

Appunti fisica 1

Nicolò Bianchi

Indice

I	MECCANICA	5
1	Cinematica del punto	5
1.1	Moto rettilineo	5
1.1.1	Moto rettilineo uniforme	5
1.1.2	Moto rettilineo uniformemente accelerato	6
1.2	Moto verticale di un corpo	6
1.3	Moto armonico semplice	6
1.4	Moti su traiettoria curvilinea	7
1.4.1	Accelerazione tangenziale e centripeta	8
1.5	Moto circolare	8
1.6	Moto parabolico	9
2	Dinamica del punto	10
2.1	Prima legge della dinamica	10
2.2	Seconda legge della dinamica	10
2.3	Terza legge della dinamica	11
2.4	Unità di misura	11
2.5	Quantità di moto e impulso	11
2.5.1	Teorema dell'impulso	11
2.5.2	Unità di misura	12
2.6	Risultante delle forze. Equilibrio statico	12
2.7	Reazione vincolare	12
2.8	Forza peso	13
2.9	Forza di attrito radente	13
2.10	Piano inclinato	14
2.11	Forza elastica	15
2.12	Forza di attrito viscoso	16
2.13	Forza centripeta	16
2.14	Pendolo semplice	17
3	Moti relativi	18
3.1	Sistemi di riferimento	18
3.1.1	Teorema delle velocità relative	18
3.1.2	Teorema delle accelerazioni relative	19
3.2	Sistemi di riferimento inerziali	19
3.2.1	Relatività Galileana	19
3.3	Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti	20
3.4	Moto di trascinamento traslatorio rettilineo uniforme	20
3.5	Moto di trascinamento traslatorio rettilineo accelerato	20
3.6	Moto di trascinamento rotatorio uniforme	21

4	Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti	22
4.1	Momento di un vettore	22
4.1.1	Prodotto vettoriale (so che non te lo ricordi)	22
4.2	Momento angolare	23
4.3	Momento della forza	23
4.3.1	Teorema del momento angolare	23
4.3.2	Teorema del momento dell'impulso	24
4.4	Lavoro	24
4.5	Potenza	25
4.5.1	Unità di misura	25
4.6	Energia cinetica	25
4.7	Lavoro di alcune forze	26
4.7.1	Lavoro della forza peso	26
4.7.2	Lavoro della forza elastica	26
4.7.3	Lavoro della forza di attrito	26
4.8	Forze conservative	27
4.9	Energia potenziale	27
4.9.1	Calcolare il lavoro	28
4.10	Conservazione dell'energia meccanica	28
5	Dinamica dei sistemi di punti materiali	29
5.1	Forze interne e forze esterne	29
5.2	Centro di massa	29
5.3	Conservazione della quantità di moto	30
5.4	Teorema del momento angolare	31
5.5	Conservazione del momento angolare	32
5.6	Sistema di riferimento del centro di massa	32
5.7	Teoremi di König	33
5.7.1	Teorema di König per il momento angolare	33
5.7.2	Teorema di König per l'energia cinetica	33
5.8	Teorema dell'energia cinetica	34
6	Fenomeni d'urto	35
6.1	Urti tra due punti materiali	35
6.1.1	Classificazione degli urti	36
6.2	Urto elastico	37
6.3	Urto completamente anelastico	38
6.3.1	Pendolo balistico	38
6.4	Urti tra corpi rigidi o tra punti materiali e corpi rigidi	39
6.4.1	Urto elastico contro una parete rigida	39
6.4.2	Urto obliquo	39
7	Dinamica del corpo rigido	40
7.1	Densità	40
7.1.1	Unità di misura	40
7.2	Centro di massa	41
7.2.1	Centro di massa e forza peso	41
7.3	Moto di un corpo rigido	41
7.3.1	Moto di traslazione	41
7.3.2	Moto di rotazione	42
7.4	Rotazioni rigide attorno a un asse fisso	43
7.4.1	Calcolo momento angolare. Momento d'inerzia	43
7.4.2	Equazione del moto di rotazione	44
7.4.3	Energia cinetica e lavoro nel moto di rotazione	44
7.5	Momento di inerzia	45
7.6	Teorema di Huygens-Steiner	46

7.6.1	Teorema di Huygens-Steiner e teorema di Konig	46
7.7	Pendolo composto	46
7.8	Moto di puro rotolamento	47
7.8.1	Conservazione dell'energia meccanica	49
7.9	Impulso angolare	50
7.10	Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido	50

II TERMODINAMICA 52

8	Sistemi termodinamici	52
8.1	Variabili termodinamiche	52
8.2	Equilibrio termodinamico	52
8.3	Temperatura	53
8.4	Termometro	53
8.4.1	Parete diatermica e adiabatica	53
8.5	Esperimenti di Joule	53
8.6	Primo principio della termodinamica	54
8.7	Trasformazioni termodinamiche	54
8.7.1	Trasformazioni reversibili e irreversibili	55
8.8	Capacità termica e calore specifico	55
8.8.1	Mole e calore specifico molare	56
8.9	Cambiamenti di fase	56
8.9.1	Sorgenti di calore	56
8.10	Trasmissione del calore	57
8.10.1	Conduzione di calore	57
8.10.2	Convezione del calore	57
8.10.3	Irraggiamento	57
8.11	Dilatazione termica	57
8.12	Leggi dei gas. Gas ideali o perfetti	58
8.12.1	Legge isoterma di Boyle	58
8.12.2	Legge isobara di Volta-Gay Lussac	58
8.12.3	Legge isocora di Volta-Gay Lussac	58
8.12.4	Legge di Avogadro	59
8.12.5	Equazione di stato del gas ideale	59
8.13	Lavoro termodinamico	60
8.14	Calori specifici nei gas perfetti	61
8.15	Energia interna del gas ideale. $U(T)$	61
8.15.1	Espansione libera di Joule	61
8.15.2	Calcolare variazione di energia interna	62
8.15.3	Relazione di Mayer	62
8.16	Alcune trasformazioni del gas ideale	64
8.16.1	Trasformazioni adiabatiche	64
8.16.2	Trasformazioni isoterme	65
8.16.3	Trasformazione isocora	65
8.16.4	Trasformazioni isobare	65
8.16.5	Trasformazioni politropiche	66
8.17	Entalpia	66
8.18	Trasformazioni cicliche	67
8.18.1	Ciclo di Carnot	67
8.18.2	Cicli frigoriferi	68

9	Secondo principio della termodinamica	69
9.1	Violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck	69
9.2	Violazione enunciato di Clausius	69
9.3	Teorema di Carnot	70
9.4	Teorema di Clausius	71
9.5	Entropia	71
9.6	Principio di aumento dell'entropia	73
9.7	Calcoli di variazione di entropia di un gas ideale	74
	9.7.1 Trasformazioni adiabatiche	75
	9.7.2 Trasformazioni cicliche	75
9.8	Scambio di calore	75
	9.8.1 Cambiamenti di fase	75
	9.8.2 Diagramma TS	75
9.9	Pressione	76

Parte I

MECCANICA

1 Cinematica del punto

Considerando due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t+\Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Il vettore $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$ si chiama **vettore spostamento**, e si definisce **velocità media** del punto materiale durante l'intervallo di tempo Δt il vettore rapporto tra lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ e l'intervallo di tempo necessario per percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Invece la **velocità istantanea** di un punto è data dalla derivata della posizione rispetto al tempo

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

Quando la velocità del punto varia nel tempo il moto si dice accelerato. L'accelerazione media si definisce:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}; \quad (1.3)$$

analogamente l'accelerazione istantanea, cioè la rapidità di variazione temporale della velocità, si definisce come

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.4)$$

1.1 Moto rettilineo

È un moto unidimensionale, è descrivibile tramite una sola coordinata $x(t)$.

La *velocità media* $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ci dà un'informazione complessiva della rapidità con cui avviene il moto nell'intervallo di tempo considerato.

La velocità istantanea di un punto nel moto rettilineo è data da:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.5)$$

e rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato. La relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo è:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (1.6)$$

1.1.1 Moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme è un caso particolare dove $v = \text{costante}$. Da 1.6 ricaviamo:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0) \quad (1.7)$$

La 1.7 è la **legge oraria** del moto rettilineo uniforme; in questo moto la posizione è una funzione lineare del tempo: in tempi eguali sono percorsi spazi eguali.

Con un procedimento analogo a quello utilizzato per la velocità definiamo l'**accelerazione istantanea**

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad (1.8)$$

da cui segue: $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$

1.1.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Se l'accelerazione è costante durante il moto, questo si dice uniformemente accelerato.

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad (1.9)$$

da cui si calcola, utilizzando 1.6, la posizione $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.2 Moto verticale di un corpo

Un corpo lasciato libero di cadere, tralasciando la resistenza dell'aria, si muove verso il basso con un'accelerazione costante $\mathbf{g} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

Il moto di un corpo lasciato cadere da fermo o con velocità iniziale diretta verticalmente è dunque rettilineo uniformemente accelerato. Da 1.9 con $a = -g$:

$$v(t) = v_0 - gt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.11)$$

Se abbiamo una caduta libera da un'altezza h con velocità iniziale nulla avremo:

$$v(t) = -gt, \quad x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.12)$$

Il tempo di caduta t_c ($x(t_c) = 0$) e la velocità al suolo (in modulo) sono:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_c = \sqrt{2gh} \quad (1.13)$$

1.3 Moto armonico semplice

Un punto esegue un moto armonico semplice quando la legge oraria è definita dalla relazione

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.14)$$

A, ω, ϕ sono grandezze costanti: A è detta **ampiezza del moto**, $\omega t + \phi$ **fase del moto**, ϕ **fase iniziale**, ω **pulsazione**.

Dunque il moto armonico semplice è un moto rettilineo vario, $x(t), v(t), a(t)$ variano nel tempo.

I valori estremi assunti dal seno sono $+1$ e -1 : pertanto il punto che obbedisce alla 1.14 percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine.

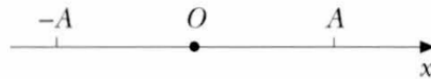


Figura 1: Ampiezza moto armonico semplice

Per $t = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = A \sin(\phi)$.

Il moto armonico risulta essere periodico, dato che la funzione seno è periodica, in effetti il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O , tutte eguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detta **periodo** T del moto armonico.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ ovvero } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.15)$$

Il moto si ripete velocemente quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento per bassi valori della pulsazione.

Si definisce **frequenza** γ del moto il numero di oscillazioni in un secondo.

$$\gamma = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.16)$$

La velocità del punto nel moto armonico si ottiene derivando $x(t)$:

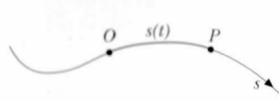
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi). \quad (1.17)$$

Con un'ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t) \quad (1.18)$$

1.4 Moti su traiettoria curvilinea

Se la traiettoria è nota è possibile individuare la posizione del punto P con una singola coordinata curvilinea s , detta **ascissa curvilinea**. Il valore di s esprime la lunghezza del tratto di traiettoria tra un'origine arbitraria O scelta sulla traiettoria, varia nel tempo durante il moto.

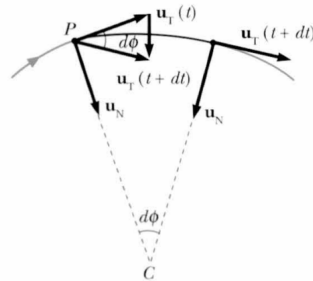


La velocità vettoriale \mathbf{v} ha in ogni istante la direzione e il verso del moto (la tangente alla traiettoria)

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_T = v \mathbf{u}_T; \quad (1.19)$$

utilizzando la 1.19 troviamo l'accelerazione:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{u}_T) = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\phi}{dt} \mathbf{u}_N. \quad (1.20)$$



1.4.1 Accelerazione tangenziale e centripeta

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$$

in modulo $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$.

Le due componenti si chiamano accelerazione tangenziale e accelerazione normale o centripeta (perché diretta sempre verso il centro di curvatura). In un **moto curvilineo vario** entrambe le componenti sono diverse da zero; se però il **moto curvilineo è uniforme**, a_T è nulla. Invece nel **moto rettilineo vario** è nulla a_N .

Quindi:

- se $a_T \neq 0$ il moto è sempre vario,
- se $a_N \neq 0$ il moto è sempre curvilineo.

1.5 Moto circolare

Si chiama moto circolare un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione, l'**accelerazione centripeta è sempre diversa da zero**.

- Nel **moto circolare uniforme** la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla, quindi $\mathbf{a} = \mathbf{a}_N$.
- Nel **moto circolare non uniforme** (v varia) \mathbf{a}_T è diversa da zero.

Il moto circolare può essere descritto da $s(t)$ oppure utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso all'arco $s(t)$, con $\theta(t) = s(t)/R$

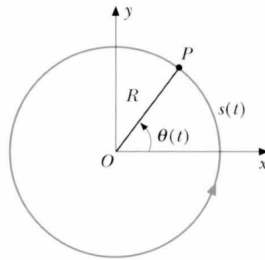


Figura 2: Traiettoria moto circolare

Se il punto all'istante t occupa la posizione θ_1 e all'istante $t + \Delta t$ la posizione angolare θ_2 nell'intervallo Δt ha subito lo **spostamento angolare**, definito da:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \quad (1.21)$$

Si definisce **velocità angolare media** il rapporto $\Delta\theta$ e Δt :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (1.22)$$

La **velocità angolate istantanea** è definita come limite per $\Delta t \rightarrow 0$ di ω_m :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \quad (1.23)$$

Il moto circolare più semplice è quello uniforme: v e ω sono costanti e le leggi orarie sono:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t; \quad s(t) = s_0 + vt \quad (1.24)$$

il moto circolar uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria, $a = a_N$

Nel **moto circolare non uniforme** oltre all'accelerazione centripeta, che è variabile, dobbiamo considerare l'accelerazione tangenziale a_T . Dato che varia anche la velocità angolare ω occorre considerare l'**accelerazione angolare**:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a_T}{R} \quad (1.25)$$

Viceversa se è nota la funzione $\alpha(t)$, possiamo integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \quad (1.26)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad (1.27)$$

1.6 Moto parabolico

Si dice moto parabolico il moto di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \mathbf{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse (orizzontale).

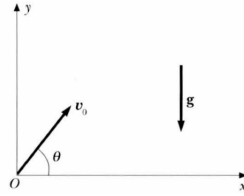


Figura 3: moto parabolico

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{u}_y$.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{v}_0 - gt\mathbf{u}_y \quad (1.28)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos(\theta)\mathbf{u}_x + (v_0 \sin(\theta) - gt)\mathbf{u}_y$$

Quindi le leggi orarie dei moti proiettati sono:

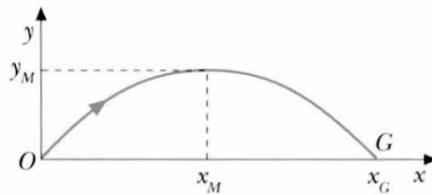
$$x = v_0 t \cos(\theta), \quad y = v_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.29)$$

sull'asse x il moto è uniforme, sull'asse y uniformemente accelerato.

Per calcolare la **gittata** OG poniamo $y(x) = 0$ e otteniamo due soluzioni: $x = 0$ e

$$x_G = \frac{2v_0^2 \cos^2(\theta) \tan(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = 2x_M \quad (1.30)$$

con $x_M = v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)/g$ coordinata del punto di mezzo del segmento OG , ascissa del punto di massima altezza.



L'altezza massima raggiunta è pertanto:

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \quad (1.31)$$

$(x_G)_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ e l'angolo di lancio per cui si ha la gitta massima è $\theta = 45^\circ$

Il **tempo di volo** t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante $v_x = v_0 \cos \theta$:

$$t_G = \frac{2X_M}{v_0 \cos(\theta)} = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} = 2t_M \quad (1.32)$$

2 Dinamica del punto

Questo capitolo introduce il concetto di forza e di forze a contatto:

- si presentano in coppia
- sono vettori
- possono variare lo stato di moto di un corpo
- possono deformare un corpo
- possono equilibrarsi

2.1 Prima legge della dinamica

La prima legge della dinamica o *principio di inerzia* dice che:

un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero

- resta in stato di quiete se era fermo ($\mathbf{v}=0$)
- si muove di moto rettilineo uniforme (\mathbf{v} costante non nulla).

Quindi l'assenza di forze non implica che non ci sia moto, bensì comporta che la velocità non vari.

2.2 Seconda legge della dinamica

La formulazione del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla *legge di Newton*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}^1 \quad (2.1)$$

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza \mathbf{F} , determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo, secondo un fattore di proporzionalità m che è la massa inerziale del punto.

Il termine **massa inerziale** è legato al fatto che la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto. Fissata una forza \mathbf{F} , l'effetto dinamico è tanto maggiore quanto è minore la massa del punto.

Se una certa forza \mathbf{F} agisce separatamente su due punti materiali diversi, questi acquistano accelerazioni inversamente proporzionali alla loro massa. Infatti:

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

¹ \vec{F} e \vec{a} sono due vettori che hanno la stessa direzione e stesso verso

In conclusione, per la seconda legge della dinamica, se in un sistema di riferimento inerziale un corpo ha un moto accelerato esiste almeno una forza responsabile di tale accelerazione.

2.3 Terza legge della dinamica

La terza legge della dinamica o *principio di azione e reazione* dice che:

- se un corpo A esercita una forza \mathbf{F}_{AB} su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza \mathbf{F}_{BA} sul corpo A;
- le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA};$$

- le due forze hanno la stessa retta d'azione.

2.4 Unità di misura

L'unità di misura della forza è il Newton (N):

$$1N = \frac{1Kg \cdot 1m}{s^2}$$

2.5 Quantità di moto e impulso

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale il vettore

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}; \quad (2.2)$$

se $m = \text{costante}$ si può scrivere

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

L'azione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto ovvero di qualcuna o di tutte queste quantità: massa, direzione, verso e modulo della velocità.

Se \mathbf{F} agisce per un determinato tempo $dt \Rightarrow \mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$. In termini finiti si ha

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p} \quad (2.3)$$

Il termine vettoriale \mathbf{J} , integrale della forza nel tempo, è chiamato **impulso della forza nel tempo**.

2.5.1 Teorema dell'impulso

- l'impulso di una forza applicata a un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto
- se la massa m è costante allora:

$$\mathbf{J} = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = m\Delta\mathbf{v} \quad (2.4)$$

"l'impulso della forza che agisce su un punto materiale in un intervallo di tempo Δt è pari alla variazione della quantità di moto nello stesso intervallo di tempo".

Quindi l'impulso è la misura di quanto la forza è stata in grado di far variare la quantità di moto del corpo in un intervallo di tempo.

L'impulso fornisce l'effetto complessivo della forza nel tempo Δt , mentre $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ vale istante per istante.

Se $\mathbf{F} = \text{costante}$ nell'intervallo $\Delta t \Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{F}\Delta t$, dalla 2.3

Se $\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \Delta\mathbf{p} = 0$, quindi in assenza di forze la quantità di moto non varia.

