotti

PUBLISHED BY OPEN SOURCE PUBLISHER

<https://github.com/feyn-23/fisica-nucleare-subnucleare>

Licensed under the Apache License, Version 2.0 (the “License”); you may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

# *Indice*

## *Fisica nucleare* 5

- 0.1 *Le unità di misura della Fisica Nucleare e Subnucleare* 5
- 0.2 *Le proprietà generali dei nuclei* 7
- 0.3 *Le carte dei nuclidi* 11

## *Lo studio del nucleo* 17

- 0.4 *La sezione d'urto* 17
- 0.5 *Calcoli di sezioni d'urto* 21
- 0.6 *Le proprietà ondulatorie delle particelle microscopiche* 25
- 0.7 *Teoria della diffrazione di Kirchoff* 30
- 0.8 *Le sezioni d'urto in meccanica quantistica* 35
- 0.9 *Diffrazione di un disco assorbente* 39
- 0.10 *Il raggio nucleare* 41
- 0.11 *Energia di legame nucleare* 45

## *I primi modelli nucleari* 49

- 0.12 *Richiami di meccanica quantistica* 53
  - 0.12.1 *Osservabili e valori di aspettazione* 53
  - 0.12.2 *Definizione ed indefinizione delle osservabili* 56
  - 0.12.3 *Momento angolare orbitale* 59
  - 0.12.4 *Momento angolare intrinseco o spin* 61
  - 0.12.5 *La somma dei momenti angolari* 63
  - 0.12.6 *Stati quantomeccanici di due particelle identiche* 67

0.13 *Il nucleo come gas di fermioni* 70

*Appendice A : Integrazione sull'angolo solido della sezione d'urto di scattering*  
71

*Appendice B : Funzione di Bessel di ordine zero* 73

*Appendice C : Integrazione della funzione di Bessel di ordine zero* 75

*Bibliografia* 77

# *Fisica nucleare*

## *0.1 Le unità di misura della Fisica Nucleare e Subnucleare*

La scelta della unità di misura è arbitraria ma, in accordo con i criteri che ispirano i moderni sistemi, soddisfa alcuni semplici requisiti di ordine generale:

- **l'unità deve essere connessa ad un fenomeno naturale ritenuto stabile ed invariabile nel tempo** piuttosto che ad un oggetto o manufatto particolare il quale potrebbe deteriorarsi o modificare le sue proprietà con il tempo;
- **le unità non devono essere ridondanti** e devono costituire un sistema di grandezze fisiche irriducibili dette fondamentali dalle quali ottenere tutte le altre che invece vengono dette derivate;
- **l'unità deve essere riproducibile in laboratorio con una relativa facilità** (in realtà è lavoro da professionisti quali sono i metrologi).

Un sistema di unità di misura più appropriato può essere costruito facendo riferimento alle costanti fisiche fondamentali che governano i fenomeni nucleari e subnucleari. Accanto alle grandezze fondamentali, ogni area della fisica introduce anche specifiche costanti fisiche. Queste possono essere sia dimensionali che adimensionali, riferirsi a specifiche classi di fenomeni - e dunque di rango locale - oppure valide per ogni fenomeno fisico e quindi di rango universale.

Mentre il valore numerico delle costanti dimensionali dipende dalla scelta del sistema di unità misura, quello delle costanti adimensionali ne è del tutto indipendente per cui si ritiene che siano dotate di un più profondo significato fisico anche se a tutt'oggi nessuna teoria è in grado di predirne il valore. Fu Planck che propose di assumere come grandezze fisiche fondamentali le costanti fisiche universali introducendo i cosiddetti sistemi naturali di unità di misura. Lo scopo di tali sistemi è quello di dedurre le appropriate scale di lunghezze, tempi, masse e temperature direttamente dai fenomeni naturali piuttosto che da convenzioni di natura metrologica.

La costruzione di un sistema di unità di misura le cui grandezze abbiano la scala appropriata per una certa classe di fenomeni richiede l'introduzione di specifici vincoli tra le grandezze fondamentali della descrizione macroscopica. Ad esempio, dato che **i fenomeni nucleari e subnucleari sono al tempo stesso relativistici e quantistici** ciò significa che le velocità, ovvero i quozienti tra lunghezze e tempi saranno dell'ordine di  $c$ , mentre le azioni, cioè i prodotti delle energie per i tempi caratteristici saranno dell'ordine di  $\hbar$ . Due costanti universali non sono però sufficienti per fissare la scala delle tre grandezze necessarie al Sistema Internazionale per descrivere la relatività e meccanica quantistica ( $L$ ,  $T$  ed  $M$ ). Il particolare ruolo giocato dalle macchine acceleratrici in fisica nucleare e delle particelle elementari suggerisce allora di assumere come terza grandezza (non costante) un fondamentale parametro costruttivo della macchina, **l'energia  $E$** . In accordo con le convenzioni adottate nella ingegneria delle macchine acceleratrici si assume come unità l'elettronvolt (eV), ovvero l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di un volt. Si ottiene facilmente la sua conversione in joule:  $E_{\text{cin}} = eV$  da cui  $1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$ .

Definite le unità del **Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare (SNNS)** possiamo facilmente calcolare i loro valori nel Sistema Internazionale (SI) attraverso le seguenti equazioni dimensionali (si noti che con le lettere minuscole indichiamo le grandezze fondamentali del SNNS e con le maiuscole quelle del SI)

$$\begin{aligned} c &\sim \frac{L}{T} & \epsilon &\sim Mc^2 & \epsilon T &\sim \hbar \\ L &\sim cT & M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & T &\sim \frac{\hbar}{\epsilon} \\ L &\sim \frac{\hbar c}{\epsilon} & M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & T &\sim \frac{\hbar}{\epsilon} \end{aligned}$$

Da queste deduciamo che le lunghezze possono essere misurate in unità di  $\frac{\hbar c}{\epsilon}$  ( $\hbar c/eV$  o  $1/eV$  se  $\hbar = c = 1$ ), i tempi in unità di  $\frac{\hbar}{\epsilon}$  ( $\hbar/eV$  o  $1/eV$  se  $\hbar = 1$ ) ed infine le masse in unità di  $\epsilon/c^2(eV/c^2$  o  $eV$  se  $c = 1$ ).

Tenendo ora presenti i valori delle costanti universali espresse nel Sistema Internazionale e della conversione tra Joule ( $J$ ) ed elettronvolt ( $eV$ ):

$$\begin{aligned} \hbar &= 1.055 \times 10^{-34} J \cdot s & c &= 2.998 \times 10^8 m/s & \hbar c &= 3.162 \times 10^{-26} J \cdot m \\ 1eV &= 1.602 \times 10^{-19} J \end{aligned}$$

possiamo calcolare i coefficienti della conversione tra il Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare ed il Sistema Internazionale

(per quanto riguarda l'energia, piuttosto che gli eV, assumeremo la scala più appropriata dei MeV)

$$\begin{aligned} L &\sim \frac{\hbar c}{\epsilon} \quad 1 \left( \frac{\hbar c}{MeV} \right) \sim 1.97 \times 10^{-19} m \\ M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} \quad 1 \left( \frac{MeV}{c^2} \right) \sim 1.78 \times 10^{-30} Kg \\ \frac{\hbar}{\epsilon} &\sim T \quad 1 \left( \frac{\hbar}{MeV} \right) \sim 6.59 \times 10^{-22} s \end{aligned}$$

## 0.2 Le proprietà generali dei nuclei

Il **nucleo** è un sistema composto formato da **neutroni** e **protoni** - spesso indicati con il nome generico di **nucleoni** - tenuti assieme dalla **interazione forte**, una delle interazioni fondamentali della natura(di cui non si ha traccia macroscopicamente).

In fisica nucleare si usa il termine ‘nuclide’ piuttosto che ‘nucleo’ più prossimo alla chimica. Si hanno le seguenti grandezze rilevanti:

- **numero atomico**  $Z$ , ovvero numero di protoni del nuclide;
- il numero di neutroni non ha nome specifico e si indica con  $N$ ;
- **numero di massa**  $A$ , ovvero il numero di nucleoni  $Z + N$ .

Ne consegue che una qualunque coppia dei numeri  $Z, N$  ed  $A$  identifica univocamente il nuclide. La notazione è la seguente:



Si parla di nuclidi

1. **isotopi** se hanno stesso  $Z$  ma diversi  $N$  ed  $A$ ;
2. **isotoni** se hanno stesso  $N$  ma diversi  $Z$  ed  $A$ ;
3. **isobari** se hanno stesso  $A$  ma diversi  $N$  ed  $Z$ ;
  - se questi hanno  $N$  e  $Z$  scambiati si dicono *speculari*;
4. **isomeri** se sono identici ma in uno stato di energia differente.

Il neutrone ha una massa di  $939.56 MeV/c^2$  che eccede di soli  $1.29 MeV/c^2$  la massa del protone che ammonta a  $938.27 MeV/c^2$ . Spesso approssimate a  $940 MeV$  o addirittura ad  $1 GeV/c^2$ , i nucleoni risultano circa 1840 volte più massivi dell'elettrone ( $0.51 MeV/c^2$ ). La piccola differenza di massa gioca un ruolo chiave in molti fenomeni.

Sia i **neutroni** che i protoni possiedono un momento angolare intrinseco di **spin**  $s = \frac{1}{2}$  (in unità  $\hbar$ ). Sulla base della meccanica quantistica, ciò significa che la proiezione del momento angolare lungo un certo asse può assumere i due soli valori  $\frac{1}{2}\hbar$  e  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Lo spin interviene non solo negli aspetti specifici della dinamica dei nucleoni ma anche nella determinazione del loro **comportamento collettivo**. La meccanica quantistica impone ai sistemi di particelle identiche restrizioni peculiari che non hanno analogie nella fisica classica. Sulla base del **teorema di spin statistica** i neutroni ed i protoni nucleari - che hanno spin semintero - si comportano collettivamente come **fermioni** e devono soddisfare il **principio di Pauli**, un fatto che gioca un ruolo decisivo nella **stabilità e struttura** del nucleo.

Nella fisica classica solo una particella estesa può possedere momento angolare intrinseco (spin). Se lo possiede ed è elettricamente carica allora possiede anche momento di dipolo magnetico. Ad esempio è facile mostrare che un anello di carica  $e$  e superficie  $S$ , posto in rotazione attorno all'asse di simmetria, soddisfa la seguente relazione  $\mu = \frac{eL}{2m}$ .

Nella fisica quantistica, non solo le particelle estese (composte) ma anche quelle puntiformi (elementari) possono essere dotate di **spin** per cui - se dotate di carica elettrica - possiederanno anche un **momento di dipolo magnetico**.

Vediamo da un conto esplicito che l'analogia classica-quantistica è fallimentare:

$$\begin{aligned} \mu &= iS = \frac{e}{T}\pi R^2 \\ L &= mvR = m\frac{2\pi R}{T}R \rightarrow \pi R^2 = \frac{T}{2m}L \\ \rightarrow \mu &= \frac{e}{T}\frac{T}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m}\left(\frac{L}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

dove la grandezza  $\frac{e\hbar}{2m}$  viene detta **magnetone di Bohr** e vale  $9.274 \times 10^{-24} J/T$ . E' un fatto ben noto però che la relazione tra  $\mu$  ed  $L$  differisce da quella classica per un fattore numerico. Ad esempio, nel caso di particelle puntiformi di spin  $1/2$ , l'equazione **quantomeccanica relativistica di Dirac** conduce ad una relazione contenente un fattore  $g$ :

$$\mu_{qm} = g\frac{e\hbar}{2m}\left(\frac{L}{\hbar}\right)$$

di valore 2.

Preso atto di questo fatto dobbiamo aggiungere che le teorie di campo quantizzato hanno dimostrato che il fattore  $g = 2$  delle particelle puntiformi deve subire **piccole correzioni** dovute a certi processi virtuali, soprattutto di natura elettromagnetica, di cui

Momento di dipolo magnetico dei nucleoni

diremo

$$g = 2(1 + a) \quad a = \frac{g - 2}{2}$$

La correzione  $a$  - detta *momento magnetico anomalo* o anche  $\frac{g-2}{2}$  - rappresenta uno dei parametri più importanti per un confronto di alta precisione tra previsioni teoriche e misure sperimentali. A titolo di esempio nel caso dell'elettrone si ha

$$a_{th} = 0.001159652181643(764)$$

$$a_{ex} = 0.001159652180730(280)$$

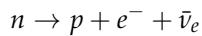
lo stupefacente accordo costituisce uno dei test più significativi a favore della QED. Nel caso in cui la particella quantistica non sia puntiforme il fattore  $g = 2$  si modifica ben più pesantemente. Ad esempio, nel caso del protone deve essere moltiplicato per 2.79 per cui si ha  $g = 2 \times 2.79 = 5.58$  mentre nel caso del neutrone deve essere moltiplicato per  $-1.91$  per cui si ha  $g = 2 \times (-1.91) = -3.82$ .

Alcuni fatti rilevanti:

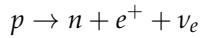
- La natura dei nucleoni *non è quella di particelle elementari*. Questo si intuisce dalla deviazione di  $g$  dal valore 2. Inoltre il modello a quark degli adroni conferma questo aspetto, asserendo che, in prima approssimazione, i nucleoni sono pensabili come **stati legati di tre quark** con 'carica forte' complessiva nulla nello stato di minima energia.
- nucleoni non possiedono momento di dipolo elettrico, un fatto che ha importanti implicazioni.
- La strong force ha carattere attrattivo e short range;
- Le dimensioni lineari del nucleo sono circa  $10^5$  volte inferiori a quelle dell'atomo. La descrizione quantistica dei fenomeni risulta essenziale(energia a livelli discreti ...);
- Dal principio di esclusione di Pauli si hanno vincoli sulla presenza di nucleoni (1 nucleone e 1 protone al massimo in ciascun quantum state) → degenerazione dei livelli energetici;
- I nuclidi più stabili tenderanno ad avere un numero di neutroni un po' più alto di quello dei protoni (condizione di minima energia).

Discutiamo la **stabilità** del nucleo.

Il neutrone è intrinsecamente **instabile**: può *decadere*, mediamente ogni 14.8 minuti, in protone, elettrone e antineutrino attraverso un processo mediato dalla interazione debole detto **decadimento beta**:



A ciò si aggiunge il fatto che il protone - stabile quando libero - quando fornito di sufficiente energia può dare luogo al **decadimento beta inverso** trasformandosi in neutrone, positrone e neutrino:



Cerchiamo di capire se e quando tali processi possano avvenire all'interno del nucleo.

Quando un nucleide è legato nello stato stabile di minima energia dalla interazione forte, accade che le interazioni deboli siano bloccate dal principio di Pauli(**Pauli blocking**<sup>1</sup>) per cui i nucleoni diventano stabili rispetto al decadimento beta e beta inverso.

Naturalmente, le precedenti considerazioni non valgono quando il nucleo si trova al di fuori della condizione di equilibrio a causa di un eccesso di neutroni o protoni. Infatti, in questo caso vi saranno livelli energetici incompleti ed i decadimenti beta e beta inverso potranno avvenire anche all'interno del nucleo dando luogo ad un fenomeno chiamato **decadimento radioattivo** che potrà ripetersi fino al raggiungimento della condizione di stabilità. Si hanno allora i seguenti casi:

- Se il nucleo ha un **eccesso di neutroni** rispetto ai protoni accade che la instabilità del neutrone rispetto le interazioni deboli non risulti più bloccata aprendo le porte al decadimento beta ( $\beta^-$ ) che convertirà neutroni in protoni (irradiando anche elettroni e antineutrini) fino a riportare il nucleo verso il 'corretto' quoziente neutroni/protoni:



- Se il nucleo ha un **eccesso di protoni** rispetto ai neutroni può accadere che sia possibile il **decadimento beta inverso** ( $\beta^+$ ) che convertirà protoni in neutroni (irradiando anche positroni e neutrini) fino a riportare il nucleo verso il 'corretto' quoziente neutroni/protoni:



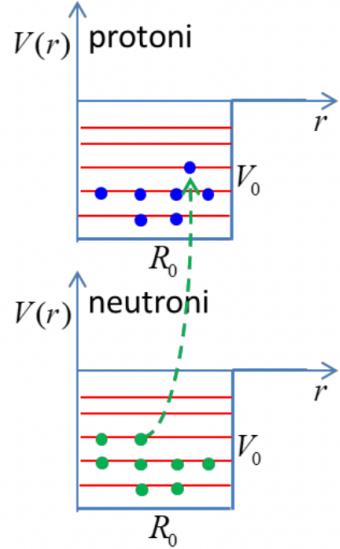
Nel caso in cui i nuclei siano circondati dai loro elettroni, risulta energeticamente conveniente il seguente processo 'associato' al decadimento beta inverso detto **cattura elettronica** (EC)



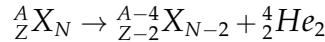
dove osserviamo che viene 'risparmiata' l'energia di creazione del positrone finale. Sempre nel caso di eccesso di protoni, si osserva che nel caso in cui il nucleo sia particolarmente pesante il nucleo

<sup>1</sup> A causa del principio di Pauli, quando il nucleide si trova nello stato stabile di minima energia, i livelli energetici discretizzati dei protoni e dei neutroni sono riempiti dal basso verso l'alto occupando tutti gli stati quantici disponibili. In questa situazione la trasformazione di un neutrone in protone può risultare energeticamente impossibile poiché può accadere che il protone finale non abbia sufficiente energia per occupare il primo stato quantico disponibile.

A maggior ragione può risultare energeticamente impossibile la trasformazione di un protone in neutrone già penalizzata dalla differenza di massa negativa.



tende quindi ad espellere nuclei di  $He$  dando luogo al cosiddetto **decadimento alpha**



- Se il nucleo è molto molto pesante, indipendentemente dal possibile eccesso di protoni e/o neutroni, può spezzarsi in due frammenti nucleari più una coda di nucleoni singoli formata perlopiù da neutroni dando luogo alla cosiddetta **fissione nucleare** (si parla di *fissione indotta* nel caso in cui il processo venga avviato da una causa esterna quale ad esempio un neutrone di energia opportuna).
- In presenza di eccesso di neutroni (protoni) può accadere(raramente)che il nucleo espella direttamente un neutrone (protone) dando luogo al **processo di emissione di neutroni (protoni)**



- Vi sono poi processi ancora più rari come la doppia emissione di protoni, il doppio decadimento beta di due neutroni, la doppia cattura elettronica, etc ...
- Va infine detto che nel corso di un decadimento nucleare è sempre possibile un riarrangiamento dei neutroni e dei protoni sui diversi livelli energetici del nucleo (transizioni isomeriche). Quando a riarrangiarsi sono i protoni, in virtù della loro carica elettrica, possono dissipare energia nel campo elettromagnetico ovvero ad uno o più fotoni. Dato che l'interazione forte tra nucleoni è intensa, i livelli energetici nucleari sono ben spaziati ed i fotoni prodotti assai robusti in un campo di lunghezze d'onda/frequenza tipico della cosiddetta **radiazione gamma**.

### 0.3 Le carte dei nuclidi

In figura 1 sono rappresentati gli stati fondamentali degli oltre 3300 nuclidi a tutt'oggi noti in funzione di  $N$  e  $Z$  (nelle carte interattive sono rappresentati anche gli stati eccitati o isomeri, si veda ad esempio <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>). Evidentemente, per ciascun nuclide, in linea orizzontale sono disposti gli isotopi, in linea verticale gli isotoni ed in linea obliqua gli isobari. In nero sono indicati i 253 *nuclidi stabili*, negli altri colori gli oltre 3000 nuclidi instabili con un codice colore che da una indicazione del tempo di dimezzamento o emivita <sup>2</sup>.

Un primo fatto rilevante riguarda la distribuzione dei nuclidi nel piano  $ZN$ . Già a colpo d'occhio si apprezza che i **nuclidi tendono ad avere più neutroni che protoni**. Si noterà che il quoziente  $N/Z$

<sup>2</sup> Secondo la meccanica quantistica i processi fisici sono di natura intrinsecamente statistica per cui è possibile predire solo la probabilità che avvengano. Data, pertanto, una popolazione di  $N$  nuclidi la variazione di  $N$  in un tempo elementare  $dt$  sarà data dalla espressione

$$dN = -N\lambda dt$$

dove  $\lambda$  è la **costante di decadimento del processo** e  $\frac{1}{\lambda} = \tau$  è detta **vita media del processo**. La popolazione in funzione del tempo è allora data da

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

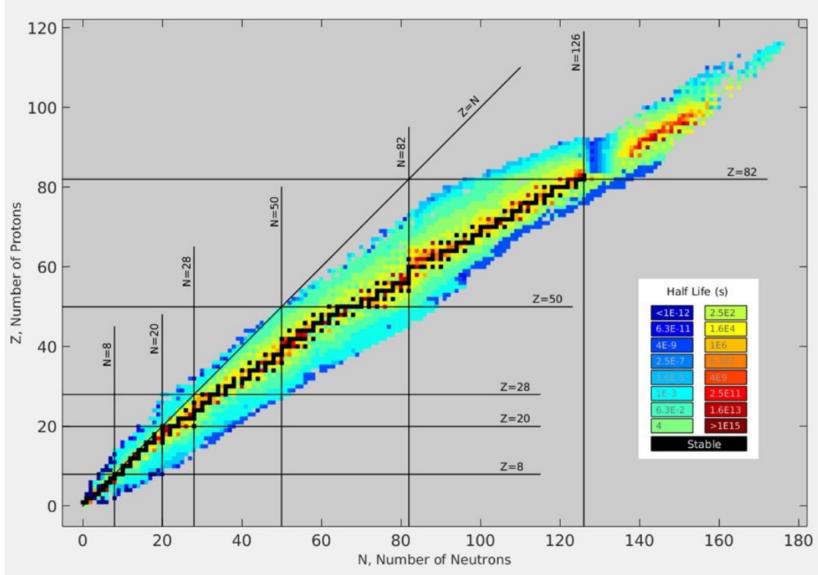


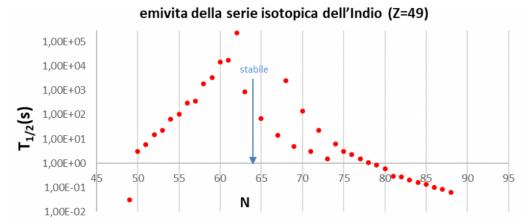
Figura 1: Nuclides plotted in  $NZ$  plane as a function of half-life.

si scosta sempre più dalla unità con il crescere del numero atomico  $A$ . Prendendo come riferimento i nuclidi stabili di ciascuna serie isotopica, si nota che i nuclidi  ${}^4_2\text{He}_2$ ,  ${}^{16}_8\text{O}_8$  fino a giungere al  ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$  giacciono sulla bisettrice con un quoziente  $N/Z \sim 1$ . I nuclidi medi come ad esempio  ${}^{111}_{48}\text{Cd}_{63}$  hanno un quoziente  $N/Z \sim 1.3$ . I nuclidi molto pesanti, infine, come  ${}^{238}_{92}\text{U}_{146}$ , hanno un quoziente  $N/Z \sim 1.6$ .

