

FIR滤波器设计

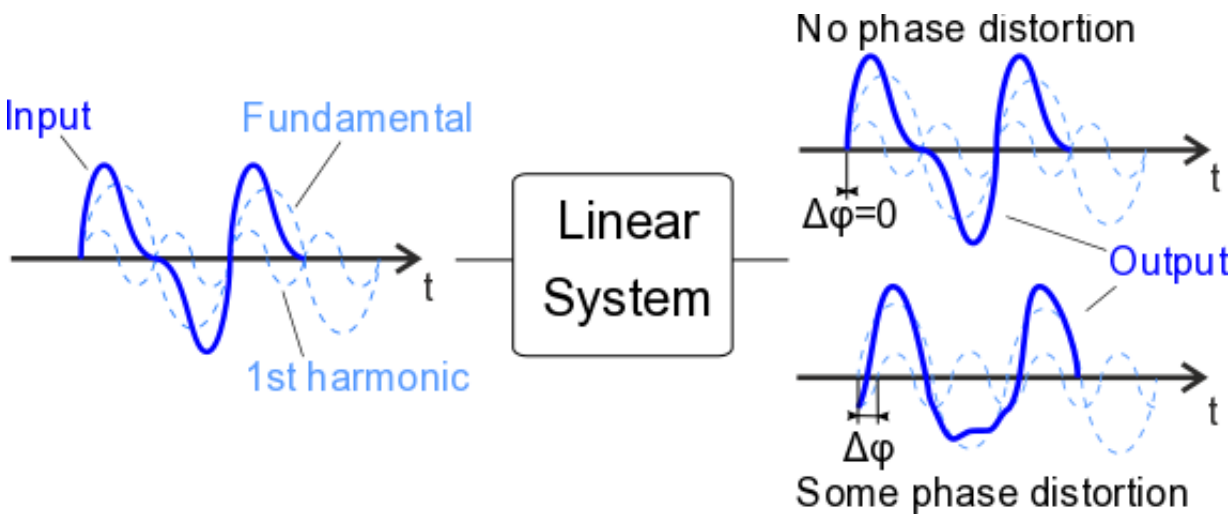
董峦, 胡春华 新疆农业大学 2018

实验背景

有限冲激响应 (Finite Impulse Response, FIR) 滤波器与无限冲激响应 (IIR) 滤波器的重要区别是, FIR滤波器没有反馈。FIR滤波器最有用的特性是线性相位特性, 线性相位指不同频率的正余弦信号在通过一个系统或滤波器后发生的相移与信号的频率成正比。

以下面示意图为例, 系统输入信号由基波和一次谐波组成, 两个成分频率之比为1: 2, 如果系统是线性相位的, 则该信号通过系统后, 基波和一次谐波的相位关系是不变的 (意味着合成出的信号没失真)。我们用具体数值说明一下, 比如基波通过系统相移 $\pi/2$ 弧度 (四分之一周期) 则一次谐波相移应为基波的两倍即 π 弧度 (二分之一周期), 基波的四分之一周期与谐波的二分之一周期在时间上是一样的, 因此基波和谐波的位置关系没有变化。

如果系统不是线性相位的, 则基波和谐波的相移与频率不成比例, 就会出现示意图中右下方的情况, 可以看到由于谐波超前了, 所以合成出的信号发生了畸变。

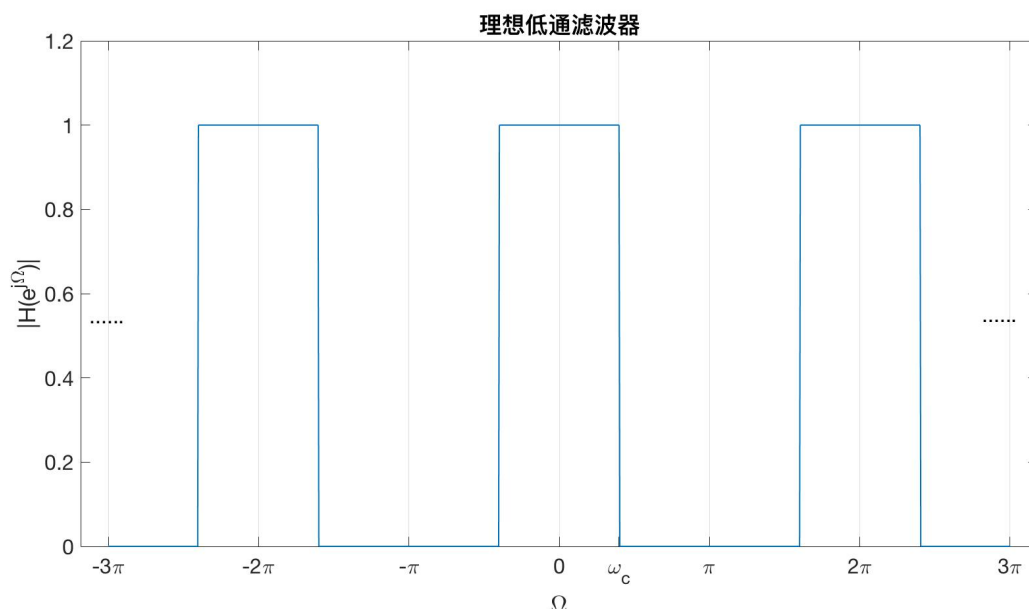


线性相位的优点就是能够保证一个由多个频率分量组成的信号 (通常都是这种信号) 在通过滤波器后, 信号的波形不发生改变。那么, FIR滤波器该如何保证线性相位呢? 答案是, 只要滤波器的冲激响应是对称的就可以了。

