

# Chapter 4. 부울대수 응용 - 최소항과 최대항 전개

조합논리회로 설계

필요한 회로의 기능에 대한 설명 부터 시작

→ 설명문장을 진리표 아 부울 대수 표현으로 변환 (4-1, 4-2)

(순서) → 부울함수에 대한 진리표로 표준 논리곱의 합 (최소항 전개) 과 표준 논리합의 곱 (최대항 전개) 의 두 개의 표준 대수식을 만들 수 있음 (4-3)

→ 표준식을 간략화하면 AND와 OR 게이트로 이루어진 회로를 구성할 수 있음

## 4-1 설명문장을 부울식으로 변환

tb\_elec\_engineer@naver.com

gm

다음과 같이 작동하는 경보회로를 설계하고자 함

변수할당 →  $Z$  The alarm will ring if the alarm switch is turned on  $A$  and the door is not closed,  $B'$   
 $C$  or it is after 6 P.M.  $C$  and the window is not closed.  $D'$

(경보 스위치가 켜져 있고 현관문이 열려 있거나 오후 6시가 지나서 창문이 열려 있으면 경보가 울린다.)

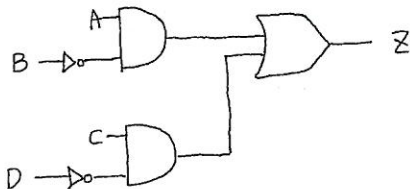
① 문장의 각 구와 부울변수를 연관시킴

참일때 진리값 1, 거짓일 때 진리값 0 을 가진다.

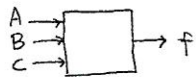
② 부울식으로 변환

$$Z = AB' + CD'$$

③ 회로 설계



## 4-2 설명 문장을 진리표로 변환



압력 A, B, C 는 2진수 N의 첫번째, 두번째, 세번째 비트를 각각 나타낸다.  
이 회로의 출력은  $N \geq 011_2$  이면  $f=1$ ,  $N < 011_2$  이면  $f=0$  이다.

↓ 진리표로 변환

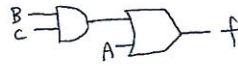
ABC	f	f'
000	0	1
001	0	1
010	0	1
011	1	0
100	1	0
101	1	0
110	1	0
111	1	0

①  $f=1$  인 경우를 대수식으로 표현

⊕  $A=1$ ,  $A'=0$

$$\begin{aligned}
 f &= 011 + 100 + 101 + 110 + 111 \\
 &= A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC \\
 &= A'BC + AB'(C' + C) + AB(C' + C) \\
 &= A'BC + AB' + AB \\
 &= A'BC + A(B' + B) \\
 &= A'BC + A \\
 &= (A + A')(A + BC) \\
 &= A + BC
 \end{aligned}$$

⊕ 회로로 표현



②  $f=0$  인 경우를 대수식으로 표현

⊕  $A=0$ ,  $A'=1$

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{(A+B+C)}{x \ y} \frac{(A+B+C')}{x \ y'} (A+B'+C) \\
 &= \frac{(A+B)}{x \ y} \frac{(A+B'+C)}{x \ z} \\
 &= A + B(B'+C) \\
 &= A + BC
 \end{aligned}$$

3개 모두 같은 결과를 가져옴

③ 논리곱의 합으로  $f'$ 를 구하고 그 결과를 보수화

⊕  $A=1$ ,  $A'=0$

$$\begin{aligned}
 f' &= A'B'C' + A'B'C + A'BC' \\
 f &= [A'B'C' + A'B'C + A'BC']' \\
 &= (A+B+C)(A+B+C')(A+B'+C)
 \end{aligned}$$

## 4-3 최소항과 최대항 전개

1) 최소항이란?  $n$  변수의 최소항은 각 변수가 그대로 아 보스 형태로 한번씩만 나타나는  $n$ 개 문자의 곱

ex) A, B, C 세 개 변수의 최소항

:  $ABC, A'BC, AB'C', AB'C, A'B'C', AB(x), A'C(x)$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 C가 없음 B가 없음 (B나 B' 추가해야함)  
 (C, C' 하나 추가)

세 변수의 최소항과 최대항을 진리표로 표시하기

십진수 값	A B C	최소항	최대항
0	0 0 0	$A'B'C' = m_0$	$A+B+C = M_0$
1	0 0 1	$A'B'C = m_1$	$A+B+C' = M_1$
2	0 1 0	$A'BC' = m_2$	$A+B'+C = M_2$
3	0 1 1	$A'BC = m_3$	$A+B'+C' = M_3$
4	1 0 0	$AB'C' = m_4$	$A'+B+C = M_4$
5	1 0 1	$AB'C = m_5$	$A'+B+C' = M_5$
6	1 1 0	$ABC' = m_6$	$A'+B'+C = M_6$
7	1 1 1	$ABC = m_7$	$A'+B'+C' = M_7$