2.5.2 Unità di misura

\mathbf{p} e \mathbf{J} hanno la stessa unità di misura:

- $\mathbf{p} = m\mathbf{v} \Rightarrow kg \frac{m}{s} = N \cdot s$
- $\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} \Rightarrow N \cdot s$

2.6 Risultante delle forze. Equilibrio statico

Più forze possono agire contemporaneamente su uno stesso punto materiale: si constata che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza, la **risultante vettoriale delle forze** applicate al punto

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_i; \quad (2.5)$$

infatti l'**accelerazione del punto** è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto avrebbe se agisse ciascuna forza da sola:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \sum_i \mathbf{a}_i \quad (2.6)$$

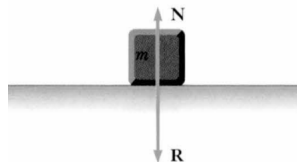
Se la forza agente su un punto è nulla non necessariamente significa che sul punto non agiscono forze, ma può indicare che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

Se $\mathbf{F} = 0$ e il punto ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete, cioè sono realizzate le condizioni di equilibrio statico del punto: tutte le componenti della risultante sono nulle,

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

2.7 Reazione vincolare

Se un corpo all'azione di una forza o della risultante $\mathbf{R} \neq 0$ di un insieme di forze, rimane fermo, deduciamo che l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante, detta **reazione vincolare** \mathbf{N} , che si esprime come una forza, *eguale e contraria* alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata sul corpo stesso in modo tale che esso **rimanga in quiete**: $\mathbf{R} + \mathbf{N} = 0$



Nel caso dei fili, la reazione vincolare si definisce **tensione**. Il corpo è in condizione di equilibrio statico, soggetto alla forza peso e alla reazione del sistema tale che $\mathbf{P} + \mathbf{N} = 0$

2.8 Forza peso

Si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, indipendentemente dalla massa inerziale, assumono, se lasciati liberi, la stessa **accelerazione**, detta di **gravità**, diretta verticalmente verso il suolo, il cui modulo vale in media $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$.

Dalla (2.1) se agisce solo la forza peso \mathbf{P} abbiamo $\mathbf{P} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$ visto che $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Pertanto la forza peso risulta proporzionale alla massa e si scrive sempre

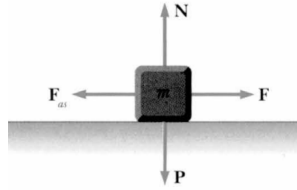
$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} \quad (2.8)$$

Si tratta di una **forza costante** e in assenza di altre forze il moto ha una componente uniformemente accelerata nella direzione parallela a \mathbf{g} .

2.9 Forza di attrito radente

Applichiamo ad un corpo appoggiato su un tavolo orizzontale, una forza \mathbf{F} parallela al piano di appoggio. Si osserva che il corpo non entra in movimento per effetto di \mathbf{F} fino a che: $|\mathbf{F}| > \mu_s N$, dove μ_s è il **coefficiente di attrito statico** e N è il modulo della reazione vincolare normale. Quindi:

- condizione di quiete: $F \leq \mu_s N$
- condizione di moto: $F > \mu_s N$.



In condizioni di quiete è realizzato l'equilibrio statico:

$$\mathbf{R} + \mathbf{F} + \mathbf{P} = 0 \quad (2.9)$$

dove \mathbf{R} è la reazione vincolare esercitata dal piano e \mathbf{P} la forza peso del corpo.

N e F_{as} sono le componenti verticale e orizzontale di \mathbf{R} :

$$N = mg, \quad F_{as} = F.$$

Il vincolo è in grado di sviluppare una forza, detta di **attrito radente statico**, eguale e contraria a \mathbf{F} , \mathbf{F}_{as} ha un valore massimo di $\mu_s N$, superato il quale il corpo inizia a muoversi sotto l'effetto della forza applicata \mathbf{F} .

Durante il moto, alla forza di attrito statico \mathbf{F}_{as} , subentra la **forza di attrito dinamico** $F_{ad} = \mu_d N$, con $\mu_d N$ coefficiente di attrito dinamico. Risulta sempre $\mu_d < \mu_s$.

L'equazione del moto lungo il punto è quindi:

$$F - \mu_d N = ma$$

La forza di attrito dinamico è sempre parallela all'asse su cui si svolge il moto, ma ha verso opposto rispetto alla velocità, quindi vettorialmente la possiamo scrivere come:

$$\mathbf{F}_{ad} = -\mu_d N \mathbf{u}_v \quad (2.10)$$

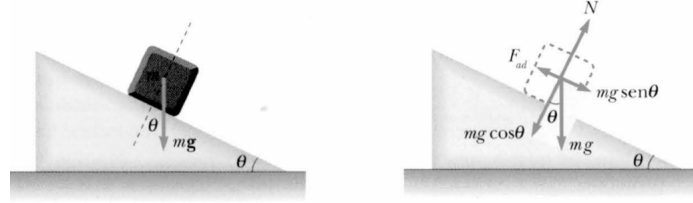
con \mathbf{u}_v versore parallelo e concorde con la velocità.

2.10 Piano inclinato

Consideriamo un corpo di massa m , che possa muoversi sotto l'azione della forza peso e di altre eventuali forze, su una superficie piana inclinata di angolo θ rispetto a un piano orizzontale.

Se agisce solo la forza peso \mathbf{P} , in assenza perciò di attrito, si ha secondo la legge di Newton

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m\mathbf{a} \quad (2.11)$$



Dove \mathbf{R} è la reazione vincolare del piano, che ha un'unica componente normale al piano stesso.

Scomponendo lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano inclinato si ottiene i:

$$\begin{cases} -mg \cos(\theta) + N = 0 \Rightarrow N = mg \cos(\theta) \\ mg \sin(\theta) = ma \Rightarrow a = g \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.12)$$

Se esiste **attrito radente** tra il piano inclinato e il corpo, il moto lungo il piano non può avvenire se la componente della forza peso lungo il piano non supera la massima forza di attrito statico:

$$mg \sin(\theta) \leq F_{as,MAX} = \mu_s N = \mu_s mg \cos(\theta). \quad (2.13)$$

Pertanto la **condizione per l'equilibrio statico** di un corpo poggiato su un piano scabro è:

$$\tan(\theta) \leq \mu_s \quad (2.14)$$

Per avere moto occorre aumentare l'angolo di inclinazione θ in modo da non soddisfare la (2.14). In queste condizioni, scomponendo l'equazione di Newton lungo le direzioni ortogonali e parallela al piano inclinato si ottiene:

$$\begin{cases} -mg \cos(\theta) + N = 0 \\ mg \sin(\theta) - \mu_d N = ma \end{cases} \quad (2.15)$$

combinando le due equazioni, si ottiene che il corpo scende lungo il piano inclinato con accelerazione:

$$a = (\sin(\theta) - \mu_d \cos(\theta))g. \quad (2.16)$$

In particolare, se $\mu_d = \tan(\theta)$ si ha:

$$a = (\sin(\theta) - \mu_d \cos(\theta))g = 0$$

quindi $a = 0$, cioè il moto è uniforme.

2.11 Forza elastica

Si definisce forza elastica una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre a un punto O , chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O . Quindi è una forza **non costante**, in quanto dipende dalla posizione:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x \quad (2.17)$$

dove $k > 0$ è una costante, detta **costante elastica**, e \mathbf{u}_x è il versore dell'asse x .

Il moto di un punto sottoposto a una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come \mathbf{u}_x . Per il secondo principio della dinamica si ha:

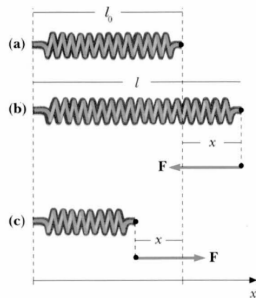
$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \quad (2.18)$$

e quindi il sistema costituisce un **oscillatore armonico semplice**, e il moto è armonico semplice con pulsazione ω e periodo T :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.19)$$

L'esempio classico è quello della molla: quindi x è la **deformazione della molla**, rispetto alla sua lunghezza a riposo.

- Se $x > 0$ la molla è **allungata**,
- Se $x < 0$ la molla è **compressa**.



Quindi se la molla viene **estesa**, $l > l_0$ (l_0 indica la lunghezza a riposo), essa sviluppa una forza che tende a riportarla alla condizione di riposo

$$\mathbf{F} = -k(l - l_0)\mathbf{u}_x = -kx\mathbf{u}_x$$

dove $x > 0$ rappresenta la deformazione. Se invece la molla viene **compressa** alla lunghezza $l < l_0$, la forza ha la stessa espressione con $x < 0$, e quindi opposta in direzione.

Se vogliamo mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza l dobbiamo applicare alla molla una forza eguale ed opposta alla forza esercitata dalla molla.

Supponiamo di avere una molla bloccata in un estremo, deformata di x_0 e che dall'altro estremo sia fissato un punto materiale di massa m che poggia su un piano orizzontale liscio. se all'istante $t=0$ il punto viene lasciato libero con $x = x_0$ e $v = 0$ per $t = 0$, esso si muove di **moto armonico** per effetto della forza elastica agente su di esso.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.20)$$

è la soluzione del moto, $x = A \sin(\omega t + \phi)$, i valori delle costanti A e ϕ sono:

$$x_0 = A \sin \phi, \quad 0 = \omega A \cos \phi. \quad (2.21)$$

Se le condizioni iniziali sono diverse si ottiene sempre un moto armonico con la medesima ω , però il valore dell'ampiezza è in generale diverso da x_0 .

2.12 Forza di attrito viscoso

Si oppone al moto del corpo ed è proporzionale alla velocità secondo la relazione:

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = -\frac{b}{m}\mathbf{v} = -k\mathbf{v} \quad (2.22)$$

dove b è una costante positiva che si misura in $kg\,s^{-1}$, e $k = \frac{b}{m}$.

Il corpo quindi è soggetto, cadendo verticalmente, alla forza peso e a quella di attrito viscoso. Poniamo a $t=0$, $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$; $b = mk$

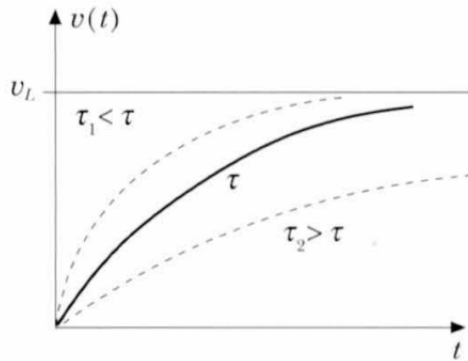
$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_v = m\mathbf{a} \quad (2.23)$$

ma il moto è unidimensionale lungo l'asse z , quindi:

$$mg - mkv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow g - kv = \frac{dv}{dt}.$$

Separando le variabili $\frac{dv}{g-kv} = dt$, integrando possiamo passare agli esponenziali:

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{dv}{g-kv} &= \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k} \ln \left[g - kv \right]_0^v = t \Rightarrow \ln \frac{g-kv}{g} = -kt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{g-kv}{g} &= e^{-kt} \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k} \left(1 - e^{-kt} \right) \end{aligned}$$



Al limite $v = \frac{g}{k} = \text{costante}$, infatti sostituendo tale valore nell'equazione del moto l'accelerazione si annulla.

2.13 Forza centripeta

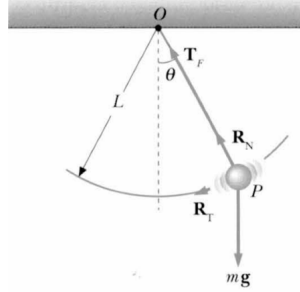
Se la risultante \mathbf{R} delle forze che agiscono su un corpo ha una **componente perpendicolare** alla traiettoria, quest'ultima sarà curvilinea e quindi esisterà una accelerazione centripeta a_n e una forza centripeta F_n dove $F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R}$ con R raggio di curvatura.

La forza centripeta non è un tipo di forza ma è semplicemente il nome che viene dato alla componente perpendicolare alla traiettoria del punto della risultante delle forze agenti sul punto stesso.

In genere le forze centripete sono legate alla presenza di vincoli che incurvano la traiettoria, come fili o rotaie.

2.14 Pendolo semplice

Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo ideale. La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo e il filo teso; la forza esercitata dal filo (tensione) vale in modulo $T_F = mg$.



Se spostiamo il punto dalla verticale esso inizia a **oscillare** attorno a questa, lungo un arco di circonferenza di raggio L , pari alla lunghezza del filo, in un piano verticale.

Le forze agenti sul punto P sono il peso e la tensione del filo, per cui il moto è regolato da: $m\mathbf{g} + \mathbf{T}_F = m\mathbf{a}$.

Consideriamo le componenti lungo la traiettoria **circolare** e **ortogonale** alla traiettoria:

$$R_T = -mg \sin(\theta) = ma_T, \quad R_N = T_F - mg \cos(\theta) = ma_N.$$

Quindi il moto lungo l'arco di circonferenza è dovuto alla componente tangente della forza peso, che rappresenta una forza di richiamo, quindi tende a riportare la massa alla posizione di equilibrio. Quindi possiamo scrivere:

$$-mg \sin(\theta) = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow -\frac{g}{L} \sin(\theta) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.24)$$

ricordando che $a_T = L\alpha$ e $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

In conclusione il moto del pendolo è oscillatorio armonico quando l'ampiezza delle oscillazioni è piccola così che $\sin(\theta) \approx \theta$. La **legge oraria del moto** è:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi); \quad (2.25)$$

con θ_0 ampiezza massima dell'oscillazione. Il moto è dunque periodo, di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

che è indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni.

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è dato da

$$s = L\theta = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

la velocità angolare e la velocità lineare hanno le espressioni

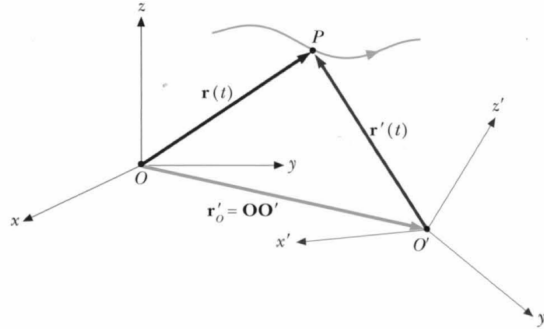
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi), \quad v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi). \quad (2.26)$$

3 Moti relativi

Sperimentalmente è provato che, fissato un sistema di riferimento e stabilita una legge fisica, questa resta uguale anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati. Quindi *le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento*.

3.1 Sistemi di riferimento

Consideriamo due sistemi di riferimento in **moto l'uno rispetto all'altro**. In particolare scegliamo un riferimento, detto *fisso*, con origine in O e uno, detto *mobile*, con origine in O' .



3.1.1 Teorema delle velocità relative

In figura è rappresentato un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato dal sistema fisso e da quello mobile, che ha una velocità \mathbf{v}_0 rispetto al sistema fisso.

Vogliamo trovare che relazioni esistono tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P misurate dal sistema fisso e da quello mobile.

Indichiamo con \mathbf{r} il vettore posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento fisso, \mathbf{r}' il vettore posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento mobile e con $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{OO}'$ il vettore posizione dell'origine del sistema mobile O' rispetto a quello fisso. La relazione tra le posizioni del punto P , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \quad (3.1)$$

Derivando rispetto al tempo la (3.1) e indicando con \mathbf{v} la velocità del punto P rispetto al sistema fisso e $\mathbf{v}_{O'}$ la velocità del sistema mobile rispetto a quello fisso, si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (3.2)$$

indicando con \mathbf{v}' la velocità del punto P rispetto al sistema mobile (**velocità relativa**) e con $\boldsymbol{\omega}$ velocità angolare del sistema mobile, si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_t. \quad (3.3)$$

Quindi la velocità di P è diversa a seconda del sistema di riferimento, ma le due velocità sono correlate dal termine:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (3.4)$$

chiamato **velocità di trascinamento** che dipende dal tipo di moto che compie il sistema mobile rispetto al sistema fisso e dalla posizione del punto P rispetto al sistema mobile (\mathbf{r}').

Ci sono due casi particolari:

- $\boldsymbol{\omega} = 0$, il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso, in questo caso si parla di moto relativo traslatorio tra i due sistemi e quindi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{O'}$$

- $\mathbf{v}'_O = 0$, il sistema mobile non si sposta rispetto a quello fisso, ma ruota, in questo caso si parla di moto relativo rotatorio:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

3.1.2 Teorema delle accelerazioni relative

Ricaviamo ora le relazioni tra le accelerazioni. Chiamiamo con \mathbf{a} l'accelerazione di P nel sistema di riferimento fisso, con $\mathbf{a}_{O'}$ l'accelerazione dell'origine O' del sistema mobile rispetto a quello fisso.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (3.5)$$

dove \mathbf{a}' è l'accelerazione del punto P rispetto al sistema mobile (**accelerazione relativa**). In questo caso l'**accelerazione di trascinamento** sarà:

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

mentre $\mathbf{a}_{Co} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ si chiama **accelerazione di Coriolis** e interviene solo se il punto P è in moto nel sistema mobile ($\mathbf{v}' \neq 0$).

Quindi l'accelerazione \mathbf{a} , misurata nel sistema fisso, è la somma di tre termini:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_{Co} \quad (3.6)$$

Anche nel caso dell'accelerazione, possiamo considerare due casi particolari:

- $\mathbf{v}'_O = 0$ o $\mathbf{v}'_O = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{a}'_O = 0$, quindi:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

- $\boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}'_O$

3.2 Sistemi di riferimento inerziali

Definiamo come sistema di riferimento inerziale un sistema in cui valga il **principio di inerzia**, in cui cioè un punto non soggetto a forze lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le **forze reali**.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un altro sistema inerziale. Quindi:

$$\mathbf{v}_{O'} = \text{costante}, \quad \mathbf{a}_{O'} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.7)$$

Da (3.5) ricaviamo $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$: le accelerazioni d un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali. Se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$ e quindi pure il secondo sistema è inerziale.

Quindi: **definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali**. Per questi sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, con gli stessi valori di \mathbf{F} e \mathbf{a} : se cioè nel sistema inerziale O la relazione è $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, nel sistema inerziale O' la legge di Newton si scrive allo stesso modo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$

3.2.1 Relatività Galileana

In tutti i sistemi di riferimento inerziali, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. **Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto.**

3.3 Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti

Definiamo come sistema di riferimento non inerziale, un sistema in moto accelerato $\mathbf{a}_{O'} \neq 0$ oppure in rotazione $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ o entrambi, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. In tale sistema non vale il principio di inerzia e quindi neanche la legge di Newton: la forza che agisce sul punto materiale non è proporzionale all'accelerazione \mathbf{a}' relativa a tale sistema mobile. Essendo $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_{C_o}$:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T - \mathbf{a}_{C_o} \Rightarrow m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_{C_o} \Rightarrow \mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_{C_o}$$

Introduciamo quindi le **forze apparenti**, dalle definizioni di \mathbf{a}_T e \mathbf{a}_{C_o} ricaviamo:

$$\mathbf{F}_{app} = -m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_{C_o} = -m\mathbf{a}_{O'} - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.8)$$

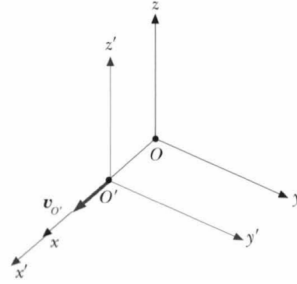
possiamo scrivere

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{app} = m\mathbf{a}'. \quad (3.9)$$

La (3.9) rappresenta l'equazione di Newton per i sistemi di riferimento non inerziali.

3.4 Moto di trascinamento traslatorio rettilineo uniforme

Consideriamo il moto di trascinamento traslatorio più semplice, che è quello rettilineo in cui O' si muove rispetto a O lungo una traiettoria rettilinea, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è nulla. Gli assi dei due sistemi sono paralleli e tali restano durante il moto:



Il moto di trascinamento avviene lungo l'asse x , che coincide con l'asse x' .

Se $\mathbf{a}_{O'} = 0$, il moto di O' è uniforme. In questo caso O e O' sono entrambi sistemi di riferimento inerziali, quindi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (3.10)$$

mentre i legami tra i raggi vettori è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{O'}t + \mathbf{r}' \quad (3.11)$$

3.5 Moto di trascinamento traslatorio rettilineo accelerato

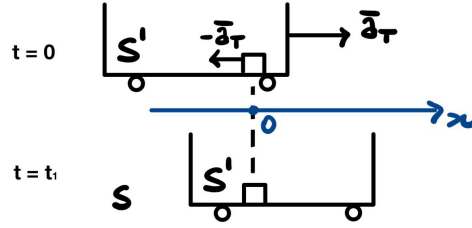
In questo caso O' ha un'accelerazione costante $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{a}_T$ e $\boldsymbol{\omega} = 0$ quindi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} \quad (3.12)$$

con $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_T$.

