Contributeurs

ACT-1002 Analyse probabiliste des risques actuariels

aut. Alec James van Rassel
aut., cre. Nicolas Chevrette
aut., cre. Félix Cournoyer
src. Hélène Cossette

1 Analyse combinatoire

1.1 Outils d'analyse combinatoire

Principe de base de comptage

Pour une expérience 1 avec m résultats possibles et une expérience 2 avec n résultats possibles, il y a $m * n$ résultats possibles pour les deux expériences ensemble. Ce résultat peut être généralisé pour r expériences, où il y aurait $n_1 * n_2 * ... * n_r$ possibilités.

Permutations

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments **distincts** (**donc qu'on s'intéresse à l'ordre de ces éléments**), le nombre total de possibilités est représenté par $n!$.

Lorsqu'on s'intéresse au nombre d'arrangements possibles de n éléments de k types différents dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, ..., n_k sont identiques (**donc qu'on s'intéresse à l'ordre de ces éléments**), le nombre total de possibilités est représenté par :

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_k!}.$$

Combinaisons

Lorsqu'on s'intéresse au nombre de groupe possibles de k éléments parmi n (**donc qu'on ne s'intéresse pas à l'ordre de ces éléments**), le nombre total de possibilités est représenté par $\binom{n}{k}$.

Notation

Dans l'exemple précédent, on peut observer la notation propre au coefficient binomial. Ce dernier peut être réécrit de la façon suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Exemples classiques sur les permutations et les combinaisons

1. **Combien de façons différentes peut-on placer** 4 **livres distincts sur une étagère ?** C'est une permutation entre 4 éléments. La réponse est 4!.

2. **Combien d'arrangements ordonnés différents peut-on faire avec les lettres du mot LAVAL ?**

   C'est une permutation d'un ensemble qui contient deux paires d'éléments semblables. Donc, la réponse est $\frac{5!}{2!2!1!}$.

3. **Combien de façons différentes peut-on distribuer 12 cadeaux différents à 4 personnes ?**

   Attention ! Ici, il faut bien voir que, pour chaque cadeau, il y a 4 possibilités (et **non** qu'il y a 12 possibilités pour chaque personne !). Donc, la réponse est 4^{12}.

   Dans ce numéro, il faut aussi faire attention au fait qu'on précise que les cadeaux sont distincts (donc qu'on différencie les cadeaux). Si ce n'était pas le cas, il s'agirait d'un numéro sur des éléments indissociables.

4. **Combien de groupes différents de 2 jouets peut-on faire avec 6 jouets ?** La réponse est $\binom{6}{2}$.

Coefficient multinomial

La généralisation du coefficient binomial va comme suit :

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * ... * k_m!}$$

où $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$. Cette formule est utile si on veut séparer des éléments entre plusieurs groupes.

Coefficient multinomial (suite)

Par exemple, si on a 10 jouets à séparer entre 3 enfants, et que le premier en veut 5, le deuxième en veut 2, et le troisième en veut 3, le nombre de possibilités est donné par $\binom{10}{5,2,3}$.

Si, cette fois-ci, on différencie les groupes, et qu'on ne sait pas quel groupe aura quel nombre d'objets, il faut multiplier le coefficient multinomial de la façon suivante :

$$coefficient\ multinomial * \frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_n!}$$

où n correspond au nombre total de groupes et n_i correspond au nombre de groupes dans lesquels i éléments ont été placés.

Par exemple, si cette fois-ci on dit qu'il faut séparer 10 jouets à travers 3 enfants en donnant 3 jouets à 2 enfants et 4 jouets à l'autre enfant, sans spécifier quel enfant recevra 4 jouets, le résultat sera :

$$\binom{10}{3,3,4} * \frac{3!}{1!2!}.$$

Théorème binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Théorème multinomial

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$$

1.2 Nombre de solutions entières

Nombre de solutions entières

Dans certains cas, on s'intéressera au nombre de façons qu'on peut distribuer des éléments **indissociables** dans des contenants. Ainsi, c'est le nombre d'éléments dans chaque contenant qui nous intéressent, et non quel élément va dans quel contenant.

Nombre de solutions entières (suite)

On peut ramener ce problème à une équation de la forme suivante :

$$k_1 + k_2 + ... + k_r = n$$

où k_i correspond au nombre d'éléments dans le contenant i et n le nombre d'éléments à placer dans les contenants. On essaie donc de trouver le nombre de combinaisons possibles de k_1, k_2, ..., k_r. Voici une façon de résoudre les problèmes reliés aux nombres de solutions entières :

- S'il faut placer au moins un élément dans chaque contenant (donc $k_i \geq 1$ pour tout i), on peut appliquer la formule : $\binom{n-1}{k-1}$.
- S'il n'y a pas de contraintes en lien avec le nombre d'éléments à placer (donc $k_i \geq 0$ pour tout i), on peut appliquer la formule : $\binom{n+k-1}{k-1}$.
- Si on mentionne dans l'énoncé qu'on peut ne pas distribuer tous les éléments, on rajoute un contenant de plus à l'équation, qui comprend tous les éléments non distribués (le nombre d'éléments dans ce contenant sera plus grand ou égal à 0).
- S'il y a une contrainte supérieure, on fait le problème sans tenir compte de cette contrainte, et on enlève le nombre de cas ne respectant pas la contrainte une fois le problème fait.
- Si la contrainte inférieure varie d'un contenant à un autre, ou si elle est supérieure à 2, on applique la stratégie suivante.