⊗ 최소항 → 결과값 1이 참 (양논리) → 곱의 형태  
 최대항 → 결과값 0이 참 (음논리) → 합의 형태

최소항 전개 = 표준 논리곱의 합 : 최소항의 합으로 나타낼 수 있을 때

ex)  $f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$

표현방법  $m$ 기호로 나타냄 →  $f(A, B, C) = m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

십진수를 나열 →  $f(A, B, C) = \sum m(3, 4, 5, 6, 7)$   
 합 표시

2) 최대항이란?  $n$  변수의 최대항은 각 변수가 그대로 아 보스 형태로 한번씩만 나타나는  $n$ 개 문자의 곱

최대항 전개 = 표준 논리합의 곱 : 최대항의 곱으로 나타낼 때

ex)  $f = (A+B+C)(A+B+C')(A+B'+C)$

표현방법  $M$ 기호로 나타냄 →  $f(A, B, C) = M_0 M_1 M_2$

십진수를 나열 →  $f(A, B, C) = \prod M(0, 1, 2)$   
 곱 표시

## ④ 최소항, 최대항 전개를 쉽게 구하는 방법

gm

10진수 기호방식에서  $n$  변수 함수  $f$ 의 최소항 전개가 주어지면최대항 전개는 최소항 목록에는 없는 10진 정수 ( $0 \leq i \leq 2^n - 1$ )들을 열거하여 얻을 수 있다.→  $f'$ 에 대한 최소항 전개는  $f$ 에 빠진 최소항들을 포함 $f'$ 에 대한 최대항 전개는  $f$ 에 빠진 최대항들을 포함

$$\text{ex) } f(A, B, C) = m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m(3, 4, 5, 6, 7)$$

$$f' \text{의 최소항 } f' = m_0 + m_1 + m_2 = \sum m(0, 1, 2)$$

$$f(A, B, C) = M_0 M_1 M_2$$

$$\begin{aligned} \text{아) } f' \text{의 최대항 } f' &= M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 = \prod M(3, 4, 5, 6, 7) \\ f' \text{의 최소항의 보수 } f' &= (m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7)' \\ &= m'_3 m'_4 m'_5 m'_6 m'_7 \\ &= M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 \end{aligned}$$

4-4  $F$ 와  $F'$ 의 최소항과 최대항 관계

위 내용과 같음

3변수에 대한 진리표 →

A B C	F
0 0 0	$a_0$
0 0 1	$a_1$
0 1 0	$a_2$
0 1 1	$a_3$
1 0 0	$a_4$
1 0 1	$a_5$
1 1 0	$a_6$
1 1 1	$a_7$

세 변수 함수에 대한 **최소항** 전개

$$F = a_0 m_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_7 m_7 = \sum_{i=0}^7 a_i m_i$$

→  $a_i = 1$  이면 최소항  $m_i$ 는 전개에 포함 $a_i = 0$  이면 최소항에 포함 X세 변수 함수에 대한 **최대항** 전개

$$F = (a_0 + M_0)(a_1 + M_1)(a_2 + M_2) + \dots + (a_7 + M_7) = \prod_{i=0}^7 (a_i + M_i)$$

→  $a_i = 1$  이면  $(a_i + M_i) = 1$  이므로 전개에 포함 X $a_i = 0$  이면  $M_i$ 는 들어간다. $F'$ 의 최대항 전개

$$F' = \left[ \sum_{i=0}^7 a_i m_i \right]' = \prod_{i=0}^7 (a'_i + M_i)$$

→  $F$ 의 최대항에 없는 모든 최대항은  $F'$ 의 최대항에 있다. $F'$ 의 최소항 전개

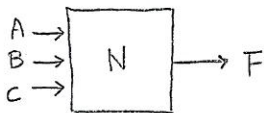
$$F' = \left[ \prod_{i=0}^7 (a_i + M_i) \right]' = \sum_{i=0}^7 a'_i m_i$$

→  $F$ 의 최소항에 없는 모든 최소항은  $F'$ 의 최소항에 있다.