La instabilità nucleare è un fenomeno quantitativamente spettacolare: si va dalla emivita del  ${}^1_1\text{H}$  di  $2.85 \times 10^{-22}$  s a quella del  ${}^{128}_{52}\text{Te}$  di  $2.43 \times 10^{32}$  s ovvero attraverso 54 ordini di grandezza! Man mano che ci si allontana dalla linea dei nuclidi stabili (stability valley) i tempi di dimezzamento si accorciano progressivamente. A titolo di esempio si consideri la emivita della serie isotopica dell'indio in figura affianco.

Tornando alla carta dei nuclidi, le linee orizzontali e verticali a  $Z$  ed  $N = 8, 20, 28, 50, \dots$  detti **numeri magici**, corrispondono a configurazioni di protoni e neutroni particolarmente stabili (vedi modello a shell) poiché tali numeri completano le ‘shell’ nucleari ovvero i livelli energetici più prominenti del potenziale nucleare medio agente su ciascun protone e neutrone.

Si potrebbe pensare che i nuclidi doppiamente magici siano tutti stabili ma in realtà non è così. Certamente si tratta di configurazioni tendenzialmente più stabili delle altre tuttavia non bisogna dimenticare che la stabilità nucleare è soprattutto legata al corretto quoziente neutroni/protoni per cui è solo quando la *doppia magicità è compatibile con un quoziente  $N/Z$  non troppo lontano dal necessario che si ha davvero un nucleo particolarmente stabile*. La dimostrazione di



come la doppia magicità tenda a stabilizzare il nucleo è ben visibile nel  $^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$ , stabile nonostante abbia un quoziente  $N/Z$  diverso dai nuclidi della sua regione di numero atomico  $A$ .

I 253 nuclidi stabili si estendono lungo una linea a zig-zag nel piano  $Z, N$  da  $Z = 1$  ( $^1\text{H}$ ) a  $Z = 83$  ( $^{209}_{83}\text{Bi}$ ) quasi senza soluzione di continuità e spesso con diversi isotopi stabili per ciascun  $Z$ . Fanno eccezione  $\text{Tc}, \text{Pm} (Z = 43, Z = 61)$  che non hanno alcun nucleo stabile nella loro serie isotopica. Al di sopra della serie isotopica del Bismuto i nuclidi sono tutti instabili.

Occorre precisare che i 253 nuclidi stabili sono così suddivisi:

- 90 sono **teoricamente stabili**;
- 163 sono **osservazionalmente stabili**, ovvero teoricamente instabili ma con emivita non misurabile con le attuali tecniche.

I 253 nuclidi stabili sono stati certamente formati nel Big-bang e nel corso dei processi nucleosintetici all'interno delle stelle e delle supernovae. Si hanno inoltre 33 nuclidi con emivita maggiore di  $10^8$  anni, stima dell'emivita della Terra, per cui possiamo affermare che sulla Terra sono osservabili  $253 + 33 = 286$  **nuclidi primordiali**.

I 33 nuclidi instabili primordiali danno origine per decadimento

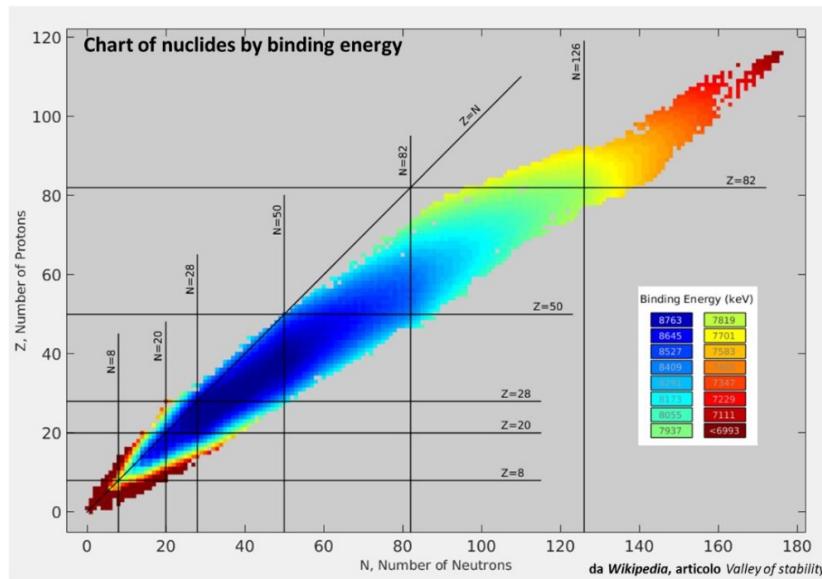


Figura 2: Chart of nuclides by binding energy.

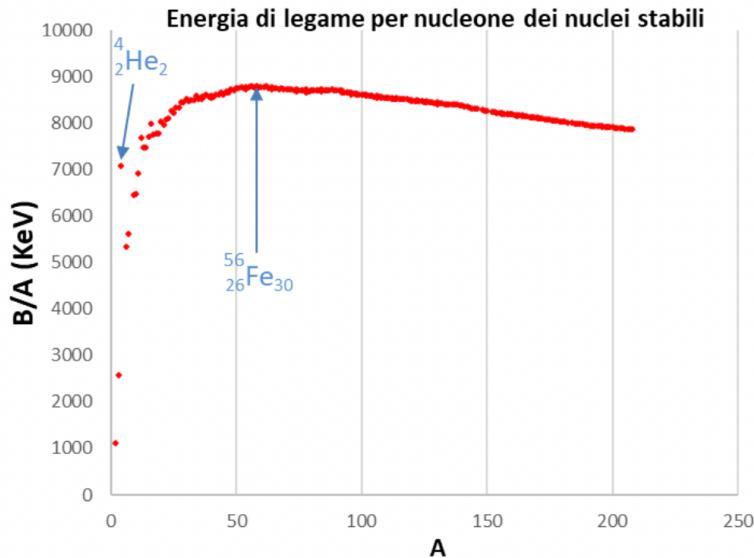
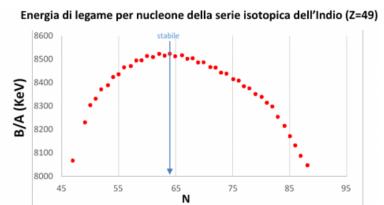
radioattivo ad un certo numero di *nuclidi figli* spesso di breve o brevissima vita media che certamente non possono essere primordiali. A questi dobbiamo aggiungere un certo numero di nuclidi generati da **reazioni nucleari indotte** dai raggi cosmici o dai neutroni naturali. Di questi ne sono noti 53 dunque in totale sulla terra sono osservabili

$286 + 53 = 339$  **nuclidi naturali**. I rimanenti, oltre 3000, sono pertanto **nuclidi artificiali** prodotti dall'uomo con tecniche differenti.

La carta in figura 2 fornisce informazioni complementari alle precedenti. Ci attendiamo che, per ciascun valore di  $Z$ , l'isotopo stabile sia quello con la maggiore energia di legame per nucleone.

L'andamento di  $B/A$  (energia di legame per nucleone) della serie isotopica dell'Indio ( $Z=49$ ) conferma tale ipotesi. I valori della energia di legame superano gli 8 MeV per nucleone e sono dell'ordine di 8.5 MeV nel caso dell'isotopo stabile  $N=64$ .

Ancora più interessante è l'**andamento della energia di legame per nucleone dei soli isotopi stabili maggiormente abbondanti di ciascun nucleo del piano  $Z, N$** . Ciò in qualche modo corrisponde alla sezione dell'istogramma bidimensionale della energia di legame lungo la sua linea mediana corrispondente agli isotopi stabili. Si ottiene l'andamento seguente:



Partendo dai nuclei leggeri, il quoziente  $B/A$  sale rapidamente raggiungendo un primo picco molto marcato ad oltre 7 MeV per nucleone nel nucleo di elio da cui risulta che la configurazione nucleare con due protoni e due neutroni è particolarmente stabile. Dopo essersi abbassato nel caso del litio ( $A=6$ ), il quoziente  $B/A$  sale con una certa regolarità fino ad un massimo corrispondente al ferro con 56 nucleoni dove  $B/A$  sfiora gli 8.8 MeV per nucleone. Al di là del ferro il quoziente  $B/A$  flette verso il basso con una certa regolarità. *Uno degli obiettivi dei modelli nucleari è quello di spiegare questo andamento.* Già nel caso del modello a goccia, il primo ad essere formulato, si

ottengono risultati soddisfacenti.

Da ciò che è stato detto al punto precedente segue immediatamente che i nuclei più *leggieri* del ferro guadagnano in stabilità *aggregando* ulteriori neutroni e protoni mentre i quelli più *pesanti* guadagnano in stabilità *perdendo* neutroni e protoni. Ciò significa che i processi di fusione dei nuclei leggeri e di fissione dei nuclei pesanti saranno esogenetici indicando così le due possibili vie per la produzione di energia attraverso reazioni nucleari. Significa anche che le reazioni nucleari nell'ambito dei processi naturali spontanei (che evolvono sempre verso stati di maggiore stabilità) tenderanno a fondere i nuclei leggeri e a fissionare quelli pesanti. La natura ha scelto la fusione dei nuclei leggeri per produrre energia all'interno delle stelle attraverso cicli successivi che trovano la loro fine nella sintesi del ferro che rende la stella gravitazionalmente instabile fino determinarne la esplosione.

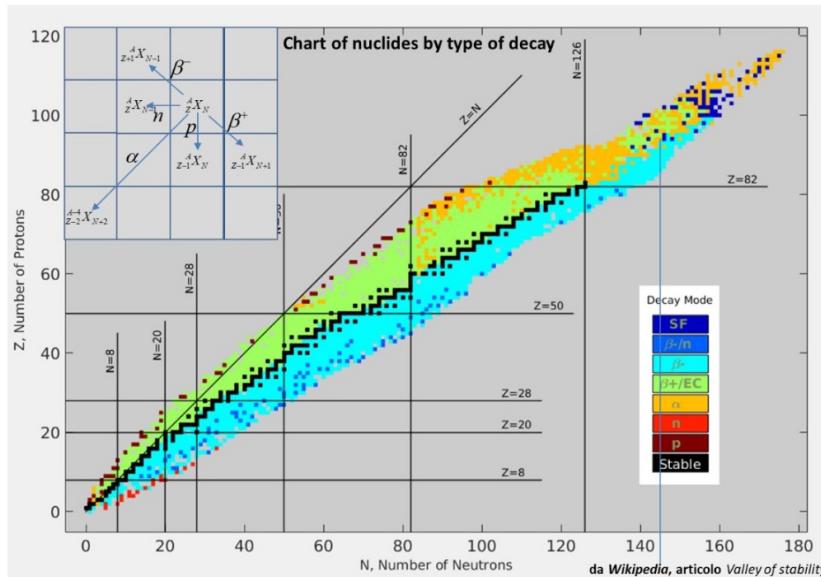


Figura 3: Chart of nuclides by type of decay.

La carta in figura 3 fornisce una visione d'insieme delle reazioni nucleari cui sono soggetti i nuclidi instabili. A colpo d'occhio è evidente che

- I nuclidi con un eccesso di neutroni tendono a ristabilire il corretto quoziente N/Z attraverso il decadimento  $\beta^-$ ;
- I nuclidi con un eccesso di protoni tendono in generale a ristabilire il corretto quoziente N/Z non attraverso il decadimento  $\beta^+$  ma piuttosto attraverso il processo ‘associato’ di cattura elettronica energeticamente più vantaggioso EC;

- I nuclidi pesanti con un forte eccesso di protoni tendono invece a ristabilire il corretto quoziente N/Z attraverso il decadimento  $\alpha$ . Il decadimento in questione è quello preferenziale per tutti i nuclidi con eccesso di protoni al di sopra del piombo ( $Z=82$ );
- I nuclidi pesantissimi con oltre 100 protoni e 140 neutroni (ad esempio il californio  $^{238}_{98}\text{Cf}_{140}$ ) sono soggetti a **fissione spontanea** (SF), ovvero alla frantumazione del nucleo in due nuclei più piccoli seguiti da un certo numero di nucleoni liberi perlopiù neutroni;
- Alcuni nuclidi leggeri con un forte eccesso di neutroni decadono **emettendo un neutrone** ( $n$ ). Esempi noti sono alcuni isotopi del boro e del berillio.

A titolo di esempio si riportano in figura 4 alcune catene di decadimento radioattivo che terminano sugli isotopi stabili del piombo che vengono raggiunti attraverso una alternanza di decadimenti alfa e beta negativo

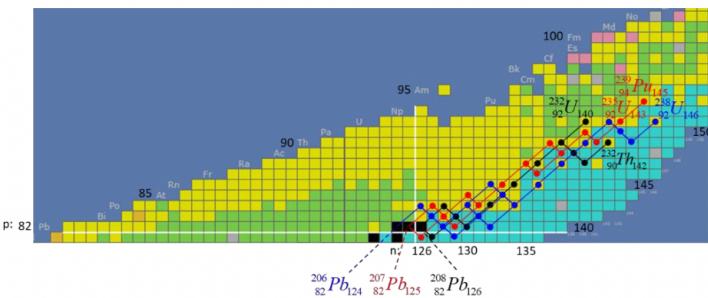


Figura 4: Catene del torio- $^{232}$ /uranio- $^{232}$  (in nero), dell'uranio- $^{235}$ /plutonio- $^{239}$  (in rosso) e dell'uranio- $^{238}$  (blu).

Le emivite di ciascun passo della catena possono variare dalla frazione di secondo ai milioni di anni; l'esempio della catena del torio-232/uranio-232 è reperibile all'indirizzo [https://en.wikipedia.org/wiki/Decay\\_chain#/media/File:Decay\\_Chain\\_Thorium.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Decay_chain#/media/File:Decay_Chain_Thorium.svg).

# *Lo studio del nucleo*

## *0.4 La sezione d'urto*

In quale modo i fisici possono esplorare la struttura di oggetti così piccoli quali sono gli atomi, i nuclei e le particelle subatomiche? Quali sono le grandezze fisiche sperimentalmente misurabili e quale tipo di informazioni su tali oggetti microscopici è effettivamente possibile ottenere da tali misure? Gli elementi fondamentali che caratterizzano l'esperimento di Rutherford(1909-1913) così come versioni più moderne sono i seguenti:

1. un **fascio incidente** di particelle proiettile;
2. un **bersaglio** contenente le particelle da studiare(atomi/nuclei /protoni/neutroni);
3. un **rivelatore** dietro/attorno al bersaglio capace di misurare le particelle emergenti<sup>3</sup>.

Nell'esperimento di Rutherford:

- fascio: particelle *alpha* di 5.6 MeV;
- bersaglio: gold foil con spessore di  $8.6 \times 10^{-6}$  cm
- rivelatore: vetro dipinto da *ZnS* scintillante al momento dell'incontro con particelle cariche.

**Goal** dell'esperimento: riconoscere le particelle emergenti e misurarne le grandezze cinematiche( energia, quantità di moto) al fine di ottenere informazioni sulla natura dell' **interazione** tra particella del fascio e particella del bersaglio.

Il termine **interazione** è un termine generico che può indicare sia la semplice deviazione di un certo angolo di una particella del fascio da parte di una particella del bersaglio che vere e proprie reazioni nel corso delle quali le particelle incidenti si trasformano in particelle di altro tipo Introduciamo la seguente notazione:

<sup>3</sup> Il progresso tecnologico nel campo delle macchine acceleratrici ha reso possibile una variante dello schema descritto dove la collisione avviene tra le particelle di due fasci contrapposti. I 'collider', certamente più difficili da costruire permettono però di raggiungere, a parità delle tecnologie di accelerazione delle particelle, una maggiore energia della collisione.

- **Processi di diffusione(scattering):** le particelle emergenti dal bersaglio coincidono con quelle del raggio incidente;
- **Processi di produzione:** non vale quanto sopra.

Tra i processi di diffusione si distinguono processi:

- **elastici :** energia della particella incidente = energia particella emergente
- **anelastici:** energia della particella incidente  $\neq$  energia particella emergente

Dato che solitamente la particella proiettile è priva di struttura interna, a differenza di quella bersaglio, si ha diffusione

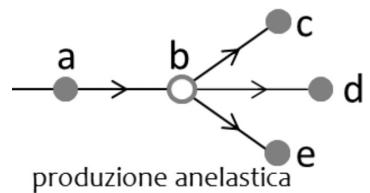
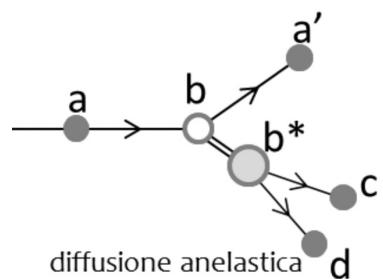
- **elastica:** se il bersaglio non modifica la sua struttura e non assorbe energia ( $\Delta E_{cin}^{Tot} = 0$ );
- **inelastica:** se il bersaglio modifica la sua struttura e assorbe energia.

A seguito della diffusione la particella bersaglio può decadere in nuove particelle in un processo noto come **produzione inelastica** (chiaramente l'elasticità non si può avere, sulla base della terminologia introdotta) caratterizzata da ( $\Delta E_{cin}^{Tot} \neq 0$ ). Si parla di *diffusione profondamente inelastica* quando l'energia della particella proiettile è tale che la De Broglie wavelength ad essa associata risulta molto minore della dimensione della particella bersaglio  $\rightarrow$  si può definire la struttura interna (che varia durante il processo).

Vogliamo ora domandarci quale **grandezza fisica microscopica del bersaglio** sia possibile misurare con un arrangemento sperimentale alla Rutherford. Per cominciare, occorre tenere presente che nella pratica sperimentale si cerca di ottenere un **fascio di particelle proiettile con densità e velocità uniformi** e costanti da inviare su di un **bersaglio materiale chimicamente omogeneo**. In generale, in questa situazione, si ottengono informazioni sui **componenti microscopici del bersaglio confrontando il fascio di particelle uscente con quello entrante**. In particolare maggiore e il numero di grandezze fisiche del fascio emergente che vengono misurate (distribuzione spaziale, energia, quantità di moto, tipologia, etc...) più dettagliata risulterà l'informazione sui componenti microscopici del bersaglio.

Le assunzioni che faremo sono le seguenti:

1. il fascio di sezione trasversale  $\Sigma$  sia costituito da corpuscoli massivi puntiformi in moto con la stessa velocità  $v$  e densità spaziale  $n_f$  uniforme e costante;



2. il bersaglio sia costituito da sferette massive di raggio dato, distribuite con densità  $n_b$  uniforme all'interno di un sottile strato materiale di spessore  $\Delta x$  e area maggiore di  $\Sigma$  (in modo da utilizzare tutte le particelle del fascio);
3. l'interazione tra particella proiettile e particella bersaglio sia assimilabile ad un urto meccanico;
4. a seguito di tale interazione la particella proiettile venga deviata e dunque rilevata in una direzione diversa da quella del fascio.

Date queste condizioni, la probabilità che una singola particella proiettile  $p_f^{(i)}$  interagisca con una singola particella del bersaglio  $p_b^{(j)}$  vale

$$\frac{\sigma}{\Sigma}$$

dove  $\sigma$  è la sezione trasversale della particella bersaglio e  $\Sigma$  la sezione trasversale del fascio. In pratica, detto  $\Delta N_f$  il numero di particelle del fascio che nel tempo  $\Delta t$  hanno avuto la possibilità di interagire con le  $\Delta N_b$  particelle del bersaglio, si ha un *numero di particelle deflesse dalla direzione del fascio* a seguito dell'urto pari a

$$\Delta N_{def} = \sum_j^{\Delta N_b} \sum_i^{\Delta N_f} \frac{\sigma}{\Sigma} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma}$$

Ora si noti che le  $\Delta N_f$  particelle del fascio sono contenute all'interno di un parallelepipedo di area  $\Sigma$  ed altezza  $v\Delta t$  mentre le  $\Delta N_b$  particelle del bersaglio sono contenute all'interno di un parallelepipedo di area  $\Sigma$  ed altezza  $\Delta x$ . Ricordando allora che le densità volumetriche di particelle del fascio e del bersaglio valgono rispettivamente  $n_f$  e  $n_b$ , si ottengono le seguenti espressioni:

$$\Delta N_f = \underbrace{\Sigma v \Delta t}_{\text{Volume}} n_f \quad \Delta N_b = \underbrace{\Sigma \Delta x}_{\text{Volume}} n_b$$

che sostituite forniscono il numero di particelle deflesse nel tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta N_{def} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma} = (\Sigma v \Delta t n_f)(\Sigma \Delta x n_b) \frac{\sigma}{\Sigma}$$

e quindi un rate di deflessione

$$\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t} = (vn_f)(\Sigma \Delta x n_b) \sigma$$

Invertendo la relazione, otteniamo infine l'espressione della **sezione trasversale della particella bersaglio o sezione d'urto**

$$\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{dN_{def}}{dt}$$

(1)

L'interesse di questa espressione risiede nel fatto che mette in relazione una grandezza fisica microscopica, quale la sezione trasversale  $\sigma$  della particella bersaglio, con grandezze fisiche macroscopiche misurabili quali sono i parametri geometrici  $n_f, n_b, \Sigma, \Delta x$  e  $\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t}$ .