Exemple : il y a 10 balles à placer dans trois urnes. La première urne n'a aucune contrainte, la deuxième urne doit contenir au minimum 1 balle et la troisième urne doit contenir au minimum 3 balles. On obtient l'équation ci-dessous :

$$k_1 + k_2 + k_3 = 10.$$

Ici, on va poser $y_1 = k_1 + 1$, $y_2 = k_2$ et $y_3 = k_3 - 2$ afin que $y_i \geq 1$ pour tout i. On réécrit l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$y_1 - 1 + y_2 + y_3 + 2 = 10$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 9.$$

On peut par la suite calculer le nombre de possibilités en utilisant la formule lorsque le nombre d'éléments dans chaque contenant doit être plus grand ou égal à 1 : $\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2}$ possibilités.

2 Axiomes de probabilité

2.1 Définitions importantes

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est un processus où on ne peut pas prédire avec certitude le résultat.

Espace échantillonnal

L'espace échantillonnal est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On dénote cet espace par Ω ou S.

Événement

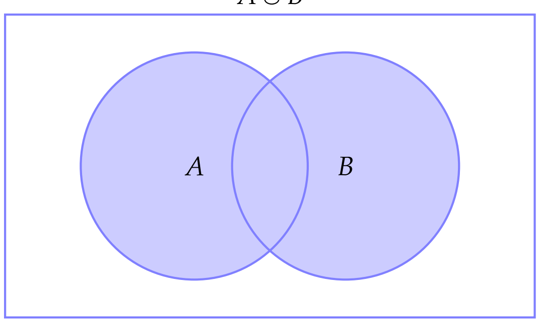
Un événement est un sous-ensemble d'un espace échantillonnal. On dénote l'événement par une lettre majuscule A, B, C, etc.

2.2 Opérations sur les ensembles

L'union ($\cup$) : On peut le voir comme un « ou ». Lorsqu'il est utilisé, on s'intéresse à savoir si un résultat est présent dans au moins un des ensembles impliqués.

- Si l'événement A est d'avoir 3 sur un dé et l'événement B est d'avoir 4 sur ce même dé, les résultats possibles de $A \cup B$ sont 3 et 4.

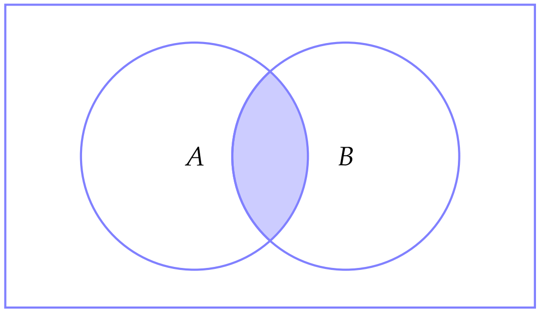
$A \cup B$



L'intersection ($\cap$) : On peut le voir comme un « et ». Lorsqu'il est utilisé, on s'intéresse à savoir si un résultat est présent dans tous les ensembles impliqués.

- Si l'événement A est d'avoir un chiffre pair sur un dé et que l'événement B est d'avoir 5 ou 6 sur ce même lancer de dé, le seul résultat possible de $A \cap B$ est 6, car 6 est un nombre pair et fait partie de l'ensemble B.
- Une notation alternative est de simplement écrire AB.

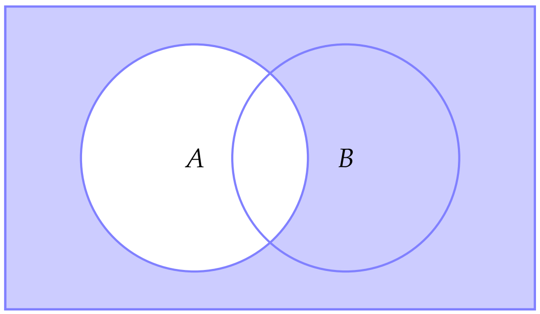
$A \cap B$



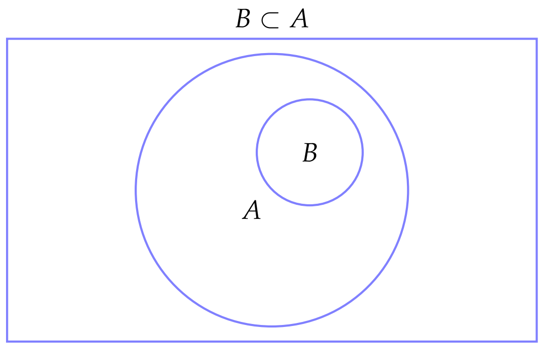
Complémentaire : Un événement A^c est le complémentaire d'un événement A lorsqu'il correspond à tous les résultats de Ω excluant les résultats de A.

- Un exemple est l'événement « Avoir un nombre pair sur un dé » ; un événement complémentaire serait donc « Avoir un nombre impair sur un dé ».
- Le complémentaire d'un événement A est désigné par $\overline{A}$, A^c et A'.

A^c



Inclusion ($\subset$) : Afin de dire que l'événement B est compris dans l'événement A, on peut écrire le tout avec la notation suivante : $B \subset A$. On peut donc dire que tous les résultats de l'événement B se retrouvent aussi dans l'événement A.