Chiamiamo S l'osservatore inerziale e S' quello non inerziale, i due osservatori sperimentano accelerazioni diverse e quindi forze diverse.

Esempio. Carrello rappresentato all'istante 0 e a un certo istante t_1 , non c'è attrito tra il corpo e il carrello.



- per S il corpo è fermo ($\mathbf{F} = 0$)
- per S' sul corpo agisce una forza \mathbf{F}' che lo sposta verso di lui. ($\mathbf{F}' = -m\mathbf{a}_T$)

3.6 Moto di trascinamento rotatorio uniforme

Supponiamo ora che $\mathbf{v}_{O'} = 0$, $\mathbf{a}_{O'} = 0$, $\mathbf{v}_{O'} = 0$ e $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, il sistema di riferimento non trasla ma ruota, quindi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Dove abbiamo posto $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, cioè che le origini O e O' dei due sistemi di riferimento coincidono. La (3.9) diventa:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{centr} + \mathbf{F}_{C_o} = m\mathbf{a}' \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{F}_{C_o} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (3.14)$$

quindi \mathbf{F}_{centr} e \mathbf{F}_{C_o} non sono forze vere, ma fittizie.

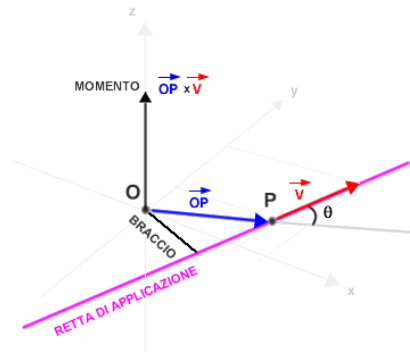
4 Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti

4.1 Momento di un vettore

Il momento di un vettore \mathbf{v} applicato al punto P rispetto a un punto O , detto polo, è il prodotto vettoriale tra il vettore posizione \mathbf{OP} e il vettore \mathbf{v} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{OP} \times \mathbf{v}, \quad M = OP \cdot v \cdot \sin(\theta). \quad (4.1)$$

Dove θ è l'angolo formato dai due vettori \mathbf{v} o \mathbf{OP} . Il momento del vettore è a sua volta una grandezza vettoriale.



- quando il vettore \mathbf{v} e il vettore posizione hanno la stessa direzione il modulo del momento è nullo,
- spostando il vettore \mathbf{v} lungo la sua retta di applicazione, il modulo del momento non cambia,
- M non varia se il polo O si sposta parallelamente alla retta di applicazione.

Se O si sposta in O' , ed essendo $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$:

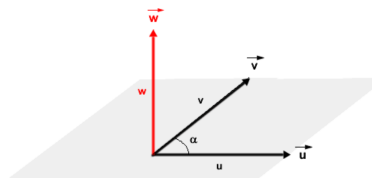
$$\vec{M'} = \vec{O'P} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{M} = \vec{OP} \times \vec{v} = \vec{OO'} \times \vec{v} + \vec{O'P} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{M'} = \vec{O'O} \times \vec{v} + \vec{M} \quad (4.2)$$

4.1.1 Prodotto vettoriale (so che non te lo ricordi)

Il prodotto vettoriale è una moltiplicazione tra vettori che genera un nuovo vettore:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}, \quad w = u \cdot v \cdot \sin(\alpha). \quad (4.3)$$

La **direzione** del prodotto vettoriale è perpendicolare al piano del parallelogramma formato dai vettori \mathbf{u} e \mathbf{v}



Il **verso** del prodotto vettoriale si ottiene con la regola della mano destra. Il pollice è il primo vettore \mathbf{u} , l'indice è il secondo vettore, il medio indica il verso del vettore \mathbf{w} .

- vettori ortogonali: $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$
- vettori paralleli: $\vec{A} \times \vec{B} = 0$
- vettori uguali: $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

4.2 Momento angolare

Si definisce come momento angolare rispetto al polo O il momento del vettore quantità di moto

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (4.4)$$

dove \mathbf{r} è il vettore che congiunge il polo O a P . Se si cambia polo vale la relazione

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times m\mathbf{v}. \quad (4.5)$$

In generale il momento angolare è una funzione del tempo, $\mathbf{L}(t)$.

4.3 Momento della forza

Il momento della forza è definito come

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.6)$$

se si cambia polo:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F}. \quad (4.7)$$

Se al punto P sono applicate più forze con risultante $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ si ha:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n = \mathbf{r} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{R}; \quad (4.8)$$

quindi il momento complessivo è eguale al momento della forza risultante.

4.3.1 Teorema del momento angolare

Se calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale P in movimento si avrà:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (4.9)$$

dove $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. Supponendo che il polo O sia fermo, allora:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}, \quad (4.10)$$

poiché $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ è parallelo a $m\mathbf{v}$, il primo prodotto vettoriale si annulla. Nel secondo termine $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. In conclusione

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (4.11)$$

è la relazione che rappresenta il **teorema del momento angolare** per un punto materiale: la derivata temporale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale.

Il **momento della forza può essere nullo** se:

- la forza è nulla
- \mathbf{r} e \mathbf{F} sono paralleli, quindi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{costante}. \quad (4.12)$$

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo.

4.3.2 Teorema del momento dell'impulso

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \Rightarrow \mathbf{M} dt = d\mathbf{L}$$

integrando tra un istante iniziale t_0 e l'istante t

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M} dt = \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_{fin} - \mathbf{L}_{in}. \quad (4.13)$$

Per produrre una variazione finita del momento angolare di un punto materiale occorre l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza.

Essendo $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ la (4.13) diventa:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M} dt = \int_{t_0}^t (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta\mathbf{L} \quad (4.14)$$

se \mathbf{r} resta costante, per t molto breve.

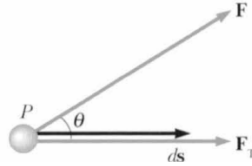
$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{J}$ si dice **teorema dell'impulso**.

4.4 Lavoro

Consideriamo un punto materiale P soggetto a una forza \mathbf{F} che subisca per azione di questa uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$. Il lavoro infinitesimo dW compiuto dalla forza è definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos(\theta) = F_T ds \quad (4.15)$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{F} e $d\mathbf{s}$ e $F_T = F \cos(\theta)$.



Quindi il lavoro dipende, oltre che dal modulo della forza e dello spostamento, anche dall'angolo θ , si possono verificare tre casi:

- $\theta < \frac{\pi}{2}$, la componente tangenziale delle forze è concorde con la velocità: il lavoro è positivo e viene chiamato **lavoro motore**.
- $\theta > \frac{\pi}{2}$, il lavoro risulta negativo: **lavoro resistente**.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$, il **lavoro è nullo**.

Per uno spostamento finito dalla posizione A alla posizione B lungo il percorso C il lavoro si ottiene suddividendo il percorso in infiniti spostamenti infinitesimi $d\mathbf{s}$ e sommando tutti i contributi $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos(\theta) ds = \int_A^B F_T ds. \quad (4.16)$$

Se il corpo è soggetto all'azione di più forze, cioè $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$, per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \dots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = W_1 + \dots + W_n$$

Il lavoro della risultante delle forze è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

4.5 Potenza

La potenza corrisponde al lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_T v. \quad (4.17)$$

Questa è la **potenza istantanea**, in generale variabile durante il moto, caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

La **potenza media** in un intervallo di tempo Δt è il rapporto $W/\Delta t$

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} \quad (4.18)$$

cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto, ha maggiore potenza media quella macchina che lo eroga in minore tempo.

4.5.1 Unità di misura

- Lavoro: $1N \cdot 1m = 1 \text{ Joule } [J]$
- Potenza: $\frac{1N \cdot 1m}{1s} = \frac{1 \text{ Joule}}{1s} = 1 \text{ Watt } [W]$

4.6 Energia cinetica

Partendo dalla definizione di lavoro infinitesimo (4.15) e dal fatto che $F_T = ma_T$ si ha:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv dv. \quad (4.19)$$

Trovando così il legame tra il lavoro infinitesimo e la variazione infinitesima del modulo della velocità. Per un percorso finito da A a B abbiamo:

$$W = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \quad (4.20)$$

dove la quantità $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ prende il nome di **energia cinetica** del punto. La (4.20) è nota come **teorema dell'energia cinetica**, afferma che: il lavoro compiuto dalla risultante delle forze nello spostamento di un punto materiale nelle posizione A alla posizione B è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale stesso.

- Se $W > 0 \Rightarrow \Delta E_k > 0 \Rightarrow v$ aumenta,
- Se $W < 0 \Rightarrow \Delta E_k < 0 \Rightarrow v$ diminuisce,
- Se $W = 0 \Rightarrow \Delta E_k = \text{costante} \Rightarrow v$ costante.

L'unità di misura è la stessa del lavoro, cioè *Joule*.

Osservazioni

- Se è noto come varia la forza lungo la traiettoria, possiamo calcolare il lavoro e il modulo della velocità in ciascun punto.
- Se misuriamo la velocità iniziale e finale, possiamo dedurre il lavoro compiuto dalle forze agenti. (4.20)
- La nozione di lavoro, e quindi di energia cinetica, è necessariamente legata a quella di spostamento, secondo la (4.15).
- Se non c'è spostamento non può esserci lavoro, qualunque sia la forza applicata (mentre può esserci spostamento senza lavoro)

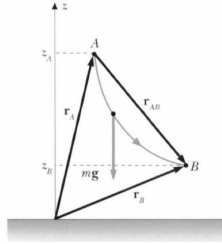
Complessivamente si può dire che l'energia è la *capacità di un corpo di compiere lavoro* e che il lavoro è il processo attraverso il quale una certa quantità di energia viene trasferita tra due sistemi.

4.7 Lavoro di alcune forze

4.7.1 Lavoro della forza peso

Calcoliamo il lavoro della forza peso $m\mathbf{g}$ per uno spostamento generico dalla posizione A alla posizione B.

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \int_A^B d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB}$$



infatti l'integrale è costante e vale $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$.

Poiché il peso ha una sola componente diversa da zero, quella secondo l'asse z che vale $-mg$, e la componente \mathbf{r}_{AB} lungo l'asse z è $z_B - z_A$, il prodotto scalare si scrive semplicemente $(m\mathbf{g})_z(\mathbf{r}_{AB})_z$ e pertanto il lavoro della forza peso vale

$$W = -(mgz_B - mgz_A). \quad (4.21)$$

Il risultato ottenuto non dipende dal particolare percorso compiuto dalla massa m , ma solamente dalla posizione iniziale e quella finale.

4.7.2 Lavoro della forza elastica

Il lavoro della forza elastica $\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

$$W = \int_A^B -kx\mathbf{u}_x \cdot dx\mathbf{u}_x = -k \int_A^B x dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right). \quad (4.22)$$

Anche in questo caso il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale.

4.7.3 Lavoro della forza di attrito

Ricordando che \mathbf{u}_v è parallelo e concorde allo spostamento $d\mathbf{s}$, il lavoro corrispondente si scrive

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_{ad} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d \int_A^B N ds. \quad (4.23)$$

Nel caso in cui la reazione normale N sia costante si ottiene:

$$W = -\mu_d N \int_A^B ds = -\mu_d N s_{AB} \quad (4.24)$$

dove s_{AB} è la lunghezza del percorso da A a B. Quindi, a parità di μ_d e N , abbiamo un lavoro diverso a seconda della forma della traiettoria.

Il lavoro della **forza di attrito radente è sempre negativo**, cioè è lavoro resistente. Per far sì che si possa verificare il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale ovvero una certa energia cinetica $E_{k,A}$. L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso e in B la velocità è minore che in A.

4.8 Forze conservative

Le forze conservative sono quelle forze per cui il lavoro non dipende dal tipo di percorso tra A e B ma solo dalla coordinata iniziale e quella finale. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare qualsiasi percorso che colleghi A a B:

$$W = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.25)$$

Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percorso II, o lungo qualsiasi altro.

Invertendo il senso di percorrenza, cioè andando da B a A, il lavoro è lo stesso in modulo ma con segno opposto:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (4.26)$$

quindi **lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo**:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.27)$$

4.9 Energia potenziale

Se la forza è conservativa, scegliendo una posizione di riferimento O, non necessariamente uguale all'origine, allora il lavoro che la forza compirebbe nello spostamento tra la posizione di riferimento O e la posizione generica P è:

$$W = \int_O^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (4.28)$$

W dipende solo da O e P, dato che O è fissato, il lavoro dipende solo da P, ossia dalle sue coordinate x,y,z. La conservatività della forza consente di definire in ogni punto P dello spazio una funzione dipendente unicamente dalle coordinate di P:

$$E_p(x, y, z) = E_{p,P} = - \int_O^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.29)$$

Questa funzione viene detta **energia potenziale** del punto, associato alla forza considerata.

una volta calcolata questa funzione, il lavoro della forza per un qualsiasi spostamento tra due punti A e B vale:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.30)$$

quindi:

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p \quad (4.31)$$

Il lavoro di una forza conservativa può quindi essere calcolato come differenza algebrica tra i valori assunti da E_p in A e in B, *senza dover calcolare integrali di linea*.

La (4.31) ci precisa anche il significato fisico di energia potenziale, legandolo alla capacità di fornire lavoro.

- $\Delta E_p < 0 \Rightarrow W > 0$
- $\Delta E_p > 0 \Rightarrow W < 0$
- $\Delta E_p = 0 \Rightarrow W = 0$

Da una forza conservativa non si può ricavare lavoro in un percorso chiuso ovvero, se il processo è ciclico.

4.9.1 Calcolare il lavoro

Il lavoro si può calcolare come:

- $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, *definizione di lavoro*
- $W = \Delta E_k$, *variazione di energia cinetica*
- $W = -\Delta E_p$, *variazione di energia potenziale*, solo per forze conservative

4.10 Conservazione dell'energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative valgono sia $W = \Delta E_k$ che $W = -\Delta E_p$:

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A}, \quad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (4.32)$$

Eguagliando le due relazioni si ha

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} : \quad (4.33)$$

la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative **resta costante** durante il moto, ossia si **conserva**.

Tale somma si chiama **energia meccanica** per cui la (4.33) esprime il **principio di conservazione dell'energia meccanica**:

in presenza di forze conservative l'energia meccanica di un punto materiale si conserva

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante}. \quad (4.34)$$

Il lavoro ottenuto a spese della diminuzione di energia potenziale causa un aumento dell'energia cinetica e viceversa, dato che la somma delle energie è costante.

Quando agiscono, come in generale, sia forze conservative che non conservative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_c e di quello delle forze conservative W_{nc} :

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}.$$

Esprimendo W_c tramite (4.31) si ha

$$E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} \Rightarrow \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow W_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A} : \quad (4.36)$$

in presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è eguale al lavoro delle forze non conservative.

5 Dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di n punti materiali, con $n > 1$, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

5.1 Forze interne e forze esterne

La forza \mathbf{F}_i agente sull' i -esimo punto si può pensare come risultante delle **forze esterne** agenti sul punto, $\mathbf{F}_i^{(E)}$, e delle forze esercitate dagli altri $n-1$ punti, **forze interne** al sistema, $\mathbf{F}_i^{(I)}$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}. \quad (5.1)$$

Per la terza legge di Newton se il punto i -esimo esercita sul punto j -esimo la forza $\mathbf{F}_{i,j}$, il punto j -esimo reagisce esercitando sul punto i -esimo la forza $\mathbf{F}_{j,i}$ e tali forze hanno la stessa retta di azione, stesso modulo e verso opposto. In generale:

- la risultante $\mathbf{F}_i^{(I)}$ delle forze interne sull' i -esimo punto è diversa da zero
- la **risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla**:

per il principio di azione reazione esse sono a due a due eguali ed opposte:

$$\mathbf{F}^{(I)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0 \quad (5.2)$$

con $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$, $i \neq j$.

Per ciascun punto P_i di massa m_i sottoposto alla forza \mathbf{F}_i consideriamo le grandezze, misurate in un sistema di riferimento inerziale:

posizione	\mathbf{r}_i	velocità	\mathbf{v}_i
accelerazione	$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$	quantità di moto	$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$,
momento angolare	$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$	energia cinetica	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m v_i^2$.

Per il sistema complessivo di punti possiamo inoltre definire le grandezze:

quantità di moto totale	$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$,
momento angolare totale	$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$,
energia cinetica totale	$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

5.2 Centro di massa

Si definisce **centro di massa di un sistema di punti materiali**, il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}; \quad (5.3)$$

le componenti di \mathbf{r}_{CM} , ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O , sono:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}. \quad (5.4)$$

Si noti che la posizione del centro di massa nello spazio non dipende dal sistema di riferimento, mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia, calcoliamo la **velocità del centro di massa**:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{m} \quad (5.5)$$

m = massa totale del sistema. Vediamo quindi che:

la quantità di moto di un sistema di punti materiali è eguale alla quantità di moto $m\mathbf{v}_{CM}$ che avrebbe il centro di massa se considerato come un punto materiale che abbia la *posizione* \mathbf{r}_{CM} , la *velocità* \mathbf{v}_{CM} e *massa* pari alla massa totale m del sistema.

Analogamente possiamo ricavare l'**accelerazione del centro di massa**, derivando:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{m}. \quad (5.6)$$

Se il sistema di riferimento è inerziale

$$m\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) = \mathbf{F}^{(E)} \quad (5.7)$$

dato che la risultante delle forze interne è nulla. Quindi:

$$\mathbf{F}^{(E)} = m\mathbf{a}_{CM}, \quad (5.8)$$

questa relazione esprime il **teorema del moto del centro di massa**:

il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Usando queste formule si ottiene la **prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi**

$$\mathbf{F}^{(E)} = m\mathbf{a}_{CM} = m \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_{CM}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} : \quad (5.9)$$

la risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Il moto del centro di massa è determinato solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne ed interne agenti su di esso.

5.3 Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di punti considerato è isolato, cioè non soggetto a forze esterne, oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante sia nulla, si ha:

$$\mathbf{a}_{CM} = 0, \quad \mathbf{v}_{CM} = \text{costante}, \quad \mathbf{P} = \text{costante}. \quad (5.10)$$

Tale risultato esprime il **principio della conservazione della quantità di moto** per un sistema di punti materiali: quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

La conservazione della quantità di moto può essere anche **parziale**, cioè essere riferita a una o due delle componenti. Per esempio se solamente $F_x^{(E)} = 0$, allora si avrà solo $P_x = \text{costante}$.

Se il sistema isolato è composto da due punti si ha:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{costante}. \quad (5.11)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0, \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (5.12)$$

Come conseguenza della conservazione della quantità di moto, le forze che si esercitano tra i due punti sono eguali in modulo e di verso opposto.

5.4 Teorema del momento angolare

Consideriamo il momento angolare totale di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo O ; detto \mathbf{r}_i il raggio vettore \mathbf{OP}_i si ha:

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (5.13)$$

La derivata di \mathbf{L} rispetto al tempo è

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i \right) + \sum_i \left(\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right). \quad (5.14)$$

Supponendo che il polo O non sia fermo ma si sposti rispetto a un sistema fisso, si ha $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_o$. Quindi si avrà:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_o) \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \right) \quad (5.15)$$

$$= -\mathbf{v}_o \times M \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)} + \mathbf{M}^{(I)}. \quad (5.16)$$

Infatti $\sum_i \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ è nulla perché ogni addendo è prodotto vettoriale di vettori paralleli; \mathbf{v}_o lo portiamo fuori perché indipendente da i . Il vettore

$$\mathbf{M}^{(E)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)}$$

è il momento totale delle forze esterne rispetto al polo O e

$$\mathbf{M}^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)}$$

è quello delle forze interne rispetto allo stesso polo.