La grandezza  $\sigma$  è detta **sezione d'urto totale** o **sezione totale d'interazione** ed è ciò che può essere misurato in un tipico arrangemento alla Rutherford (questa affermazione va presa cum grano salis poiché disponendo di un adeguato apparato si possono misurare le sezioni d'urto in funzione di specifiche variabili d'interesse), ha le **dimensioni di un'area** (in questo caso coincidente con l'area trasversale della particella bersaglio) e dunque si misura in  $m^2$  (più propriamente in suoi sottomultipli), ed è la grandezza fisica che **caratterizza l'interazione tra la generica particella del fascio e la generica particella del bersaglio**. Ci attendiamo infine che tale espressione abbia una **validità generale** e che possa essere applicata non solo nel caso specifico dell'urto meccanico da noi esaminato (impossibile a livello microscopico!) ma anche nel caso più realistico in cui le particelle del fascio e del bersaglio interagiscono per mezzo di una interazione naturale.

Infatti, anche nel caso delle particelle subatomiche, nel quale la mutua interazione non è certo schematizzabile come un urto meccanico di sfere rigide, sarà sempre possibile introdurre la grandezza microscopica  $\sigma$  il cui valore, però, non sarà determinato dalla sezione trasversale della particella ma dalle proprietà della interazione e tra particella proiettile e particella bersaglio.

Dunque, in fisica nucleare e delle particelle elementari gli esperimenti su fasci misurano essenzialmente le sezioni d'urto della interazione elementare fascio-bersaglio. Quando si dispone di una teoria quantitativa di tale interazione la grandezza  $\sigma$  può essere calcolata anche teoricamente ed allora, attraverso il confronto con il valore determinato sperimentalmente, risulta possibile saggiare la bontà della teoria stessa. Nella fisica nucleare e delle particelle elementari il confronto tra teoria ed esperimento avviene quasi sempre attraverso le sezioni d'urto.

Se l'apparato sperimentale è costruito in modo opportuno risulta possibile andare oltre il semplice conteggio del numero di particelle deflesse e fornire informazioni sempre più stringenti. Ad esempio, con un apparato sperimentale disposto attorno al bersaglio e *opportunamente segmentato*, in un processo di scattering risulta possibile misurare la distribuzione angolare delle particelle del fascio deflesse dal bersaglio acquisendo un'ulteriore informazione sperimentale sulle proprietà della interazione in gioco.

In questo modo si potrà misurare la sezione d'urto d'interazione con la condizione ulteriore che la particella proiettile emerga all'interno di un certo angolo solido elementare  $d\Omega$ . Avremo allora la



seguente d'urto elementare (poiché infinitesimo risulta l'elemento di angolo solido)

$$d\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} d \left( \frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \right)$$

Sezione d'urto differenziale  
rispetto all'angolo solido

in altri termini:

$$d\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d\dot{N}_{def} \text{ in } d\Omega}{d\Omega} d\Omega$$

dalla quale otteniamo l'espressione della **sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido** che è la grandezza misurata dal nostro ipotetico esperimento. Va da sé che l'integrale di tale sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido debba restituire la sezione d'urto totale

$$\boxed{\sigma = \iint_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \quad (2)$$

relazione che può essere assunta come definizione della sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido. Se il rivelatore permette di misurare anche l'energia della particella proiettile sarà possibile misurare il numero di particelle del fascio che nella unità di tempo emergono nell'angolo solido elementare  $d\Omega$  all'interno dell'intervallo elementare  $dE$ . Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \right) \\ \frac{d^2\sigma}{dEd\Omega} &= \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d}{dE} \frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \text{ e } dE \right) \end{aligned}$$

Il nostro ipotetico esperimento misurerà allora la seguente **sezione d'urto doppiamente differenziale in funzione dell'angolo solido e della energia** definita dalla relazione

$$\sigma = \iint_{\Omega} \int_E \frac{d^2\sigma}{dEd\Omega} dE d\Omega$$

Gli esempi citati, pur riferendosi a casi particolari chiariscono il fatto, di validità generale, che *il tipo di sezione d'urto misurata dipende essenzialmente dalle caratteristiche tecniche del rivelatore.*

Nel caso più semplice si misurerà una sezione d'urto totale di interazione ma, disponendo di rivelatori via via più sofisticati, risulterà possibile misurare sezioni d'urto differenziali di interazione in funzione di un insieme di variabili cinematiche sempre più ampio.

### 0.5 Calcoli di sezioni d'urto

Vediamo due esempi di calcolo di sezioni d'urto :

- i. Sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido di un fascio di proiettili di sezione trascurabile su sfere di raggio  $R$  nella ipotesi che abbiano luogo urti classici elastici;

- ii. Sezione d'urto differenziale di Rutherford.

CASO i. Senza entrare nel dettaglio della meccanica dell'urto - assumendo un sistema di coordinate sferiche con asse z lungo l'asse centrale della sfera - sappiamo che sussiste una piena simmetria rispetto all'angolo e l'**angolo di emergenza** del proiettile è interamente determinato dal **parametro d'urto**  $b$  attarverso una relazione del tipo

$$b = b(\theta) \quad (3)$$

che codifica i dettagli dell'urto stesso.

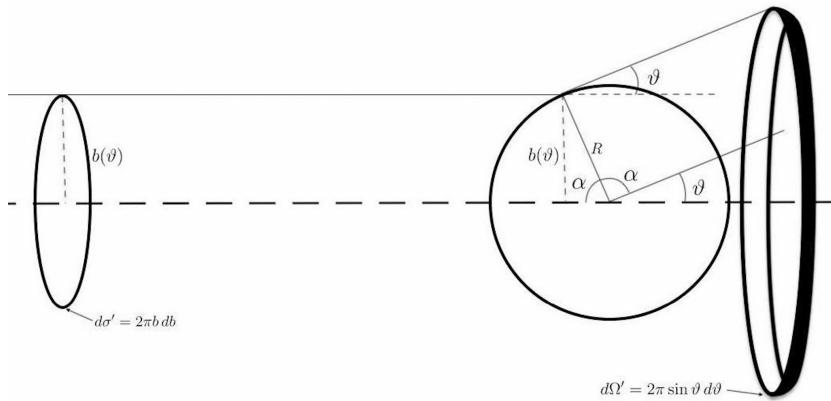


Figura 5: Calcolo della sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido di un fascio su sfere di raggio noto nell'ipotesi di urti classici elastici.

Facendo riferimento allo schema in figura 5 si ha

$$\begin{aligned} d\sigma' &= \int d\sigma = 2\pi b(\theta) db \\ d\Omega' &= \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\theta) d\theta = 2\pi \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

e inoltre dalla definizione di angolo solido:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Riusciamo quindi a scrivere la nostra sezione d'urto doppiamente differenziale, sulla base di (2):

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin(\theta) d\theta} \sin(\theta) d\theta d\varphi = bd\varphi db$$

Ciò significa che tutti i proiettili passanti per l'area elementare  $bd\varphi db$  saranno deflessi dello stesso angolo solido elementare  $d\Omega$ . Da qui segue

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\theta) d\varphi d\theta = bd\varphi \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta$$

e dunque, infine, la sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\theta)} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (4)$$

valida classicamente non solo nel caso della sfera rigida ma in generale.

Per calcolare la sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido nel caso della sfera rigida di raggio  $R$  dobbiamo ora precisare la forma della (3). Si trova facilmente

$$\frac{b}{R} = \sin \alpha \quad \theta = \pi - 2\alpha$$

da cui

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Sostituendo nella (4) otteniamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left| \frac{d}{d\theta} R \cos \frac{\theta}{2} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

da cui, infine, la sezione d'urto differenziale della sfera rigida di raggio  $R$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (5)$$

E' immediato verificare che da questa espressione si ottiene una sezione d'urto totale  $\sigma = \pi R^2$ .

La formula (5) puo essere utilizzata *anche nel caso in cui l'interazione tra le particelle del fascio e quelle del bersaglio non consista in un urto meccanico* ma in una interazione mediata da una forza naturale.

**CASO ii.** Trattiamo allora il caso della **diffusione di Rutherford** di proiettili di carica elettrica positiva  $ze$  su bersagli di carica elettrica positiva  $Ze$  governata dalla forza

$$\mathbf{F} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

con potenziale associato

$$V = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Dalla seconda equazione cardinale si ha

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$$

per cui, come noto tale forza **conserva il momento angolare** del proiettile:

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} \wedge \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{cost}$$

Sezione d'urto differenziale di una sfera rigida

Ciò implica

$$\mathbf{L}_{t \rightarrow -\infty} = \mathbf{L}_t \quad (\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v})_{-\infty} = (\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v})_t$$

Tenendo conto delle seguenti condizioni al contorno

$$x_{-\infty} \leq 0, \dot{x}_{-\infty} = v_0 \quad y_{-\infty} = b, \dot{y}_{-\infty} = 0$$

la precedente si riscrive come (il secondo termine è stato scritto in coordinate polari piane)

$$(-x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \wedge (m\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + m\dot{y}\hat{\mathbf{j}})_{-\infty} = r\hat{\mathbf{r}} \wedge m(r\dot{\hat{\mathbf{r}}} + r\dot{\phi}\hat{\phi})$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} -\dot{x}y &= r^2\dot{\phi} \\ \dot{\phi} &= -\frac{v_0}{r^2}b \end{aligned} \tag{6}$$

Sfruttiamo ora la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} T_{-\infty} + V_{-\infty} &= T_\infty + V_\infty \\ V_{\pm\infty} &= -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\pm\infty}} = 0 \rightarrow T_{-\infty} = T_\infty \end{aligned}$$

ed otteniamo

$$v_0 = v_\infty \tag{7}$$

Fatte queste premesse conviene risolvere la sola **equazione del moto trasversale**:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{d}{dt}mv_y - \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \varphi = \frac{d}{dt}mv_y \\ mv_{y,t=+\infty} - mv_{y,t=-\infty} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \varphi dt \end{aligned}$$

Dalle condizioni al contorno

$$v_{y,t=+\infty} = v_{t=+\infty} \sin \theta \quad v_{y,t=-\infty} = 0 \quad \varphi_{t=+\infty} = \theta \quad \varphi_{t=-\infty} = \pi$$

e usando (6) si ottiene

$$mv \sin \theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin \varphi \frac{r^2}{v_0 b} d\varphi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} (\cos \theta + 1)$$

da cui

$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \tag{8}$$

Ora possiamo derivare questa espressione

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \frac{1}{\sin^2 \theta / 2}$$

e sostituirla nella (4) assieme alla (7) ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right) \cot \frac{\theta}{2} \frac{1}{2 \sin \theta/2 \cos(\theta/2)} \frac{1}{2} \left( \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta/2}$$

da cui la **sezione d'urto differenziale di Rutherford**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left( \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (9)$$

un risultato valido anche in meccanica quantistica.

[Esercizio in dispensa pag 38.]

### o.6 Le proprietà ondulatorie delle particelle microscopiche

Nel 1913, quando Geiger, Mursden e Rutherford compirono il loro esperimento, interpretarono le collisioni tra particelle del fascio e atomi del materiale in termini di urti governati dalle leggi della meccanica classica. Non potevano fare altrimenti, tuttavia di lì poco Bohr - sulla base dei lavori di Plank ed Einstein - e poi nella decade successiva De Broglie, Heisenberg, Schrödinger e Born modificheranno radicalmente il quadro interpretativo introducendo l'idea che **le particelle microscopiche, oltre a possedere proprietà corpuscolari, dovevano possedere anche proprietà ondulatorie**, per cui ad esse si doveva associare una lunghezza d'onda e frequenza (De Broglie) ed una funzione d'onda (Born), soluzione quest'ultima di una determinata equazione d'onda (Schrödinger), giungendo così alla formulazione della

D'altra parte, a partire dai lavori di Planck sul corpo nero (1900) e di Einstein sull'effetto fotoelettrico (1905), venne contemporaneamente affermandosi l'idea che i campi classici maxwelliani - dotati certamente di proprietà ondulatorie poiché capaci dei fenomeni della interferenza e diffrazione – dovevano essere costituiti da enti microscopici (poi chiamati quanti del campo) dotati anche di proprietà corpuscolari. Si affermo così il concetto di **quanto del campo come ente microscopico intrinsecamente 'ibrido' poiché dotato di proprietà sia ondulatorie che corpuscolari**. Dato questo stato di cose, si pose naturalmente la domanda se le particelle microscopiche ed i quanti del campo - entrambi dotati di proprietà sia corpuscolari che ondulatorie - dovessero essere pensati come enti distinti oppure no.

La risposta – fondamento del moderno punto di vista - fu data dalle teorie di campo quantizzato (formulate alla fine degli anni '20 da Dirac, Heisenberg, e Jordan) le quali assumono che **le particelle microscopiche osservate negli apparati sperimentali devono essere identificate con i quanti di specifici campi**, superando in tal modo la

ripartizione degli enti fisici in particelle materiali e campi affermata dalla fisica classica. Da ciò consegue che **il linguaggio naturale della fisica delle particelle debba essere quello della teoria dei campi quantizzati** tuttavia, quando le energie in gioco non sono così elevate da rendere necessaria una descrizione relativistica e soprattutto da rendere possibili processi di creazione e distruzione di particelle, **la descrizione offerta dalla meccanica quantistica ordinaria risulta appropriata.**

Per questo, alle basse e medie energie possiamo certamente assumere che la fisica nucleare possa essere ben descritta nell'ambito della meccanica quantistica mentre questo non è certamente più vero nella fisica nucleare alle alte energie dove possono avversi collisioni tra nucleoni ad energie di centinaia o migliaia di GeV per nucleone (Alice ha operato a 2.76 TeV per coppia di nucleoni) e risulta necessaria una descrizione dei processi basata sulle teorie di campo quantizzato.

Volendo richiamare in modo diretto ed euristico alcuni concetti di meccanica quantistica, si può cominciare scrivendo **le grandezze cinematiche fondamentali di una generica onda piana sinusoidale**, ovvero la **pulsazione** ed il **vettore d'onda** collegate tra loro nella **relazione di dispersione** che caratterizza le proprietà fisiche del mezzo in cui l'onda stessa si propaga

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \quad \omega = \omega(k)$$

Scriviamo anche **le grandezze cinematiche fondamentali di un generico corpuscolo libero** che corrispondono alle espressioni relativistiche della **energia e quantità di moto** collegate dalla **relazione energia-impulso**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (10)$$

Sulla base di considerazioni di natura assai generale, Einstein e De Broglie ipotizzarono che **le grandezze ondulatorie e corpuscolari fossero legate dalle seguenti relazioni** (valide sia nella meccanica quantistica che nella teoria dei campi quantizzati)

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k$$

per cui dedussero il seguente legame esplicito tra grandezze ondulatorie e corpuscolari valido per le particelle microscopiche e le non meglio precise 'onde quantomeccaniche' o 'onde di De Broglie' a loro associate

$$E = \hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p = \hbar k = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \omega^2 = k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (11)$$

Equazioni di De Broglie-Einstein

La relazione dispersione (relazione energia-impulso) indica chiaramente che le componenti di Fourier delle ‘onde quantomeccaniche’ si propagano come se il vuoto fosse un **mezzo dispersivo**. Se ad una particella materiale si devono associare grandezze ondulatorie ad essa si dovrà pure associare una fase ed una certa funzione della fase detta **funzione d’onda** il cui significato fisico dovrà essere precisato. Una data componente di Fourier di tale onda in forma piana dovrà comunque avere la seguente semplice espressione<sup>4</sup>

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \quad (12)$$

Come in un qualunque fenomeno ondulatorio, data la funzione d’onda si pone il problema di stabilire l'**equazione d’onda** ovvero l’equazione che ne governa la dinamica.

Trovare l’espressione formale della equazione d’onda in modo diretto per una data componente di Fourier non è difficile poiché sappiamo che una volta sostituita la funzione d’onda (12) essa non deve fare altro che restituire la relazione energia-impulso (10) o la relazione di dispersione (11). A questo scopo vale la pena introdurre le seguenti **operazioni di differenziazione**

$$\begin{aligned} -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r}, t) &= -i\hbar\nabla\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} = -i\hbar\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \frac{i}{\hbar}\mathbf{p} = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, t) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} = i\hbar\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = E\psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Le precedenti relazioni mostrano che gli operatori differenziali, agendo sulla generica componente di Fourier, ne determinano la rimoltiplicazione per i valori della quantità di moto ed energia, un fatto che suggerisce di definirli come **operatori della quantità di moto ed energia**:

- Operatore della **quantità di moto**

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla$$

- Operatore **dell’energia**

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Nel linguaggio degli operatori, le precenti espressioni possono allora essere rilette affermando che in una data componente di Fourier dell’onda quantomeccanica i **valori della quantità di moto e della energia sono autovalori degli operatori**  $\hat{P}$  ed  $\hat{E}$  mentre la funzione d’onda è un loro autostato

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, t) \quad \hat{E}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t)$$

<sup>4</sup> L’utilizzo della notazione complessa non è casuale. Infatti alle due espressioni

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \sin(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)$   
sono associate probabilità differenti

$$|\psi_1|^2 = \psi_0^2$$

$$|\psi_2|^2 = \psi_0^2 \sin^2(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

di cui solo la prima è in accordo con le verifiche sperimentali.

Introdotti gli operatori energia e quantità di moto, possiamo partire dalla relazione relativistica energia-impulso della particella libera ed ottenere la sua equazione d'onda. I passaggi sono i seguenti

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ E^2 \psi(\mathbf{r}, t) &= p^2 c^2 \psi(\mathbf{r}, t) + m^2 c^4 \psi(\mathbf{r}, t) \\ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\mathbf{r}, t) &= c^2 (-i\hbar \nabla) (-i\hbar \nabla) \psi(\mathbf{r}, t) + m^2 c^4 \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Si noti che **tale equazione è lineare per cui deve valere non solo per la data componente di Fourier ma – in modo del tutto generale - per una qualunque sovrapposizione di componenti di Fourier e dunque per una qualsiasi onda.**

Giungiamo così ad individuare l'**equazione d'onda** cercata detta **equazione di Klein-Gordon** valida per le '**onde quantomeccaniche libere scalari** (senza spin, essendo  $\psi$  scalare)

Equazione di Klein-Gordon

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

Tale equazione fu trovata per la prima volta da Schrödinger il quale però non riuscì a fornire una interpretazione fisica consistente della funzione d'onda. Si trattava di un problema cruciale che poteva essere superato solo interpretando la funzione d'onda nel senso della teoria dei campi quantizzati. Non essendoci allora i presupposti per un passaggio di tal genere, Schrödinger rinunciò alla equazione d'onda relativistica e ripiegò sulla **equazione d'onda classica** la cui interpretazione sembrava meno problematica. Tale equazione la si può ottenere seguendo esattamente lo stesso tipo di procedimento partendo però dalla espressione **energia-impulso classica delle particelle libere**

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Compreso questo fatto, possiamo puntare direttamente a costruire l'**equazione d'onda non relativistica per le 'onde quantomeccaniche' in presenza di forze aggiungendo il loro potenziale alla espressione precedente**

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

Nel caso di una generica componente di Fourier otteniamo allora

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \rightarrow E \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla) (-i\hbar \nabla) \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Data la linearità della equazione, concludiamo che l'espressione ottenuta deve essere valida non solo per la generica componente di Fourier ma per una qualunque funzione d'onda. Definendo allora l'operatore tra parentesi come **operatore hamiltoniano**  $\hat{H}$ , otteniamo la seguente **equazione d'onda di Schrödinger** valida per le 'onde quantomeccaniche' scalari (senza spin) non relativistiche in presenza di forze

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (14)$$

Tale equazione rese possibile una interpretazione della funzione d'onda che - pur non essendo di validità generale - permetteva comunque di descrivere in modo appropriato i fenomeni quantomeccanici in regime non relativistico ovvero alle basse e medie energie dove non avvengono processi di creazione e/o distruzione di particelle. Tale interpretazione fu proposta da M. Born ed afferma che

Il modulo quadrato della funzione d'onda nella posizione  $\mathbf{r}$  ed al tempo  $t$  rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella materiale in quella posizione ed in quell'istante di tempo a seguito di una misura di posizione.

Questa ipotesi va a costituire uno dei fondamentali assiomi interpretativi della meccanica quantistica e comporta che l'espressione

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV \quad (15)$$

rappresenti la probabilità di misurare la particella materiale al tempo  $t$  all'interno del volume  $dV$  centrato nella posizione  $\mathbf{r}$ .

I fatti appena richiamati chiariscono che l'**interazione particella-proiettile/particella-bersaglio non deve essere pensata come un processo d'urto meccanico ma, piuttosto, come un processo di diffrazione/rifrazione dell'onda quantomeccanica associata alla particella proiettile a seguito della sua interazione con l'ostacolo-bersaglio**. Dunque essenzialmente un processo di 'ottica delle onde quantomeccaniche' dipendente dal tipo di interazione in gioco. Se il bersaglio è totalmente riflettente risulterà un processo di diffrazione simile a quello di un tratto di muro piazzato sul percorso di un'onda in acqua. Se il bersaglio è totalmente assorbente risulterà un processo di diffrazione simile a quello di un tratto di scogliera. Se invece il bersaglio opera come un potenziale di forza avremo un processo di rifrazione assimilabile alle distorsioni dei fronti d'onda determinate dalle variazioni di profondità del fondale. Al netto di questi dettagli è comunque evidente che **gli esperimenti fascio-bersaglio con particelle microscopiche devono essere interpretati in chiave ondulatoria**.