Événements mutuellement exclusifs

Deux événements A et B sont dits mutuellement exclusifs lorsque l'intersection entre les deux événements est vide ($A \cap B = \emptyset$). C'est donc dire que $\Pr(A \cap B) = 0$. Autrement dit, les évènements n'ont aucun résultat en commun.

Propriétés des ensembles

Commutativité :

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$$
$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$$

Associativité :

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$
$$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$$

Distributivité :

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$$
$$(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$$

Loi de DeMorgan :

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)$$
$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c)$$

2.3 Axiomes de probabilité

Axiomes de probabilité

Supposons que, pour chaque événement A_i de Ω (espace échantillonnal d'une expérience aléatoire), il existe un nombre $\Pr(A_i)$. On peut appeler ce nombre la probabilité de A_i si celle-ci satisfait les axiomes ci-dessous. Autrement dit, ces axiomes sont des règles que les probabilités se doivent de respecter :

1) $0 \leq \Pr(A_i) \leq 1$

2) $\Pr(\Omega) = 1$

3) Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ (**mutuellement exclusifs**), alors

$$\Pr(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$$

Relations à savoir

1) $\Pr(\emptyset) = 0$

2) $\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$

3) Si $E \subset F$, alors $\Pr(E) \leq \Pr(F)$

4) (Formule de Poincaré)

$$\begin{aligned}\Pr(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = &\sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \Pr(E_{i_1} E_{i_2}) + ... + \\ &(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r} \Pr(E_{i_1} E_{i_2} ... E_{i_r}) + ... + \\ &(-1)^{n+1} \Pr(E_1 E_2 ... E_n)\end{aligned}$$

› À deux événements, on obtient :

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

› À trois événements, on obtient :

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B \cup C) = &\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \\ &\Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \\ &\Pr(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

D'autres relations peuvent être déduites à l'aide d'un diagramme de Venn. Il faut toutefois utiliser la notation probabiliste à travers les calculs. Un diagramme de Venn avec de simples calculs **ne suffit pas** en examen.

2.4 Résultats équiprobables

Résultats équiprobables

Si chaque résultat de Ω a la même chance de se réaliser, on peut trouver la probabilité qu'un événement A se réalise à l'aide de la formule suivante :

$$\Pr(A) = \frac{\textit{Nombre de résultats dans } A}{\textit{Nombre de résultats dans } \Omega}$$

Par exemple, si on cherche la probabilité d'obtenir un nombre pair au cours d'un lancer de dé, on peut utiliser la formule ci-dessus, car il y a autant de chances d'obtenir chacun des côtés d'un dé au cours d'un lancer. Ainsi, Pr(Obtenir un nombre pair) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Notation

Notation

On utilise la notation suivante afin de désigner la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé : $\Pr(A|B)$.

3.2 Relations à savoir

Relations à savoir

1) On obtient tout d'abord :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

2) On peut calculer $\Pr(A \cap B)$ des deux façons suivantes :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) * \Pr(B)$$
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) * \Pr(A)$$

On peut également généraliser ce résultat pour n événements en utilisant la règle de multiplication :

$$\Pr(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = \Pr(E_1) * \Pr(E_2|E_1 \cap E_2) * ... * \Pr(E_n|E_1 \cap E_2 ... \cap E_{n-1})$$

3) On peut réécrire l'équation du point 1 de la façon suivante (à l'aide du point 2) :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

4) (Loi des probabilités totales)

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)$$

Pour pouvoir appliquer cette relation, il faut que F_i forment une partition de Ω, c'est-à-dire que $\Pr(F_1) + \Pr(F_2) + ... + \Pr(F_n) = 1$ et qu'il n'y ait aucun résultat en commun pour aucune paire de F_i (donc que $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour toutes paires de i et j).

Relations à savoir (suite)

5) (Théorème de Bayes) Si on reprend la formule du point 3, et qu'on applique la loi des probabilités totales au dénominateur, on obtient la formule de Bayes.

$$\begin{aligned}\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{Pr(B|A) * \Pr(A)}{Pr(B|A) * \Pr(A) + \Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}\end{aligned}$$

On peut également généraliser ce résultat pour un ensemble d'événements $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ qui forment une partition de Ω.

$$\Pr(F_j|E) = \frac{\Pr(E|F_j)\Pr(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E|F_i)\Pr(F_i)}$$

Indépendance

S'il y a indépendance entre les événements (A n'a aucun impact sur B, et vice-versa), les relations suivantes sont vraies :

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

On peut également généraliser ces relations lorsqu'il y a plusieurs événements mutuellement indépendants.

Assurez-vous de bien distinguer les événements indépendants des événements mutuellement exclusifs ($\Pr(A \cap B) = 0$ pour les événements mutuellement exclusifs).

Démarche afin de répondre aux questions contextuelles du chapitre 2 et 3

Concernant les questions contextuelles (donc avec une mise en situation) portant sur les notions du chapitre 2 et chapitre 3, voici une démarche qui devrait vous aider.

Exemple : il y a deux types d'assurés. Il y a les bons assurés et les mauvais assurés. La probabilité qu'un bon assuré ait au moins 1 accident cette année est de 20 %. La probabilité qu'un mauvais assuré n'ait pas d'accident cette année est de 70 %. Également, il y a 3 fois plus de bons assurés que de mauvais assurés. **Quelle est la probabilité que, sachant qu'un assuré a eu au moins un accident au cours de l'année, celui-ci soit un mauvais assuré ?**

1) Il faut bien définir les événements.