Si può dimostrare che, qualunque sia il polo, $\mathbf{M}^{(I)} = 0$. In conclusione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} - \mathbf{v}_o \times M \mathbf{v}_{CM} \quad (5.17)$$

se il termine $-\mathbf{v}_o \times M \mathbf{v}_{CM}$ risulta nullo si ha

$$\mathbf{M}^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (5.18)$$

Il termine $-\mathbf{v}_o \times M \mathbf{v}_{CM}$ risulta nullo se:

- il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $\mathbf{v}_o = 0$
- il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $\mathbf{v}_{CM} = 0$
- il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\mathbf{v}_o = \mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{v}_o \times \mathbf{v}_{CM} = 0$
- \mathbf{v}_o è parallelo a \mathbf{v}_{CM}

La (5.18), detta **seconda equazione cardinale della dinamica** dei sistemi, costituisce il **teorema del momento angolare**.

5.5 Conservazione del momento angolare

In una situazione in cui valga la (5.18), cioè $-\mathbf{v}_o \times M\mathbf{v}_{CM} = 0$, se il omento delle forze esterne è nullo risulta:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{costante}. \quad (5.19)$$

La (5.19) costituisce il **principio di conservazione del momento angolare**: *se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema il momento angolare si conserva.*

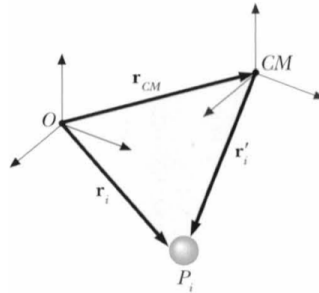
La condizione $\mathbf{M}^{(E)} = 0$ si verifica quando:

- non agiscono forze esterne, il sistema è isolato, \mathbf{L} si conserva rispetto a qualsiasi polo; in questa situazione, in cui $\mathbf{F}^{(E)} = 0$, si ha anche la conservazione della quantità di moto, $\mathbf{P} = \text{costante}$.
- il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto ad un qualsiasi polo; per cui si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel determinato polo.

5.6 Sistema di riferimento del centro di massa

Il sistema di riferimento del centro di massa ha le seguenti caratteristiche:

- l'origine è nel centro di massa
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi.
- si tratta in generale di un sistema non inerziale: infatti il moto del sistema del centro di massa è traslatorio.



Indichiamo con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa, per il punto P_i ,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}. \quad (5.20)$$

Dal teorema delle velocità relative con $\boldsymbol{\omega} = 0$ si ha:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}. \quad (5.21)$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, la posizione, la velocità e l'accelerazione del centro di massa sono nulle:

$$\mathbf{r}'_{CM} = 0, \quad \mathbf{v}'_{CM} = 0, \quad \mathbf{a}'_{CM} = 0 \quad (5.22)$$

Dalle definizioni segue che:

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0, \quad \sum_i m_i \mathbf{a}'_i = 0 \quad (5.23)$$

e quindi $\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, anche se i singoli termini sono diversi da zero.

5.7 Teoremi di König

Sono due proprietà che forniscono una relazione tra il valore misurato in un sistema inerziale e quello misurato nel sistema del centro di massa, sia per il momento angolare che per l'energia cinetica di un sistema di punti materiali.

5.7.1 Teorema di König per il momento angolare

Assumiamo come polo l'origine del sistema inerziale: il momento angolare è dato da

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (5.24)$$

Da (5.20) e (5.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) \\ &= \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM}) + \sum_i (\mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i (\mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM}) \end{aligned}$$

- il primo termine, $\mathbf{L}' = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$, rappresenta il momento angolare rispetto al centro di massa
- il secondo e terzo termine sono entrambi nulli
- l'ultimo termine $\mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$, rappresenta il momento angolare, rispetto all'origine del sistema inerziale, di un punto materiale che ha la velocità dello stesso.

In conclusione abbiamo il **primo teorema di König**:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM}, \quad (5.25)$$

il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, \mathbf{L}_{CM} e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

5.7.2 Teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (5.26)$$

Utilizzando la (5.21) otteniamo:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM}. \quad (5.27)$$

- il *primo termine* rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, E'_k ,
- il *secondo termine* è pari a $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$, energia cinetica del centro di massa,
- l'*ultimo termine* è nullo per (5.23).

Possiamo scrivere la relazione nota come **secondo teorema di König**

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM} \quad (5.28)$$

l'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta a moto del centro di massa, $E_{k,CM}$ e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

5.8 Teorema dell'energia cinetica

Analogamente al caso del punto materiale si ha:

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}. \quad (5.29)$$

Quindi, sommando su tutti i punti, si ottiene il lavoro totale

$$W = W^{(E)} + W^{(I)}. \quad (5.30)$$

In questo caso **non** si ha $W^{(I)} = 0$ poiché le distanze $\mathbf{r}_{i,j}$ tra i punti possono variare: solo se le distanze fossero rigide, come nel corpo rigido, avremmo $W^{(I)} = 0$.

Anche per un sistema si ha:

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = E_{k,B} - E_{k,A} \quad (5.31)$$

dove v_{iB} e v_{iA} sono i moduli della velocità dell' i -esimo punto nella configurazione iniziale A e finale B.

Mettendo insieme i vari risultati:

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k, \quad (5.32)$$

che esprime il **teorema dell'energia cinetica**: *il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne ed interne che agiscono su un sistema di punti materiali è uguale alla variazione dell'energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale.*

Inoltre, se le forze interne sono conservative, il lavoro è esprimibile come l'opposto della variazione dell'energia potenziale legata a queste forze, $W_{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$, analogamente se lo sono quelle esterne, $W_{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$. Quando tutte le forze agenti sono conservative, abbiamo il **teorema di conservazione della energia del sistema**:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p \\ E_{m,A} = (E_k + E_p)_A = E_m, B = (E_k + E_p)_B = \text{costante}.$$

Se non tutte le forze sono conservative abbiamo invece:

$$W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A} \quad (5.33)$$

6 Fenomeni d'urto

Di solito si parla di urti quando due corpi vengono bruscamente a contatto, ossia interagiscono violentemente per un intervallo di tempo trascurabile rispetto ai tempi tipici di osservazione del loro moto prima e dopo il contatto.

6.1 Urti tra due punti materiali

Consideriamo un urto tra due punti materiali, durante l'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze, che agiscono in un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate **forze impulsive**.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono *forze interne* al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. **In assenza di forze esterne si verifica pertanto, durante l'urto, la conservazione della quantità di moto.**

Indichiamo con $\mathbf{v}_{1,in}$, $\mathbf{v}_{2,in}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2 , e con $\mathbf{v}_{1,fin}$, $\mathbf{v}_{2,fin}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di \mathbf{P} si scrive

$$\mathbf{P}_{in} = m_1\mathbf{v}_{1,in} + m_2\mathbf{v}_{2,in} = m_1\mathbf{v}_{1,fin} + m_2\mathbf{v}_{2,fin} = \mathbf{P}_{fin}. \quad (6.1)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin} = \text{costante} \quad (6.2)$$

quindi, il moto del centro di massa non viene alterato dall'urto. Invece variano le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1\mathbf{v}_{1,fin} - m_1\mathbf{v}_{1,in} = \mathbf{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1} dt$$

$$m_2\mathbf{v}_{2,fin} - m_2\mathbf{v}_{2,in} = \mathbf{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2} dt$$

$\mathbf{J}_{2,1}$ è l'impulso dovuto alla forza impulsiva $\mathbf{F}_{2,1}$ esercitata dal punto 2 sul punto 1 e analogo significato ha $\mathbf{J}_{1,2}$. Quindi

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \Rightarrow \mathbf{J}_{1,2} = -\mathbf{J}_{2,1}$$

le variazioni di quantità di moto sono eguali ed opposte.

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne solo se la durata dell'urto τ è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive.

Quindi, riassumendo, definendo un urto un processo in cui l'interazione tra i punti materiali abbia un'intensità molto grande rispetto alle eventuali forze esterne presenti si ha che:

- un urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne tra gli stessi,
- nell'urto la quantità di moto totale prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale dopo l'urto, la quantità di moto del sistema si conserva.

Non sappiamo se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto. Dato che la posizione dei punti non varia nell'urto, eventuali energia potenziali dei punti non variano nell'urto e quindi $\Delta E_m = \Delta E_k$: *in un urto non si può assumere a priori che l'energia cinetica si conservi.*

Torna utile il secondo teorema di Konig:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + E'_k$$

- il primo termine è l'energia cinetica del centro di massa, non varia nell'urto se vale la conservazione della quantità di moto,
- il secondo termine è l'energia cinetica rispetto al centro di massa, che resta costante o varia a seconda che le forze interne siano conservative o meno.

$$E'_k = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2$$

Se ci poniamo nel sistema di riferimento del centro di massa, la quantità di moto è nulla, poiché:

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0 \Rightarrow m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0$$

Dunque

$$m_1 \mathbf{v}'_{1,in} + m_2 \mathbf{v}'_{2,in} = m_1 \mathbf{v}'_{1,fin} + m_2 \mathbf{v}'_{2,fin} = 0 \Rightarrow \mathbf{p}'_{1,in} = -\mathbf{p}'_{2,in}, \quad \mathbf{p}'_{1,fin} = \mathbf{p}'_{2,fin}$$

Dal centro di massa si vedono i punti arrivare verso il centro di massa con quantità di moto eguali in modulo ed opposte in verso, i corpi si urtano nella posizione occupata dal centro di massa e ripartono dopo l'urto con quantità di moto eguali in modulo ed opposte in verso.

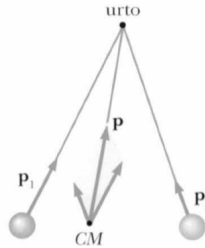


Figura 4: dal sistema fisso



Figura 5: dal centro di massa

6.1.1 Classificazione degli urti

Nello studio degli urti risulta utile distinguere i casi in cui avviene la conservazione dell'energia da quelli in cui questa condizione non è verificata. Esistono tre tipi di urti: gli urti **elastici**, **anelastici** e **completamente anelastici**.

6.2 Urto elastico

In un urto elastico **si conserva anche l'energia cinetica del sistema**. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano **conservative**. I due corpi che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Negli urti elastici sono vere le seguenti equazioni:

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}, \quad E_{k,in} = E_{k,fin} \quad (6.3)$$

Considerando un urto centrale, che avviene quando due punti materiali si muovono prima e dopo l'urto lungo la stessa direzione, abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (la velocità dei due punti dopo l'urto):

$$m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

Risolvendo il sistema si trova la soluzione:

$$\begin{aligned} v_{1,fin} &= \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,fin} &= \frac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1)v_{2,in}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (6.4)$$



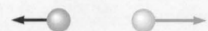



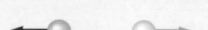
sono le velocità delle particelle subito dopo l'urto.

Se l'urto viene considerato nel sistema di riferimento del centro di massa si trova:

$$\mathbf{v}'_{1,fin} = -\mathbf{v}'_{1,in}, \quad \mathbf{v}'_{2,fin} = -\mathbf{v}'_{2,in}.$$

Se consideriamo il caso particolare in cui i due corpi hanno massa uguale $m_1 = m_2 = m$, si avrà:

$$v_{1,fin} = v_{2,in}, \quad v_{2,fin} = v_{1,in}$$

Stato iniziale	Stato finale	$v_{1,fin}$	$v_{2,fin}$
		>0	>0
		<0	>0
		>0	>0
		<0	<0
		<0	>0

6.3 Urto completamente anelastico

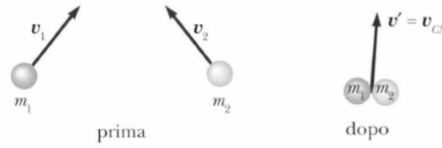
Nell'urto completamente anelastico i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$.

Se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e \mathbf{v}' la velocità comune immediatamente dopo l'urto, si ha:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}' = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto (\mathbf{v}_{CM} resta invariata nell'urto), inoltre le due masse coincidono con il centro di massa.



Per l'energia cinetica prima e dopo dell'urto si ha:

$$E_{k,in} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E'_{k,in} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2, \quad (6.5)$$

avendo applicato il secondo teorema di Konig; invece:

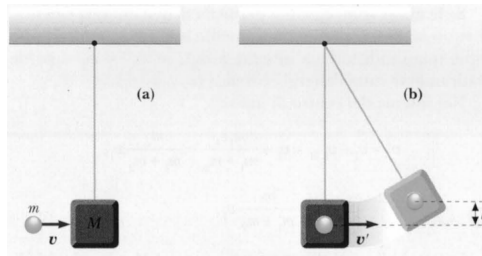
$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 < E_{k,in}. \quad (6.6)$$

Dopo l'urto completamente anelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa, con cui i due punti vengono a coincidere, in questo tipo di urto è assorbita proprio $E'_{k,in}$, l'energia cinetica che i punti hanno rispetto al centro di massa prima dell'urto. Quindi le forze interne che si sviluppano nell'urto non sono conservative, l'energia non si conserva.

6.3.1 Pendolo balistico

Consiste di un grande blocco di legno, appeso verticalmente. Una pallottola di massa m , che viaggia orizzontalmente con velocità \mathbf{v} , urta il pendolo rimanendovi conficcata.

Nessuna forza esterna orizzontale agisce sul sistema e pertanto è possibile conservare nell'urto la componente orizzontale della quantità di moto.



Terminata la collisione il pendolo con la pallottola inizia a oscillare raggiungendo un'altezza massima h . Si può risalire al valore della velocità del sistema $(M + m)$ dopo l'urto e a quella del proiettile prima dell'urto. Per la conservazione della quantità di moto durante l'urto $mv = (M + m)v'$.

Dopo l'urto, per la conservazione dell'energia meccanica durante l'oscillazione,

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh \Rightarrow v' = \sqrt{2gh}, \quad v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gh}$$

6.4 Urti tra corpi rigidi o tra punti materiali e corpi rigidi

Anche per questi urti si ha conservazione dell'energia cinetica del sistema solo se l'urto è elastico. Per la quantità di moto va precisato che essa si conserva se il corpo rigido durante l'urto è libero, mentre se esso è vincolato, ossia ha uno o più punti fissi, la reazione vincolare durante l'urto è di intensità comparabile alle forze interne, e la quantità di moto non si conserva.

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicare durante l'urto un sistema di forze che ha una risultante \mathbf{F} e un momento risultante \mathbf{M} . L'effetto complessivo è dato dall'impulso della forza $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt$ e dall'impulso angolare $\int \mathbf{M} dt$, eguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

6.4.1 Urto elastico contro una parete rigida

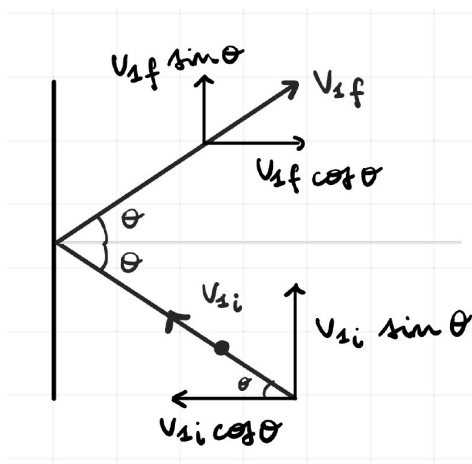
È una situazione al limite dove *si conserva l'energia cinetica ma non la quantità di moto totale*. Supponiamo che la particella abbia massa m_1 e velocità v_1 ortogonale alla parete. La massa m_2 della parete può considerarsi infinita e la velocità v_2 nulla.

Ciò che accade è che la particella torna indietro nella stessa direzione ma in verso opposto con una velocità $v_{1,fin} = -v_{1,in}$, sostituendo $m_2 = \infty$ e $v_{2,in} = 0$ nella formula dell'urto elastico.

Si conserva quindi l'energia cinetica della particella ma non la quantità di moto che, nell'urto, cambia verso. Ciò è dovuto al fatto che la parete *non è un corpo libero di muoversi* ma è **vincolato** e quindi le forze esterne che agiscono sull'urto sono forze vincolari impulsive che non permettono la conservazione della quantità di moto.

6.4.2 Urto obliquo

L'angolo $\theta_i = \theta_f$ cioè la direzione della velocità rispetto all'asse ortogonale alla parete è la stessa. L'energia si conserva perché l'urto è elastico e quindi $v_i = v_f$, si conserva anche la quantità di moto parallela alla parete, mentre quella perpendicolare cambia di segno come nel caso precedente.



7 Dinamica del corpo rigido

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare. Consideriamo questi corpi idealmente un corpo **indeformabile**.

Lo studio del moto di un corpo rigido verrà fatto normalmente in un sistema di riferimento inerziale. Un altro sistema importante è il **sistema di riferimento del centro di massa** del corpo rigido (non inerziale), in questo sistema si può studiare solo il moto rispetto al centro di massa; poiché la distanza dei punti dal centro di massa non cambia mai, ciascun punto è visto dal centro di massa o *fermo* o in moto *lungo un arco di circonferenza*.

Dal momento che le distanze tra i punti sono fisse si avrà che il lavoro delle forze interne sarà nullo $W^{(I)} = 0$, quindi $\Delta E_k = W^{(E)}$. Il moto del corpo rigido è determinato dalle forze esterne, che solitamente sono più di una e applicate in punti diversi. Sono quindi sistemi caratterizzati da una risultante $\mathbf{F}^{(E)}$ e da un momento risultante $\mathbf{M}^{(E)}$. Quindi le forze interne non hanno alcun ruolo nella dinamica dei corpi rigidi; da ora tralasceremo il simbolo $^{(E)}$ per le grandezze $\mathbf{F}^{(E)}, \mathbf{M}^{(E)}, W^{(E)}$. Le leggi della dinamica dei corpi rigidi sono:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{CM}; \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}; \quad W = \Delta E_K, \quad (7.1)$$

in ordine, la prima e seconda equazione cardinale della dinamica e il teorema dell'energia cinetica.

7.1 Densità

La grandezza densità tiene conto di come la massa è distribuita all'interno del corpo, è definita come rapporto tra la massa infinitesima e il volume da essa occupato:

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (7.2)$$

Anche supponendo che i volumi infinitesimi dV siano tutti uguali, non è detto che essi contengano tutti la stessa massa: dm può variare a seconda dell'elemento. La massa totale del corpo è quindi

$$m = \int dm = \int_V \rho dV. \quad (7.3)$$

Un corpo nel quale la densità è costante si dice **omogeneo**, per esso (7.2) e (7.3) diventano:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad m = \rho V. \quad (7.4)$$

Nei corpi non omogenei si può definire la **densità media** $\bar{\rho} = \frac{m}{V}$.

In casi particolari la massa può essere distribuita invece che in volume su una *superficie* S (membrane, dischi, lastra) oppure lungo una *linea* l (fili, bacchette). Introduciamo i concetti di **densità superficiale** e di **densità lineare**:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int \rho_s dS \\ \rho_l &= \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int \rho_l dl. \end{aligned} \quad (7.5)$$

La grandezza $v = 1/\rho = dV/dm$ si chiama **volume specifico**.

7.1.1 Unità di misura

- densità: $\frac{Kg}{m^3}$
- densità superficiale: $\frac{Kg}{m^2}$
- densità lineare: $\frac{Kg}{m}$

7.2 Centro di massa

La posizione di ciascun elemento di volume di un corpo rigido, di massa $dm = \rho dV$ e assimilabile a un punto, è individuata dal raggio vettore \mathbf{r} . La posizione del centro di massa è data per un sistema di punti da

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

e per un corpo rigido è data da:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho dV. \quad (7.6)$$

Se il corpo è omogeneo ($\rho = \text{costante}$),

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int \mathbf{r} dV = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV. \quad (7.7)$$

Se un corpo omogeneo è simmetrico rispetto a un punto, un asse o un piano, il centro di massa rispettivamente coincide col centro di simmetria o è un punto dell'asse o del piano di simmetria.