Ad esempio, se vogliamo esplorare la struttura di un nucleo atomico dovremo essere in grado di risolvere almeno i singoli nucleoni. Ma

Equazione d'onda di Schrödinger

l'interferenza di due onde provenienti da due diversi nucleoni è apprezzabile solo se i cammini differiscono di una quantità dell'ordine della lunghezza d'onda.

D'altra parte la differenza di tali cammini è anche dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone. Ciò significa che dovremo impiegare particelle proiettile aventi una lunghezza d'onda di De Broglie dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone ovvero dell'ordine di  $1fm$ . In questo modo saremo sensibili agli effetti diffrattivi-interferenziali indotti dalla struttura nucleare che potremo osservare raccogliendo le particelle diffuse su di un rivelatore capace di misurarne la posizione angolare. Per quanto riguarda invece la scelta del proiettile converrà utilizzare i neutroni dato che non risentono della interazione elettromagnetica che andrebbe a complicare il fenomeno (si tenga però presente che è più difficile avere a che fare con fasci e rivelatori di neutroni!).

Ricordando che

$$\frac{\hbar c}{200MeV} \simeq 1fm$$

si ha

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{1} fm^{-1} = \hbar 2\pi \frac{200MeV}{\hbar c} \simeq 1.2 \frac{GeV}{c}$$

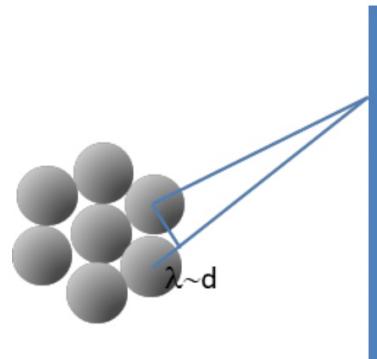
$$\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \simeq \sqrt{(1.2)^2 + (1.0)^2} \simeq 1.5GeV$$

da cui si verifica che con un fascio di particelle di circa  $1.2GeV/c$  di impulso ed  $1.5GeV$  di energia si raggiunge lo scopo. Se invece vogliamo esplorare la struttura del singolo nucleone dovremo avere un potere risolutivo almeno 100 volte superiore ovvero un impulso 100 volte maggiore e dunque fasci di particelle di impulso dell'ordine di  $100GeV$ .

### 0.7 Teoria della diffrazione di Kirchoff

Dato che l'interazione fascio-bersaglio consiste essenzialmente nella diffrazione delle onde di De Broglie associate alle particelle del fascio da parte delle particelle del bersaglio, la corretta soluzione del problema può essere ottenuta cercando l'espressione della funzione d'onda che:

1. soddisfa l'equazione di Schrödinger con potenziale nella regione in cui il fascio interagisce con il bersaglio;
2. soddisfa l'equazione d'onda di Schrödinger libera nella regione esterna alla interazione prima e dopo il bersaglio;
3. soddisfa la condizione al contorno di essere un'onda piana prima di incidere sul bersaglio.



Seguiremo un approccio che sottolinea l'identità tra onde classiche e onde di De Broglie utilizzando l'ottica classica. Come noto, la diffrazione delle onde scalari classiche da parte di una apertura puo' essere trattata in modo rigoroso per mezzo della **teoria di Kirchhoff**, la cui trattazione formale si trova nel famoso testo di Ottica Classica di Born<sup>5</sup>. In particolare, se una apertura  $A$  è investita da un'onda monocromatica, la funzione d'onda diffratta  $\psi(\vec{r})$  in un generico punto dello spazio  $\vec{r}$  oltre lo schermo è data dalla seguente espressione:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[ \psi(\vec{r}') (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\vec{r}') \right] d\mathbf{a}' \quad (16)$$

dove

- $\vec{r}$  è il vettore posizione del punto di osservazione
- $\vec{r}'$  è il vettore posizione di un punto dell'apertura
- $\psi(\vec{r}')$  è la funzione d'onda calcolata nel punto  $\vec{r}'$  dell'apertura
- $\mathbf{n}'$  è la normale allo schermo nel punto  $\vec{r}'$  dell'apertura
- $\nabla'$  è il gradiente della funzione d'onda nel punto  $\vec{r}'$  dell'apertura
- $k$  è il modulo del vettore d'onda della funzione d'onda incidente
- $s = |\vec{r} - \vec{r}'|$  è il modulo del vettore congiungente il punto dell'apertura con quello di osservazione

Dato che la funzione d'onda  $\psi(\vec{r})$  compare in entrambi i membri, tale espressione richiede la conoscenza della funzione  $\psi(\vec{r})$  stessa che si vuole determinare (questo fatto è noto come 'Paradosso di Kirchhoff'). Un circolo vizioso che viene evitato attraverso **l'approssimazione di Kirchhoff** la quale assume che la funzione  $\psi(\vec{r})$  sia non nulla nei soli punti dell'apertura  $A$  ed ivi coincida con la funzione d'onda monocromatica incidente(eliminando così il problema dell'incurvatura dei fronti d'onda).

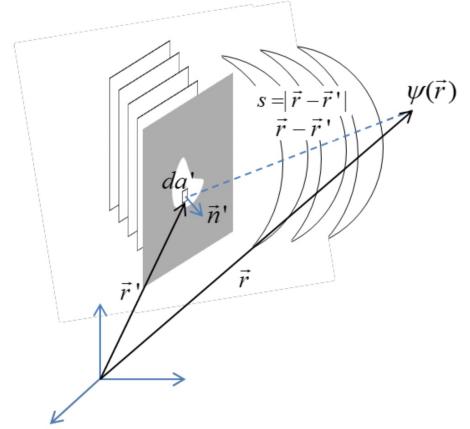
Consideriamo allora il caso di onda piana monocromatica diretta lungo l'asse delle  $z$  positive incidente su di uno schermo piano normale all'asse stesso. Si ha

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \psi_0 e^{ik \cdot \vec{r}} = \psi_0 e^{ik(\hat{k}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}))} = \psi_0 e^{ikz} \\ \mathbf{n}' &= \hat{k} \\ \psi(\vec{r}') &= \psi_0 e^{ik \cdot \vec{r}'} = \psi_0 e^{ik(\hat{k}(x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}))} = \psi_0 e^{ikz'} \end{aligned}$$

e inoltre

$$s = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

<sup>5</sup> Emil Wolf Max Born. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 60th anniversary edition, 2019. ISBN 978-1-108-47743-7



Sviluppiamo ora i termini presenti nell'equazione di Kirchhoff:

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{iks}}{s} = ik \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial s}{\partial z'} - \frac{e^{iks}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial z'} = \left( ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \frac{\partial s}{\partial z'}$$

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial z'} \psi_0 e^{ikz'} = ik \psi_0 e^{ikz'}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$= -\frac{1}{2s} 2(z - z') = -\frac{z - z'}{s} = \cos \theta$$

con

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \hat{k}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$$

Da qui si ottiene lo sviluppo del primo termine presente nell'equazione di Kirchhoff (16):

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} = - \left( ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \cos \theta$$

Sostituendo infine le espressioni di  $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s}$  e di  $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}')$  in (16) otteniamo

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \left[ -\psi_0 e^{ikz'} \left( ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \cos \theta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da'$$

Compiamo la seguente *approssimazione*: se il punto di osservazione è a grande distanza, al primo ordine il termine  $1/s^2$  può essere trascurato. Abbiamo

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \left[ -\psi_0 e^{ikz'} ik \frac{e^{iks}}{s} \cos \theta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da'$$

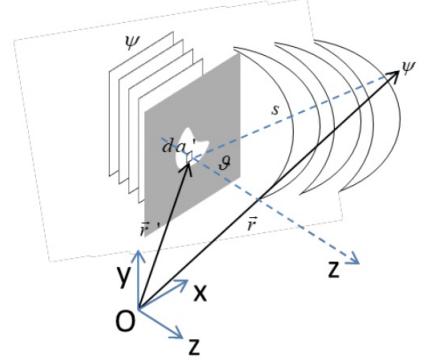
$$\psi(\mathbf{r}) \simeq -\psi_0 \frac{ik}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(kz+ks)}}{s} (\cos \theta + 1) da' \simeq -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(kz+ks)}}{s} da'$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato  $\theta \ll 1 \rightarrow \cos \theta \simeq 1$ . Si noti che l'espressione integrale ottenuta corrisponde al ben noto principio di Huygens completato dal **fattore di obliquità** che modula l'ampiezza in modo tale da fornire le onde in avanti ed annullare quelle all'indietro. Nell'integrale appena ottenuto vogliamo esprimere la fase dell'esponenziale in forma generale attraverso vettori

$$k(s + z') = k(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + z') = k \left( \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right)$$

$$= k \left( r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right) \simeq k \left\{ r \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right] + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right\}$$

$$= k \left( r + \frac{r'^2}{2r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right) = kr + k \frac{r'^2}{2r} - k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + k \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}'$$



$f(\theta) = 1 + \cos \theta$  fa sì che ci sia un fattore che modula l'ampiezza con casi limite

- $f(0) = 2$ ;
- $f(\pi) = 0$ .

I valori assunti da  $r'$  sono molto minori rispetto a quelli di  $r$ ; in particolare se  $D$  è la dimensione lineare del foro e  $L$  la distanza dal punto di osservazione

$$k \frac{r'^2}{2r} \simeq \frac{D^2}{\lambda L}$$

Se  $\frac{D^2}{\lambda L} \ll 1$  si parla di **regime di Fraunhofer** e il termine in questione può essere trascurato. Chiamando

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

si ha

$$k(s + z') \simeq kr - (k\mathbf{n} - k\mathbf{n}') \cdot \mathbf{r}'$$

Introducendo il **vettore d'onda trasferito** (che parametrizza lo spostamento del punto di osservazione dall'asse del fascio)

$$\mathbf{q} = k\mathbf{n} - k\mathbf{n}'$$

otteniamo infine

$$k(s + z') \simeq kr - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$$

Se il riferimento è interno alla apertura, a seguito della condizione di Fraunhofer si ha (sistema  $\simeq$  al centro del foro)

$$s \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \simeq r - r' \cos \theta \simeq r$$

da cui, si ottiene infine l'espressione cercata della **funzione d'onda in campo lontano (o di Fraunhofer) scatterata da una apertura  $A$  investita da un'onda monocromatica**

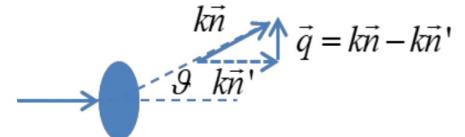
$$\psi(\mathbf{r}) \simeq -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{apA} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da' \quad (17)$$

Come anticipato, però, a noi interessa la situazione complementare, poiché vogliamo descrivere l'interazione fascio-bersaglio come diffrazione delle onde di De Broglie del fascio da parte di un ostacolo avente la forma del bersaglio.

La funzione d'onda  $\psi_{ostA}$  diffratta da uno schermo avente la forma di  $A$ , può essere ottenuta con il semplice **principio degli schermi complementari o principio di Babinet**.

La (17) fornisce la funzione d'onda diffratta dalla apertura  $A$  come integrale dei contributi degli elementi d'area di  $A$ . E' chiaro che la funzione d'onda  $\psi_{ostA}$ , diffratta da uno schermo avente la stessa forma di  $A$ , deve essere data da un integrale dei contributi degli elementi d'area della superficie complementare  $CA$ .

Ne consegue che la somma delle funzioni d'onda  $\psi_{apA} + \psi_{ostA}$  debba essere data da un integrale dei contributi degli elementi d'area



del piano infinito contenente  $A$ , integrale che deve restituire l'onda monocromatica piana incidente

$$\psi_{apA}(\mathbf{r}) + \psi_{ostA}(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}}$$

Da questa relazione possiamo allora ricavare la seguente espressione della **funzione d'onda diffratta da uno schermo di area A investita da un'onda monocromatica**

$$\begin{aligned} \psi_{ostA}(\mathbf{r}) &= \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} - \psi_{apA}(\mathbf{r}) \\ &\simeq \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_A e^{-iq \cdot \mathbf{r}'} da' \end{aligned} \quad (18)$$

All'interno dell'integrale di superficie di questa espressione conviene introdurre la **funzione di profilo**  $\Gamma$  (nota anche come "funzione pupillare" in ottica classica) la quale, nel caso di una apertura  $A$  totalmente trasparente, risulta definita nel modo seguente

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{all'interno di } A \\ 0 & \text{all'esterno di } A \end{cases}$$

Si ha allora

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma e^{-iq \cdot \mathbf{r}'} da'$$

dove  $S_B$  (superficie del bersaglio) è il piano infinito contenente lo schermo/ostacolo  $A$ . Si noti che ammettendo valori di  $\Gamma$  interni ad  $A$  inferiori ad 1, descriviamo un ostacolo  $A$  non più totalmente assorbente come uno schermo, ma piuttosto parzialmente trasparente: nel caso limite in cui  $\Gamma = 0$  abbiamo infatti un ostacolo  $A$  totalmente trasparente che non genera alcuna diffrazione e restituisce l'onda piana incidente.

Potremmo ottenere la massima generalità ammettendo che  $\Gamma$  possa dipendere dalla posizione  $\mathbf{r}'$  in  $A$  ed *assumere anche valori immaginari in modo da descrivere eventuali effetti assorbitivi*. Una simile funzione di profilo ci permette di estendere la diffrazione di un ostacolo  $A$  totalmente assorbente al caso generale della diffrazione di un ostacolo  $A$  modulante e variamente trasparente, capace di descrivere la diffrazione della funzione d'onda da parte della materia nucleare. Sulla base di queste considerazioni, la funzione d'onda assume la forma seguente

Ampiezza di scattering

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-iq \cdot \mathbf{r}'} da'}_{f(q)} \quad \Gamma(\mathbf{r}') \in \mathbb{C}$$

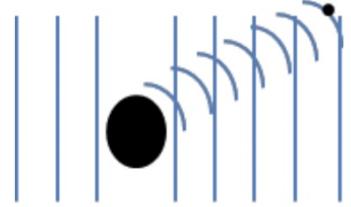
Introducendo l'**ampiezza di scattering**, che integra i contributi modulanti e assorbenti degli elementi d'area dell'ostacolo corrispondenti ad un certo vettore d'onda trasferito  $q$

$$f(q) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(r') e^{-iq \cdot r'} da' \quad (19)$$

e da (18) otteniamo la seguente espressione della **funzione d'onda in campo lontano diffratto da un ostacolo modulante e assorbente**

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_0 \left( e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(q) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (20)$$

Tale espressione mostra che la figura di diffrazione prodotta da un ostacolo in un dato punto dello spazio è il risultato della interferenza dell'onda piana incidente con l'onda sferica proveniente dall'ostacolo modulata dall'ampiezza di scattering.



### o.8 Le sezioni d'urto in meccanica quantistica

Per definizione, la *probabilità che si verifichi una certa "interazione"* tra fascio e bersaglio corrisponde a

$$p_{int} = \frac{\sigma_{int}}{\Sigma}$$

un fatto che ci permette di affermare che la sezione d'urto del processo altro non è che la frazione di sezione del fascio che produce eventi di quel processo di interazione. D'altra parte, nella meccanica quantistica, la probabilità di un certo processo può essere calcolata mettendo a quoziente il modulo quadrato della funzione d'onda del processo integrato sulla *superficie di osservazione*  $S_O$  con il modulo quadrato della funzione d'onda incidente integrata sulla sezione del fascio  $\Sigma^6$

$$p_{int} = \frac{\iint_{S_O} |\psi_{int}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (21)$$

Il termine a denominatore fa sì che sia rispettata la condizione di normalizzazione per cui il quoziente può davvero rappresentare una probabilità. Si pensi infatti ai casi limite (per definitezza consideriamo il processo in questione un processo di scattering):

- $\psi_{scatt} = \psi_{inc}$ : si ha l'onda incidente tutta sullo schermo per cui  $p_{scatt} = 1$ ; misurando sullo schermo tutta l'onda iniziale significa che sicuramente c'è stata l'interazione di scattering che ha prodotto l'onda stessa;
- $\psi_{scatt} = 0$ : l'interezza dell'onda viene assorbita dallo schermo per cui  $p_{scatt} = 0$ .

<sup>6</sup> Si ha una profonda analogia con l'ottica classica. Basti pensare al caso delle onde elettromagnetiche, per cui l'equivalente della relazione 21 sarebbe la valutazione del bilancio energetico tra l'energia dell'onda post processo (scattering/absorption) e quella di quella incidente pre processo. Il denominatore della 21 rappresenta quindi una "probabilità entrante", ovvero il fascio incidente appena prima di interagire con il bersaglio.

Otteniamo allora la seguente espressione della **sezione d'urto integrale del processo**

$$\sigma_{int} = \Sigma \frac{\iint_{S_0} |\psi_{int}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (22)$$

ed anche quella della **sezione d'urto elementare del processo**

$$d\sigma_{int} = \Sigma \frac{|\psi_{scatt}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (23)$$

dove l'elemento  $dS$  a numeratore si riferisce, come detto sopra, al generico elemento di superficie di uno schermo lontano  $S_O$  su cui osserviamo il processo in esame.

Una quantità di interesse nell'analisi di esperimenti di scattering non risulta essere l'onda di scattering stessa ma piuttosto il rate a cui l'energia è diffusa ed assorbita dall'oggetto. Si evidenzia un'intima relazione tra il rate di perdita di energia da parte dell'onda incidente a seguito di questi processi e l'ampiezza dell'onda di scattering nella direzione in avanti(direzione di incidenza). Questa relazione è quantitativamente espressa dal **Teorema Ottico** (Optical cross-section theorem) che ora discuteremo.

Nel caso il processo in esame consista nella diffusione da parte dell'ostacolo, risulta possibile calcolare in pochi passaggi la sezione d'urto di diffusione nell'angolo solido elementare. Infatti, dalla (18) si ottengono subito le seguenti espressioni delle funzioni d'onda incidente e di scattering

$$\psi_{inc} = \psi_0 e^{ik \cdot r} \quad \psi_{scatt} = \psi_0 f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

tenendo poi conto che l'elemento di superficie di un eventuale schermo  $S_O$  di forma sferica può essere espresso come segue

$$dS = r^2 d\Omega$$

sostituendo nella (20) otteniamo

$$d\sigma_{scatt} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega}{\iint_{\Sigma} |\psi_0|^2 d\Sigma} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega}{|\psi_0|^2 \Sigma} = |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega$$

da cui, infine, si derivano le espressioni della **sezione d'urto di diffusione differenziale e totale rispetto all'angolo solido**

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad \sigma_{scatt} = \iint_{\Omega} |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega \quad (24)$$

Tale espressione chiarisce che la sezione d'urto differenziale di diffusione rispetto all'angolo solido è data dal modulo quadrato della ampiezza di scattering, dipendente dal vettore d'onda trasferito che parametrizza l'angolo rispetto alla direzione del fascio.

L'espressione (18) della funzione d'onda di diffrazione prodotta da un ostacolo ci permette pure il calcolo della sezione d'urto di assorbimento del fascio incidente. Tale sezione d'urto può essere ottenuta osservando che la probabilità incidente sulla superficie  $S_B$  deve essere assorbita dal bersaglio su  $S_B$ , oppure diffratta e osservata sullo schermo di osservazione  $S_O$ . Tenendo presente che la funzione d'onda incidente è non nulla sulla sezione del fascio  $\Sigma$ , mentre quella di assorbimento è non nulla sul bersaglio, si ottiene la relazione di bilancio:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 dS &= \iint_{S_O} |\psi_{diff_r}|^2 dS + \iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 d\Sigma \\ \iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 dS &= \iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma - \iint_{S_O} |\psi_{diff_r}|^2 dS\end{aligned}$$

Da quest'ultima e dalla (22) otteniamo allora la seguente espressione

$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{\iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 d\Sigma}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} = \Sigma \frac{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma - \iint_{S_O} |\psi_{diff_r}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma}$$

Se lo schermo di osservazione è sufficientemente lontano e soddisfa la **condizione di Fraunhofer** possiamo usare la funzione d'onda diffusa (20) con asse z normale allo schermo del bersaglio

$$\begin{aligned}|\psi_{inc}|^2 &= |\psi_0|^2 \\ |\psi_{diff_r}|^2 &= \left| \psi_0 \left( e^{ikz} + f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right|^2 \\ &= |\psi_0|^2 + |\psi_0|^2 \frac{|f(\mathbf{q})|^2}{r^2} + 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r}\end{aligned}$$

Integrando sullo schermo si ha<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}\iint_{S_O} |\psi_0|^2 dS + \iint_{S_O} |\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 \frac{dS}{r^2} + \iint_{S_O} 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \\ = |\psi_0|^2 \Sigma^* + |\psi_0|^2 \sigma_{scatt} + 2|\psi_0|^2 \Re \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la sezione d'urto di assorbimento si ha

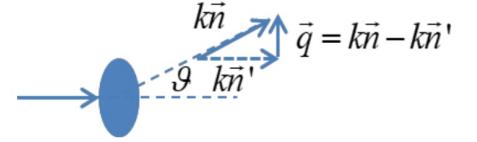
$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 \Sigma - \left[ |\psi_0|^2 \Sigma + |\psi_0|^2 \sigma_{scatt} + 2|\psi_0|^2 \Re \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right]}{|\psi_0|^2 \Sigma}$$

<sup>7</sup> Nei conti  $\Sigma^*$  rappresenta la proiezione della sezione del fascio sullo schermo. Se il centro diffusore è piccolo (come nel caso di un singolo centro diffusore) gli angoli di scattering sono relativamente piccoli per cui possiamo approssimare la proiezione del fascio sullo schermo di osservazione con l'area del fascio incidente. Ergo  $\Sigma^* \sim \Sigma$

da cui otteniamo una prima forma della *absorption cross-section*

$$\sigma_{ass} = -\sigma_{scatt} - 2\Re e \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \quad (25)$$

Per proseguire negli sviluppi è necessario calcolare l'integrale sullo schermo  $S_O$ . Assumendo l'origine del riferimento al centro dell'ostacolo e l'asse  $z$  normale al piano che lo contiene e dunque normale anche allo schermo lontano, otteniamo per la fase dell'esponenziale



$$\begin{aligned} r - z &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = z \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} - z \\ &\simeq z \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) - z = \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z} \end{aligned}$$

Inoltre, se lo schermo è lontano la figura di diffrazione si estende sullo schermo stesso in misura trascurabile, per cui la coordinata  $z$  risulta dominare largamente le coordinate  $x$  ed  $y$ .