A : L'assuré est un bon assuré.
B : L'assuré a au moins 1 accident au cours de l'année.

2) Il faut bien définir les informations présentes dans le texte sous notation probabiliste. La notation doit être cohérente avec la définition des événements.

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= 3\Pr(A^c) \\ \Pr(B|A) &= 0.2 \\ \Pr(B^c|A^c) &= 0.7 \end{aligned}$$

3) Il faut bien définir l'information recherchée sous notation probabiliste. Encore une fois cette notation doit être cohérente avec la définition des événements.

On cherche $\Pr(A^c|B)$.

4) Selon les informations données, on applique une ou plusieurs des relations présentées dans le chapitre 2 ou dans le chapitre 3. Cette partie est la plus difficile, et c'est à force de faire des numéros qu'on reconnait quelles relations utiliser.

Dans ce cas-ci, on peut développer la probabilité recherchée de la façon suivante :

$$\Pr(A^c|B) = \frac{\Pr(A^c \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Puisqu'on n'a aucune information sur $\Pr(A^c \cap B)$ et sur $\Pr(B)$, on développe cette formule davantage (on obtient le théorème de Bayes) :

$$\frac{\Pr(A^c \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}{Pr(B|A) * \Pr(A) + \Pr(B|A^c) * \Pr(A^c)}.$$

Ici, on peut trouver $\Pr(A)$, $\Pr(A^c)$ et $\Pr(B|A^c)$ à l'aide de la relation qui relie les probabilités d'événements complémentaires et des informations données dans l'exemple.

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= 1 - \Pr(A^c) \\ 3\Pr(A^c) &= 1 - \Pr(A^c) \\ \Pr(A^c) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et donc, $\Pr(A^c) = \frac{1}{4}$ et $\Pr(A) = \frac{3}{4}$. Pour trouver $\Pr(B|A^c)$:

$$\Pr(B|A^c) = 1 - \Pr(B^c|A^c) = 0.3.$$

En remplaçant ces valeurs dans la formule de Bayes (et en utilisant $\Pr(B|A) = 0.2$, soit une information qui nous était déjà fournie), on obtient

$$\Pr(A^c|B) = \frac{1}{3}.$$

3.3 Montrer l'indépendance

Montrer l'indépendance

Si on veut montrer que deux événements (A et B) sont indépendants, on veut montrer la relation suivante :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

On veut montrer que les deux côtés de l'égalité sont égaux. Faites attention à la façon dont vous calculez $\Pr(A \cap B)$. Il ne faut pas calculer ce terme en faisant $\Pr(A) * \Pr(B)$. Il faut absolument dénombrer les résultats se situant dans $A \cap B$.

Si on veut montrer que trois événements (A, B et C) sont mutuellement indépendants, on veut montrer les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Pr(A \cap B) &= \Pr(A) * \Pr(B) \\ \Pr(A \cap C) &= \Pr(A) * \Pr(C) \\ \Pr(B \cap C) &= \Pr(B) * \Pr(C) \\ \Pr(A \cap B \cap C) &= \Pr(A) * \Pr(B) * \Pr(C). \end{aligned}$$

4 Variable aléatoire discrète

4.1 Variable aléatoire

Variable aléatoire

Une variable aléatoire X est une fonction qui associe une nombre réel $X(E)$ à un évènement E de l'espace échantillonnal. Autrement dit, une variable aléatoire est le résultat (exprimé sous forme de nombre réel) d'un événement aléatoire.

Support d'une variable aléatoire

Le support d'une variable aléatoire est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire. Le support peut être discret, continu ou mixte. **Pour les exercices du chapitre 4 et du chapitre 5, assurez-vous de déterminer tout d'abord si vous êtes dans un contexte discret ou dans un contexte continu (les cas mixtes seront vus plus en détail dans des cours ultérieurs)**.

4.2 Définitions importantes

Support discret

Le support d'une variable aléatoire est dit discret lorsque que les valeurs que la variable peut prendre sont dénombrables.

4.3 Fonction de masse de probabilité, de répartition et quantile

Fonction de masse de probabilité

Pour chaque valeur x du support, on associe une probabilité qui correspond aux chances que la variable aléatoire prenne cette valeur x en question. La notation pour la fonction de masse est la suivante : $\Pr(X = x)$.

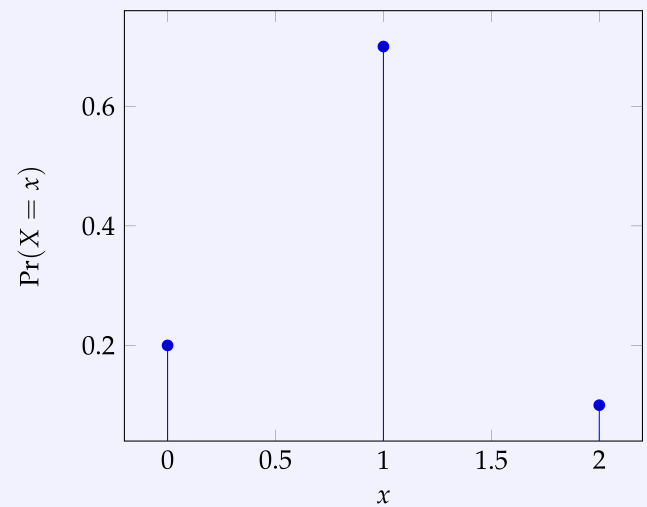
La somme des probabilités associées aux différentes valeurs du support donne nécessairement 1 :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X = x_i) = 1$$

Un graphique de la fonction de masse est un graphique en bâtons (ou avec des points). Par exemple, soit la fonction de masse de probabilité définie de la façon suivante :

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.2, & x = 0 \\ 0.7, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \end{cases}$$

Un graphique approprié serait le suivant.