7.2.1 Centro di massa e forza peso

Consideriamo un corpo continuo sottoposto alla forza peso; su ogni elemento dm agisce la forza $\mathbf{g}dm$ e la risultante di tutte queste forze parallele è

$$\int \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \int dm = m\mathbf{g} \quad (7.8)$$

Rispetto a un polo fisso, come il polo delle coordinate, il momento risultante è

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dm = \left(\int \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{g} = m\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times m\mathbf{g}. \quad (7.9)$$

Per quanto riguarda il momento la risultante della forza peso va quindi considerata applicata al centro di massa.

Anche l'energia potenziale si calcola integrando:

$$E_p = \int g z dm = g \int z dm = mgz_{CM}. \quad (7.10)$$

7.3 Moto di un corpo rigido

Per il corpo rigido possiamo esaminare due tipi di moto, rotazione e traslazione.

7.3.1 Moto di traslazione

Nel **moto di traslazione** tutti i punti descrivono traiettorie eguali, in generale curvilinee, con la stessa velocità \mathbf{v} , che può variare nel tempo in modulo, direzione e verso: \mathbf{v} coincide con \mathbf{v}_{CM} , la velocità del centro di massa.

Quindi nel moto di traslazione se è noto il moto del centro di massa è noto quello di qualsiasi altro punto. Per esempio possiamo notare che nel moto di una berretta, questa ruota sempre parallela a se stessa.

Nel moto di traslazione non c'è movimento dei punti rispetto al centro di massa, quindi:

$$\mathbf{L}' = 0, \quad E'_k = 0. \quad (7.11)$$

Dunque le grandezze significative in una traslazione sono:

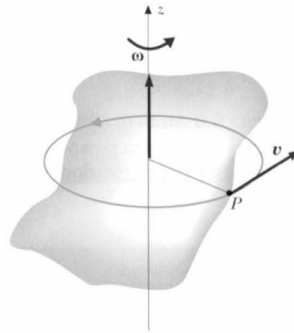
- **quantità di moto:** $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$,
- **energia cinetica:** $E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$,
- **momento angolare:** $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$.

L'equazione del moto del centro di massa è

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{CM} \quad (7.12)$$

7.3.2 Moto di rotazione

Nel moto di rotazione tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenza diversa che stanno su piani tra loro paralleli e hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione.



La velocità angolare, ω , è la stessa per ogni punto ed è parallela all'asse di rotazione. Le velocità \mathbf{v}_i dei singoli punti sono diverse, a seconda della distanza R_i dall'asse di rotazione ($v_i = \omega R_i$).

L'equazione dinamica di base del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (7.13)$$

Nel caso più generale il moto può essere descritto come una combinazione dei due moti che abbiamo visto, cioè una **rototraslazione**.

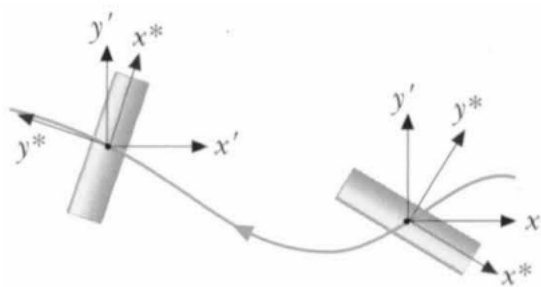


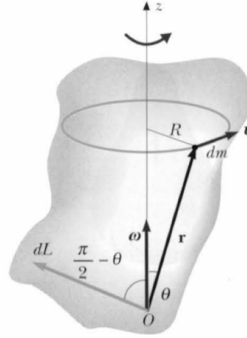
Figura 6: Moto di rototraslazione di un'asta rigida

7.4 Rotazioni rigide attorno a un asse fisso

Consideriamo un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso. I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti. Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha *direzione* fissa, quella dell'asse di rotazione, mentre il *modulo* è in generale variabile nel tempo; il *verso* di $\boldsymbol{\omega}$ indica il verso della rotazione.

Se $\boldsymbol{\omega}$ varia è diverso da zero il vettore accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, anch'esso parallelo all'asse di rotazione.

Nella rotazione rigida ogni elemento di massa dm del corpo descrive in un piano ortogonale all'asse una traiettoria circolare, con centro sull'asse e raggio R pari alla distanza di dm dall'asse. La velocità di dm è \mathbf{v} , con modulo ωR , l'accelerazione è \mathbf{a} , con componente normale $\omega^2 R$ e tangente αR .



7.4.1 Calcolo momento angolare. Momento d'inerzia

Supponiamo che la rotazione avvenga intorno all'asse z . Il raggio vettore forma un angolo θ con l'asse z , $R = r \sin(\theta)$. Il momento angolare di P_i rispetto al polo O è dato da $\mathbf{L} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$: \mathbf{L} è ortogonale al piano individuato da \mathbf{r} , \mathbf{v} e forma un angolo di $\pi/2 - \theta$ con l'asse z . Il modulo di \mathbf{L} è

$$L = r_i m_i v_i = m_i \omega R_i r_i \quad (7.14)$$

dove $R_i = r_i \sin(\theta_i)$.

Calcoliamo ora la proiezione del momento angolare \mathbf{L} sull'asse di rotazione, ovvero il **momento angolare assiale**:

$$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin(\theta_i) = m_i r_i \sin(\theta_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega. \quad (7.15)$$

Il momento angolare totale \mathbf{L} è un vettore generalmente non parallelo all'asse di rotazione

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i. \quad (7.16)$$

La proiezione di \mathbf{L} sull'asse z è

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i R_i^2 \omega = I_z \omega \quad (7.17)$$

dove I_z si chiama **momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z** :

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (7.18)$$

$$I_z = \int dm R^2 = \int dm (x^2 + y^2) \quad (7.19)$$

Il momento di inerzia dipende da come è distribuita la massa del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione e quindi cambia se cambia l'asse di rotazione.

La componente parallela all'asse di può variare solo in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo. La componente ortogonale all'asse \mathbf{L}_\perp varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo.

Il momento angolare risulta certamente parallelo all'asse di rotazione e quindi a ω quando l'asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo e in questo caso \mathbf{L} ha soltanto la componente parallela all'asse. In tali condizioni

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}, \quad L = L_z, \quad L_\perp = 0.$$

7.4.2 Equazione del moto di rotazione

Nel caso in cui \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \boldsymbol{\omega}) = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha} \quad (7.20)$$

e la (5.18) diventa

$$\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\alpha}. \quad (7.21)$$

Questa è l'equazione del moto di rotazione: la conoscenza delle forze esterne permettet di calcolare l'accelerazione angolare, se è noto il momento di inerzia. Sia $\boldsymbol{\alpha}$ che \mathbf{M} sono paralleli all'asse di rotazione, cioè a $\boldsymbol{\omega}$.

Si può quindi ottenere la legge oraria, note le condizioni iniziali del moto

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

- Se $M = 0$ il corpo resta in quiete o ruota in modo uniforme intorno all'asse di rotazione:

$$\alpha = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad \theta = \theta_0 + \omega t.$$

- Se $M = \text{costante}$ la rotazione del corpo rigido intorno all'asse avviene in modo uniformemente accelerato:

$$\alpha = \text{costante}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

- Se \mathbf{M} è generico ($\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$ il moto è vario e quindi

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t) dt, \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t) dt \quad (7.22)$$

Se il centro di massa non è sull'asse di rotazione, la sua velocità sarà $v_{CM} = \omega R_{CM}$ e le componenti dell'accelerazione $a_{CM} = \alpha R_{CM}$ e $a_{CM} = \omega^2 R_{CM}$.

7.4.3 Energia cinetica e lavoro nel moto di rotazione

L'energia cinetica del corpo rigido nel moto di rotazione è data da

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (7.23)$$

Se il momento angolare è parallelo a ω abbiamo:

$$E_k = \frac{L^2}{2I_z}. \quad (7.24)$$

Se ω varia in modulo

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 = W. \quad (7.25)$$

Ricaviamo ora la relazione tra momento e lavoro, sempre nel caso in cui \mathbf{L} sia parallelo a $\boldsymbol{\omega}$.

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M d\theta. \quad (7.26)$$

Integrando dalla posizione a quella finale si ottiene

$$W = \int_0^\theta M d\theta.$$

La **potenza istantanea** è data da

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega. \quad (7.27)$$

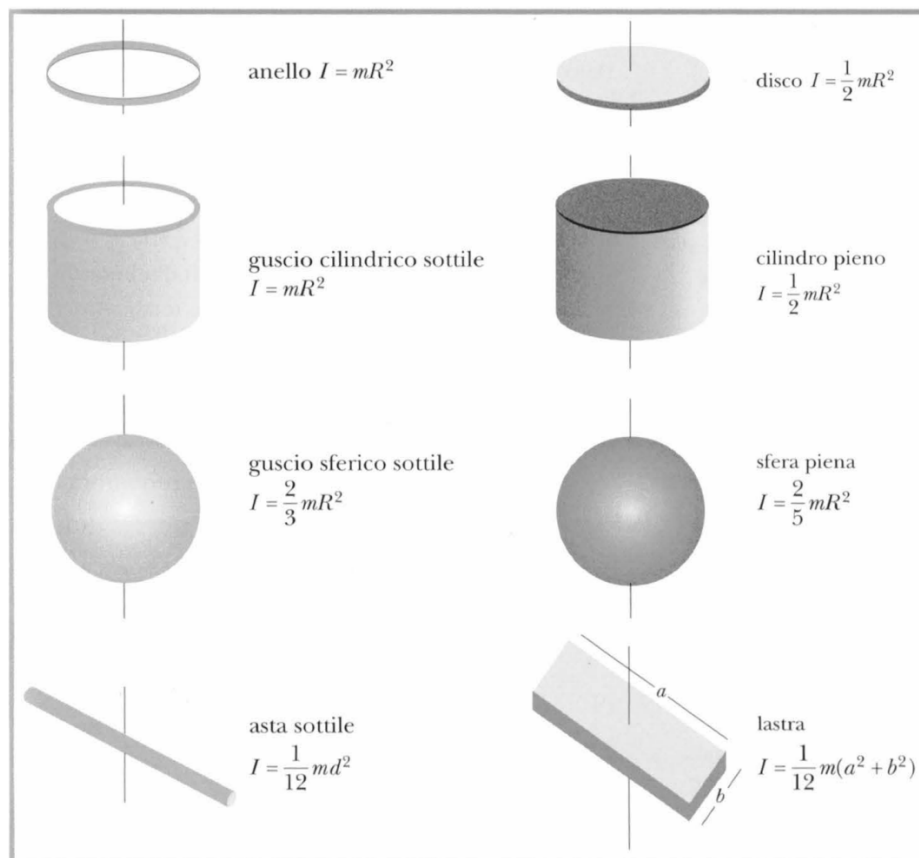
7.5 Momento di inerzia

Nell'espressione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ la massa del corpo è la costante di proporzionalità tra forza e accelerazione, analogamente, per un corpo rigido, il momento di inerzia è il legame tra momento delle forze e accelerazione angolare, $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$. C'è però una differenza tra il ruolo della massa e del momento d'inerzia, la massa è una caratteristica di ogni corpo, mentre il momento di inerzia è legato all'asse di rotazione rispetto al quale lo calcoliamo.

Il momento di inerzia per un corpo continuo è

$$I = \int R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV \quad (7.28)$$

A parità di massa un elemento dm contribuisce al moto d'inerzia molto più se è lontano dall'asse di rotazione che se è vicino ad esso.



7.6 Teorema di Huygens-Steiner

Quando si calcola il momento di inerzia si privilegia come asse di rotazione un asse di simmetria, più semplice di un qualsiasi altro asse, per il corpo. Il teorema di Huygens-Steiner semplifica il problema. Esso stabilisce che:

il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse che si trova a una distanza a dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_c + ma^2 \quad (7.29)$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

7.6.1 Teorema di Huygens-Steiner e teorema di Konig

Da (7.23) sappiamo che $E_k = \frac{1}{2}I_z\omega^2$ quindi applicando il teorema di Huygens-Steiner ($I_z = I_c + ma^2$)

$$E_k = \frac{1}{2}(I_c + ma^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \quad (7.30)$$

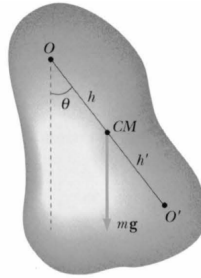
I_c è il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse z , mentre a è la distanza tra i due assi. Essendo $a\omega = v_{CM}$, velocità del centro di massa che percorre una traiettoria circolare di raggio a rispetto all'asse z , quindi

$$E_k = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 \quad (7.31)$$

in accordo con il secondo teorema di Konig (5.28). Quando il centro di massa non è sull'asse di rotazione, l'energia cinetica è data dalla somma di $E'_k = 1/2I_z\omega^2$, tipico della rotazione che costituisce il moto rispetto al centro di massa, e di $E_{k,CM} = 1/2mv^2$, energia cinetica del centro di massa.

7.7 Pendolo composto

Si chiama pendolo composto ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno a un asse orizzontale non passante per il centro di massa.



O è la traccia dell'asse di rotazione, ortogonale al foglio, h è la distanza del centro di massa da O .

Se si sposta il pendolo dalla posizione di equilibrio statico ($\theta = 0$, centro di massa sulla retta verticale passante per O), sia a destra che a sinistra, l'azione del peso è tale che da riportare il pendolo verso la posizione di equilibrio.

il momento della forza peso, che agisce come un momento di richiamo verso $\theta = 0$, è parallelo all'asse di rotazione e vale $M_z = -mgh \sin(\theta)$. Se non esistono momenti di forze di attrito:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin(\theta) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin(\theta) = 0 \quad (7.32)$$

I_z è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola, $\sin\theta \approx \theta$, si ottiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0,$$

che è l'equazione del moto armonico e ha soluzione

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi).$$

La pulsazione è $\Omega = \sqrt{mgh/I_z}$ e il periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

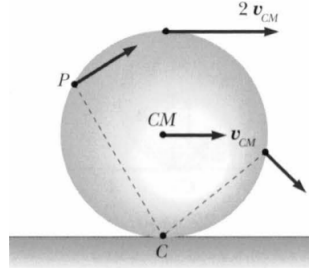
nella quale $l = I_z/mh$ rappresenta la lunghezza ridotta del pendolo composto e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

7.8 Moto di puro rotolamento

È un moto che si ha quando un corpo rigido, di forma cilindrica o sferica, posto su un piano, si muove su di esso ruotando rispetto a un asse che cambia istante per istante (il punto di contatto C ha velocità nulla).

In generale, se la velocità di tutti i punti sono eguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione.

Invece se il punto di contatto C ha velocità non nulla rispetto al piano, si dice che il corpo rotola e striscia.



Affinché il corpo possa rotolare senza strisciare occorre la presenza di un **attrito statico** tra il corpo e il piano in modo tale che la forza di attrito possa mantenere fermo istante per istante il punto di contatto C, cosicché per ogni istante infinitesimo dt il corpo possa ruotare intorno ad un asse di rotazione istantaneo, perpendicolare al piano e passante per C, con velocità angolare ω .

Il moto di un corpo rigido può essere descritto, in generale, come un moto di roto-traslazione e quindi la velocità di ogni punto può essere espressa come

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

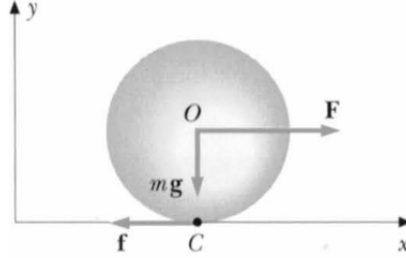
\mathbf{r} è la distanza del centro di massa da C. Nel successivo istante dt il corpo avanza e quindi cambia il punto di contatto e di conseguenza l'asse di rotazione istantaneo, che si sposta lungo il piano parallelamente a se stesso.

Le velocità dei punti, in un dato istante, non sono tutte eguali, ma si ha un valore massimo per il punto diametralmente opposto a quello di contatto mentre è zero la velocità del punto di contatto. Quindi per il punto C:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.33)$$

quindi $v_{CM} = \omega r$, l'accelerazione del centro di massa è $a_{CM} = \alpha r$. Il vettore velocità del punto P è perpendicolare a CP.

Trattiamo il caso di un corpo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale \mathbf{F} costante applicata all'asse. Sul corpo agiscono anche la forza peso $m\mathbf{g}$ e la reazione del piano \mathbf{R} , che ha una componente normale \mathbf{N} e una componente tangenziale \mathbf{f} (forza attrito statico).



Dato che la forza \mathbf{F} spinge tutto il corpo verso destra, la reazione \mathbf{f} deve avere il verso in figura per tenere fermo il punto di contatto.

La legge del moto del centro di massa è

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{CM},$$

che proiettata sugli assi x e y dà rispettivamente

$$\begin{cases} x: F - f = ma_{CM} \\ y: N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \end{cases}$$

Il teorema del momento angolare, scelto il centro di massa O come polo, si scrive

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow M = rf = I\alpha = \frac{a_{CM}}{r}.$$

Facendo sistema tra le due equazioni

$$\begin{cases} rf = I\frac{a_{CM}}{r} \\ F - f = ma_{CM} \end{cases}$$

si ricavano le due incognite a_{CM} e f :

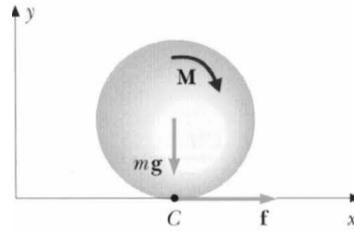
$$a_{CM} = \frac{F}{m(1 + \frac{I}{mr^2})}, \quad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}. \quad (7.34)$$

Sapendo che per la forza di attrito statico deve essere $f \leq \mu_S N$, allora la forza applicata \mathbf{F} non può assumere qualsiasi valore, poiché esiste un legame tra \mathbf{f} e \mathbf{F} . Quindi

$$F \leq \mu_S N \left(\frac{mr^2 + I}{I} \right) = F_{lim}. \quad (7.35)$$

Se la forza applicata al corpo superasse questo valore limite, la forza di attrito statico non sarebbe sufficiente a tenere fermo il punto di contatto e si avrebbe anche strisciamento.

Se invece di applicare una forza \mathbf{F} al corpo, si può applicare un momento costante \mathbf{M} . Questa volta l'azione del momento tende a far slittare verso sinistra il punto di contatto e \mathbf{f} deve avere il verso indicato.



Dalle equazioni

$$\mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{CM}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha}^2$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned} N = mg, \quad f = ma_{CM}, \quad M - rf = I \frac{a_{CM}}{r} \\ \Rightarrow a_{CM} = \frac{M}{mr(1 + \frac{I}{mr^2})}, \quad f = \frac{M}{r(1 + \frac{mr^2}{I})}. \end{aligned}$$

Anche ora bisogna verificare che

$$f \leq \mu_S N = \mu_S mg \Rightarrow M \leq \mu_S mgr \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right) = M_{lim}. \quad (7.36)$$

In questo caso è stato scelto il polo O, corrispondente al centro di massa, per il calcolo dei momenti delle forze e del momento di inerzia. Per quanto riguarda il ruolo della forza di attrito, è fondamentale per far iniziare il moto di puro rotolamento, ma una volta che esso è iniziato se sul piano su cui si svolge non ci sono forze, esso resta inalterato.