Risostituendo nell'integrale che compare nell'espressione di  $\sigma_{ass}$  abbiamo

$$\begin{aligned} -2\Re e \iint_{sch} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS &= -2\Re e f(\mathbf{0}) \iint_{sch} \frac{e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}}{z} dx dy \\ &= -\frac{2}{z} \Re e f(\mathbf{0}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2z}x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2z}y^2} dy = -\frac{2}{z} \Re e f(\mathbf{0}) \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \\ &= -\frac{2}{z} \Re e f(\mathbf{0}) \frac{2iz}{k} \pi = -\frac{4\pi}{k} \Re e i (\Re e f(\mathbf{0}) + i \Im m f(\mathbf{0})) \end{aligned}$$

ottenendo infine

$$\boxed{\sigma_{scatt} + \sigma_{ass} = \frac{4\pi}{k} \Im m f(\mathbf{0})} \quad (26)$$

risultato noto come **teorema ottico**.

Teorema ottico

Questo afferma che la somma delle sezioni d'urto totale di diffusione ed assorbimento, detta sezione d'urto totale d'interazione, egualia (a meno del fattore moltiplicativo,  $\frac{4\pi}{k}$ , la parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione in avanti (ovvero a vettore d'onda trasferito nullo).

E' importante sapere che le sezioni d'urto totali di diffusione e assorbimento possono essere espresse anche attraverso integrali della funzione di profilo sulla superficie del bersaglio  $S_B$ . Integrando l'ampiezza di diffusione su tutto l'angolo solido nella (24) si ottiene la seguente espressione della sezione d'urto totale di diffusione in funzione del profilo (vedi Appendice A).

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da' \quad (27)$$

D'altra parte sulla base della (19) il secondo membro del teorema ottico si riscrive come

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{k} \Im[f(\mathbf{0})] &= \frac{4\pi}{k} \Im \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Re\Gamma(\mathbf{r}') + i\Im\Gamma(\mathbf{r}') da' \\ &= 2\Im \iint_{S_B} i\Re\Gamma(\mathbf{r}') - \Im\Gamma(\mathbf{r}') da' = \iint_{S_B} 2\Re\Gamma(\mathbf{r}'), da'\end{aligned}$$

da cui si ottiene la seguente espressione della **sezione d'urto totale di interazione** in funzione del profilo:

$$\sigma_{tot} = \iint_{S_B} 2\Re\Gamma(\mathbf{r}'), da' \quad (28)$$

Sostituendo la (27) e la (28) nella (26) otteniamo

$$\begin{aligned}\sigma_{ass} + \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da' &= \iint_{S_B} 2\Re\Gamma(\mathbf{r}'), da' \\ \sigma_{ass} &= \iint_{S_B} (2\Re\Gamma(\mathbf{r}') - |\Gamma(\mathbf{r}')|^2) da'\end{aligned}$$

da cui, osservando che

$$\begin{aligned}|1 - \Gamma|^2 &= (1 - \Re\Gamma)^2 + (\Im\Gamma)^2 = 1 + |\Gamma|^2 - 2\Re\Gamma \\ 2\Re\Gamma - |\Gamma|^2 &= 1 - |1 - \Gamma|^2\end{aligned}$$

perveniamo infine alla seguente espressione della **sezione d'urto totale di assorbimento** in funzione del profilo

$$\sigma_{ass} = \iint_{S_B} (1 - |1 - \Gamma|^2) da' \quad (29)$$

### o.9 Diffrazione di un disco assorbente

Possiamo usare le formule del precedente paragrafo per calcolare le sezioni d'urto del processo di **difrazione di un'onda piana su di un ostacolo circolare di raggio R completamente assorbente**.

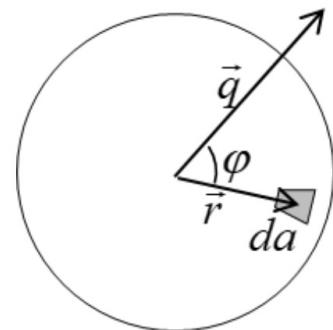
Adottando un sistema di coordinate polari con l'origine al centro del disco, la **funzione di profilo del disco nero** è definita dalle condizioni

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Si assume un riferimento con l'origine al centro del disco e l'asse  $z$  normale al piano che lo contiene.

Con questa scelta, se ci limitiamo a considerare angoli di diffusione non troppo grandi, il vettore  $\vec{q}$  giace in un piano parallelo a al piano  $xy$  e si ha

$$\vec{q} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = k(\sin \theta \hat{i}_r + \cos \theta \hat{k} - \hat{k}') \simeq k \sin \theta \hat{i}_r$$



il vettore  $\mathbf{r}$ , che identifica i punti del disco circolare (per comodità lasciamo cadere l'accento), giace sul piano del bersaglio  $xy$  a formare un angolo  $\varphi$  con  $\mathbf{q}$  per cui si ha  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \varphi$ , ed infine - adottate le coordinate cilindriche - l'elemento d'area vale  $da = rd\varphi dr$ .

L'ampiezza di scattering (19) si scriverà come

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Gamma(r) e^{-iq \cos \varphi r} r d\varphi dr \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^R r \left[ \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right] dr \\ &= ik \int_0^R \underbrace{\left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right]}_{J_0(qr)} dr \end{aligned}$$

dove  $J_0(qr)$  è nota come **funzione di Bessel di ordine zero** (vedi Appendice B):

$$J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi$$

Abbiamo allora la seguente espressione dell'ampiezza di diffusione:

$$f(\mathbf{q}) = ik \int_0^R r J_0(qr) dr \quad (30)$$

che può essere integrata per ottenere (vedi Appendice C)

$$f(\mathbf{q}) = ik \frac{R}{q} J_1(qR)$$

dove  $J_1(qR)$  è la **funzione di Bessel di ordine 1**. Tenendo ora conto che  $q = k \sin \theta$  otteniamo infine

$$f(\mathbf{q}) = i \frac{R}{\sin \theta} J_1(kR \sin \theta) \quad (31)$$

e da (24) segue l'espressione della **sezione d'urto differentiale di scattering del disco assorbente**

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1(kR \sin \theta) \quad (32)$$

Tenendo conto ora della funzione profilo considerata dalla (27) si ottiene la seguente espressione

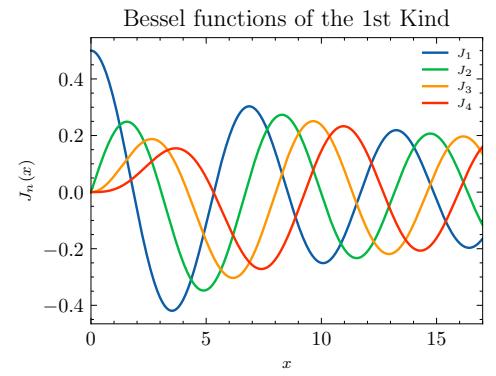
$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r})|^2 da = \iint_{S_B} da$$

dalla quale segue la **sezione d'urto totale di diffusione del disco assorbente**

$$\sigma_{scatt} = \pi R^2 \quad (33)$$

Calcoliamo la forward scattering amplitude:

$$f(\mathbf{0}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_O} \Gamma(\mathbf{r}) da = \frac{ik}{2\pi} \iint_{disco} da = \frac{ik}{2\pi} \pi R^2 = i \frac{kR^2}{2}$$



e ricordando il teorema ottico abbiamo

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \Im f(\mathbf{0}) = \frac{4\pi}{k} \Im \left( i \frac{kR^2}{2} \right) = \frac{4\pi}{k} \frac{kR^2}{2}$$

da segue la **sezione d'urto totale d'interazione del disco assorbente**

$$\sigma_{tot} = 2\pi R^2 \quad (34)$$

Dal teorema ottico infine

$$\sigma_{ass} = \sigma_{tot} - \sigma_{scatt} = 2\pi^2 - \pi R^2$$

da cui segue l'espressione della **sezione d'urto totale di assorbimento del disco assorbente**

$$\sigma_{ass} = \pi R^2 \quad (35)$$

Troviamo allora che la sezione d'urto totale d'interazione di un'onda piana su di un disco assorbente è il doppio della superficie del disco stesso, poiché sia la sezione d'urto totale di diffusione che quella di assorbimento hanno entrambe il valore di quella superficie.

### 0.10 Il raggio nucleare

Nell'ottica, forma, dimensioni ed altre proprietà di un oggetto possono essere studiate inviando su di esso onde luminose e registrando le onde emergenti su di uno schermo. Scegliendo la lunghezza d'onda della luce in modo da avere il potere risolutivo desiderato, sullo schermo apparirà una figura di diffrazione con una distribuzione dell'intensità luminosa che caratterizza l'oggetto illuminato. Data l'onda incidente quindi, il problema sarà quello di risalire dalla distribuzione della intensità luminosa osservata alle proprietà dell'oggetto illuminato.

In fisica nucleare e subnucleare le cose vanno esattamente nello stesso modo.

Cio premesso, i ragionamenti che potrebbero guidare un esperimento per la **misura delle dimensioni del nucleo atomico** sono i seguenti:

1. *Scelta delle particelle del fascio.* L'uso di fasci di elettroni permetterebbe di ottenere dati molto precisi sia per la qualità dei fasci disponibili che per la puntiformità delle particelle e l'eccellente conoscenza teorica della interazione elettromagnetica. E' però chiaro che gli elettroni restituirebbero una 'radiografia' della distribuzione nucleare dei soli protoni. Volendo ottenere informazioni sulla distribuzione di tutti i nucleoni sarebbe meglio utilizzare fasci di *neutroni* i quali - interagendo solo fortemente - 'vedrebbero' sia i protoni che i neutroni senza il 'disturbo' addizionale

della interazione elettromagnetica che invece si avrebbe usando fasci di *protoni*. Tali vantaggi competono però con la qualità inevitabilmente inferiore dei fasci di neutroni;

2. *Scelta della energia del fascio.* La scelta della energia è essenzialmente dettata dal potere risolutivo che si vuole avere nello studio della struttura del nucleo per cui la lunghezza d'onda di De Broglie delle particelle del fascio deve essere almeno dell'ordine di grandezza delle dimensioni nucleari. Nel caso dei neutroni, si avrebbe una risoluzione dell'ordine di  $10 \text{ fm}$  ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ) con circa  $10 \text{ MeV}$  di energia cinetica

$$\lambda \simeq 10 \text{ fm} \simeq 10 \frac{1}{200} \frac{\hbar c}{\text{MeV}} \simeq \frac{1}{20} \frac{\hbar c}{\text{MeV}}$$

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \simeq mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} - mc^2 \right) \simeq \frac{p^2}{2m} \simeq \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ &\simeq 2\pi^2 \frac{\hbar^2 c^2}{mc^2 \lambda^2} \simeq 20 \frac{\hbar^2 c^2}{1000 \text{ MeV}_1} \frac{1}{400} \frac{\hbar^2 c^2}{\text{MeV}^2} \simeq 8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

3. *Processi in gioco.* Difficilmente un sperimento può prescindere da una qualche ipotesi/conoscenza dei processi che avranno luogo nelle condizioni scelte. Assumendo che i neutroni da  $10 \text{ MeV}$  non riescano a trapassare il nucleo atomico, questo potrà essere assimilato ad un disco assorbente.

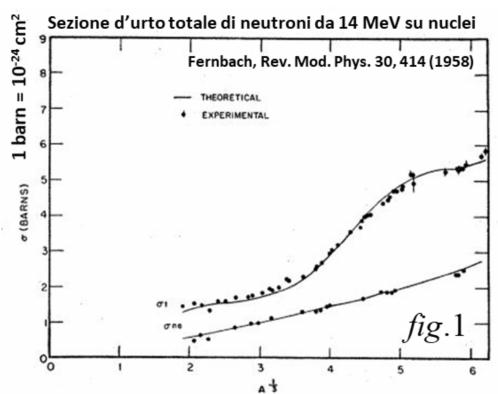
Sulla base di queste considerazioni si potrà costruire un esperimento per determinare il raggio nucleare, attraverso la misura delle sezioni d'urto totali e di diffusione di neutroni su bersagli materiali. Ipotizzando che il nucleo possa essere descritto da un disco assorbente si ha la seguente espressione della sezione d'urto totale (28)

$$\sigma = 2\pi R^2$$

Si possono allora determinare i raggi nucleari misurando la sezione d'urto totale di neutroni di circa  $10 \text{ MeV}$  su bersagli materiali puri contenenti i diversi tipi di nucleo.

Nella figura è mostrato un grafico della **sezione d'urto totale e di assorbimento** di neutroni da  $14 \text{ MeV}$  in funzione della radice cubica del numero di nucleoni  $A$  del nucleo.

Ci serve un modello capace di fornire una relazione tra la sezione d'urto totale ed il numero di nucleoni del nucleo. Per cominciare, potremmo modellare il nucleo come un **aggregato sferico di nucleoni** a loro volta assimilati a piccole sfere. Ipotizzando che la forza che lega neutroni e protoni sia a **corto raggio** con raggio d'azione dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone, il nucleo tenderà ad avere una



**densità volumetrica uniforme** per cui potremo scrivere le seguenti relazioni

$$V_{Nuc} \simeq \frac{4}{3}\pi R^3 \quad V_{Nuc} \simeq A \frac{4}{3}\pi r_0^3$$

dalle quali si ottiene la seguente relazione tra raggio nucleare e numero atomico

$$R \simeq r_0 A^{1/3}$$

Immaginando ora il nucleo come un disco assorbente, possiamo sostituire questa relazione nella (28) ed ottenere la seguente formula con la quale interpretare i dati

$$\sigma = 2\pi r_0^2 (A^{1/3})^2$$

In prima approssimazione la formula funziona. Si noti infatti che i dati hanno effettivamente un andamento ad arco di parabola nella variabile  $A^{1/3}$  ma, contrariamente alla previsione della formula, intersecano l'asse verticale ( $A = 0$ ) ad un valore di sezione d'urto non nullo. Ciò significa che dobbiamo aggiungere un termine costante alla sezione d'urto di cui sopra ottenibile solo con l'aggiunta di un termine costante nella espressione del raggio nucleare

$$R_{Nuc} = r_0 A^{1/3} + b$$

Bethe suggerì che tale termine dovesse interpretarsi come un una specie di '**'alone nucleare'**(nuclear skin), di spessore costante ed uguale per tutti nuclei, dovuto al raggio finito della interazione forte tra nucleoni. Stimando in circa 0.5 *barn* il valore approssimativo della sezione d'urto totale ad  $A = 0$  possiamo estrarre la corrispondente stima di  $b$

$$\sigma = 2\pi R^2 = 2\pi(r_0 A^{1/3} + b)^2 \quad \sigma(A^{1/3} = 0) = 2\pi b^2 \quad b = \sqrt{\frac{\sigma(A^{1/3} = 0)}{2\pi}} \sim 2.8 \text{ fm}$$

Il valore meglio compatibile con i dati sperimentali oggi disponibili è circa  $b = 2.4 \text{ fm}$ . Una volta determinata la 'skin' nucleare possiamo determinare anche il raggio del nucleone  $r_0$ . Leggendo il valore della sezione d'urto totale d'interazione corrispondente ad un secondo nucleo (ad esempio  $A^{1/3} = 4$  dove  $\sigma = 2.8 \text{ barn}$ ) possiamo ottenere la seguente stima di  $r_0$

$$\sigma = 2\pi R^2 = 2\pi(r_0 A^{1/3} + b)^2 \quad r_0 = \frac{1}{A^{1/3}} \left( \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} - b \right)$$

$$r_0 \simeq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{2.8 \times 10^{-24}}{2\pi}} - 2.4 \times 10^{-13} \right) \simeq 1.1 \text{ fm}$$

Informazioni più dettagliate sulla geometria del nucleo possono essere ottenute da esperimenti capaci di misurare la sezione d'urto differenziale di diffusione. Modellando il nucleo come un disco circolare assorbente la una sezione d'urto differenziale di diffusione sarà data dalla espressione

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1^2 \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \right)$$

che va confrontata con i dati sperimentalmente mostrati a fianco. Si nota subito che i dati mostrano un andamento con l'angolo  $\theta$  di tipo diffrattivo, in prima approssimazione compatibile con quello di una funzione di Bessel del primo ordine.

È interessante considerare la sezione d'urto differenziale in avanti, ovvero per  $\theta$  prossimo a zero. Sviluppando asintoticamente la funzione di Bessel per piccoli valori dell'argomento si ha

$$J_1(z) \sim \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}z^3$$

da cui - sostituendo - otteniamo la **sezione d'urto differenziale di diffusione in avanti** dalla quale si può ottenere una nuova **stima del raggio nucleare**

$$\frac{d\sigma_{scatt}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1^2 \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta \right) \sim \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{4} \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta \sim \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2}$$

Dalla figura si vede chiaramente che tale sezione d'urto a  $\theta = 0$  aumenta rapidamente con il numero di nucleoni  $A$ .

La seconda possibilità consiste nel lavorare sui minimi di diffrazione la cui spaziatura - come noto dall'ottica - deve dipendere dal raggio del disco ovvero dal raggio nucleare.

Ora è noto che le funzioni di Bessel si annullano ripetutamente, un fatto che però non trova corrispondenza nell'andamento delle sezioni d'urto di diffusione misurate che, pur avendo dei minimi pronunciati, non si annullano mai. Questo fatto indica che modellizzare il nucleo come un disco completamente assorbente non è del tutto appropriato e che esiste un certo grado di trasparenza del nucleo rispetto ai neutroni incidenti. Trascurando per ora questo fatto ed assumendo che i minimi della sezione d'urto corrispondano agli zeri della funzione di Bessel, abbiamo nel caso del primo zero

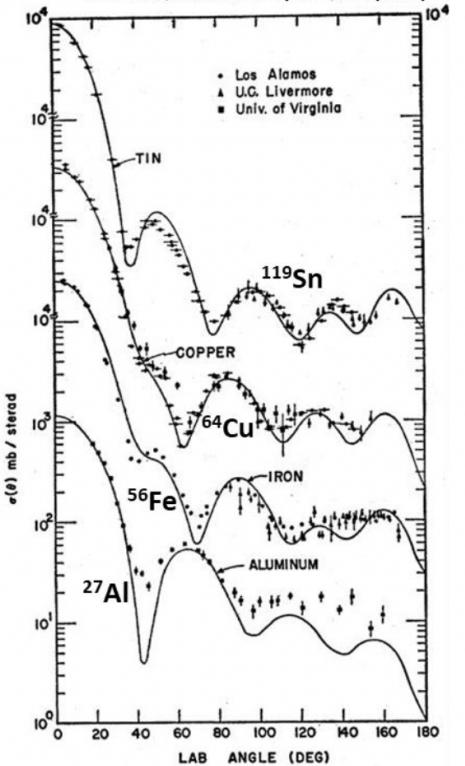
$$J_1 \left( \frac{2\pi R}{\lambda} \sin \theta = 3.832 \right)$$

da cui si ottiene la seguente espressione

$$R = \frac{3.832}{2\pi} \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

**Sezione d'urto differenziale di diffusione di neutroni da 14 MeV su nuclei**

Fernbach, Rev. Mod. Phys. 30, 414 (1958)



che fornisce un'altra stima del raggio nucleare a partire dalla posizione angolare del primo minimo della sezione d'urto differenziale di diffusione.

Per estrarre in modo corretto tutto il contenuto informativo, sarebbe necessario eseguire un 'fit' utilizzando il corrispondente chi-quadrato come criterio di bontà e affidabilità della funzione teorica adottata. In questo modo otterremmo un solo valore del raggio nucleare piuttosto che i due stimati e, soprattutto, verificheremmo che l'ipotesi che il nucleo assorba totalmente i neutroni incidenti è troppo drastica poiché non riesce a riprodurre correttamente l'andamento delle sezioni d'urto di diffusione.

I dati richiedono l'ipotesi che il nucleo sia parzialmente trasmettente. Si è pensato quindi di modellizzare il nucleo per mezzo di un potenziale complesso dando origine al cosiddetto modello ottico del nucleo (la parte reale del potenziale è solitamente assunta nella forma di Saxon-Woods mentre quella immaginaria nella forma di una gaussiana).