窗函数法是最常用的FIR滤波器设计方法, 本次实验我们用该方法设计一个具体的低通滤波器, 并观察滤波器效果。

实验原理

我们假设有用信号频率是100Hz, 而噪声是400Hz, 因此我们设定滤波器规范是截止频率为200Hz的低通滤波器。令采样频率是1000Hz, 则截止频率的归一化频率 $\omega_c = \frac{2\pi}{5}$ 。具备上述信息后, 理想的低通滤波器幅频特性如下图所示。得到理想滤波器是窗函数法FIR滤波器设计的起点。



在归一化频率下，理想低通滤波器幅频特性是周期为 2π 的周期信号，因此我们可以将该幅频特性按傅里叶级数展开

$$|H(e^{j\Omega})| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{jn\Omega} + e^{-jn\Omega})$$

进一步做z变换得到

$$H(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n}) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

上式写成比较容易观察的形式是

$$H(z) = \cdots + a_3 z^{-3} + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

由该式我们可以得出这个理想FIR滤波器的单位冲激响应是

$$h = \{\cdots, a_2, a_1, a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

从滤波器的传递函数可知其是非因果的，而且其单位冲激响应是无限长的。我们需要对其进行两项操作以便使具体的滤波器能够实现。首先是截取单位冲激响应使其为有限长，比如我们在 a_0 两边分别截取M项，这样就把整个冲激响应的长度减少到 $2M+1$ 个样点。这样截取相当于用矩形窗乘以 h ，为了减少截取操作的负面影响，我们通常使用矩形窗之外的窗函数，比如汉宁窗、汉明窗等。

施加了窗函数后传递函数变成

$$H^*(z) = a_0^* + \sum_{n=1}^M a_n^* (z^n + z^{-n})$$

其中 a_0^*, a_n^* 是施加窗函数后的系数。再用 z^{-M} 去乘传递函数使其变成因果的，最终得到我们想要的FIR滤波器传递函数

$$H_{final}(z) = a_M^* + a_{M-1}^* z^{-1} + \cdots + a_1^* z^{-M+1} + a_0^* z^{-M} + a_1^* z^{-M-1} + \cdots + a_M^* z^{-2M}$$

需要说明的是乘以 z^{-M} 意味着使信号延迟M个样点，并不改变信号的面貌，这个将在实验中观察。下面我们就来实现上述过程。

实验内容

首先构造出实验信号

```
fs = 1000;    % 采样频率是1000Hz
T = 1/fs;     % 采样周期是0.001s。1e-3是采用科学计数法表示的0.001
N = 50;       % 样点数

% 构造离散信号
f0 = 100;     % 信号频率100Hz
n = 0:N-1;
my_signal = sin(2*pi*f0*n*T);

my_noise = 0.6 * sin(2*pi*400*n*T);    % 噪声频率是400Hz
my_polluted_signal = my_signal + my_noise; % 将噪声叠加到信号上
stem(n, my_polluted_signal);           % 观察被噪声污染的信号
```

由于傅里叶级数展开中

$$a_0 = \frac{\omega_c}{\pi}, a_n = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$$

