

Übung 4

Aufgabe 4:

a)

10	10	10	10	20
10	10	10	20	20
10	10	20	20	20
10	20	20	20	20
20	20	20	20	20

: Ziel Pixel

$$y\text{-Richtung: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow I_y = 20 - 10 = 10$$

$$x\text{-Richtung: } (-1, 0, 1) \Rightarrow I_x = 20 - 10 = 10$$

$$\nabla I = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

Struktur- Gradienten- Tensor:

$$\begin{pmatrix} g_x^2 & g_x g_y \\ g_x g_y & g_y^2 \end{pmatrix}$$

↓ erstellt

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren:

$$\det \begin{pmatrix} 100-\lambda & 100 \\ 100 & 100-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(100-\lambda)(100-\lambda) - 10000 = 0$$

$$10000 - 200\lambda + \lambda^2 - 10000 = 0$$

$$\lambda^2 - 200\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 200) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 200 \Rightarrow \text{Eigenwerte}$$

$$\text{für } \lambda_1: \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 100x + 100y = 0 \quad 100x + 100y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Richtung } (-1, 1) \rightarrow \text{Änderung } \lambda_2 \neq 0$$

$$\text{für } \lambda_2: \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ 100 & -100 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -100x + 100y = 0 \quad 100x - 100y = 0 \Rightarrow x = y = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Richtung } (1, 1) \rightarrow \text{keine Änderung daher } \lambda_1 = 0$$

b) $\epsilon_0 = 1 \quad \lambda = \lambda$

$\Rightarrow \lambda_2 = \text{ist immer } \lambda$

$$\lambda_1 = \epsilon \left(\|\nabla u\|^2 \right) = \epsilon_0 \frac{\lambda^2}{\|\nabla u\|^2 + \lambda^2}$$

$$\nabla u = (10, 10)$$

$$\|\nabla u\| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} \approx 14,14$$

$$\lambda_1 = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{200}^2 + \lambda^2} = 1 \cdot \frac{1}{200+1} = \frac{1}{201} \approx 0,004975$$

$$D = \epsilon \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \epsilon^T \quad \epsilon^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & \frac{1}{201} \\ -\frac{1}{201} & \frac{1}{201} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & -\frac{1}{201} \\ -\frac{1}{201} & \frac{1}{201} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & \frac{1}{201} \\ -\frac{1}{201} & \frac{1}{201} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & -\frac{1}{201} \\ -\frac{1}{201} & \frac{1}{201} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{202}{402} & -\frac{200}{402} \\ \frac{200}{402} & \frac{202}{402} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{101}{201} & -\frac{100}{201} \\ \frac{100}{201} & \frac{101}{201} \end{pmatrix}$$

c) $\forall x \neq 0 \Rightarrow x^T D x > 0$

Da beide Eigenwerte λ_1 & λ_2 größer 0 sind, folgt daraus, dass D automatisch positiv definit ist