### 0.11 Energia di legame nucleare

Si immagini un sistema formato da due sferette omogenee di massa  $m$  e raggio  $R$ , soggette alla mutua attrazione gravitazionale, disposte in quiete l'una accanto all'altra con una energia potenziale iniziale  $E_i$ . Sappiamo che per separare le sferette dobbiamo applicare su una di esse una forza esterna uguale e contraria a quella attrattiva in modo da portarla all'infinito (avendo avuto cura di fissare l'altra!). Nel linguaggio della meccanica dobbiamo compiere lavoro contro la forza attrattiva gravitazionale che tiene unite le sferette, nel più generale linguaggio della energia dobbiamo fornire energia al sistema legato in modo da separarlo nei suoi componenti portandolo ad una energia potenziale finale che indicheremo con  $E_f$  (in questo caso nulla). Tale energia viene detta energia di legame del sistema e soddisfa la seguente relazione

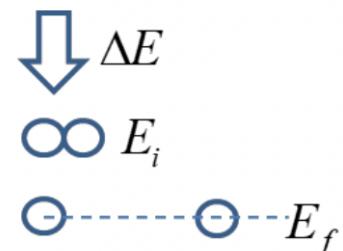
$$\Delta E = E_i - E_f \quad (36)$$

Ora immaginiamo di volerla determinare. In linea di principio potremmo utilizzare **tre diversi metodi**:

1. disponendo di una espressione esplicita della forza, potremmo calcolarla teoricamente

$$\Delta E = \int_{2R}^{\infty} \mathbf{F}_{est} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2R}^{\infty} G \frac{m^2}{r^2} dr = G \frac{m^2}{2R}$$

2. non disponendo della espressione teorica potremmo misurare ripetutamente la forza applicata sulla sferetta e sommare in modo



da ottenere il lavoro compiuto

$$\Delta E = \int_{2R}^{\infty} F_{est} \cdot dl$$

3. non disponendo della espressione teorica potremmo anche affidarci alla teoria della relatività ristretta (TRR). Sappiamo infatti che ad ogni forma di energia  $E$  corrisponde una massa inerziale equivalente  $M$  data dalla ben nota equazione  $M = E/c^2$ . Su questa base, dato che il contenuto energetico del sistema iniziale legato e del sistema finale separato sono diversi, dobbiamo aspettarci che diverse siano pure le corrispondenti masse inerziali. In particolare da  $\Delta E = E_f - E_i$  otteniamo  $E_f > E_i$  (poiché  $\Delta E > 0$ ) da cui discende pure che  $M_f > M_i$ . Dalle espressioni relativistiche

$$E_f = M_f c^2 \quad E_i = M_i c^2$$

otteniamo allora la seguente differenza di massa detta **difetto di massa del sistema legato**

$$(M_f - M_i) = \frac{\Delta E}{c^2}$$

la quale offre una terza via per accedere all'energia di legame.

Nel caso di un sistema macroscopico di due masse legate dalla forza gravitazionale, il metodo 1 risulta praticabile poiché conosciamo l'espressione teorica della forza. Superando un certo numero di difficoltà sperimentali potremmo anche utilizzare il metodo 2. Certamente nessun fisico sperimentale sarebbe però in grado di utilizzare il metodo 3 dato che dovrebbe misurare il seguente difetto di massa

$$(M_f - M_i) = \frac{\Delta E}{c^2} = G \frac{m^2}{2Rc^2} = 5.6 \times 10^{-54} MeV$$

Nel caso della interazione forte tra nucleoni le cose vanno diversamente. Il metodo 1 richiederebbe una conoscenza della forte che non abbiamo poiché – appunto – dobbiamo ancora determinarne le proprietà. Il metodo 2 è chiaramente inapplicabile ad un sistema microscopico. Il metodo 3, basato sulla TRR, potrebbe essere applicabile qualora il difetto di massa del sistema fosse consistente. Ora i dati sperimentali mostrano che **l'energia potenziale dell'interazione attrattiva tra nucleoni e tale da fornire un apprezzabile contributo negativo alla inerzia del nucleo**, generando una differenza misurabile tra la massa dei nucleoni componenti e quella del nucleo stesso.

Sulla base di quanto detto, siamo ora in grado di fornire la seguente **definizione operativa della energia di legame** ovvero della *energia necessaria per separare il nucleo nei nucleoni componenti*

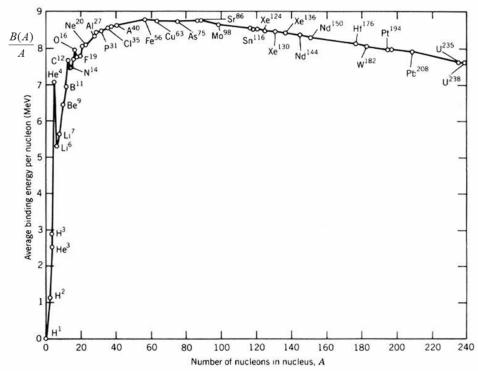


Figura 6: Grafico dell'energia di legame media per nucleone in funzione del numero di nucleoni  $A$ .

$$B\left(\frac{A}{Z}X\right) = \left[Nm_n + Zm_p - m_N\left(\frac{A}{Z}X\right)\right]c^2 \quad (37)$$

dove  $m_n, m_p, m_N$  sono rispettivamente le masse del neutrone, del protone e del nucleo<sup>8</sup>. Limitando la rappresentazione ai soli nuclidi stabili (nel caso vi fosse più di un isotopo stabile si sceglie quello più abbondante) si ottiene l'energia di legame media per nucleone  $B/A$  in funzione di  $A$  mostrata qui a fianco.

Il quoziente  $B/A$  dà una indicazione quantitativa del grado di stabilità del nucleide e permette di stabilire se una data reazione nucleare sia esoenergetica o endoenergetica e, dunque, se possa avvenire spontaneamente oppure no.

Dal grafico in figura 6 possiamo trarre alcune conclusioni generali:

1. Ci sono configurazioni nucleari particolarmente stabili quali  $^4He, ^{12}C, ^{16}O, \dots$
2. a parte queste eccezioni, l'energia di legame media per nucleone ha un andamento regolare. Aumenta rapidamente con il numero di nucleoni fino ad un valore dell'ordine degli 8 MeV per poi diminuire assai lentamente
3. i nuclei più stabili sono  $^{56}Fe$  e  $^{62}Ni$ . Ciò significa che i nuclei pesanti alla sua destra possono raggiungere configurazioni più stabili (ovvero con  $B/A$  più elevato) aumentando  $A$ , ovvero aggregandosi in nuclei più grandi. Detto in altri termini ciò significa che **le reazioni di fissione dei nuclei pesanti e quelle di fusione dei nuclei leggeri sono esoenergetiche** ovvero producono energia qualora si sia in grado di innescarle;
4. dal punto precedente segue che **le reazioni di fusione dei nuclei leggeri e fissione dei nuclei pesanti** costituiscono la doppia opportunità offerta dalla fisica nucleare per la produzione di energia.

La via della fusione nucleare è stata scelta dalle stelle. Oggi sappiamo che una stella come il sole ricava la quasi totalità della energia (circa il 98%) dalla fusione di nuclei d'idrogeno in nuclei di elio.

L'energia prodotta dalle reazioni di fusione fluisce verso l'esterno. Tale flusso, nella forma di energia cinetica dei prodotti delle reazioni di fusione, fornisce la spinta verso l'esterno capace di opporsi alla contrazione gravitazionale mantenendo il sole in una situazione di equilibrio di forze detto equilibrio idrostatico.

Dal grafico si può leggere il decorso del processo una volta esaurito l'idrogeno: la contrazione gravitazionale prenderà il sopravvento comprimendo la materia fino al punto da innescare le reazioni di fusione di tre nuclei di elio in un nucleo di carbonio stabilendo un

<sup>8</sup> Vale la pena precisare che le masse nucleari sono misurabili con minore precisione di quelle atomiche per cui è utile ricavare le prime delle seconde attraverso la relazione

$$m_A\left(\frac{A}{Z}X\right) = m_N\left(\frac{A}{Z}X\right) + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i^{el}$$

dove  $m_A$  è la massa dell'atomo corrispondente al nucleo in esame.

nuovo periodo di equilibrio. Le fasi di equilibrio e contrazione si alterneranno fino alla fusione del silicio in ferro quando la contrazione gravitazionale - non potendo innescare altre reazioni di fusione - procederà inarrestabile facendo collassare la stella che espellerà in modo esplosivo gli strati più esterni lasciando un residuo compatto di materia in uno stato degenero.

La via della *fissione nucleare* trova invece una sua applicazione nei reattori nucleari.

## *I primi modelli nucleari*

Il grafico della energia di legame media per nucleone commentato nel precedente paragrafo contiene un certo numero di importanti indicazioni sulle proprietà della forza nucleare che sono alla base di un primo modello del nucleo - suggerito da Bohr nel 1935 - fondato essenzialmente sul **raggio finito** della interazione nucleare. Similmente alle forze intramolecolari a corto raggio nei liquidi, tale fatto determina una certa analogia tra il comportamento dei nucleoni nel nucleo e le diverse porzioni di un fluido meccanico incomprimibile, ragione che giustifica il nome spesso usato di **modello a goccia**. Il suddetto modello ha base **fenomenologica**; la sola ipotesi dell'andamento a corto raggio della forza non è sufficiente a giustificare l'andamento reale

Come accennato, l'energia di legame tende ad assumere rapidamente il valore medio di circa  $8\text{MeV}$  per nucleone (saturazione) il che indica una energia di legame del nucleo proporzionale al numero di nucleoni

$$\frac{B}{A} \simeq 8\text{MeV} \quad B \simeq 8\text{MeV} \times A$$

Ora, se la forza nucleare si comportasse come una forza a lungo raggio (come le forze gravitazionali o elettromagnetiche) ogni nucleone interagirebbe con tutti i rimanenti altri per cui dovremmo attenderci una energia di legame del nucleo tendenzialmente proporzionale al numero di coppie di nucleoni e dunque quadratica in  $A$

$$B \propto \frac{A(A-1)}{2} \propto A^2$$

Poiche i dati sulla energia di legame escludono questo tipo di comportamento, dobbiamo concludere che ogni nucleone del nucleo interagisce solo con un numero di fisso di nucleoni vicini per cui concludiamo che l'interazione forte ha un raggio d'azione finito dell'ordine di grandezza delle dimensioni del nucleone stesso.

Tale conclusione è in perfetto accordo con i dati sulla sezione d'urto di neutroni su nuclei analizzati in precedenza che indicavano un volume nucleare proporzionale al numero di nucleoni, ovvero una densità volumetrica di nucleoni uniforme sul volume nucleare, fatto

spiegabile solo postulando la esistenza di una forza d'interazione tra nucleoni a corto raggio.

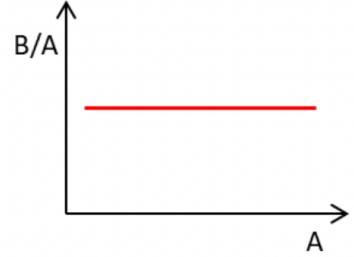
Il primo tentativo di superare questo limite consiste nell'introdurre un termine

$$B = a_v A$$

dove la costante  $a_v$  viene detta **termine di volume**. Con un andamento  $B/A$ , però, si finisce per ottenere una sovrastima del volume.

La deviazione più rilevante si manifesta per valori piccoli di  $A$  dove l'energia media di legame è molto inferiore a quanto previsto dalla formula. Si può allora osservare che, assumendo la forza nucleare a corto raggio, si deve tenere conto che un nucleone prossimo alla superficie del nucleo interagisce con un numero di nucleoni inferiore a quello con cui interagirebbe qualora si trovasse all'interno del nucleo stesso. Ciò comporta che i nucleoni superficiali contribuiranno in misura minore alla energia di legame nucleare di quelli interni al volume. Assumendo il nucleo di **forma sferica**, il numero di nucleoni prossimi alla superficie sarà proporzionale a  $R^2$ . Dalla trattazione precedente sappiamo che (omettendo il termine di "skin nucleare")

$$\begin{aligned} R_{\text{nuc}} &= r_0 A^{1/3} \\ 4\pi R^2 &= 4\pi (r_0 A^{1/3})^2 \implies R_{\text{nuc}} \propto A^{2/3} \end{aligned}$$



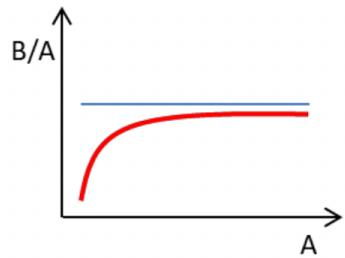
per cui vi deve essere un termine che deve provocare un difetto di energia di legame proporzionale ad  $A^{2/3}$ :

$$B = a_v A - a_s A^{2/3}$$

dove la costante  $a_s$  viene detta **termine di superficie**. L'andamento di  $B/A$  con questa ulteriore correzione può apprezzarsi a lato.

Un ulteriore miglioramento può essere ottenuto tenendo presente che i protoni del nucleo si *respingono elettrostaticamente* diminuendo quindi il lavoro necessario per separarli dal nucleo stesso. In effetti se, per assurdo, si avesse un nucleo composto solo di protoni (senza neutroni) il lavoro da spendere per mantenerne la configurazione sarebbe sicuramente maggiore.

Ipotizzando una *distribuzione di protoni uniforme* nel volume nucleare (ricordiamo essere sferico dall'ipotesi precedente), otteniamo la seguente espressione del lavoro fatto dalle forze coulombiane



repulsive per separare la carica nucleare

$$\delta L = \int_R^\infty \left( \frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{i}_r \right) (dr \mathbf{i}_r) = -\frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_R^\infty = -\frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \delta q = \rho 4\pi R^2 dR$$

$$\delta L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \right) (\rho 4\pi R^2 dR) = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} R^4 dR$$

$$L = \int \delta l = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R_0^5 \quad Q = \rho \frac{4}{3}\pi R_0^3 = Ze$$

$$L = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R_0} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \implies L \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Ne consegue che la energia di legame nucleare dovrà essere corretta sottraendo un termine proporzionale a  $Z^2/A^{1/3}$  per cui l'espressione dell'energia di legame acquisira la forma seguente

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

dove la nuova costante  $a_c$  viene detta **termine coulombiano**. Il termine coulombiano deve chiaramente annullarsi per  $A = 1$  (non c'è interazione elettrostatica) per cui l'unica forma possibile è

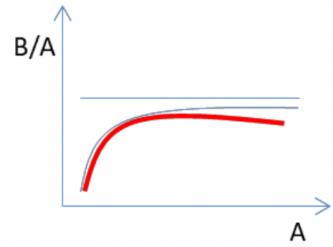
$$L \propto \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

L'andamento  $B/A$  risulta ulteriormente migliorato (si tenga presente che nei nuclei stabili si ha approssimativamente  $Z = A/2$  per cui il termine coulombiano sottrae un contributo crescente con  $A^{2/3}$ ).

Se il modellino fenomenologico costruito finora fosse completo dovremmo concludere che i nuclei più stabili ( $B = B_{max}$ ) sono quelli con  $Z = 0$  ovvero i nuclei di soli neutroni. Tale fatto è palesemente contraddetto dai dati sperimentali i quali mostrano che i nuclei stabili hanno un numero di protoni di poco inferiore a quello dei neutroni (la differenza tra neutroni e protoni tende a crescere con il numero atomico). Il nostro modello – basato sulla natura a corto raggio della interazione nucleare – non offre alcun appiglio per dare un fondamento fisico a questo stato di cose che potrà essere spiegato solo nel contesto della meccanica quantistica attraverso il *principio di esclusione di Pauli*. In questa situazione l'unica possibilità è quella di introdurre un termine 'ad hoc' capace di descrivere i dati sperimentali.

Bisogna quindi fare in modo che il modello ci dica che i nuclei più stabili sono quelli con lo stesso numero di protoni e neutroni. Raggiungiamo l'obiettivo introducendo un nuovo termine del tipo:

$$Z \simeq \frac{A}{2} \quad A - 2Z \simeq 0$$



Ricordando però che con il crescere di  $A, Z$  tende ad essere via via più piccolo di  $A/2$  (il quoziente protoni/neutroni diminuisce con  $A$ ), tale termine correttivo dovrà seguire una legge inversa ad  $A$  modulata da un qualche esponente. I dati indicano che la prima potenza è sufficiente per cui abbiamo la seguente espressione della energia di legame nucleare

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_a(A-2Z)^2}{A}$$

dove la nuova costante  $a_a$  viene detta **termine di lassimmetria**. Notiamo che la presenza di  $A$  a denominatore è giustificata osservando l'andamento dei dati sperimentali nel grafico visto in precedenza:tanto più  $A$  è grande tanto più  $B/A$  devia dalla tangente alla curva(quindi verso il basso).

Per completare il modello è necessario tenere conto di un ulteriore proprietà dei nuclei. I dati sperimentali mostrano che tra i 254 nuclei stabili noti ben 148 sono del tipo **pari-pari** (un numero pari sia di protoni che di neutroni), 101 sono del tipo **pari-dispari** (un numero pari di protoni ma dispari di neutroni o viceversa) e solo 5 sono del tipo dispari-dispari (vedi tabella). Similmente, tra i 35 nuclei a lunga vita media si hanno 22 pari-pari, 9 pari-dispari e 4 dispari-dispari.

Tali dati sembrano suggerire che per qualche motivo la forza forte tra nucleoni da luogo a nuclei di maggiore stabilità quando vengono legati **numeri pari** di neutroni e protoni, un fatto che trova una sua diretta evidenza nell'andamento della energia di legame per nucleone della serie isotopica dello xenon. Tali dati sembrano suggerire che per qualche motivo la forza forte tra nucleoni da luogo a nuclei di maggiore stabilità quando vengono legati \*\*numeri pari\*\* di neutroni e protoni, un fatto che trova una sua diretta evidenza nell'andamento della energia di legame per nucleone della serie isotopica dello xenon.

Tenendo presente che il nucleo di Xenon ha  $Z = 54$  protoni, si può infatti constatare che gli isotopi con un numero pari di neutroni hanno una maggiore energia di legame per nucleone. Per rendere conto di questo fatto si introduce un nuovo coefficiente detto di **pairing**

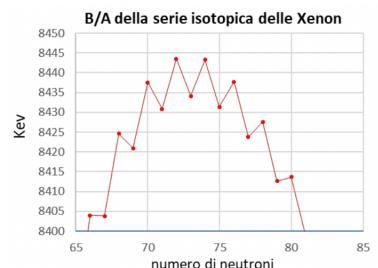
$$a_p \frac{\delta}{A^{3/4}}$$

con

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{pari-pari} \\ 0 & \text{pari-dispari} \\ -1 & \text{dispari-dispari} \end{cases}$$

Giungiamo così alla seguente espressione complessiva della energia di legame nucleare detta anche **formula semiempirica della energia**

$^2_1H$
$^6_3Li$
$^{10}_5B$
$^{14}_7N$
$^{180m}_{73}Ta$



**di legame nucleare o formula di Weizsäcker** della energia di legame nucleare

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta}{A^{3/4}} \quad (38)$$

Essa dipende da 5 parametri il cui valore numerico viene determinato adattando la formula ai dati sperimentali di  $B/A$ . A titolo di esempio, una possibile combinazione di valori è la seguente(i valori sono in MeV):

$$a_v = 15.5 \quad a_s = 16.8 \quad a_c = 0.72 \quad a_a = 23.0 \quad a_p = 34.0$$

La formula della energia di legame nucleare è utile - come strumento di calcolo - perchè suggerisce una prima interpretazione del nucleo e delle forze che lo tengono insieme.

Da essa deduciamo che le forze tra nucleoni devono essere **molto intense** ma a **short range** (proprietà di saturazione), producono una distribuzione spaziale tendenzialmente uniforme di nucleoni e conducono ad una espressione della energia di legame con termini di volume e superficie in analogia con quanto accade per i liquidi, ragione che giustifica il nome spesso usato di **modello nucleare a goccia**.

Il modello a gas di fermioni (giustificabile con considerazioni quantomeccaniche) riesce a rendere conto del termine  $a_a$  mentre fallisce per quello di pairing. Vedremo che il modello a shell sarà quello più preciso.

## 0.12 Richiami di meccanica quantistica

### 0.12.1 Osservabili e valori di aspettazione

I sistemi fisici microscopici in regime non relativistico sono descritti dalla funzione d'onda  $\psi(\mathbf{r}, t)$  che si assume descriva in modo completo lo stato fisico della particella, ovvero dica tutto ciò che può essere detto su di essa. Il significato fisico della funzione d'onda è definito dalla ipotesi di Born secondo la quale il *modulo quadrato fornisce la densità di probabilità di localizzazione della particella nel punto  $\mathbf{r}$  al tempo  $t$*  a seguito della interazione con un apparato di misura:

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

Tale ipotesi comporta la **condizione di normalizzazione**, ovvero che l'integrale del modulo quadrato della funzione d'onda sul volume occupato dal sistema microscopico debba essere pari ad uno, e stabilisce che in meccanica quantistica la **grandezza fisica osservabile sia**

il modulo quadrato della funzione d'onda piuttosto che la funzione d'onda stessa.

Si assume infine che l'evoluzione temporale della funzione d'onda sia governata dalla equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}\psi \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

Come possiamo arrivare al **valore di aspettazione** di posizione e quantità di moto? Calcolo del valore medio della posizione di una particella. Nel caso di un'onda piana:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i/\hbar(p \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

se  $p$  ed  $E$  fossero sempre definiti avrei che tutte le posizioni nel piano hanno la stessa probabilità di essere misurate. Per cui una misurazione ripetuta potrebbe portare ad un esito diverso della posizione.  $\implies$  ragionamento in termini statistici  $\implies$  posso solo conoscere il **valore medio** della posizione.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV & \quad \langle \mathbf{r} \rangle = \sum_i^n \frac{\mathbf{r}_i p_i}{\sum_i^n p_i} \\ \langle \mathbf{r} \rangle &= \frac{\iiint_V \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV}{\iiint_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV} \end{aligned} \quad (39)$$

dove il denominatore è unitario dalla condizione di normalizzazione. A questo punto si ha, con  $\psi^*$  complesso coniugato,

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t) dV$$

ovvero la *media delle posizioni corrisponde alla media del vettore posizione  $\mathbf{r}$  pesata dal modulo quadro della funzione d'onda*.