据此我们可以计算出这些系数

```
% 计算FIR滤波器的单位冲激响应
M = 20;    % 截取的长度
fc = 200;  % 低通滤波器截止频率是200Hz
wc = 2 * pi * fc / fs; % 信号归一化截止频率

% 计算 a_0 和 a_n
a0 = wc / pi;
an = zeros(1, M);
for i = 1:M
    an(i) = wc * sin(i*wc) / pi / (i*wc);
end

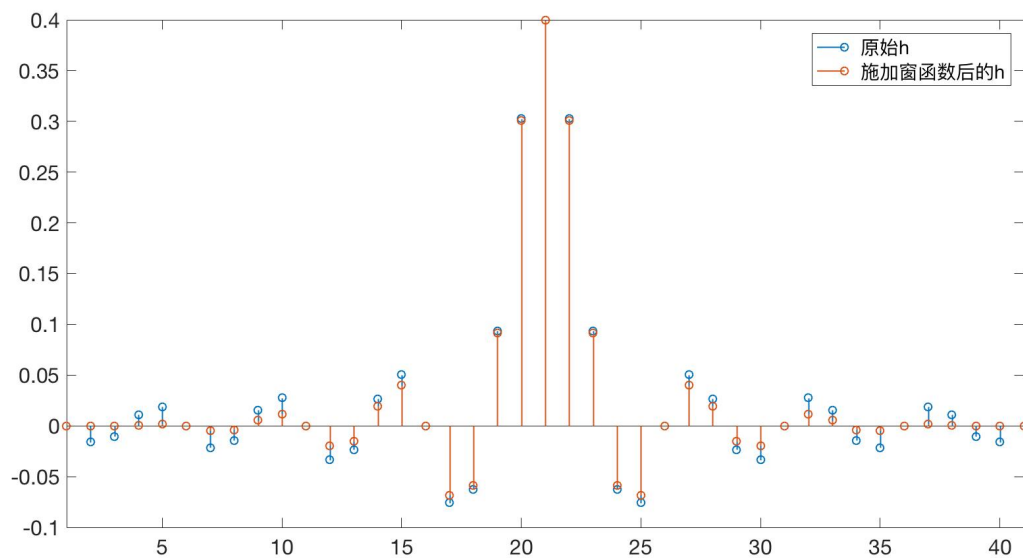
% 拼出完整的单位冲激响应
h = [fliplr(an), a0, an]; % fliplr 函数将行向量左右翻转
```

在系数上施加汉宁窗函数

```
% 观察汉宁窗函数
m = 0:(2*M);
w_hann = 0.5 - 0.5*cos(2*pi*m/(2*M));
stem(m, w_hann);

% 对 h 施加汉宁窗函数
h_s = h .* w_hann; % 逐元素相乘
```

由下图可见施加窗函数前后的单位冲激响应两端衰减得很快



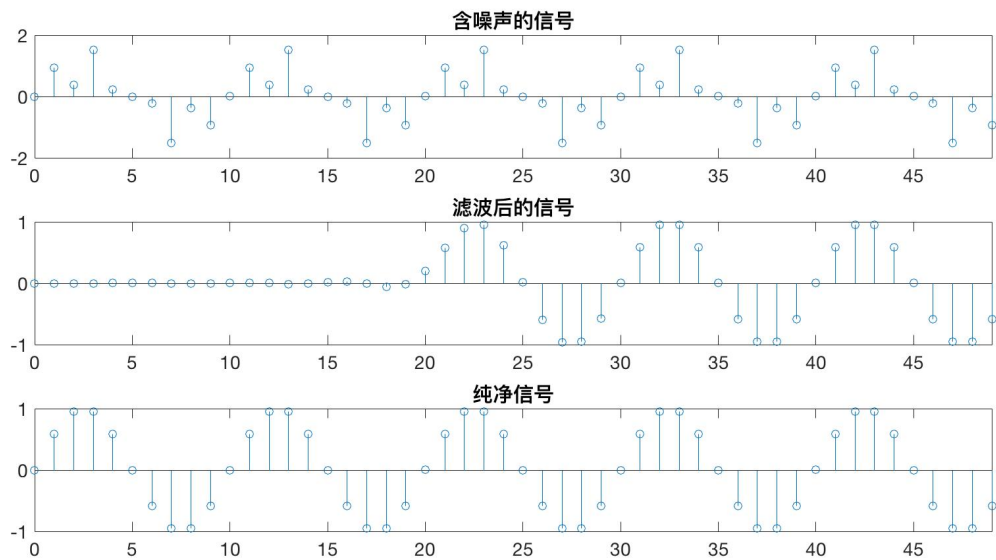
得到了单位冲激响应我们就可以检验滤波效果了

```
% 进行滤波
my_filted_signal = conv(my_polluted_signal, h_s); % 利用卷积运算得到输出信号

% 对比观察被污染的信号，经过滤波后的信号和原信号
subplot(311);
stem(n, my_polluted_signal);
title('含噪声的信号');

subplot(312);
stem(n, my_filted_signal(1:N));
title('滤波后的信号');

subplot(313);
stem(n, my_signal);
title('纯净信号');
```



从上图可见滤波后的信号比原始的纯净信号延迟20个样点（参数M），20个样点后信号形状与纯净信号几乎一致，也就是说400Hz的噪声被滤除了。

试问：改变M对滤波结果有什么影响？更换窗函数呢？如果要求你设计截止频率是250Hz的FIR低通滤波器，你该怎么做？

小结

本次实验我们演示了一个具体FIR滤波器的设计过程，在理解上述过程及其代码后回答文档最后提出的问题。虽然我们设计的是低通滤波器，但高通、带通滤波器的设计过程类似。还有一些FIR滤波器的内容我们没有涉及，比如奇对称的单位冲激响应滤波器有什么特性，这些内容留待你去发现。

最后需要强调的是，FIR和IIR滤波器各有优缺点，但FIR具有IIR缺乏的最重要特质就是线性相位特性。