7.8.1 Conservazione dell'energia meccanica

Quando un corpo è in moto di puro rotolamento e si muove sotto l'azione di solo forze conservative, si conserva l'energia meccanica del corpo. Ciò accade anche se siamo in presenza di una forza di attrito tra punto di contatto e piano; infatti, la forza di attrito statico mantiene fermo il punto di contatto. Questo significa che non essendoci uno spostamento associato a tale forza, il lavoro della forza di attrito è nullo e quindi si conserva l'energia meccanica.

Il fatto che il corpo prima o poi si fermi se non ci sono forze o momenti ad esso applicati, dipende dalla presenza di un'altra forza di attrito, chiamata volvente, che dipende dalle piccole deformazioni esistenti sul piano e sul corpo stesso, è schematizzabile tramite un momento \mathbf{M} , di verso opposto a quello che determina il moto. Dato che $M_v = hmg$ dove h è un coefficiente dipendente dal materiale di cui è costruito il corpo. In ogni caso, l'effetto di questo tipo di attrito è molto piccolo rispetto all'attrito statico e quindi possiamo trascurarlo.

²M:entrante, r:uscente

7.9 Impulso angolare

Per un punto materiale abbiamo visto che $\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$ e che $\int_0^t \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L}$. Per un corpo rigido, in modo analogo, possiamo dire che l'azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita del momento angolare

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \Delta \mathbf{L}. \quad (7.37)$$

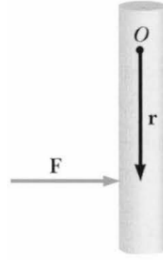
Questa equazione è l'integrale del momento nel tempo e si chiama **impulso angolare**.

Quindi possiamo mettere in rotazione un corpo rigido applicando in un certo punto, una forza intensa per un tempo molto breve (forza impulsiva).

$$\int \mathbf{M} dt = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L}. \quad (7.38)$$

\mathbf{r} non varia nel breve intervallo e quindi lo possiamo portare fuori, $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ si chiama **momento dell'impulso**.

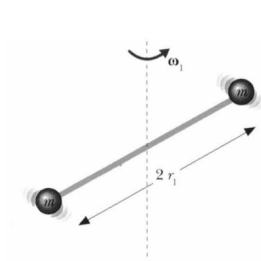
Nell'integrale non compaiono le forze di reazione del vincolo perché hanno momento nullo essendo applicate nel polo O. Non compare neanche la forza peso perché il suo impulso angolare risulta trascurabile rispetto a quello della forza impulsiva \mathbf{F} .



7.10 Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido

Conservazione della quantità di moto del sistema: $\mathbf{P} = mv_{CM}$. Se la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, ma il moto dei singoli punti non è detto sia traslatorio rettilineo uniforme.

Conservazione del momento angolare: se $\mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{costante}$ (rispetto ad un polo), questo non comporta $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, in quanto non è detto che il moto di rotazione avvenga attorno ad un asse principale di inerzia, cioè che $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.



In particolare, consideriamo un esempio in cui si abbia un sistema di corpi rigidi, per il quale si conserva il momento angolare, ma la variazione del momento di inerzia del sistema determina una variazione della velocità angolare. Agli estremi di un'asta orizzontale sono poste due sferette di raggio r . La lunghezza dell'asta può essere variata. L'asse di rotazione passa per il centro di massa del sistema e rispetto ad esso tutti i momenti sono nulli, quindi \mathbf{L} si conserva, ossia $\mathbf{L} = I_1\boldsymbol{\omega}_1 = \text{costante}$. Facendo variare la lunghezza dell'asta si ha, se $r_2 < r_1$ e considerando la massa dell'asta trascurabile

$$I_1 = 2 \left[\frac{2}{5} mr^2 + m(r + r_1)^2 \right] \simeq 2mr_1^2, \quad I_2 = 2 \left[\frac{2}{5} mr^2 + m(r + r_2)^2 \right] \simeq 2mr_2^2.$$

Con $I_2 < I_1$. Quindi $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ e $\omega_2 > \omega_1$.

Naturalmente si avrà una variazione di energia cinetica, cioè

$$\Delta K = E_{k,f} - E_{k,i} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I_{fin}} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{I_{in}} \quad (7.39)$$

che rappresenta il lavoro fatto dalle forze centripete per variare la configurazione del sistema. In questo esempio abbiamo anche visto come calcolare il momento d'inerzia di una massa puntiforme rispetto a un asse di rotazione distante r da tale massa. Le sferette sono effettivamente masse puntiformi ($r \ll r_1$), quindi $I = mr^2$.

Parte II

TERMODINAMICA

8 Sistemi termodinamici

Uno degli argomenti della termodinamica è l'esame del bilancio energetico complessivo di un processo fisico.

Un sistema termodinamico è una **porzione di universo che può essere costituita da una o più parti**. Per **ambiente** intendiamo tutto ciò con cui il sistema può interagire.

L'insieme sistema più ambiente si chiama **universo termodinamico**.

Esistono tre distinti tipi di sistema:

- il sistema è **aperto** se avvengono scambi di energia e di materia tra il sistema e l'ambiente,
- il sistema è detto **chiuso** se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno scambi di energia,
- infine il sistema si dice **isolato** se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente.

8.1 Variabili termodinamiche

In termodinamica un sistema viene descritto tramite un numero ridotto di grandezze fisiche macroscopiche, dette **variabili termodinamiche**, come **volume**, **pressione**, **temperatura**, **massa**, **concentrazione**, **densità**. ecc.

Possiamo fare una distinzione tra le variabili termodinamiche:

- variabili **estensive**: esprimono una proprietà globale del sistema che dipende in particolare dalle dimensioni o dall'estensione del sistema, questo tipo di variabili sono additive (massa, volume)
- variabili **intensive**: esprimono una proprietà locale, che può variare da punto a punto del sistema, questo tipo di variabili non sono additive. (pressione e temperatura)

8.2 Equilibrio termodinamico

Un sistema termodinamico lasciato libero di evolversi in assenza di azioni esterne tende a uno stato di equilibrio termodinamico, in cui le variabili termodinamiche non variano nel tempo. All'equilibrio le variabili termodinamiche sono dette anche **variabili di stato**, perché il loro valore può essere determinato e individuano il comportamento di tutto il sistema.

L'equilibrio termodinamico è il risultato di *tre diversi tipi di equilibrio*, che devono essere realizzati contemporaneamente:

- **equilibrio meccanico**: inteso come equilibrio di forze e momenti,
- **equilibrio chimico**: non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema stesso,
- **equilibrio termico**: la temperatura è la stessa ovunque.

8.3 Temperatura

La temperatura è la grandezza che descrive lo stato termico di un corpo. L'unità di misura della temperatura è il Kelvin (K) ($0^\circ C = 273.16 K$).

Alla temperatura di 273.16 Kelvin corrisponde il **punto triplo dell'acqua**, ovvero quel particolare stato in cui ghiaccio, acqua e vapore d'acqua possono esistere contemporaneamente.

8.4 Termometro

Il termometro è un dispositivo per misurare la temperatura, tramite la variazione di una grandezza fisica (caratteristica termometrica). Se la caratteristica termometrica fosse il volume, si avrebbe

$$T_{pt} = aL_{pt} = 273.16 K \Rightarrow a = \frac{273.16}{L_{pt}}; \quad T_x = aL_x = \frac{273.16}{L_{pt}} K.$$

Per il passaggio da Celsius a Kelvin:

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273.16 K.$$

8.4.1 Parete diatermica e adiabatica

- una **parete diatermica** permette il passaggio di calore da un sistema all'altro, è quindi una parete conduttrice di calore,
- una **parete adiabatica** non permette il passaggio di calore, è quindi isolante rispetto allo scambio di calore ($Q = 0$).

8.5 Esperimenti di Joule

Verso la metà del 1800 Joule effettuò una serie di esperimenti allo scopo di realizzare aumenti di temperatura in un sistema, con procedimenti molto diversi tra loro. In tutti gli esperimenti l'acqua e il dispositivo studiato per aumentare la temperatura erano racchiusi all'interno di un recipiente adiabatico.

- Viene speso un lavoro meccanico W , per aumentare la temperatura dell'acqua tramite le palette di un mulinello.
- Si utilizza un lavoro W_2 per far circolare una corrente all'interno di una resistenza R immersa nell'acqua.
- Si comprime un gas contenuto in un recipiente immerso nell'acqua, spendendo lavoro W_3 .
- Vengono strofinati tra loro due blocchi di metallo immersi nell'acqua. Il lavoro speso contro le forze di attrito è W_4 .

Da questi esperimenti si evince che, a parità di massa d'acqua, il lavoro speso, indipendentemente dal processo utilizzato, è proporzionale alla variazione di temperatura ΔT e quindi. Quindi a parità di massa e di $\Delta T \Rightarrow W_1 = W_2 = W_3 = W_4$.

Ciò comporta

$$W_{ad} = -\Delta U \quad (8.1)$$

dove U , **energia interna**, è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema ed è espressa in Joule. Questa relazione è analoga a quella del lavoro delle forze conservative.

Lo stesso risultato si può raggiungere immergendo un corpo, a temperatura maggiore di quella dell'acqua, nel contenitore, realizzando uno scambio di calore tra i due corpi e quindi

$$Q = \Delta U \quad (8.2)$$

con lavoro nullo. Dal confronto tra le due relazioni si ha:

$$Q = -W_{ad} \quad (8.3)$$

L'espressione $Q = -W_{ad}$ rappresenta l'equivalenza tra calore e lavoro.

Il calore può essere dunque definito come "lo scambio di energia" tra due corpi a diversa temperatura e dunque si esprime in Joule.

Si dice dunque che un sistema "scambia calore". [1 caloria = 4186.6 J]

8.6 Primo principio della termodinamica

Consideriamo una situazione in cui si abbia un sistema che oltre allo scambio di lavoro meccanico con l'ambiente possa avere uno scambio di calore, cioè trasmissione di energia non accompagnata da fenomeni meccanici. Allora:

se un sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza $Q - W$ risulta indipendente dalla trasformazione.

Si può pertanto scrivere, posto $\Delta U = U_B - U_A$,

$$\Delta U = Q - W \Rightarrow Q = W + \Delta U. \quad (8.4)$$

Considerando trasformazioni infinitesime $dU = dQ - dW$, quindi, passando dallo stato A allo stato B:

$$\Delta U = \int_A^B dU, \quad Q_{AB} = \int_A^B dQ, \quad W_{AB} = \int_A^B dW$$

dove ΔU è indipendente dal tipo di trasformazione, mentre ne dipendono Q e W .

Dal primo principio della termodinamica si scrive che:

- essendo ΔU indipendente dalla trasformazione, U è una **funzione di stato**, cioè dipende solo dallo stato iniziale e finale del sistema, mentre Q e W variano a seconda della trasformazione.
- L'energia interna viene immagazzinata dal sistema sotto forma di calore e lavoro scambiati e può essere successivamente restituita dal sistema. Essa rappresenta l'energia globale del sistema.
- Il primo principio rappresenta una più generale formulazione della conservazione dell'energia, tenendo conto anche degli scambi di calore.

Se la trasformazione riporta il sistema nello stato iniziale, si dice che è una **trasformazione ciclica**, per la quale si ha:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W.$$

Se $Q > 0$, il sistema assorbe calore, allora $W > 0$, il sistema fornisce calore, si ha una *macchina termica*.

Se $Q < 0$, il sistema cede calore, allora $W < 0$, il sistema assorbe lavoro, si ha una *macchina frigorifera*.

8.7 Trasformazioni termodinamiche

Una trasformazione è un processo in cui un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio iniziale a uno finale attraverso una successione di stati intermedi, e durante il quale quindi cambiano le coordinate termodinamiche, qualcuno o tutte, del sistema.

Scegliendo p e V come variabili indipendenti possiamo rappresentare graficamente gli stati di equilibrio termodinamico in un semplice diagramma cartesiano in cui il volume rappresenta l'asse delle ascisse (x) e la pressione quello delle ordinate (y). Il piano (p, V) è detto **piano di Clapeyron**.

8.7.1 Trasformazioni reversibili e irreversibili

Trasformazione attraverso stati di equilibrio: Per effettuare una trasformazione che passi attraverso stati di equilibrio bisogna procedere con variazioni molto piccole delle coordinate termodinamiche, in modo che queste in pratica definite in ogni istante. Ciò si può realizzare discostandosi molto poco da uno stato di equilibrio, per permettere che la trasformazione avvenga, e attendendo il ristabilirsi dell'equilibrio nelle nuove condizioni prima di procedere a un'ulteriore variazione infinitesima di stato. Quando si opera così si parla di **trasformazione quasi-statica**.

Oltre all'esame delle condizioni di equilibrio o non equilibrio si deve verificare durante la trasformazione l'eventuale presenza di **forze dissipative**, come attriti che si oppongono allo spostamento di parti meccaniche.

Trasformazione attraverso stati di NON equilibrio: Una trasformazione attraverso stati di non equilibrio può realizzarsi invece in conseguenza di un processo di espansione o compressione rapida, per cui non sussiste né equilibrio meccanico né termico, o per effetto di una espansione o compressione lenta con una differenza di pressione finita così che, pur potendoci essere equilibrio termico, non c'è equilibrio meccanico.

Possiamo classificare le trasformazioni secondo il seguente schema:

- una trasformazione è detta **reversibile** se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa;
- una trasformazione è detta **irreversibile** qualora non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative, o entrambe.

8.8 Capacità termica e calore specifico

Sappiamo che corpi a diversa temperatura si scambiano calore. La quantità di calore dQ che è necessario fornire a un corpo di massa m per variarne la temperatura di dT è definito da

$$dQ = mc dT \quad (8.5)$$

dove c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, chiamata **calore specifico**.

Da (8.5) troviamo che

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (8.6)$$

il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza alla temperatura T , per farne variare la temperatura di 1 K (quindi anche 1°C).

Il prodotto $C = mc$, detto **capacità termica** del corpo, rappresenta il calore necessario per far variare di 1 K la temperatura del corpo.

Integrando (8.5), la quantità di calore Q che è necessario fornire a un corpo di massa m per portarne la temperatura da un valore iniziale T_{in} a un valore finale T_{fin} è

$$Q = \int dQ = m \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c dT \quad (8.7)$$

se il calore specifico nell'intervallo di temperatura interessato si possa considerare sostanzialmente costante si semplifica

$$Q = mc(T_{fin} - T_{in}). \quad (8.8)$$

Ora consideriamo due corpi a diversa temperatura posti in un recipiente adiabatico, essi scambieranno rispettivamente le quantità di calore Q_1 e Q_2 . Essendo il recipiente adiabatico

non c'è scambio di calore con l'esterno e $Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = 0$. Di conseguenza $Q_1 = -Q_2$: il calore ceduto dal primo corpo, più caldo, è eguale in modulo a quello assorbito dal secondo corpo, più freddo.

Dato che $Q_1 = -Q_2$ e usando la (8.8) abbiamo

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2) \quad (8.9)$$

da cui possiamo calcolare la temperatura finale di equilibrio T_e :

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} \quad (8.10)$$

8.8.1 Mole e calore specifico molare

Una mole di sostanza è la quantità di materia di quella data sostanza che contiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ di molecole.

In alcune situazioni si preferisce fare riferimento al calore scambiato da un certo numero n di moli di una sostanza e pertanto si definisce il calore specifico molare

$$c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \quad (8.11)$$

8.9 Cambiamenti di fase

Sono chiamati cambiamenti di fase i passaggi di una sostanza da una fase all'altra, per esempio dalla fase liquida a quella di vapore. I cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore e si osserva che, per unità di massa, si tratta di quantità ben definite, dette **calori latenti** λ . Pertanto il calore richiesto per il cambiamento di fase della massa m di una sostanza pura è dato da

$$Q = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{Q}{m}. \quad (8.12)$$

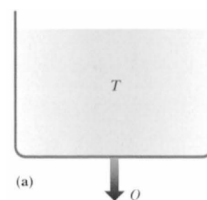
Il calore Q cambia segno per cambiamenti di fase di tipo opposto: per esempio Q deve essere ceduto (+) alla sostanza per far avvenire la fusione, Q deve essere sottratto (-) alla sostanza per produrre la solidificazione. Quindi λ è la *quantità di calore necessaria per il cambiamento di fase dell'unità di massa* e si misura in $\frac{J}{Kg}$.

Cambiamento di fase	Terminologia
solido \Rightarrow liquido	fusione
liquido \Rightarrow solido	solidificazione
liquido \Rightarrow evaporazione	evaporazione
evaporazione \Rightarrow liquido	condensazione
solido \Rightarrow vapore	sublimazione
vapore \Rightarrow solido	brinamento (sublimazione)

8.9.1 Sorgenti di calore

Una sorgente di calore è un corpo con capacità termica praticamente infinita e quindi con la proprietà di poter scambiare calore restando a temperatura costante.

La simbologia per le sorgenti di calore è mostrata in figura. Nel caso rappresentato il calore scambiato è positivo per il sistema e negativo per la sorgente a temperatura T ; nel caso in cui Q è negativo per il sistema e positivo per la sorgente la freccia ha verso opposto.



8.10 Trasmissione del calore

Lo scambio di calore entro un sistema può avvenire tramite meccanismi distinti: conduzione, convezione e irraggiamento termici.

8.10.1 Conduzione di calore

Il calore si trasmette da un corpo ad un altro, oppure da un punto all'altro dello stesso corpo attraverso una catena ininterrotta di mezzi materiali a contatto tra loro (per esempio una bacchetta riscaldata da un'estremità).

La conduzione è descritta dalla legge di Fourier:

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt; \quad (8.13)$$

dove K è detta conducibilità ed tipica del materiale, si esprime in $\frac{W}{mK}$.

8.10.2 Convezione del calore

La convezione è il meccanismo tipico nei fluidi. Se si riscalda una massa fluida, quella parte più vicina alla sorgente di calore assume una temperatura maggiore e diminuisce di densità, dilatandosi. Viene così alterato l'equilibrio nel fluido, poiché le parti più calde risentono di una spinta di Archimede maggiore del loro peso. Ciò dà origine a **correnti ascensionali**, dette di **convezione**, che trasportano più in alto gli elementi di fluido più caldi, quando accade ciò il loro posto viene occupato da elementi di fluido più freddi avvicinandosi così alla sorgente di calore.

8.10.3 Irraggiamento

Un corpo a temperatura T irraggia, ossia emette, energia sotto forma di onde elettromagnetiche, che si propagano nello spazio circostante, anche se vuoto. Il potere emissivo del corpo ε , che ha il significato di energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è dato dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$\varepsilon = \sigma e T^4, \quad (8.14)$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} J/m^2 s K^4$ è una costante universale ed e una grandezza, detta **emissività**, che varia tra 0 e 1 e T la temperatura.

8.11 Dilatazione termica

Il volume di un corpo, a pressione costante, cambia al crescere della temperatura. Il fenomeno prende il nome di dilatazione termica.

Per variazioni di temperatura ΔT la variazione Δl della lunghezza l di una delle dimensioni del corpo risulta proporzionale a ΔT , se la pressione è costante:

$$\Delta l = \lambda \Delta T \Rightarrow l + \Delta l = l(1 + \lambda \Delta T);$$

λ è il **coefficiente di dilatazione lineare** ed è caratteristico del materiale di cui è composto il corpo.

Consideriamo un corpo a forma di parallelepipedo di dimensioni l_1, l_2, l_3 e quindi volume $V = l_1 l_2 l_3$ alla temperatura T . Il volume alla temperatura $T + \Delta T$ è dato da

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= l_1(1 + \lambda \Delta T) l_2(1 + \lambda \Delta T) l_3(1 + \lambda \Delta T) = \\ &= V(1 + \lambda \Delta T)^3 \approx V(1 + 3\lambda \Delta T). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato i termini λ^2 e λ^3 . Quindi

$$\Delta V = V 3\lambda \Delta T = V \alpha \Delta T$$

dove α è il **coefficiente di dilatazione cubica**

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T} = 3\lambda \quad (8.15)$$

8.12 Leggi dei gas. Gas ideali o perfetti

Un gas si dice perfetto se è in condizioni di pressione sufficientemente bassa e di temperatura alta rispetto a quella per cui si avrebbe condensazione.