★ F와 F'의 최소항과 최대항 전개 사이의 변환 과정 일반화

구하고자 하는 식 주어진 식	F의 최소항	F의 최대항	F'의 최소항	F'의 최대항
F의 최소항 $f = \sum m(3, 4, 5, 6, 7)$	"	F의 최소항에 없는 항들 $\prod M(0, 1, 2)$	F의 최소항에 없는 항들 $\sum m(0, 1, 2)$	F의 최소항에 있는 같은 번호들 $\prod M(3, 4, 5, 6, 7)$
F의 최대항 $f = \prod M(0, 1, 2)$	F의 최대항에 없는 항들 $\sum m(3, 4, 5, 6, 7)$	"	F의 최대항에 있는 같은 번호들 $\sum m(0, 1, 2)$	F의 최대항에 없는 항들 $\prod M(3, 4, 5, 6, 7)$

#### 4-5 비완전 명세함수, 무관항



N의 출력에서 A, B, C가 001, 110의 값을 갖는 조합이 없다고 가정

A B C	F
0 0 0	1
0 0 1	X
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	X
1 1 1	1

⇒ ABC = 001, 110 조합은 결코 나타나지 않아 F가 어떤 값을 가지더라도 상관없음

함수 F는 비완전 명세화되었다 라고 하며

A'B'C와 ABC' 항들을 무관항 이라고 하며 X로 표시한다

⇒ F를 함수로 실현할 경우 무관항에 값을 설정

- ① 두개 X에 0 할당
- ② 처음 X에 1, 두 번째 X에 0 할당
- ③ 처음 X에 0, 두 번째 X에 1 할당
- ④ 두개 X에 1 할당

가장 간략한 결과를 선택!

⇒ 비완전 명세함수에 대한 최소항 전개

$$F = \sum m(0, 3, 7) + \sum \underbrace{d(1, 6)}_{\text{최소항을 전개할 때 무관항 표시하는 방법}}$$

비완전 명세함수에 대한 최대항 전개

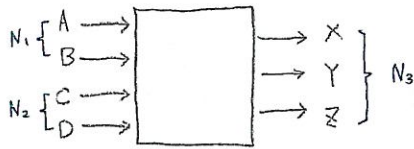
$$F = \prod M(2, 4, 5) \cdot \prod \underbrace{D(1, 6)}_{\text{최대항을 전개할 때 무관항 표시하는 방법}}$$



#### 4-6 진리표 작성하여 회로를 설계하는 방법

ex1) 두 개의 2비트 2진수를 더하여 3비트 합을 얻는 덧셈기를 설계  
이 회로는 4개의 입력과 3개의 출력을 갖는다.

sol)



tb\_elec\_engineer@naver.com

Gm

N <sub>1</sub>		+	N <sub>2</sub>		=	N <sub>3</sub>		
A	B		C	D		X	Y	Z
0	0		0	0		0	0	0
0	0		0	1		0	0	1
0	0		1	0		0	1	0
0	0		1	1		0	1	1
0	1		0	0		0	0	1
0	1		0	1		0	1	0
0	1		1	0		0	1	1
0	1		1	1		1	0	0
1	0		0	0		0	1	0
1	0		0	1		0	1	1
1	0		1	0		1	0	0
1	0		1	1		1	0	1
1	1		0	0		0	1	1
1	1		0	1		1	0	0
1	1		1	0		1	0	1
1	1		1	1		1	1	0

$$\begin{aligned} X(A, B, C, D) &= \sum m(7, 10, 11, 13, 14, 15) \\ Y(A, B, C, D) &= \sum m(2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 15) \\ Z(A, B, C, D) &= \sum m(1, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14) \end{aligned}$$

ex2) 6-3-1-1 2진수 부호화 10진수 오류검출기를 설계

출력(F)은 4비트 입력(A, B, C, D)이 비정상 부호조합일 때 1이 된다.

sol)

10진수입력	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

$$\begin{aligned} F &= \sum m(2, 5, 10, 13, 14, 15) \\ &= A'B'CD' + A'BCD' + AB'CD' + ABCD' + ABC'D + ABCD \\ &= A'CD'(B'+B) + ACD'(B'+B) + ABD(C'+C) \\ &= A'CD' + ACD' + ABD \\ &= CD'(A'+A) + ABD \\ &= CD' + ABD \end{aligned}$$

ex3) 회로의 4개 입력 (A,B,C,D)은 8-4-2-1 2진수 부호화 10진수를 나타낸다.  
 입력에 의한 10진수가 3으로 정확히 나누어질 때만 출력(Z)이 1이 되는 회로 설계

sol) 0, 3, 6, 9 만 3으로 정확히 나누어짐

ABCD = 0000, 0011, 0110, 1001 일 때 Z=1

tb\_elec\_engineer@naver.com

(gm)

10진수	A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
잘대X	1	0	1	0	X
	1	0	1	1	X
	1	1	0	0	X
	1	1	0	1	X
	1	1	1	0	X
	1	1	1	1	X

$$\Rightarrow Z = \sum m(0, 3, 6, 9) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

#### 4-7 2진수 덧셈기와 뺄셈기 설계

1) 덧셈기 (가산기) : 덧셈을 연산하는 장치

논리회로 → 반덧셈기 → 전덧셈기 → 병렬덧셈기

(반덧셈기가 모여 전덧셈기가 되고, 전덧셈기가 모여 병렬덧셈기가 됨)

ex)