Fonction de répartition

Pour chaque valeur x du support, on associe une probabilité qui correspond aux chances que la variable aléatoire prenne une valeur plus petite ou inférieure à la valeur x en question. La notation pour la fonction de répartition est la suivante : $P(X \leq x)$ ou $F_X(x)$.

Propriétés de la fonction de répatition

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

3) $F_X(x)$ est une fonction non-décroissante, c'est-à-dire que si a < b, alors $F_X(a) \leq F_X(b)$

4) $\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Pour la dernière propriété, dans le cas discret, faites bien attention au signe d'égalité.

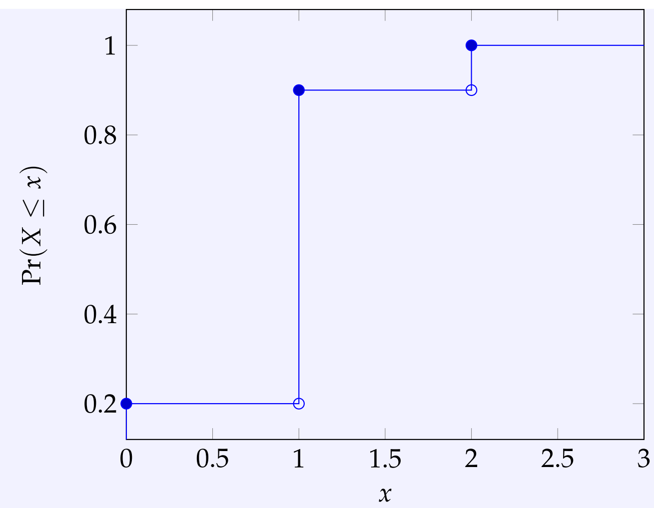
Afin de trouver la fonction de répartition à partir de la fonction de masse, on utilise le lien suivant : $\Pr(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \Pr(X = x_i)$.

Afin de trouver la fonction de masse à partir de la fonction de répartition, on utilise le lien suivant : $\Pr(X = x) = \Pr(X \leq x) - \Pr(X \leq x - 1)$.

Un graphique de la fonction de répartition est un graphique en escalier avec des points dans l'ordre fermé-ouvert (donc continue à droite). Le signe d'égalité correspond au point fermé. Par exemple, soit la fonction de répartition suivante (issue de la fonction de masse définie précédemment) :

$$\Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.9, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

Un graphique approprié serait le suivant.



On peut remarquer, entre autres, que la courbe continue à droite de $x = 2$.

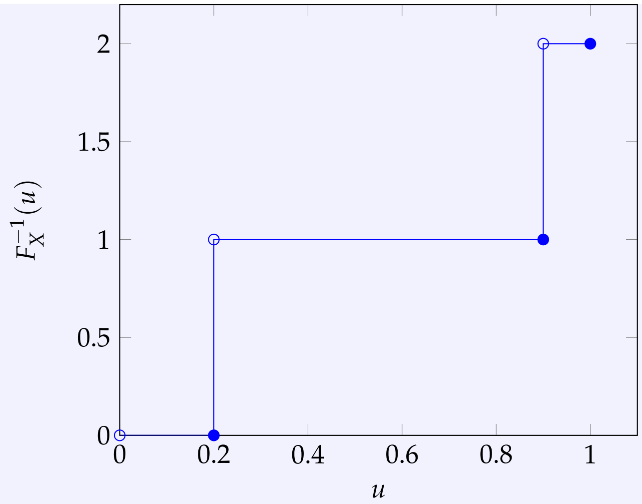
Fonction de répartition inverse (quantile)

Le nom l'indique, la fonction de répartition inverse est la fonction inverse de la fonction de répartition. Afin de trouver la valeur x associée à une probabilité u, il faut se demander **quelle est la plus valeur x qui assure une probabilité cumulative (fonction de répartition) plus grande ou égale que** u**.** La notation pour la fonction de répartition inverse est la suivante : $F_X^{-1}(u)$.

La médiane est la fonction de répartition inverse évaluée à $u = 0.5$.
Un graphique de la fonction de répartition inverse est un graphique en escalier avec des points dans l'ordre ouvert-fermé (donc continue à gauche). Le signe d'égalité correspond au point fermé. Par exemple, soit la fonction de répartition inverse suivante (issue de la fonction de répartition définie précédemment) :

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & 0 < u \leq 0.2 \\ 1, & 0.2 < u \leq 0.9 \\ 2, & 0.9 < u \leq 1 \end{cases}$$

Un graphique approprié serait le suivant.



On peut remarquer, entre autres, que la courbe s'arrête à $u = 1$.

Ce graphique est parfois difficile à dessiner. Je vous invite à trouver tout d'abord la fonction de répartition (si cette information n'est pas déjà disponible), à ensuite définir la fonction de répartition inverse (en vous disant quelle est la plus petite valeur de x qui assure une probabilité plus grande ou égale à u) et à ensuite dessiner le graphique en vous basant sur la fonction de répartition inverse que vous avez définie.