8.12.1 Legge isoterma di Boyle

Si abbia un gas in equilibrio termodinamico a una certa pressione p entro un dato volume V e a temperatura T : se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti i possibili stati di equilibrio isotermi il prodotto della pressione per il volume ha sempre lo stesso valore. Vale cioè la legge di Boyle

$$pV = \text{costante} \quad (8.16)$$

a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume.

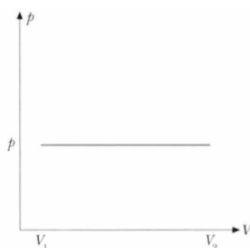
8.12.2 Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di **trasformazione isobara**; e si può verificare che

$$V = V_0 \alpha T. \quad (8.17)$$

α è una costante che varia a seconda del tipo di gas chiamata **coefficiente di dilatazione termica**.

Nel piano (p, V) una trasformazione isobara è rappresentata da un segmento orizzontale.



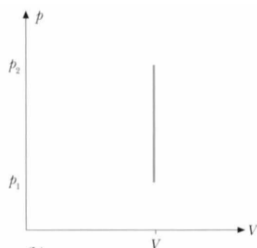
8.12.3 Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se invece si mantiene costante il volume di un gas la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0 \alpha T. \quad (8.18)$$

La temperatura è espressa in gradi Celsius, p_0 è la pressione del gas per $t = 0$.

Una trasformazione a volume costante si dice **isocora**, nel piano (p, V) è rappresentata da un segmento verticale.



8.12.4 Legge di Avogadro

La legge di Avogadro dice che:

volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole.

Questa legge si riferisce a gas che abbiano un comportamento ideale.

Come conseguenza delle legge di Avogadro **una mole di qualsiasi gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume**. Quindi se la pressione è quella atmosferica ($p_0 = 101325 \text{ Pa}$) e la temperatura è $T_0 = 273.16 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$, tale volume vale

$$V_m = 0.02241 \text{ m}^3 = 22.41 \text{ litri}.$$

V_m viene indicato col nome **volume molare**.

8.12.5 Equazione di stato del gas ideale

Se consideriamo n moli di un gas alla pressione atmosferica p_0 e alla temperatura $T_0 = 273.16 \text{ K}$, esse occupano il volume $V_0 = nV_m$, per la legge di Avogadro. Portiamo il gas da questo stato di riferimento A a uno stato termodinamico qualsiasi C di coordinate p, V, T . Ciò può essere fatto ad esempio attraverso una trasformazione isocora AB seguita da un isoterma BC. La pressione nello stato B è quindi $p_B = p_0\alpha T$ per (8.18). Nell'isoterma per la legge di Boyle (8.16)

$$pV = p_B V_0 = p_0 \alpha T V_0 = n p_0 V_m \alpha T.$$

Il prodotto $p_0 V_m \alpha$ è una costante che ha lo stesso valore per tutti i gas, quindi si ha la relazione che costituisce l'**equazione di stato del gas ideale**:

$$pV = nRT \tag{8.19}$$

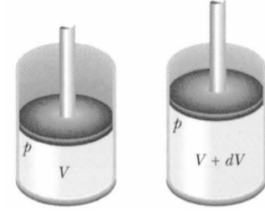
$$R = p_0 V_m \alpha = 8.314 \text{ J/mol K}.$$

8.13 Lavoro termodinamico

Consideriamo una trasformazione termodinamica, con due stati di equilibrio A e B, durante la quale il gas si espande, per esempio un gas chiuso in un recipiente dotato di un pistone mobile.

Quando il sistema si espande, o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere $dW = pdV$. In una trasformazione finita dallo stato A allo stato B si ha

$$W = \int_A^B p(V) dV \quad (8.20)$$



questa espressione, però, è utile solo quando si conosce la funzione $p(V)$, circostanza verificata solo in due situazioni:

- **la pressione esterna è costante**, in particolare se la pressione è quella atmosferica

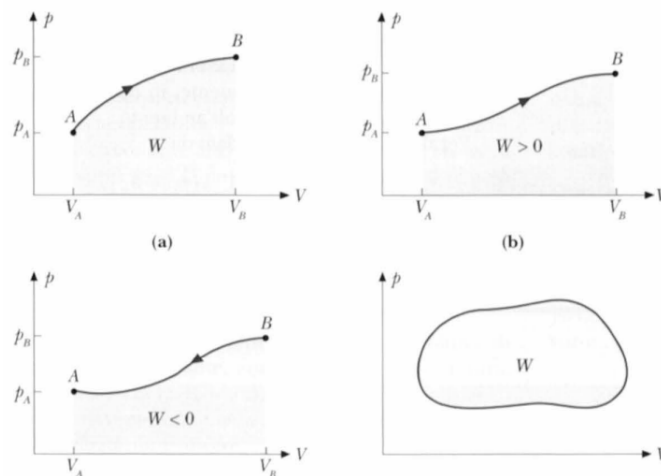
$$W = p_{amb}(V_B - V_A);$$

- **la trasformazione è reversibile** dato che la pressione esterna è uguale alla pressione del gas, $p_e = p_{gas}$.

In tutti gli altri casi in cui la pressione non è nota non si può applicare la (8.20). Possiamo dedurre che *il lavoro compiuto dal sistema termodinamico è uguale all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi*. E nel caso in cui la trasformazione è ciclica e reversibile si ha che: *il lavoro compiuto dal sistema termodinamico in una trasformazione ciclica reversibile è dato dall'area racchiusa dal ciclo stesso*.

Inoltre:

- se la trasformazione è isocora ($V = \text{costante}$), il lavoro è sempre nullo;
- se il sistema si espande il $V_B > V_A$ il sistema compie un lavoro sull'ambiente positivo;
- se il sistema viene compresso, $V_B < V_A$ e il sistema subisce un lavoro negativo, compiuto dall'ambiente.
- Il lavoro è positivo ($W > 0$) se il ciclo è compiuto in senso orario;
- il lavoro è negativo ($W < 0$) se il ciclo è compiuto in senso antiorario.



8.14 Calori specifici nei gas perfetti

Abbiamo già definito il calore specifico molare come

$$c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}.$$

Nel caso dei gas perfetti si possono definire due diversi tipi di calore specifico:

$$c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p \quad (8.21)$$

calore specifico a **pressione costante**, $dQ = nc_p dT$ per una trasformazione isobara infinitesima.

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V \quad (8.22)$$

calore specifico a **volume costante**, $dQ = nc_V dT$ per una trasformazione isocora infinitesima.

Generalmente, per queste trasformazioni c_p e c_V variano molto poco con la temperatura, per cui il calore scambiato per una variazione ΔT di temperatura si scrive

$$Q_V = nc_V \Delta T, \quad Q_p = nc_p \Delta T. \quad (8.23)$$

Oppure

$$Q_V = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT, \quad Q_p = n \int_{T_A}^{T_B} c_p dT \quad (8.24)$$

se c_V o c_p non dipendono da T

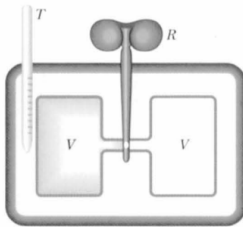
$$Q_V = nc_V \Delta T = \Delta U, \quad Q_p = nc_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V$$

perché dal primo principio $Q = \Delta U + W$ e nelle trasformazione isocora il lavoro è nullo. Nella trasformazione isobara $W = p \Delta V$, positivo perché il volume cresce con la temperatura.

8.15 Energia interna del gas ideale. $U(T)$

La dipendenza dell'energia interna U di un gas ideale dalle coordinate termodinamiche è stata ricavata dall'esperienza sull'espansione libera di Joule.

8.15.1 Espansione libera di Joule



In un contenitore con pareti rigide e diatermiche, diviso in due parti uguali separate da un rubinetto, si trova un gas nella parte sinistra mentre nella parte destra è stata realizzata una condizione di vuoto. Il contenitore è immerso in un contenitore adiabatico pieno di liquido e la temperatura di equilibrio è T . Si apre il rubinetto R e si lascia espandere il gas in tutto il volume a disposizione. L'espansione è detta libera perché non ci sono forze esterne che agiscono sul gas. Si osserva, per un gas perfetto, che comunque si operi (aprendo lentamente o velocemente il rubinetto, con gas inizialmente ad alta o bassa pressione) **la temperatura del liquido**

calorimetrico alla fine del processo è sempre pari a T , temperatura iniziale di equilibrio.

Dal primo principio segue che $\Delta U = \Delta U_{gas} + \Delta U_{cal} = Q - W = 0$, perché $Q = 0$ dato che l'espansione è adiabatica e $W = 0$ dato che l'espansione è libera. Di conseguenza anche $\Delta U = 0$, ne segue che **nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia.**

Poiché nel processo la temperatura del gas non varia, mentre cambiano pressione e volume, **l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura**. Questo risultato è vero soltanto per un gas ideale.

8.15.2 Calcolare variazione di energia interna

Consideriamo due stati di equilibrio A e B: ΔU deve essere la stessa qualsiasi trasformazione si scelga, essendo U una funzione di stato. Se scegliamo una trasformazione AC isocora e una CB isoterma si ha

$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB}$$

$$\Delta U_{AC} = Q_{AC} = nc_V(T_C - T_A)$$

$\Delta U_{CB} = 0$ poiché CB è isoterma e quindi $\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$ essendo $T_C = T_B$.

Quindi, qualsiasi sia la trasformazione si ha sempre

$$\Delta U = nc_V \Delta T \quad (8.25)$$

o più in generale

$$dU = nc_V dT \Rightarrow \Delta U = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT. \quad (8.26)$$

Poiché l'energia interna è funzione solo della temperatura, anche il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

Possiamo ora scrivere il primo principio per trasformazioni di gas ideali, considerando c_V costante

$$dQ = nC_V dT + dW \Rightarrow Q = nc_V \Delta T + W.$$

Se la trasformazione è reversibile

$$dQ = nc_V dT + p dV \Rightarrow Q = nc_V \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV.$$

8.15.3 Relazione di Mayer

In una trasformazione isobara infinitesima $dQ = nc_p dT$ e $dW = p dV$ per cui dalla (8.15.2)

$$nc_p dT = nc_V dT + p dV.$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali (8.19): $pV = nRT$ si ha

$$p dV + V dp = nR dT;$$

nelle trasformazioni isobare $dp = 0$, quindi $p dV = nR dT$. Pertanto

$$nc_p dT = nc_V dT + nR dT$$

in conclusione otteniamo la **relazione di Mayer**

$$c_p - c_V = R. \quad (8.27)$$

Di conseguenza in un gas ideale anche c_p è funzione soltanto della temperatura o è costante.

Il rapporto tra i calori specifici si indica

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1.$$

Sperimentalmente si trova che:

$$c_V = \frac{3}{2}R, \quad c_p = \frac{5}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

per i **gas ideali monoatomici**.

$$c_V = \frac{5}{2}R, \quad c_p = \frac{7}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$$

per i **gas ideali biatomici**.

Riassumendo:

- $\Delta U = nc_V \Delta T$, per qualsiasi trasformazione;
- $pV = nRT$, equazione di stato, vale sempre per gas perfetti;
- $c_p - c_V = R$, relazione di Mayer, vale sempre per gas perfetti;
- $Q = nc_V \Delta T$ se $V = \text{costante}$;
- $Q = nc_p \Delta T$ se $p = \text{costante}$.

8.16 Alcune trasformazioni del gas ideale

8.16.1 Trasformazioni adiabatiche

Il gas è racchiuso in un contenitore con pareti adiabatiche e quindi può scambiare solo lavoro (per esempio in conseguenza del fatto che una parete è mobile) e quindi $Q = 0$.

Dal primo principio e dal fatto che $\Delta U = nc_V \Delta T$ si ha

$$\begin{aligned} W_{AB} = -\Delta U &= -nc_V(T_B - T_A) = 3 - nc_V \frac{1}{nR}(p_B V_B - p_A V_A) = 4 \\ &= \frac{c_V}{c_p - c_V}(p_A V_A - p_B V_B) = 5 \frac{1}{\gamma - 1}(p_A V_A - p_B V_B). \end{aligned} \quad (8.28)$$

- **Espansione** adiabatica: il lavoro W_{AB} è positivo, ΔU è negativa, $T_B < T_A$, il gas si raffredda.
- **Compressione** adiabatica: il lavoro W_{AB} è negativo, $\Delta U > 0$, $T_B > T_A$, il gas si riscalda.

Se è una **trasformazione adiabatica reversibile**, dal primo principio

$$dQ = dU + dW = nc_V dT + p dV = 0$$

poiché la trasformazione è reversibile possiamo utilizzare l'equazione di stato in qualsiasi stato intermedio per esprimere la pressione come $p = \frac{nRT}{V}$ e si ottiene

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0.$$

Separando le variabili e utilizzando la relazione di Mayer:

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}.$$

Integrando dallo stato A allo stato B

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_A}{T_B}.$$

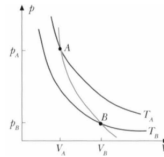
L'eguaglianza tra logaritmi comporta l'eguaglianza tra gli argomenti, per cui

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}.$$

Tramite l'equazione di stato si può trasformare la relazione tra T e V in una tra p e V o tra p e T , in conclusione si hanno tre espressioni equivalenti:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}, \quad pV^{\gamma-1} = \text{costante}, \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{costante}, \quad (8.29)$$

e si chiamano le **equazioni di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale**.



Possiamo rappresentare, nel piano (p, V) , l'equazione $pV^\gamma = \text{costante}$. La curva AB è un'espansione adiabatica reversibile, ha un andamento simile all'isoterma ma con pendenza maggiore ed è compresa tra le due isoterme T_A e T_B .

³equazione di stato

⁴relazione di Mayer

⁵relazione tra i calori specifici

8.16.2 Trasformazioni isoterme

Nel caso di una trasformazione isoterma si considera il gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T . Durante la trasformazione T resta costante e abbiamo

$$\Delta U = 0, \quad Q = W, \quad p_A V_A = p_B V_B.$$

quindi $pV = \text{costante}$.

- **Espansione** isoterma: $W > 0$, $Q > 0$, il gas compie lavoro e assorbe calore.
- **Compressione** isoterma: $W < 0$, $Q < 0$, il gas subisce lavoro e cede calore.

Qualora la trasformazione sia **isoterma reversibile** si ha ⁶

$$W = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = Q \quad (8.30)$$

oppure anche: $nRT \ln \frac{p_A}{p_B}$.

In una trasformazione isoterma reversibile c'è sempre uno scambio di calore ($Q \neq 0$).

8.16.3 Trasformazione isocora

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso: $V = \text{costante}$ e $W = 0$; il gas può scambiare solo calore e questo è eguale, per il primo principio, alla variazione di energia interna:

$$Q = \Delta U = nc_V(T_B - T_A).$$

Essendo il volume costante, dall'equazione di stato $p_A V = nRT_A$ e $p_B V = nRT_B$ quindi

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad (8.31)$$

- Se **si cede calore al gas** ($Q > 0$): la sua pressione e la sua temperatura aumentano ($p_B > p_A$, $T_B > T_A$).
- Se **si assorbe calore dal gas** ($Q < 0$): la sua pressione e la sua temperatura diminuiscono ($p_B < p_A$, $T_B < T_A$).

Una trasformazione isocora reversibile si realizza mettendo il gas a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura $T_1 = T_A + dT$, poi con una sorgente a temperatura $T_2 = T_1 + dT$, e così via, utilizzando in teoria una serie infinita di sorgenti.

8.16.4 Trasformazioni isobare

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico con un pistone mobile, la pressione del gas è costante. Dall'equazione di stato abbiamo, eguagliando $pV_A = nRT_A$ e $pV_B = nRT_B$:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}. \quad (8.32)$$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro, dati da

$$Q = nc_p(T_B - T_A)$$

$$W = p(V_B - V_A) = p \left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p} \right) = nR(T_B - T_A)$$

e deve essere sempre $Q - W = \Delta U = nc_V(T_B - T_A)$.

⁶pagina 315 Mazzoldi

- Se **si cede calore al gas** ($Q > 0$): il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro ($W > 0$).
- Se **si assorbe calore dal gas** ($Q < 0$): volume e temperatura diminuiscono e il gas subisce lavoro ($W < 0$).

Se il gas si espande contro una pressione esterna costante in modo irreversibile, la trasformazione non è isobara, il lavoro sarà: $W = p_{ext}(V_B - V_A)$.

Una trasformazione isobara si può compiere mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B ; non essendoci equilibrio termico la trasformazione è irreversibile. Invece, per avere una trasformazione reversibile bisogna disporre una serie infinita di sorgenti, in modo tale che ci sia sempre equilibrio tra la pressione del gas e quella esterna.

8.16.5 Trasformazioni politropiche

Sono quelle trasformazioni per cui $pV^\alpha = \text{costante}$ con α costante reale. In questa categoria sono comprese le isoterme ($\alpha = 1$), le adiabatiche ($\alpha = \gamma$) e al limite anche le isobare ($\alpha = 0$) e le isocore ($\alpha = \infty$).

Il calore specifico molare per una trasformazione politropica è

$$c_\alpha = c_V + \frac{R}{1 - \alpha}$$

per cui il calore scambiato e il lavoro saranno:

$$Q_\alpha = nc_\alpha(T_2 - T_1), \quad W = \frac{1}{\alpha - 1}(p_A V_A - p_B V_B).$$

8.17 Entalpia

L'entalpia si definisce come

$$H = U + pV \quad (8.33)$$

che risulta una funzione di stato in quanto sia U che pV sono funzioni soltanto delle coordinate termodinamiche.

Dato che in un gas ideale U è funzione soltanto delle coordinate termodinamiche e $pV = nRT$ anche, si conclude che **l'entalpia del gas ideale è funzione solo della temperatura, $H = H(T)$** .

Per una qualsiasi trasformazione infinitesima

$$dH = dU + d(pV) = nc_V dT + nR dT = nc_p dT.$$

Per una trasformazione finita

$$\Delta H = n \int_{T_A}^{T_B} c_p dT$$

se $c_p = \text{costante}$ si scrive:

$$\Delta H = nc_p(T_B - T_A)$$

in particolare per una trasformazione isobara risulta $Q = \Delta H$.

- se la trasformazione è isocora: $Q = \Delta U$,
- se la trasformazione è isobara: $Q = \Delta H$.

Dunque c_V e c_p possono essere riscritti come

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}, \quad c_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}.$$

8.18 Trasformazioni cicliche

Le trasformazioni cicliche sono trasformazioni in cui lo stato finale coincide con lo stato iniziale, di conseguenza $\Delta U = 0$ e $Q = W$.

Se durante il ciclo viene prodotto lavoro ($W > 0$), assorbendo calore da un opportuno numero di sorgenti, si dice che il **ciclo è termico**. Il dispositivo che opera è indicato come **macchina termica**.

Se invece il ciclo è tale che venga richiesto un lavoro esterno ($W < 0$), cedendo calore a un opportuno numero di sorgenti, si parla di **ciclo frigorifero**. Il dispositivo corrispondente è detto **macchina frigorifera**.

Se consideriamo le varie trasformazioni che compongono il ciclo, il calore e il lavoro complessivamente scambiati, possiamo scrivere

$$Q = Q_A + Q_C$$

dove $Q_A > 0$ rappresenta la somma dei calori assorbiti e $Q_C < 0$ la somma dei calori ceduti,

$$W = W_F + W_S$$

in cui $W_F > 0$ è la somma dei lavori compiuti e $W_S < 0$ è la somma dei lavori subiti.

Possiamo anche scrivere $W = Q_A + Q_C$, dato che $Q = W$.