Meno immediato e comprendere come calcolare ad esempio la quantità di moto della particella. Ragionando ancora una volta in modo euristico possiamo richiamare le espressioni, scritte nel capitolo precedente, per una data componente di Fourier della funzione d'onda

$$-i\hbar \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{P}\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, t) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{E}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t)$$

Si vede che nel caso in cui la funzione d'onda abbia quantità di moto ed energia definite (ovvero nel caso in cui la funzione d'onda coincida con una data componente di Fourier) allora gli operatori a primo membro estraggono da essa i corrispondenti valori ponendoli nella posizione di autovalori ovvero di moltiplicatori. In meccanica quantistica si assume che tale fatto abbia valida generale:

Se in uno stato quantomeccanico  $\psi$  un osservabile ha un valore definito  $o$  allora lo stato  $\psi$  è autostato del corrispondente operatore  $O$  con autovalore  $o(O\psi = o\psi)$ .

Proseguendo nel ragionamento, operando sulla prima delle equazioni precedenti (prima moltiplicando per  $\psi^*$  e poi integrando ambo i membri) si ha

$$\begin{aligned} -i\hbar\nabla\psi = p\psi \implies \psi^*(-i\hbar\nabla)\psi = p\psi^*\psi \\ \iiint_V \psi^*(-i\hbar\nabla)\psi dV = \iiint_V p\psi^*\psi dV = p \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la normalizzazione della funzione d'onda. Si noti che tale espressione, valida nel caso di una data componente di Fourier, è strutturalmente analoga alla posizione media delle posizioni della particella microscopica (33) valida invece in generale. Non è difficile mostrare che nel caso di un generico pacchetto d'onda il valore medio della quantità di moto della particella continua ad essere dato da questo integrale per cui scriveremo

$$\langle p \rangle = \iiint_V \psi^* \hat{p} \psi dV = \iiint_V \psi^* (-i\hbar\nabla) \psi dV$$

Inoltre, essendo le grandezze fisiche espresse da numeri reali, gli operatori associati alle variabili dinamiche dovranno essere **hermitiani**.

Giungiamo allora a formulare uno degli assiomi della meccanica quantistica nella seguente forma:

Ad ogni grandezza fisica misurabile  $o$  (osservabile) di un dato sistema microscopico, risulta associato un operatore lineare complesso hermitiano  $O$ . Il valore medio delle misure della osservabile  $o$  al tempo  $t$  in un certo stato quantomeccanico  $\psi(r, t)$  è dato dal seguente integrale detto valore di aspettazione

$$\boxed{\langle o \rangle = \iiint_V \psi^*(r, t) \hat{O} \psi(r, t) dV}$$

Quanto detto rende evidente che, dato un sistema quantomeccanico, si pone il problema fondamentale di individuare le grandezze fisiche osservabili e di determinare le corrispondenti operatori associati. La fisica atomica, ma ancor più la fisica delle particelle, chiariscono che un criterio generale non esiste e che sia le osservabili che le loro espressioni operatoriali possono essere trovate solo fondandosi sui dati sperimentali.

Cio non toglie che si sia verificato che le espressioni operatoriali delle variabili dinamiche classiche possano essere trovate (sia pure

con alcune limitazioni che per ora tralasciamo) attraverso una procedura, detta **principio di corrispondenza** (che applicheremo al caso del momento angolare), la quale però non può essere applicata nel caso di variabili dinamiche che non abbiano un corrispondente classico. In tali casi l'unica guida rimangono i dati sperimentali ed il percorso può essere lungo e tortuoso.

### 0.12.2 Definizione ed indefinitone delle osservabili

Una volta compreso in che modo debbano calcolarsi le variabili dinamiche di un sistema quantomeccanico è necessario accennare ad un delicato problema già sullo sfondo di alcune nostre considerazioni. Riprendiamo l'esempio dell'onda piana progressiva visto poco fa.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i/\hbar(p \cdot r - \omega t)}$$

Con tutta evidenza tale espressione descrive una particella avente quantità di moto ed energia definite ma posizione spaziale e temporale completamente **indefinite**. Infatti, fissato il tempo, le superfici equifase dell'onda risultano essere piani perpendicolari al vettore quantità di moto. Ciò significa che il modulo quadrato della funzione d'onda assumera un valore uniforme sui punti di tali superfici (in realtà nel caso di una singola componente di Fourier su tutti i punti dello spazio). A sua volta ciò significa che la particella potrà essere localizzata con densità di probabilità uniforme su tutti i punti della superficie di un piano perpendicolare alla quantità di moto che equivale ad affermare che la posizione della particella è assolutamente indefinita.

Un minimo di conoscenza delle proprietà delle onde riconosce in questo fatto qualcosa di noto poiché sappiamo bene che *una qualunque componente di Fourier di un'onda piana possiede vettore d'onda e pulsazione definite ma posizione spaziale e temporale assolutamente indefinite*.

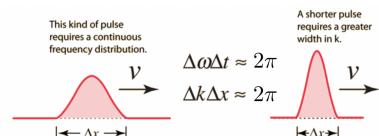
Sappiamo anche che per avere onde con posizione spaziale e temporale meglio definite è necessario sovrapporre componenti di Fourier di diverso vettore d'onda e pulsazione andando a costituire i cosiddetti pacchetti d'onde.

Infine dalla **fisica classica**<sup>9</sup> sappiamo che nei pacchetti d'onde valgono le cosiddette **relazioni di indeterminazione** che esprimono queste proprietà in forma quantitativa approssimata

$$\Delta k_x \Delta x \approx 2\pi \quad \Delta \omega \Delta t \approx 2\pi$$

dove, data una direzione  $x$  dello spazio,  $\Delta k_x$  e  $\Delta \omega$  stimano la dispersione del vettore d'onda e della pulsazione del pacchetto, mentre  $\Delta x$  e  $\Delta t$  ne stimano la dispersione spaziale e temporale.

<sup>9</sup> The general idea is present in *any system where there are plane waves*. A physically realizable wave is always in the form of a wave packet which is finite in extent. A wave packet is built up by superposing waves with definite wave number. By simple Fourier analysis, a highly localized packet will require a wide spread of wave vectors, whereas a packet with a large spacial extent can be composed of wave numbers quite close to a specific value.



In generale si può dimostrare che valgono le seguenti relazioni

$$\Delta k_x \Delta x \simeq 2\pi$$

$$\Delta k_y \Delta y \simeq 2\pi$$

$$\Delta k_z \Delta z \simeq 2\pi$$

$$\Delta \omega \Delta t \simeq 2\pi$$

Nel caso in cui si abbia un pacchetto d'onda che contenga solo una componente di Fourier si avrebbe  $\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = 0$  con una conseguente indeterminazione sulle posizioni tendente a  $\infty$ .

Consideriamo il caso di un'onda piana, di lunghezza d'onda  $\lambda$  e vettore d'onda  $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{i}}$ , che viene fatta passare attraverso una fenditura ampia  $d$  (vedi figura).

Il fronte d'onda viene tagliato dalla fenditura stessa: il fronte d'onda lungo  $y$  ha un'incertezza  $\Delta y = d$ . Dalle relazioni precedenti so che viene introdotto un errore  $\Delta k_y \simeq \frac{2\pi}{d}$ . La fenditura ha deviato il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  ed ora ha una certa angolazione  $\Rightarrow$  il fronte d'onda che si incurva (dal Principio di Huygens-Fresnel). L'angolo di apertura vale quindi

$$\theta \simeq \frac{\Delta k_y}{k_x} \simeq \frac{2\pi}{d \frac{2\pi}{\lambda}} \simeq \frac{\lambda}{d}$$

In ultima analisi quindi il fronte d'onda viene **limitato spazialmente** e dà luogo al fenomeno della **diffrazione**.

Vogliamo ora trovare l'analogia delle relazioni di indeterminazione in **meccanica quantistica**. Partiamo dalle relazioni

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad E = \hbar \omega \quad p_x = \hbar k_x$$

e arriviamo a

$$\Delta p_x \Delta x \simeq \hbar$$

$$\Delta p_y \Delta y \simeq \hbar$$

$$\Delta p_z \Delta z \simeq \hbar$$

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar$$

relazioni note come **relazioni di indeterminazione di Heisenberg** le quali affermano che

1. se la misura della posizione di un corpuscolo materiale lungo una certa direzione ha una incertezza  $\Delta x$  allora una simultanea misura della quantità di moto lungo la stessa direzione ha una incertezza  $\Delta p_x$  tale che il loro prodotto sia dell'ordine della costante di Plank;

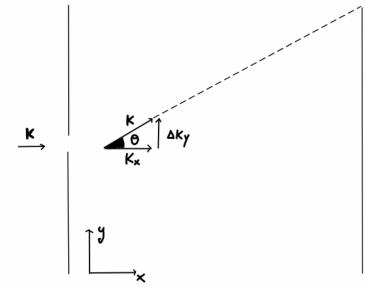


Figura 7: This is a margin figure.

2. se la misura della posizione temporale di un corpuscolo materiale ha una incertezza  $\Delta t$  allora una simultanea misura della energia ha una incertezza  $\Delta E$  tale che il loro prodotto sia dell'ordine della costante di Planck.

Un analogo quantistico dell'esperimento precedente può consistere nell'inviare un elettrone con quantità di moto  $p = p_x \hat{i}$  verso una fenditura di ampiezza  $d$ . Nel momento in cui l'elettrone passa in mezzo alla fenditura possiamo sicuramente dire che la sua posizione assume un qualche valore *all'interno del range* della fenditura. Si ha quindi che il passaggio attraverso essa e la conseguente limitazione sulla posizione della posizione *equivale ad un'operazione di misura* sulla particella.

$$\Delta y \simeq d \quad \Delta p_y \simeq \frac{h}{d}$$

con angolo di inclinazione

$$\theta \simeq \frac{\Delta p_y}{p_x} \simeq \frac{h}{d \frac{h}{\lambda}} \simeq \frac{\lambda}{d}$$

L'incompatibilità tra le variabili dinamiche di un sistema quanto-meccanico è espressa in forma precisa da un fondamentale teorema della meccanica quantistica il quale stabilisce che

Il prodotto delle deviazioni standard delle misure di due grandezze fisiche  $a$  e  $b$  in uno stato  $\psi$  è limitato inferiormente dal valore di aspettazione del commutatore dei loro operatori diviso il fattore  $2i$

$$\sigma_a \sigma_b \geq \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}{2i} \psi(\mathbf{r}, t) dV \quad (40)$$

A titolo di esempio possiamo considerare proprio le variabili dinamiche di posizione e quantità di moto

$$a = p_{-x} \quad b = x \quad \text{--}$$

con corrispondente operatori

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad x$$

e calcolarne il commutatore

$$\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X}$$

per cui calcoliamo i due termini

$$\begin{aligned} \hat{X}\hat{P}_x\psi &= x \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi \\ \hat{P}_x(\hat{X}\psi) &= \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) (x\psi) = -i\hbar \left( \psi - x \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) = -i\hbar\psi - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi \end{aligned}$$

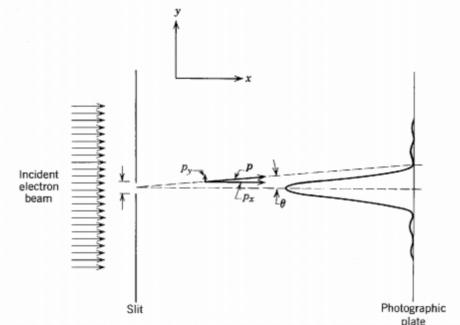


Figura 8: This is a margin figure.

ed otteniamo

$$(\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X})\psi = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi - \left[ -i\hbar\psi - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi \right] = i\hbar\psi$$

da cui il valore del commutatore

$$\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X} = i\hbar\hat{1}$$

che sostituito nella (34) fornisce

$$\begin{aligned} \sigma_x\sigma_{p_x} &\geq \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X}}{2i} \psi(\mathbf{r}, t) dV = \iiint_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{i\hbar\hat{1}}{2i} \psi(\mathbf{r}, t) dV \\ \sigma_x\sigma_{p_x} &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

che esprime in forma rigorosa il principio di indeterminazione per le misure della posizione e quantità di moto.

### 0.12.3 Momento angolare orbitale

Il momento angolare orbitale è un ottimo esempio per comprendere come si possa utilizzare il *principio di corrispondenza* per costruire l'operatore quantomeccanico di una variabile dinamica a partire dalla sua espressione classica

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$$

L'idea è quella di ottenere l'espressione quantomeccanica dell'operatore associato attraverso la sostituzione diretta delle variabili classiche con i corrispondenti operatori quantistici. Richiamando allora gli operatori posizione e quantità di moto, otteniamo la seguente espressione della terna ordinata di operatori che costituiscono **l'operatore momento della quantità di moto**

$$\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{r} \wedge (-i\hbar\nabla) = -i\hbar \mathbf{r} \wedge \nabla$$

la quale, nel sistema di coordinate cartesiano, assume la seguente forma

$$\hat{\mathbf{l}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Dato che le proprietà generali di un operatore possono essere studiate attraverso le sue relazioni di commutazione, utilizziamo la forma cartesiana esplicita per calcolare i commutatori della terna di operatori. Si ottiene facilmente

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$$

Verifichiamo allora che uno stato quantomeccanico non ammette valori definiti del momento della quantità di moto lungo  $x, y$  e  $z$  poiché la proiezione lungo  $x$  è incompatibile con quella lungo  $y$ , quella lungo  $z$  con quella lungo  $x$  e quella lungo  $y$  con quella lungo  $z$ . Ciò significa che *in uno stato quantomeccanico il momento angolare può assumere valori definiti lungo una sola direzione* che solitamente si assume come asse  $z$ .

Consideriamo ora l'operatore **modulo quadrato del momento angolare**

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

Sempre con calcolo diretto si ottengono facilmente i seguenti commutatori

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

Dalle relazioni di commutazioni scritte, concludiamo allora che **uno stato quantomeccanico ammette valori definiti del quadrato del momento angolare e della sua componente lungo  $z$** .

Giunti a questo punto si pone il problema di stabilire quali siano i valori definiti del quadrato del momento angolare e della sua componente lungo  $z$  e quali siano le espressioni della funzione d'onda dei corrispondenti stati quantomeccanici. Per rispondere a queste domande occorre risolvere le equazioni agli autovalori degli operatori. In particolare, gli **autovalori forniranno i possibili valori del quadrato del momento angolare e della sua terza componente**, mentre le corrispondenti **autofunzioni** forniranno le espressioni delle **funzioni d'onda** degli stati quantomeccanici:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2\psi &= \lambda\psi \\ \langle \hat{L}^2 \rangle &= \iiint_V \psi^* \hat{L}^2 \psi \, dV = \lambda \iiint_V \psi \psi^* \, dV = \lambda \\ \hat{L}^2\psi &= \lambda'\psi \quad \hat{L}_z\psi = \lambda''\psi \end{aligned}$$

Sviluppando il conto si ha

$$\begin{aligned} \hat{L}^2\psi &= l(l+1)\hbar^2\psi \quad l = 0, 1, 2, \dots, n \\ \hat{L}_z\psi &= m\hbar\psi \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \end{aligned}$$

Siamo di fronte ad un operatore **quantizzato** ovvero che può assumere valori **discreti**: i numeri interi  $l$  ed  $m$  descrivono compiutamente lo stato quantomeccanico e vengono detti numeri quantici del momento angolare.

In particolare le coppie di valori  $l$  ed  $m$  individuano specifiche funzioni d'onda  $\psi_{l,m}(\theta, \phi)$  dette **armoniche sferiche**. This peculiar set of

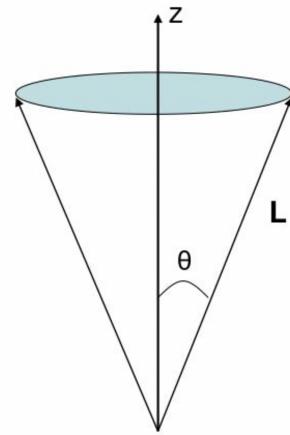


Figura 9: Il set dei possibili valori di  $\hat{L}_x$  e  $\hat{L}_y$  descrive un cono attorno ad  $\hat{L}_z$

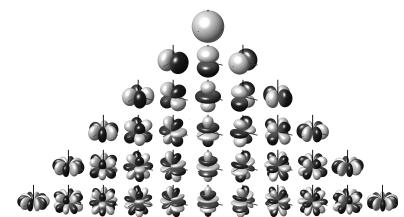


Figura 10: Rappresentazione grafica delle prime armoniche sferiche.

functions comes out in the classical theory as well when considering the modes of oscillation of a 2-dimensional membrane.

I possibili valori del quadrato del momento angolare sono dati dalla successione discreta  $l(l+1)\hbar^2$  dove  $l = 0, 1, 2, \dots$  mentre i possibili valori del momento angolare lungo z sono dati dalla successione discreta  $m\hbar$  dove  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$  ovvero da una sequenza di  $2l+1$  valori interi dipendente da  $l$ .

#### 0.12.4 Momento angolare intrinseco o spin

Nella meccanica classica i corpi materiali puntiformi possiedono al più solo momento angolare orbitale mentre quelli estesi possono essere portatori anche di un momento angolare intrinseco (spin). Scegliendo il polo di riduzione coincidente con il centro di massa del corpo materiale, il momento angolare orbitale si annulla e l'unico momento angolare residuo del corpo esteso è quello intrinseco che si manifesta come rotazione del corpo stesso attorno ad un asse baricentrico.

Date queste premesse, ci si può domandare se anche le particelle microscopiche possiedano un momento angolare intrinseco (spin) in aggiunta al momento angolare orbitale. I fatti sperimentali mostrano che la risposta è affermativa e che il momento angolare intrinseco o spin deve essere introdotto anche nel caso delle particelle microscopiche. Vi sono però delle sostanziali differenze

- **meccanica classica:** un momento angolare intrinseco o residuo può esistere solo per i *corpi estesi* (non puntiformi) e questo si interpreta come la somma dei momenti angolari orbitali di tutte le parti che lo compongono;
- **meccanica quantistica:** un momento angolare intrinseco o di spin può esistere anche per le particelle puntiformi e come tale non è riducibile in nessun modo a somme di momenti angolari orbitali delle parti del sistema;
- **meccanica classica:** il modulo del momento angolare intrinseco può assumere con *continuità qualunque valore*, ha un carattere estrinseco e descrive essenzialmente lo stato cinematico di rotazione del sistema rispetto ad un prefissato riferimento;
- **meccanica quantistica:** il modulo del momento angolare intrinseco può assumere un solo valore *fisso* ed *immutabile*. A seguito di tale invarianza perde il suo carattere estrinseco di natura cinematica ed assume - al pari della massa e delle cariche interne del corpuscolo - lo status di grandezza fisica intrinseca preposta alla descrizione di una nuova proprietà statica della particella.

Per questi ed altri motivi possiamo affermare che *lo spin e una variabile dinamica essenzialmente quantistica* senza una diretta corrispondenza classica.

Pauli pensò che fosse necessario introdurre una **terna di operatori di spin**

$$S_x \quad S_y \quad S_z$$

soddisfacenti le regole di commutazione ‘tipo momento angolare’

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

ed operano sullo **spazio degli stati di spin**, uno ‘spazio interno’ diverso da quello su cui operano gli operatori del momento angolare orbitale (lo spin e dunque un nuovo grado di libertà del sistema microscopico).

In analogia con il caso del momento della quantità di moto, le regole di commutazione appena scritte implicano che **uno stato quantomeccanico ammette valori definiti del modulo quadrato dello spin e della sua terza componente**.

In particolare, risolta l’equazione agli autovalori degli operatori quadrato del momento angolare di spin e della sua terza componente si può ottenere l’insieme degli autovalori e delle autofunzioni:

$$\hat{S}^2 \eta_{s,s_z} = s(s+1)\hbar^2 \eta_{s,s_z} \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$\hat{S}_z \eta_{s,s_z} = s_z \hbar \eta_{s,s_z} \quad s_z = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

dove  $s_z$  compie salti unitari tra un valore di  $s$  e il seguente. I possibili valori del quadrato del momento angolare di spin sono dati dalla  $s(s+1)\hbar^2$ . Per ciascuno di questi, i possibili valori del momento angolare di spin lungo  $z$  sono dati dalla successione discreta di  $2s+1$  valori  $s_z \hbar$ . I numeri  $s$  e  $s_z$  descrivono compiutamente lo stato quantomeccanico e sono detti numeri quantici dello spin. Essi individuano specifici vettori  $\eta_{s,s_z}$  nello spazio degli spin e dato che, fissato un certo  $s$  si hanno  $2s+1$  diversi valori di  $s_z$  che individuano  $2s+1$  vettori linearmente indipendenti (e normalizzati) nello spazio degli spin, ne deriva che **lo spazio dello spin di valore  $s$  è uno ‘spazio interno’ complesso di  $2s+1$  dimensioni**.

Esempio: - Se  $s = \frac{1}{2}$  allora  $s_z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ,  $\eta_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$  - Se  $s = 1$  allora  $s_z = -1, 0, 1$ ,  $\eta_{1, -1}, \eta_{1, 0}, \eta_{1, 1}$  - Se  $s = 0$  allora  $s_z = 0$ ,  $\eta_{0, 0}$  e si dice che la particella non ha spin

Da quanto detto consegue che lo stato quantomeccanico di una particella microscopica di spin  $s$  dovrà essere rappresentato nello *spazio prodotto* dello spazio degli stati quantomeccanici ‘ordinari’ già visto, con lo spazio degli stati di spin, ovvero dalla funzione d’onda

'estesa'

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)\eta_{s, s_z}$$

dove  $\eta$  è il vettore di spin.