4.4 Fonction d'une variable aléatoire

Fonction d'une variable aléatoire

Lorsqu'on cherche de l'information (à l'exception des moments) sur une variable alétoire de Y qui correspond à une fonction de X, il faut absolument trouver en premier la fonction de masse de Y. **Dans le cas discret**, on trouve la valeur de y qui correspond à chaque valeur de x et on vient regrouper les probabilités ensemble au besoin.

Par exemple, soit $Y = X^2$ et la fonction de masse de X définit de la façon suivante :

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = -1 \\ 0.7, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1 \end{cases}$$

La fonction de masse de Y serait :

$$P(Y = y) = \begin{cases} 0.7, & y = 0 \\ 0.1 + 0.2 = 0.3, & y = 1 \end{cases}$$

Pour tout ce qui est lié au moment (variance, espérance, FGM, etc.), on n'est pas obligé de trouver la fonction de masse de Y. Par exemple, si on s'intéresse à l'espérance de Y, on pourrait réécrire $E[Y]$ comme $E[X^2]$ et ensuite utiliser directement la fonction de masse de X.

4.5 Moments d'une variable aléatoire

Espérance

On peut voir l'espérance comme une moyenne pondérée des valeurs que X peut prendre. La pondération est la probabilitée associée à chaque valeur que X peut prendre.

La notation utilisée pour l'espérance est $E[X]$. L'espérance est définie sous forme mathématique de la façon suivante :

$$E[X] = \sum_i x_i \Pr(X = x_i).$$

De façon plus générale, on peut appliquer le même principe lorsqu'on cherche l'espérance d'une fonction de X (Puissance de X, fonction indicatrice, fonction tronquée, etc.). On aura pour une fonction $g(X)$:

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \Pr(X = x_i)$$

Propriétés de l'espérance

1) Soit c une constante. Alors, $E[c] = c$.

2) Soit g une fonction dans $\mathbb{R}$. Alors, $E[cg(X)] = cE[g(X)]$.

3) Soit g et h deux fonctions dans $\mathbb{R}$. Alors, $E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$.

4) Si $g(x) \leq h(x), \forall x$, alors $E[g(X)] \leq E[h(X)]$.

Par exemple, $E[2X + 3X^2 + 4] = 2E[X] + 3E[X^2] + 4$. Je vous conseille de simplifier toujours l'expression recherchée de cette façon avant de passer par les définitions.

Une autre façon de calculer l'espérance $E[X]$, lorsqu'on connait la fonction de répartition et qu'on sait que la variable ne prend pas de valeurs négatives, est la suivante :

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} \Pr(X > x) = \sum_{x=0}^{\infty} (1 - F_X(x))$$

Ci-dessous se trouvent des exemples d'espérance utilisés en assurance, ainsi qu'une courte description décrivant l'utilisation de chacune de ces espérances. Ces espérances seront vues plus en détail dans le cours d'IARD 1. L'important pour le cours de probabilité, **c'est de pouvoir calculer les espérances qui seront souvent déjà données sous forme de notation. Portez donc attention à chaque étape du calcul** Les mises en situation servent donc plus, à court terme, à vous montrer l'utilité derrière chaque type d'espérance.

Il est à noter que, pour ces exemples, on suppose une variable aléatoire discrète qui ne peut pas prendre de valeur négative. C'est donc dire que les paiements dans les exemples décrits ci-dessous peuvent se faire uniquement à l'unité près. Sinon, on relèverait du chapitre 5 qui décrit les cas continus (ce qui est plus courant en pratique pour ce genre de calcul)

Espérance d'une fonction indicatrice

Par exemple, soit une variable indicatrice qui est égale à 1 lorsque $X \leq 3$ et égale à 0 autrement, on aurait (dans ce cas-ci précisément, on suppose que X a un support discret non négatif) :

$$E[1_{x\leq 3}] = \sum_{x=0}^{\infty} 1_{x\leq 3} * \Pr(X = x) = \sum_{x\leq 3} \Pr(X = x) = F_X(3)$$

Espérance tronquée

Par exemple, on suppose que le montant de la perte liée à un sinistre suit une variable aléatoire **discrète** X. Supposons qu'une compagnie d'assurance ne paît que lorsque le sinistre est entre 200$ et 300$ inclusivement. Sinon, la compagnie ne paît pas. On peut espérer que le montant payé par la compagnie d'assurance, **par perte**, soit le montant suivant.

$$E[X * 1_{200\leq X\leq 300}] = \sum_{x=0}^{\infty} x * 1_{200\leq x\leq 300} * \Pr(X = x) = \sum_{200\leq x\leq 300} x * \Pr(X = x)$$

Si on s'intéressait au montant, **par paiement**, on aurait :

$$\begin{aligned} E[X|200 \leq X \leq 300] &= \sum_{x=0}^{\infty} x * \Pr(X = x|200 \leq X \leq 300) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x * \frac{\Pr(X = x \cap 200 \leq X \leq 300)}{\Pr(200 \leq X \leq 300)} \\ &= \sum_{200\leq x\leq 300} \frac{x * \Pr(X = x)}{\Pr(200 \leq X \leq 300)} \end{aligned}$$

En comparant les deux dernières équations, on remarque que :

$$E[X|200 \leq X \leq 300] = \frac{E[X * 1_{200\leq X\leq 300}]}{P(200 \leq X \leq 300)}$$

De façon générale, s'il y a une condition dans l'espérance, tout ce qu'on vient modifier c'est la fonction de masse (ou de densité dans le cas continu) utilisé dans le développement de l'espérance.