Il rendimento η di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro fornito e la quantità di calore assorbito, e poiché $W = Q$:

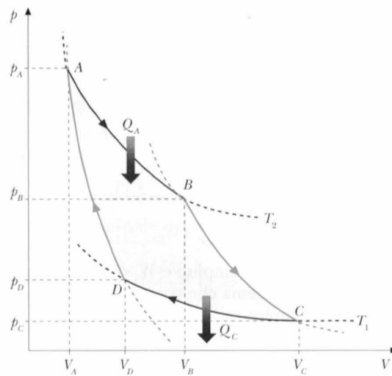
$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}. \quad (8.34)$$

Si osserva che $0 \leq \eta < 1$. In un ciclo termico solo una percentuale del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto. Una macchina termica necessita di almeno due sorgenti per poter lavorare. Quando parliamo di calore ceduto o assorbito o di lavoro fatto o subito, lo consideriamo dal punto di vista del sistema; per quanto riguarda l'ambiente i segni di Q e W sono esattamente opposti.

8.18.1 Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot per un gas ideale è costituito da quattro trasformazioni reversibili:

1. trasformazione AB , **espansione isoterma reversibile alla temperatura T_2** ,
2. trasformazione BC , **espansione adiabatica reversibile**,
3. trasformazione CD , **compressione isoterma reversibile alla temperatura T_1** ,
4. trasformazione DA , **compressione adiabatica reversibile**.



- AB: $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W \Rightarrow Q_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$,
- BA: $Q = 0 \Rightarrow \Delta U_{BC} = -W_{BC} \Rightarrow W_{BC} = nc_V(T_2 - T_1)$,
- CD: $\Delta U = 0 \Rightarrow Q_C = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_C} = W_{CD}$,
- DA: $Q = 0 \Rightarrow \Delta U_{DA} = -W_{DA} \Rightarrow W_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) \Rightarrow W_{DA} = -W_{BC}$.

In tutto il ciclo $\Delta U = 0$, $Q_{tot} = W_{tot}$ ma solo le isoterme producono lavoro quindi $W_{tot} = Q_A + Q_C = W_{AB} + W_{CD}$.

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}.$$

Inoltre dalle due adiabatichette:

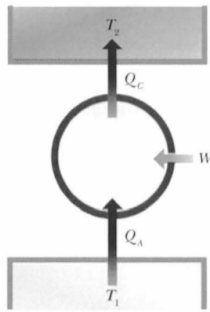
$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}, \quad T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}.$$

Quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{|Q_C|}{T_1} = \frac{Q_A}{T_2}.$$

Il rendimento nel ciclo di Carnot dipende solo dalle temperature delle due isoterme ed è vero per qualsiasi gas ideale.

8.18.2 Cicli frigoriferi



In un ciclo frigorifero il sistema complessivamente assorbe lavoro e cede calore ($Q = W < 0$). Nella situazione più semplice il sistema assorbe il calore Q_A da una sorgente fredda, assorbe lavoro e cede calore Q_C a una sorgente calda: risulta sempre $|Q_C| > Q_A$.

Si definisce **efficienza** o **coefficiente di prestazione** il rapporto:

$$\xi = \frac{Q_A}{|W|}$$

tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo, a parità di calore Q_A assorbito.

Nel caso in cui il ciclo di Carnot venga percorso in verso opposto, diventa un ciclo frigorifero, l'efficienza è

$$\xi = \frac{Q_A}{|Q_C + Q_A|} = \frac{T_1}{T_2 - T_1},$$

ricordando che $V_B/V_A = V_C/V_D$.

In generale nei cicli frigoriferi: il calore ceduto dal sistema alle sorgenti calde è sempre maggiore, in modulo, di quello assorbito, cioè sottratto alla sorgente fredda e quindi il processo avviene sempre in presenza di lavoro fornito dall'ambiente al sistema ($Q_A + |W| = |Q_C|$).

9 Secondo principio della termodinamica

Dal primo principio della dinamica sappiamo che anche le trasformazioni termodinamiche devono rispettare la conservazione dell'energia: $\Delta U = Q - W$.

In linea di principio, se $\Delta U = 0$, $Q = W$ ma la trasformazione non è simmetrica.

- considerando una macchina termica, si avrà sempre $Q_A > W$,
- in un espansione isoterma $Q = W$, ma non è l'unico risultato che si ottiene,
- se $T_B > T_A$ e il calore fluisce spontaneamente dal corpo B al corpo A, non è vero il viceversa.

Il **secondo principio della termodinamica** tiene conto dei risultati sperimentali suddetti e si presenta sotto forma di due diversi enunciati:

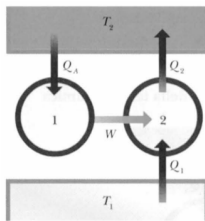
Enunciato di Kelvin-Planck: È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

Enunciato di Clausius: È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura maggiore.

L'aggettivo unico utilizzato nei due enunciati è essenziale: i processi proibiti dal secondo principio sono possibili, se non costituiscono l'unico risultato.

I due enunciati, apparentemente molto diversi, sono invece strettamente collegati tra loro, tanto che, la violazione del primo enunciato comporta anche la violazione del secondo.

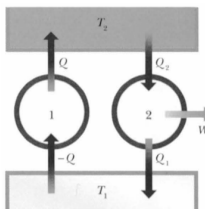
9.1 Violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck



Supponiamo che sia $Q_A = W$ per la prima macchina e $Q_0 + W = Q_C$ per la seconda, ma essendo $W = Q_A \Rightarrow Q_0 + Q_A = Q_C \Rightarrow Q_0 = Q_C - Q_A$, cioè la seconda macchina trasferisce calore dalla sorgente fredda (T_1) a quella calda (T_2) senza lavoro esterno, violando l'enunciato di Clausius.

(Es.: $Q_A = 200J$, $W = 200J$, $Q_0 = 500J$, $Q_0 + W = 700J \Rightarrow Q_C = 700J$, quindi prendo $500J$ da T_1 e ne porto $500J$ in T_2).

9.2 Violazione enunciato di Clausius



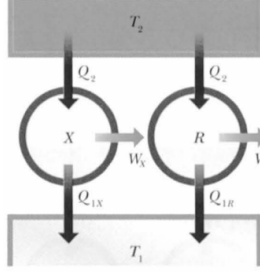
Supponiamo che la macchina frigorifera funzioni senza lavoro esterno e che la macchina termica ceda alla sorgente T_1 , un calore $|Q'| = |Q_0|$.

Questo significa eliminare la sorgente T_1 e quindi realizzare un ciclo in cui si produce lavoro scambiando calore con un'unica sorgente (T_2). Ciò contraddice l'enunciato di Kelvin-Planck.

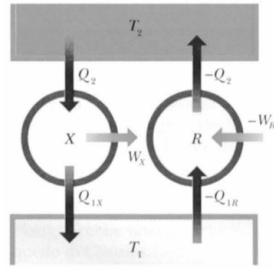
L'unione dei risultati ottenuti costituisce la cosiddetta **equivalenza tra i due enunciati del secondo principio della termodinamica**, nel senso che abbiamo visto che la negazione di uno ha come conseguenza la negazione dell'altro.

9.3 Teorema di Carnot

Il teorema di Carnot è una prima analisi quantitativa sulla percentuale di calore assorbito da una macchina termica che può trasformarsi in calore.



cambiano di segno.



Consideriamo due macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$, dimensionate in modo tale da assorbire lo stesso calore Q_2 . Indichiamo con R la macchina reversibile e con X quella incognita.

I rendimenti delle due macchine sono, data l'ipotesi sul calore assorbito

$$\eta_X = \frac{W_X}{Q_2}, \quad \eta_R = \frac{W_R}{Q_2}.$$

Essendo la macchina R reversibile, possiamo farla operare come macchina frigorifera, e i valori del lavoro e dei calori scambiati

In queste condizioni la sorgente a temperatura T_2 non scambia complessivamente alcun calore. Per l'enunciato di Kelvin-Planck la macchina così realizzata non può produrre lavoro poiché scambia calore con un'unica sorgente (a temperatura T_1). Questo significa che:

$$W_X - W_R \leq 0 \Rightarrow W_X \leq W_R$$

per cui, per i rendimenti, si ha:

$$\eta_X \leq \eta_R. \quad (9.1)$$

Se anche la macchina X fosse reversibile, potremmo far funzionare la macchina X come macchina frigorifera invece che la macchina R . Facendo lo stesso ragionamento arriveremmo a: $\eta_R \leq \eta_X$. Questo è possibile solo se

$$\eta_X = \eta_R. \quad (9.2)$$

In conclusione il teorema di Carnot afferma che

- tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale;
- qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore;
- il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo.

Nel caso del **ciclo di Carnot** il rendimento è

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2},$$

da (9.2) deduciamo che il rendimento del ciclo di Carnot rappresenta il rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sole sorgenti, alle temperature T_1 e T_2 .

Essendo $\eta = W/Q_A$ si ha

$$W_{max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right), \quad (9.3)$$

cioè, a parità di calore assorbito Q_A , la macchina reversibile è quella che fornisce il massimo lavoro possibile.

9.4 Teorema di Clausius

Immaginiamo che una macchina compia un ciclo qualsiasi, scambiando calore con n sorgenti a diverse temperature.

Dal ciclo di Carnot (8.34) abbiamo ottenuto che:

$$\frac{|Q_C|}{T_1} = \frac{Q_A}{T_2} \Rightarrow \frac{|Q_C|}{T_1} + \frac{Q_A}{T_2} = 0.$$

Generalizzando a n sorgenti, si ottiene che

$$\sum_i^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (9.4)$$

dove il segno di uguaglianza è per i **cicli reversibili**.

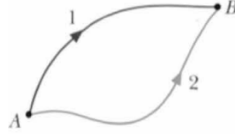
Nel caso in cui la temperature del sistema vari con continuità si avrà

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (9.5)$$

chiamato **integrale di Clausius**, anche in questo caso il segno di uguaglianza è per i cicli reversibili.

9.5 Entropia

Consideriamo due trasformazioni reversibili tra lo stato A e lo stato B.



Immaginiamo di percorrere la trasformazione 2 in senso inverso, abbiamo composto un ciclo reversibile. Dall'integrale di Clausius (9.5)

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2.$$

Pertanto si ottiene

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2.$$

Possiamo concludere che il valore dell'integrale è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo, ma solamente dagli stati termodinamici iniziale e finale.

Possiamo quindi porre l'integrale eguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema. Di conseguenza definiamo una funzione S tale che

$$S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}}. \quad (9.6)$$

La **funzione di stato** così introdotta è detta **entropia**.

Se fissiamo uno stato di riferimento O la cui entropia vale S_O , la variazione di entropia nel passaggio da O a uno stato qualsiasi P è

$$S_P - S_O = \int_O^P \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} \Rightarrow S_P = S_O + \int_O^P \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}}$$

L'entropia è una quantità additiva. Dati due sistemi di entropia S_1 e S_2 , l'entropia complessiva è data da $S = S_1 + S_2$. Risulta anche che se si aumenta la massa di un sistema, l'entropia aumenta in proporzione. L'entropia quindi ha le caratteristiche di una **grandezza estensiva**.

Supponiamo ora di avere una trasformazione **irreversibile** che collega lo stato A allo stato B e di voler calcolare la variazione di entropia del sistema. Finora sappiamo che

- l'entropia degli stati iniziale e finale è certamente definibile, a partire ad esempio da un certo stato di riferimento;
- conseguentemente è definibile la variazione $S_B - S_A$;
- la variazione $S_B - S_A$ non dipende dal tipo di trasformazione che collega A e B , ma solo dalle coordinate termodinamiche di A e B , in quanto l'entropia è una funzione di stato.

Quindi

per **calcolare la variazione di entropia in una trasformazione irreversibile** da A a B è necessario scegliere una qualsiasi altra trasformazione reversibile che colleghi A a B e applicare la (9.6) (grazie al fatto che è una funzione di stato).

Dei risultati sull'entropia:

- se abbiamo una trasformazione **isoterma reversibile**

$$\Delta S = \frac{Q}{T};$$

- se abbiamo una trasformazione **adibatica reversibile**

$$\Delta S = 0;$$

- se abbiamo una trasformazione **isoterma ciclica**

$$\Delta S = 0.$$

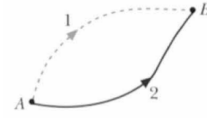
Quindi, **una trasformazione adiabatica reversibile è isoentropica**, lungo di essa l'entropia del sistema non varia.

Inoltre è evidente che per qualsiasi trasformazione ciclica la variazione di entropia è zero, essendo l'entropia una funzione di stato.

9.6 Principio di aumento dell'entropia

Consideriamo un ciclo tale che una trasformazione sia irreversibile ottenendo così un ciclo irreversibile. Il teorema di Clausius dice:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \\ = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} < 0.$$



L'ultimo integrale dà la variazione di entropia e quindi

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}}.$$

cioè

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} < \Delta S_{AB}$$

quindi l'integrale di Clausius calcolato lungo una trasformazione irreversibile è minore della variazione di entropia. Se vogliamo calcolare la variazione di entropia per una data trasformazione irreversibile **dobbiamo servirci di un'altra trasformazione reversibile con lo stesso stato iniziale e finale.**

In termini infinitesimi si scrive

$$dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} > \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}}. \quad (9.7)$$

Se il sistema che descrive la trasformazione AB non scambia calore, si ha $dQ = 0$ e quindi

$$S_B - S_A \geq S_A. \quad (9.8)$$

La (9.8) esprime il **principio di aumento dell'entropia**:

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa **aumenta se la trasformazione è irreversibile**, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.

La sua formulazione infinitesima

$$dS \geq 0 \quad \text{sistema isolato} \quad (9.9)$$

rappresenta una **formulazione matematica del secondo principio della termodinamica**.

Un sistema isolato si ottiene quando si considera un sistema propriamente detto e il suo ambiente, cioè un universo termodinamico. Per l'**universo termodinamico**

$$\Delta S_u \geq 0 \quad \text{con} \quad \Delta S_u = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}}.$$

Se l'universo compie una trasformazione reversibile:

$$\Delta S_u = 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{sist}} = -\Delta S_{\text{amb}},$$

se compie una trasformazione irreversibile:

$$\Delta S_u > 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{sist}} \neq -\Delta S_{\text{amb}}.$$

In particolare, sappiamo che se la trasformazione è ciclica $\Delta S_{\text{sist}} = 0$, allora

- se il ciclo è **reversibile**

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} = 0;$$

- se il ciclo è **irreversibile**

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} > 0.$$

9.7 Calcoli di variazione di entropia di un gas ideale

Consideriamo n moli di gas ideale ⁷ che passano dallo stato A allo stato B . Il calore scambiato nella trasformazione si esprime attraverso il primo principio:

$$dQ = nc_V dT + dW.$$

Per il calcolo della variazione di entropia dobbiamo utilizzare una trasformazione AB reversibile e questo ci permette di usare le relazioni:

$$dW = p dV, \quad pV = nRT \Rightarrow dW = nRT \frac{dV}{V}.$$

Pertanto

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_A^B nc_V \frac{dT}{T} + \int_A^B nR \frac{dV}{V}.$$

Integrando si trova

$$S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad (9.10)$$

e tramite l'equazione di stato e la relazione di Mayer si trova

$$S_B - S_A = nc_V \ln \frac{p_B}{p_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad (9.11)$$

$$S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{p_B}{p_A}. \quad (9.12)$$

Dati gli stati iniziale e finale, la variazione di entropia di un gas ideale si può dunque scrivere utilizzando una qualsiasi delle espressioni viste.

Dalle espressioni generali ricaviamo in particolare:

- trasformazione **isoterma**:

$$S_B - S_A = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -nR \ln \frac{p_B}{p_A}; \quad (9.13)$$

- trasformazione **isocora**:

$$S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_V \ln \frac{p_B}{p_A}; \quad (9.14)$$

- trasformazione **isobara**:

$$S_B - S_A = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_p \ln \frac{V_B}{V_A}. \quad (9.15)$$

⁷per corpi solidi o liquidi pag. 355 Mazzoldi

9.7.1 Trasformazioni adiabatiche

Una trasformazione adiabatica reversibile si dice isoentropica, $\Delta S = 0$.

Le trasformazioni adiabatiche irreversibili non possono essere sostituite da trasformazioni adiabatiche reversibili, come si fa nelle altre trasformazioni, per il calcolo dell'entropia. Gli stati A e B di una adiabatica reversibile non possono coincidere con quelli di una irreversibile (es.: un'espansione libera che è anche isoterma). In questi casi si ricorre alle relazioni generali viste in precedenza.

9.7.2 Trasformazioni cicliche

In un ciclo la variazione di entropia dell'universo ΔS_u equivale alla somma delle variazioni di entropia dell'ambiente di ogni trasformazione poiché la variazione di entropia del sistema in un ciclo è nulla, cioè $\Delta S_{\text{sist}} = 0$.

9.8 Scambio di calore

Lo scambio di calore tra corpi in cui il sistema è isolato è una trasformazione irreversibile. Per calcolare la variazione di entropia immaginiamo che la trasformazione avvenga attraverso scambi infinitesimi di calore, quindi

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \int_{T_1}^{T_e} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_e} m_1 c_1 \frac{dT}{T} = m_1 c_1 \ln \frac{T_e}{T_1} > 0, \quad T_e > T_1; \\ \Delta S_2 &= \int_{T_2}^{T_e} \frac{dQ}{T} = \int_{T_2}^{T_e} m_2 c_2 \frac{dT}{T} = m_2 c_2 \ln \frac{T_e}{T_2} < 0, \quad T_2 > T_e.\end{aligned}$$

Quindi $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$.

9.8.1 Cambiamenti di fase

I cambiamenti di fase sono processi isotermi e quindi

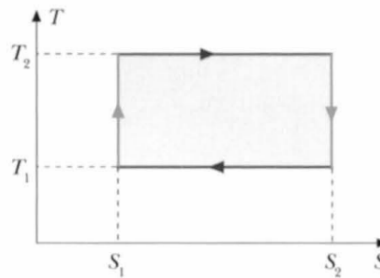
$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda}{T}.$$

9.8.2 Diagramma TS

L'entropia può essere scelta come una variabile indipendente per descrivere lo stato termodinamico di un sistema. Spesso viene scelta la coppia TS . Il calore scambiato dal sistema che descrive la trasformazione è

$$dQ_{\text{rev}} = T dS \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{rev}} = \int_A^B T dS, \quad (9.16)$$

Per un ciclo reversibile, per esempio il ciclo di Carnot, l'area del ciclo rappresenta Q e le isoterme e le adiabatiche sono linee orizzontali e verticali.



9.9 Pressione

Prima di passare alla definizione di pressione, richiamiamo quella di **densità**. La densità si definisce come il rapporto tra la massa e il volume

$$\rho = \frac{m}{V}$$

da cui

$$\begin{aligned} m &= \rho V; \\ V &= \frac{m}{\rho}. \end{aligned}$$

L'unità di misura della densità è il chilogrammo al metro cubo (Kg/m^3). Nonostante questo viene spesso espressa in grammi al centimetro cubo (g/cm^3) e la relazione di conversione è

$$1 \frac{g}{cm^3} = 1000 \frac{Kg}{m^3}.$$

Per definire la **pressione** si considera la forza che essa esercita su una data superficie S . La pressione è data dal rapporto tra il modulo della forza agente perpendicolarmente F_{\perp} e l'area della superficie:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}. \quad (9.17)$$

L'unità di misura della pressione è il Newton al metro quadro (N/m^2). Tale unità di misura prende il nome di **Pascal**.

Dalla precedente definizione è immediato ricavare le formule inverse della pressione

$$\begin{aligned} S &= \frac{F_{\perp}}{p} \\ F_{\perp} &= pS. \end{aligned}$$