(È utile sta cosa?) L'analogo classico più vicino all'onda piana, con  $\eta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$  ampiezza spinoriale,

$$\eta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \psi_0 e^{i/\hbar(p \cdot r - Et)}$$

è un'onda piana di campo elettrico

$$E_0 \sin(k \cdot r - \omega t)$$

E' importante sottolineare che l'introduzione di un apposito 'spazio complesso' per la descrizione degli stati di spin delle particelle microscopiche costituisce un precedente teorico di grande rilevanza. Essa infatti suggerisce che eventuali gradi di libertà interni delle particelle richiesti dalla analisi dei dati sperimentali possano essere descritti in ambito quantomeccanico semplicemente introducendo spazi vettoriali complessi addizionali dotati della giusta dimensionalità.

#### 0.12.5 La somma dei momenti angolari

Sia nei sistemi classici che quantomeccanici accade di dovere calcolare il momento angolare di un sistema formato da due sottosistemi aventi ciascuno un dato momento angolare, come si deve fare?

- *Fisica classica:* ai momenti angolari sono associati vettori, pertanto al momento angolare del sistema complessivo si associa la somma vettoriale dei momenti angolari dei due sottosistemi. Dati allora i momenti angolari  $J_1$  e  $J_2$  dei due sottosistemi, il momento angolare del sistema complessivo sarà dato dalla somma vettoriale  $J = J_1 + J_2$  calcolata con la regola del parallelogramma e dipendente da moduli direzioni e versi relativi dei vettori sommati. In particolare, il modulo di tale momento angolare assumera la seguente serie continua di valori

$$J = J_1 + J_2 \quad ||J_1| - |J_2|| \leq |J| \leq |J_1| + |J_2||$$

- *Meccanica quantistica:* ai momenti angolari sono associati operatori, al momento angolare del sistema complessivo si associa allora la somma operatoriale degli operatori momento angolare dei due sottosistemi. Dati allora gli operatori momento angolare  $\hat{J}_1$  e  $\hat{J}_2$  dei due sottosistemi, l'operatore momento angolare del sistema complessivo sarà dato dalla somma operatoriale  $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ . In accordo con le regole generali della meccanica quantistica, si pone allora il problema di determinare autovalori e autostati di tale operatore somma dei momenti angolari.

In relazione a questo problema, è semplice mostrare con prova diretta che se gli operatori  $\hat{J}_1$  e  $\hat{J}_2$  soddisfano le relazioni di commutazione viste in precedenza allora anche l'operatore  $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$  soddisferà relazioni di commutazione dello stesso tipo. Ciò significa che gli operatori  $J^2 = (J_1 + \hat{J}_2)^2$  e  $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$  avranno in generale i seguenti autovalori

$$\begin{aligned} j(j+1)\hbar^2 & \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \\ m\hbar & \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

Sulla base di considerazioni generali non è possibile dire di più, per cui risulta necessario citare i risultati del teorema della somma dei momenti angolari in meccanica quantistica.

Dati allora due stati quantomeccanici con momento angolare definito  $\phi_{j_1, m_1}$  e  $\phi_{j_2, m_2}$  autostati degli operatori  $\hat{J}_1, \hat{J}_{1z}$  e  $\hat{J}_2, \hat{J}_{2z}$  si ha

$$\begin{aligned} \hat{J}_1^2 \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) &= j_1(j_1+1)\hbar \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) \quad j_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \\ \hat{J}_{1z} \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) &= m\hbar \phi_{j_1, m_1}(\mathbf{r}) \quad m_1 = -j_1, -j_1+1, \dots, j_1-1, j_1 \\ \hat{J}_2^2 \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) &= j_2(j_2+1)\hbar \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) \quad j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \\ \hat{J}_{2z} \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) &= m\hbar \phi_{j_2, m_2}(\mathbf{r}) \quad m_2 = -j_2, -j_2+1, \dots, j_2-1, j_2 \end{aligned}$$

Lo stato quantomeccanico complessivo  $\phi_{j, m}$  è autostato degli operatori  $J^2 = (J_1 + \hat{J}_2)^2$  e  $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$  dove i loro numeri quantici  $j$  ed  $m$  soddisfano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 \phi_{j, m}(\mathbf{r}) &= j(j+1)\hbar \phi_{j, m}(\mathbf{r}) \quad |j_1 - j_2| < j < |j_1 + j_2| \\ \hat{J}_z \phi_{j, m}(\mathbf{r}) &= m\hbar \phi_{j, m}(\mathbf{r}) \quad m = m_1 + m_2 \end{aligned}$$

*Esercizio didattico - Spazio di spinori 2 dimensionale.* Consideriamo uno spazio di spinori identificato da

$$s = \frac{1}{2} \quad s_z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

per cui si hanno gli spinori

$$\xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad \xi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

Per quanto riguarda gli operatori di spin si ha

$$\hat{S}^2 \xi_{\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \hbar^2 \xi_{\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}$$

e

$$\hat{S}_z \xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \hbar \xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad \hat{S}_z \xi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \hbar \xi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

Lo spazio è chiaramente bidimensionale dove le direzioni sono identificate dai 2 spinori: [qui disegno di lato ]

Nel momento in cui si utilizza uno spazio astratto per rappresentare lo spin è necessario che valga la condizione della sovrapposizione di stati che giustifica la spazializzazione dello spin. A livello classico tale richiesta in uno spazio ordinario sarebbe quella che tutte le posizioni intermedie fossero accessibili.

In ogni caso siamo interessati solamente agli stati normalizzati, e dunque non è fondamentale operare in tutto lo spazio, bensì possiamo restringerci alla sfera unitaria.

Per dare una forma più semplice e concreta agli spinori, eseguo la seguente identificazione

$$\xi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli operatori  $\hat{S}$  assumeranno forma matriciale in tale rappresentazione

$$S_{x,y,z} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Dovendo rispettare la condizione che  $S$  sia *autoaggiunta* la costruiamo come

$$S_{x,y,z} = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix}$$

Volendo però stare in totale generalità scriviamo

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che qualunque matrice è combinazione lineare di queste 4 matrici  $\Rightarrow$  analogo dei versori. Le matrici di base sono le cosiddette **matrici di Pauli**.

$$M = a I_{2 \times 2} + b \sigma_1 + c \sigma_2 + d \sigma_3$$

Osserviamo che la matrice identità non può far parte in questa base, altrimenti si andrebbe a perdere la condizione di non commutazione propria degli operatori di spin (essa commuta con tutte le matrici). La rappresentazione matriciale di  $\hat{S}_z$  sarà la seguente

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \hbar I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \hat{S}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar \end{pmatrix}$$

Quindi  $\hat{S}_z$  deve essere **diagonale con i valori di spin sulla diagonale**.

Quindi quella appena scritta è una base ortonormale (essendo già i vettori normalizzati) di  $\hat{S}_z$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$$

Svolgendo il conto vediamo che anche la relazione di commutazione

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y$$

è rispettata. In conclusione

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$$

Un vettore generico di spin generico si scrive come

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Scelta una base ortonormale verifichiamo che

$$\hat{S}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} I = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

risultato che ci aspettavamo. Un aspetto piuttosto rilevante è che abbiamo visto che  $\hat{S}$  ed  $\hat{S}_z$  sono gli unici operatori a poter essere diagonalizzati contemporaneamente  $\implies$  torna con l'interpretazione fisica sulla misurazione quantistica.

Si noti che, contrariamente al caso classico dove la somma di due momenti angolari definiti fornisce un momento angolare definito, nel caso quantistico ciò accade solo per la terza componente rimanendo invece indefinito il suo modulo quadrato e dunque il numero quantico  $j$ . Si tratta con tutta evidenza di una conseguenza delle indefinizioni delle componenti  $x$  e  $y$  dei momenti angolari sommati che rende però necessario precisare la relazione esistente tra gli stati quantomeccanici dei sistemi parziali  $\phi_{j_1, m_1}$  e  $\phi_{j_2, m_2}$  e lo stato quantomeccanico del sistema complessivo  $\phi_{j, m}$ .

In base a quanto detto precedentemente, dati

$$(j_1, m_1) \quad (j_2, m_2)$$

Il teorema dice che  $j, m$  continuano ad essere interi e vale la seguente relazione

$$\begin{aligned} |j_1 - j_2| &\leq j \leq |j_1 + j_2| \\ m &= m_1 + m_2 \end{aligned}$$

Mentre i sistemi parziali hanno momento angolare

$$Y_{2,2} = (2,0) \quad Y_{1,1} = (1,1)$$

il sistema totale non ha momento angolare definito  $\Rightarrow$  collasso.

Vale la sovrapposizione

$$aY_{1,1} + bY_{2,1} + cY_{3,1}$$

dove  $a, b, c$  si dicono i **coefficienti di Clebsch-Gordan**. In generale si può mostrare che

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{\substack{j=|j_1-j_2| \\ m=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \phi_{jm}$$

In figura a lato si può vedere una tabella di coefficienti di Clebsch-Gordan.

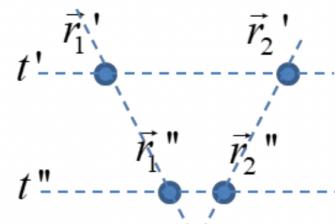
### 0.12.6 Stati quantomeccanici di due particelle identiche

Lo studio dei sistemi quantomeccanici formati da particelle identiche conduce a nuove sorprendenti proprietà che non trovano alcuna analogia nella fisica classica. Vediamo un esempio.

Immaginiamo di essere in ambito macroscopico e quindi soggetti alle leggi della *fisica classica*.

Immaginiamo poi che, in una certa porzione di spazio, si muovano due piccole sferette, e che tale spazio sia illuminato ad intervalli di tempo regolari da una luce stroboscopica. Il lampo luminoso al tempo  $t'$  mostrerà le due sferette nelle posizioni  $r'_1$  e  $r'_2$  e quello al tempo  $t''$  in  $r''_1$  e  $r''_2$ . Con tutta evidenza, se le due sferette sono diverse non esiste alcun problema nell'associare alle posizioni osservate, in ogni dato istante di tempo, la specifica sferetta. Si dice allora che in meccanica classica due particelle diverse sono sempre distinguibili.

Diverso sembra il caso in cui le due sferette siano identiche. Infatti, non sapremmo dire se la sferetta nella posizione  $r''_1(r''_2)$  al tempo  $t''$  sia quella che al tempo  $t'$  si trovava in  $r'_1$  o quella che si trovava in  $r'_2$ . L'identità delle sferette ci ha condotti dunque alla impossibilità di associare con certezza le posizioni alle particelle. L'ambiguità, però, non è essenziale poiché può essere superata qualora al tempo  $t'$  siano note, non solo le posizioni delle sferette, ma anche le loro velocità  $v'_1$  e  $v'_2$ . Infatti, al tempo  $t''$  ciascuna sferetta dovrà trovarsi non troppo lontano dalla direzione della propria velocità al tempo  $t'$  (se l'istante  $t''$  non è troppo lontano da  $t'$ ). Concludiamo allora



These have been calculated using computer programs written independently by Coombes & LOMA.

che, se in un istante di tempo le posizioni e le velocità di due sferette identiche sono note con sufficiente precisione, sarà sempre possibile determinare la loro posizione in ogni istante di tempo successivo.

Poiché nella meccanica classica non ci sono limitazioni nel conoscere in ogni istante di tempo le posizioni e le velocità delle particelle in gioco, concludiamo che **nella fisica classica sia le particelle diverse che quelle identiche sono sempre distinguibili**.

Cosa accade in meccanica quantistica? È semplice rendersi conto che nel caso di particelle diverse una ipotetica misura di massa, carica o di una qualunque variabile interna capace di determinarne l'identità sarà in grado di dirci senza ambiguità quale posizione occupi ciascuna delle due particelle. Dunque, analogamente al caso della meccanica classica, giungiamo quindi ad affermare che nella meccanica quantistica due particelle diverse sono sempre distinguibili.

Ben diverso è il caso in cui le particelle siano identiche. Infatti - a differenza di ciò che accade in meccanica classica – uno stato quantomeccanico non può possedere in ogni istante di tempo sia posizioni definite che velocità definite (principio di indeterminazione). Se ad esempio al tempo  $t'$  sono definite le posizioni  $r'_1$  e  $r'_2$  delle due particelle identiche, risulteranno allora indefinite le corrispondenti velocità  $v'_1$  e  $v'_2$  pregiudicando dunque la possibilità di attribuire univocamente una posizione a ciascuna di esse al tempo  $t'$ . Analogamente, se al tempo  $t'$  sono definite le velocità  $v'_1$  e  $v'_2$  delle due particelle identiche (e dunque le quantità di moto), risulteranno allora indefinite le loro posizioni che non potranno essere univocamente assegnate alle particelle stesse.

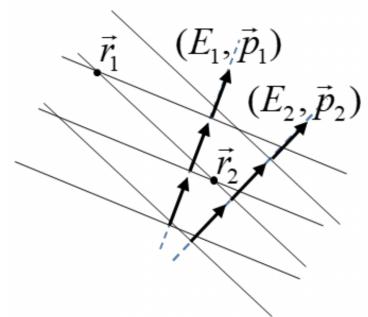
Giungiamo allora a concludere che **nella meccanica quantistica due particelle identiche sono sempre indistinguibili**. Tale fatto può essere visto in modo ancor più diretto attraverso il seguente

esempio. Immaginiamo di avere due particelle microscopiche identiche che si trovino in stati quantomeccanici diversi, ad esempio di quantità di moto ed energia  $(E_1, p_1)$  ed  $(E_2, p_2)$  descritte da due onde piane di De Broglie (vedi figura).

Con tutta evidenza due misure di posizione potranno trovare la particella  $(E_1, p_1)$  nella posizione  $r_1$  e la particella  $(E_2, p_2)$  nella posizione  $r_2$ , oppure la particella  $(E_2, p_2)$  nella posizione  $r_1$  e la particella  $(E_1, p_1)$  nella posizione  $r_2$ , dando quindi luogo alla ambiguità discussa.

L'esempio può guidarci anche alla costruzione della funzione d'onda del sistema quantomeccanico delle due particelle identiche.

Per cominciare consideriamo due particelle identiche poste in regioni di spazio differenti ovvero mutuamente isolate (ad esempio ponendole in contenitori diversi). La densità di probabilità di os-



servare la particella  $(E_1, p_1)$  nella posizione  $r_1$  e la particella  $(E_2, p_2)$  nella posizione  $r_2$  e data allora dal modulo quadrato della seguente funzione d'onda

$$\psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_2, t) \quad (41)$$

dove i termini a prodotto sono le funzioni d'onda delle singole particelle

$$\begin{aligned}\psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_1, t) &= A_{E_1, \mathbf{p}_1} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - E_1 t)} \\ \psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_2, t) &= A_{E_2, \mathbf{p}_2} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - E_2 t)}\end{aligned}$$

Se ora rimuoviamo la condizione di isolamento, costruendo un unico sistema fisico formato da due particelle identiche poste nella stessa regione di spazio (ad esempio mettendole entrambe nello stesso contenitore) ci rendiamo subito conto che la funzione d'onda (35) non descrive lo stato quantomeccanico in modo completo. Infatti - come osservato in precedenza - è anche possibile che una misura di posizione sul sistema trovi la particella  $(E_2, p_2)$  in  $r_1$  e la particella  $(E_1, p_1)$  in  $r_2$ , un esito evidentemente non descritto dalla (35). Tale esito è invece descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_2, t) \quad (42)$$

dove i termini a prodotto sono dati dalle funzioni d'onda delle singole particelle

$$\begin{aligned}\psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_2, t) &= A_{E_1, \mathbf{p}_1} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_2 - E_1 t)} \\ \psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1, t) &= A_{E_2, \mathbf{p}_2} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_1 - E_2 t)}\end{aligned}$$

Ora, dato che il sistema di due particelle identiche può dare luogo ad entrambi gli esiti (35) e (36), tali esiti - in accordo con i principi generali della meccanica quantistica - dovranno essere sommati coerentemente. In assenza di ulteriori prescrizioni, non potremo che introdurre due generici coefficienti complessi ottenendo uno stato che - pur soddisfacendo i requisiti richiesti - contiene due coefficienti arbitrari

$$\psi_{sis} = \alpha \psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_2, t) + \beta \psi_{E_2, \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1, t) \psi_{E_1, \mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_2, t)$$

una ambiguità nota con il nome di **degenerazione di scambio**.

### 0.13 Il nucleo come gas di fermioni

Il modello a goccia del nucleo - essenzialmente fondato sulla natura a corto raggio delle interazioni forti - riesce a descrivere alcune proprietà del nucleo tra le quali l'esistenza di una energia di legame con termini di volume, superficie e coulombiano. Non riesce invece a rendere conto in nessun modo dei termini di asimmetria e accoppiamento, chiaramente richiesti dai dati sperimentali, ma che devono essere introdotti 'a mano' nella formula di Weizsäcker. Tale fatto dimostra che oltre alla natura a corto raggio delle interazioni forti, nel nucleo giocano un ruolo di rilievo altre proprietà trascurate dal modello a goccia, presumibilmente legate alla natura quantomeccanica dei suoi costituenti. Il modello nucleare a gas di fermioni introduce nel gioco alcuni essenziali proprietà quantomeccaniche in una forma il più possibile semplificata.

## Appendice A : Integrazione sull'angolo solido della sezione d'urto di scattering

Integriamo la sezione d'urto di scattering sullo schermo  $S_O$  su cui si osserva la diffrazione in approssimazione di far field(schermo lontano). Supporremo inoltre lo schermo molto esteso rispetto all'estensione della figura di diffrazione.

$$\sigma_{scatt} = \iint_{\Omega} |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega = \iint_{S_O} \frac{|f(\mathbf{q})|^2}{r^2} da$$

Ora, sostituendo l'espressione della scattering amplitude (19) ed utilizzando l'identità  $|f|^2 = \bar{f}f$  abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_{scatt} &= \iint_{S_O} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} da' \right) \left( -\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}''} da'' \right) \right] da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_O} \left( \frac{1}{r^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')} da'' da' \right) da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} \left( \iint_{S_O} \frac{1}{r^2} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')} da \right) da'' da' \end{aligned} \quad (43)$$

Vogliamo ora sviluppare la fase dell'esponenziale. Assumendo un sistema di coordinate cartesiano con l'asse z orientato normalmente agli schermi, la coordinata z del secondo schermo assume valori grandi, si hanno allora le relazioni seguenti

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \simeq z \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \simeq z$$

Per quanto riguarda il vettore d'onda trasferito, definendo  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  nell'approssimazione di  $z \gg x, y$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= k(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}') = k \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \hat{\mathbf{k}} \right) \simeq k \left( \frac{x}{z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z} \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \right) = k \left( \frac{x}{z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z} \hat{\mathbf{j}} \right) \\ \mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'') &\simeq \left( \frac{x}{z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z} \hat{\mathbf{j}} \right) \cdot [(x'' - x') \hat{\mathbf{i}} + (y'' - y') \hat{\mathbf{j}} + (z'' - z') \hat{\mathbf{k}}] = \frac{kx}{z} (x'' - x') + \frac{ky}{z} (y'' - y') \end{aligned}$$

che sostituite nella (43) forniscono

$$\sigma_{scatt} = \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} \left( \iint_{S_O} \frac{1}{z^2} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') e^{i\frac{kx}{z}(x''-x') + i\frac{ky}{z}(y''-y')} dx dy \right) da'' da'$$

Nelle nostre ipotesi  $S_O \gg S_B$ , per cui sviluppiamo la precedente come

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{S_B} \iint_{S_B} da'' da' \frac{1}{z^2} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') \frac{4\pi^2 z^2}{k^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{x}{z}(x'-x'')} \frac{x}{z} dk \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{y}{z}(y'-y'')} \frac{y}{z} dk \right)$$

Utilizzando ora l'espressione esponenziale della delta di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x)$$

riscriviamo

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') \delta(x'' - x') \delta(y'' - y') dx'' dy'' dx' dy'$$

Tenendo ora conto di

- $z'' = z'$  avendo scelto il riferimento con l'asse  $z$  normale al piano di integrazione;
- le delta di dirac bloccano gli integrali ai valori  $x'' = x', y'' = y'$ ;
- $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}'$  (gli assi  $z$  e  $z'$  sono collineari).

in definita abbiamo

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') \bar{\Gamma}(\mathbf{r}'') dx' dy' = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 dx' dy'$$

Abbiamo quindi ritrovato la (27):

$$\sigma_{scatt} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da'$$

## Appendice B : Funzione di Bessel di ordine zero

La rappresentazione integrale della funzione di Bessel di ordine zero che si incontra più di frequente è la seguente (vedi 9.1.18 Abramowitz-Stegun<sup>10</sup>)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi$$

Da qui si trova facilmente

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{ix \cos \varphi} + e^{-ix \cos \varphi}}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} d\varphi + \int_0^\pi e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} e^{ix \cos(\varphi' - x)} d(\varphi' - x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi'} d\varphi' + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

da cui infine

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi$$

<sup>10</sup> Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964



## *Appendice C : Integrazione della funzione di Bessel di ordine zero*

Le derivate delle funzioni di Bessel possono essere espresse attraverso altre funzioni di Bessel(vedi 9.1.30 Abramowitz-Stegun<sup>11</sup>). Da questa formula si trova la relazione seguente

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) = J_0(z)$$

Dalla (30) abbiamo

$$\begin{aligned} f(q) &= ik \int_0^R r J_0(qr) dr \\ &= i \frac{k}{q^2} \int_0^{qR} z J_0(z) dz \\ &= i \frac{k}{q^2} \int_0^{qR} z \frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) dz \\ &= i \frac{k}{q^2} z J_1(z) \Big|_0^{qR} \end{aligned}$$

da cui infine

$$f(q) = i \frac{kR}{q} J_1(qR)$$

<sup>11</sup> Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964



## *Bibliografia*

Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards (DOC), Washington, DC., <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, 1964.

Emil Wolf Max Born. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 60th anniversary edition, 2019. ISBN 978-1-108-47743-7.