Espérance limitée

Par exemple, on suppose que le montant de la perte liée à un sinistre suit une variable aléatoire **discrète** X. Supposons qu'une compagnie d'assurance paît jusqu'à un maximum de 3000$ (limite de 3000 $). On peut espérer que le montant payé par la compagnie d'assurance pour une perte ou pour une réclamation (dans ce cas-ci il n'y aurait pas de différence, puisque la compagnie paiera dans tous les cas) soit le montant suivant.

$$
\begin{aligned}
E[min(X,3000)] &= \sum_{x=0}^{\infty} min(x,3000) * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{3000} min(x,3000) * \Pr(X=x) \\
&+ \sum_{3001}^{\infty} min(x,3000) * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{3000} x * \Pr(X=x) + \sum_{3001}^{\infty} 3000 * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{3000} x * \Pr(X=x) + 3000 \Pr(X>3000) \\
&= \sum_{x=0}^{3000} x * \Pr(X=x) + 3000(1-F_X(3000))
\end{aligned}
$$

Espérance stop-loss

Par exemple, on suppose que le montant de la perte liée à un sinistre suit une variable aléatoire **discrète** X. Supposons que l'assuré doit payer une franchise de 500$. On peut espérer que le montant payé par la compagnie d'assurance **par perte** soit le montant suivant.

$$
\begin{aligned}
E[max(X-500,0)] &= \sum_{x=0}^{\infty} max(X-500,0) * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{500} max(x-500,0) * \Pr(X=x) \\
&+ \sum_{501}^{\infty} max(x-500,0) * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{501}^{\infty} (x-500) * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{501}^{\infty} x * \Pr(X=x) - \sum_{501}^{\infty} 500 * \Pr(X=x) \\
&= \sum_{501}^{\infty} x * \Pr(X=x) - 500 \Pr(X>500) \\
&= \sum_{501}^{\infty} x * \Pr(X=x) + 500(1-F_X(500))
\end{aligned}
$$

Si on s'intéressait au montant **par paiement**, on aurait (en réutilisant ce qui a été vu au point concernant l'espérance tronquée) :

$$
\begin{aligned}
E[X-500|X>500] &= E[X|X>500] - 500 \\
&= \sum_{x>500} \frac{x * \Pr(X=x)}{\Pr(X>500)} - 500 \\
&= \sum_{x>500} \frac{x * \Pr(X=x)}{1-F_X(500)} - 500
\end{aligned}
$$

Variance

La variance est une mesure de dispersion qui nous renseigne sur la variation d'une variable aléatoire autour de son espérance. Plus la variance est petite, plus on peut s'attendre à ce que le résultat de la variable aléatoire soit autour de l'espérance, et vice-versa.

La notation utilisée pour la variance est $Var(X)$. La définition de la variance la plus pratique à utiliser est la suivante :

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Il faut donc trouver le premier moment ($E[X]$) et le deuxième moment ($E[X^2]$), afin de trouver la variance.

Propriétés de la variance

1) Soit c une constante. Alors, $Var(c) = 0$.

2) Soit a une constante et $g(X)$ une fonction de X. Alors, $Var(ag(X)) = a^2 Var(g(X))$.

Par exemple, $Var(2X+5) = 4Var(X)$. Je vous conseille de simplifier toujours l'expression recherchée de cette façon avant de passer par les définitions.

D'autres propriétés de la variance liées aux covariances seront vues au chapitre 7.

Moments d'ordre n

$$E[X^n] = \sum_i x_i^n \Pr(X=x_i)$$

Moments **centrés** d'ordre n

$$E[(X-E[X])^n] = \sum_i (x_i - E[X])^n \Pr(X = x_i)$$

Moments **réduits** d'ordre n

$$E\left[\left(\frac{X}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$$

Moments **centrés réduits** d'ordre n

$$E\left[\left(\frac{X-E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i-E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i)$$

Le moment centré réduit d'ordre 3 correspond au coefficient d'asymétrie.

Un coefficient d'asymétrie **positif** indique que la courbe est décalée vers la **gauche**. La moyenne est donc **supérieure** à la médiane.

Au contraire, un coefficient d'asymétrie **négatif** indique que la courbe est décalée vers la **droite**. La moyenne est donc **inférieure** à la médiane.

Le moment centré réduit d'ordre 4 correspond au coefficient d'aplatissenent (aussi appelé kurtosis). **Plus le kurtosis est grand, moins la courbe est aplatie, et vice-versa**.

Fonction génératrice des moments

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_i e^{tx_i} \Pr(X = x_i)$$

Afin d'obtenir les différents moments à partir de la fonction :

$$E[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

On peut trouver la FGM à partir de la FGP de la façon suivante :

$$M_X(t) = P_X(e^t)$$

Fonction génératrice des probabilités

$$P_X(t) = E[t^X] = \sum_i t^{x_i} \Pr(X = x_i)$$

On peut trouver les probabilités associées à X à partir de la FGP à l'aide de la formule suivante **(faites attention au k!)** :

$$\frac{d^k}{dt^k} P_X(t)\bigg|_{t=0} = k! * P(X = k)$$

On peut trouver les différents moments factoriels à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{d^k}{dt^k} P_X(t)\bigg|_{t=1} = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

On peut trouver la FGP à partir de la FGM de la façon suivante :

$$P_X(t) = M_X(\ln(t)))$$

En sachant la formule de la FGM pour les différentes lois, on peut utiliser ce lien afin de retrouver la FGP (et donc on peut éviter de mémoriser les FGP des différentes lois de cette façon).