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \textcircled{1} \\ 6 \textcircled{2} \textcircled{7} \\ + 5 \textcircled{8} \textcircled{6} \\ \hline 1213 \end{array}$$

반덧셈기 : 입력 2개, 출력 2개

전덧셈기 : 입력 3개, 출력 2개

• 반덧셈기

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 0011 \\ 0101 \\ \hline S(\text{Sum}) \ 0110 \\ C(\text{Carry}) \ 0001 \\ \text{→ 자리올림} \end{array}$$

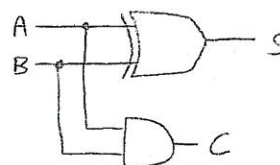
반가산기 진리표

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

논리게이트

$$S = AB' + A'B = A \oplus B$$

$$C = AB$$

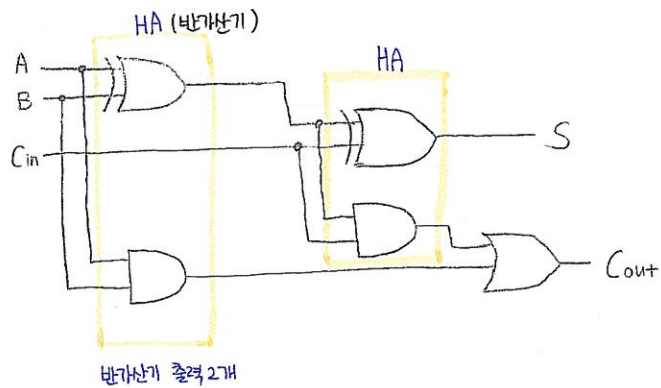


전가산기 진리표

A	B	C <sub>in</sub>	S	C <sub>out</sub>
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

⊙ C<sub>in</sub> : 반가산기에서 발생한 캐리

C<sub>out</sub> : 전가산기에서 새로 발생한 캐리



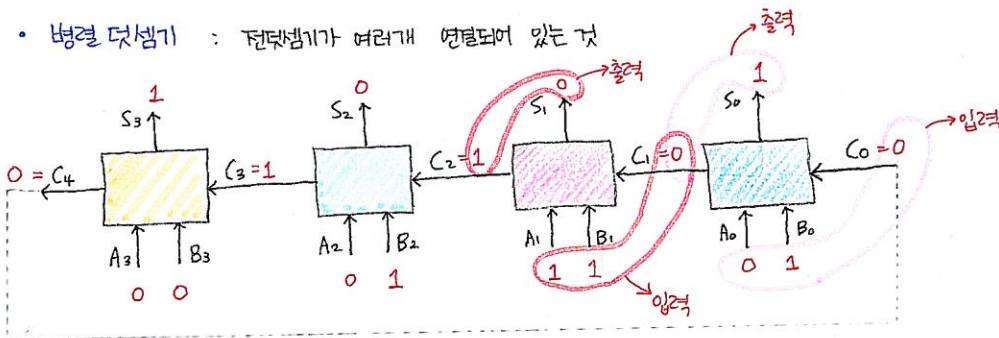
Ⓢ (증명)  $(A \oplus B)' = (A'B + AB')'$

$$\begin{aligned}
 &= (A'B)' \cdot (AB')' \\
 &= (A+B') \cdot (A'+B) \\
 &= AA' + AB + B'A' + B'B \\
 &= AB + A'B'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= A'B'C_{in} + A'BC_{in} + AB'C_{in} + ABC_{in} \\
 &= C_{in} (A'B' + AB) + C'_{in} (A'B + AB') \\
 &= C_{in} (A \oplus B)' + C'_{in} (A \oplus B) \\
 &= (A \oplus B) \oplus C_{in}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{out} &= A'BC_{in} + AB'C_{in} + ABC'_{in} + ABC_{in} \\
 &= (A'B + AB')C_{in} + AB(C'_{in} + C_{in}) \\
 &= (A \oplus B)C_{in} + AB
 \end{aligned}$$

• 병렬 덧셈기 : 전가산기가 여러개 연결되어 있는 것



ex)

1	1	1	0
0	0	1	0
+	0	1	1
-----			
1	0	0	1

→ A  
→ B

< 4비트 2진 가산기 >



## 2) 뺄셈기 (감산기)

tb\_elec\_engineer@naver.com

gm

ex) 
$$\begin{array}{r} 32 \\ -17 \\ \hline \end{array}$$

⑩ 뺄셈  
④  
⑥  
③

### • 반감산기

$$\begin{array}{r} 0011 \\ 0101 \\ \hline \end{array}$$

D (Deduction) 0110  
b (borrow) 0100  
→ 자리바림

반감산기 진리표

A	B	D	b
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

논리게이트

$$D = A'B + AB' = A \oplus B$$

$$b = A'B$$