La fonction génératrice des probabilités n'existe que dans les cas discrets.

4.6 Lois connues

Information concernant les lois connues

Les résultats qu'il faut apprendre par coeur se retrouvent à l'annexe à la fin de ce document. Il est important de comprendre que ce n'est pas toutes les lois inscrites qu'il faut apprendre par coeur (il est important de valider avec l'enseignant de ce côté).

Vous devez également comprendre que ces résultats sont des raccourcis. Si vous oubliez une des formules en examen, il est possible (à l'exception des fonctions de masse) de retrouver la formule à l'aide des définitions vues précédemment. Cependant, cela peut prendre un certain temps, et c'est pourquoi il est bien important de savoir par coeur les résultats des différentes lois qu'il faut apprendre.
Voici d'autres points importants :

- Il ne faut pas apprendre par coeur les différentes démonstrations permettant d'obtenir les formules à l'annexe. Cependant, certaines des techniques utilisées au cours de ces démonstrations peuvent être utiles si on vous demande des quantités que vous ne connaissez pas. Par exemple, si on vous dit que X suit une loi Gamma (chapitre 5), et qu'on vous demande le 6e moment d'une loi Gamma ($E[X^6]$), il faudra utiliser une technique vue lors de la démonstration de l'espérance (ou de la FGM) de cette loi (on réfère souvent à cette technique comme une complétion de la loi Gamma)
- Si on vous demande des quantités que vous ne connaissez pas, il faudra passer par les définitions.
- Si on vous demande le deuxième moment ($E[X^2]$), on isole le deuxième moment dans la formule de la variance (puisqu'on connait les formules de l'espérance et de la variance) : $E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2$.
- Il y a deux définitions aux lois géométrique et binomiale négative. Je vous conseille d'être à l'aise avec les formules liées aux deux définitions, ou de bien comprendre le lien qui unit les deux définitions pour chacune des deux lois.
- Les lois géométrique (définition avec le nombre d'essais) et exponentielle (vue au chapitre 5) sont sans-mémoire. C'est donc dire que si X suit une de ces deux lois, $E[X - d|X > d] = E[X]$. De façon générale, on peut donc dire que l'expérience passée n'a aucun impact sur l'expérience futur pour ces lois. Les démonstrations liées à la propriété sans mémoire pour ces deux lois sont importantes à comprendre.

Annexe

A Lois discrètes

Loi	$\Pr(X=x)$	$F_X(x)$	$E[X]$	$Var(X)$	$M_X(t)$	$P_X(t)$
Uniforme	$\begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & x=a,a+1,...,b \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{\lfloor x \rfloor -a+1}{b-a+1}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\frac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)}$	
Bernouilli	$\begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$(1-p)+pe^t$	$(1-p)+pt$
Binomiale	$\begin{cases} \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, & x=0,1,...,n \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, & 0 \leq x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$	np	$np(1-p)$	$((1-p)+pe^t)^n$	$((1-p)+pt)^n$
Poisson	$\begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x=0,1,2,... \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & x \geq 0 \end{cases}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(t-1)}$
Géométrique (**Essais**)	$\begin{cases} p(1-p)^{(x-1)}, & x=1,2,... \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}, & x \geq 1 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$
Binomiale négative (**Essais**)	$\begin{cases} \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{(x-r)}, & x=r,r+1,... \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<r \\ \sum_{k=r}^{\lfloor x \rfloor}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{(k-r)}, & x \geq r \end{cases}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^r$
Géométrique (**Échecs**)	$\begin{cases} p(1-p)^x, & x=0,1,... \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor +1}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{p}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{p}{1-(1-p)t}$
Binomiale négative (**Échecs**)	$\begin{cases} \binom{x+r-1}{r-1}p^r(1-p)^x, & x=0,1,... \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{(k-r)}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)t}\right)^r$
Hypergéo-métrique	$\begin{cases} \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{m}}, & x=0,1,...,min(m,n) \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{m}}, & 0 \leq x < min(m,n) \\ 1, & x \geq min(m,n) \end{cases}$	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm}{N}\left(\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right)$		

B Lois continues

Loi	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$F_X^{-1}(u)$	$E[X]$	$Var(X)$	$M_X(t)$
Uniforme	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$a + (b-a) * u$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$
Normale	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\mu + \sigma\Phi^{-1}(u)$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Lognormale	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), & x > 0 \end{cases}$	$e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(u)}$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$	
Exponentielle	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$	$\frac{-\ln(1-u)}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
Gamma	$\begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\Gamma(\alpha;\lambda x)}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$
Erlang (Gamma où $\alpha \in \mathbb{Z}$)	$\begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}, & x > 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$
Khi-carré	$\begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2};\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0 \end{cases}$		n	$2n$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$
Bêta	$\begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta) x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{B(x;\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha+j}{\alpha+\beta+1}$
Pareto	$\begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, & x > 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha, & x > 0 \end{cases}$	$\lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$	$\frac{\lambda}{\alpha - 1}$	$\frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$	