Nicholas Funari Voltani
9359365
08/10/2020

Lista 1 – Introdução ao Caos

Atividade 63 *Estude a estabilidade dos pontos fixos acima determinados do mapa logístico em função de p. Construa um gráfico de $f(x^*)$ com uma linha contínua no intervalo que cada ponto fixo é estável e com uma linha tracejada no intervalo de instabilidade.*

(63) $x^* = p x^*(1-x^*) \Rightarrow \begin{cases} x^*_0 = 0 \\ x^* = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \end{cases}$

P/ analisar a estabilidade desses pontos, olhemos para

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\,x(1-x)\right) = p(1-x) - px = p(1-2x).$$

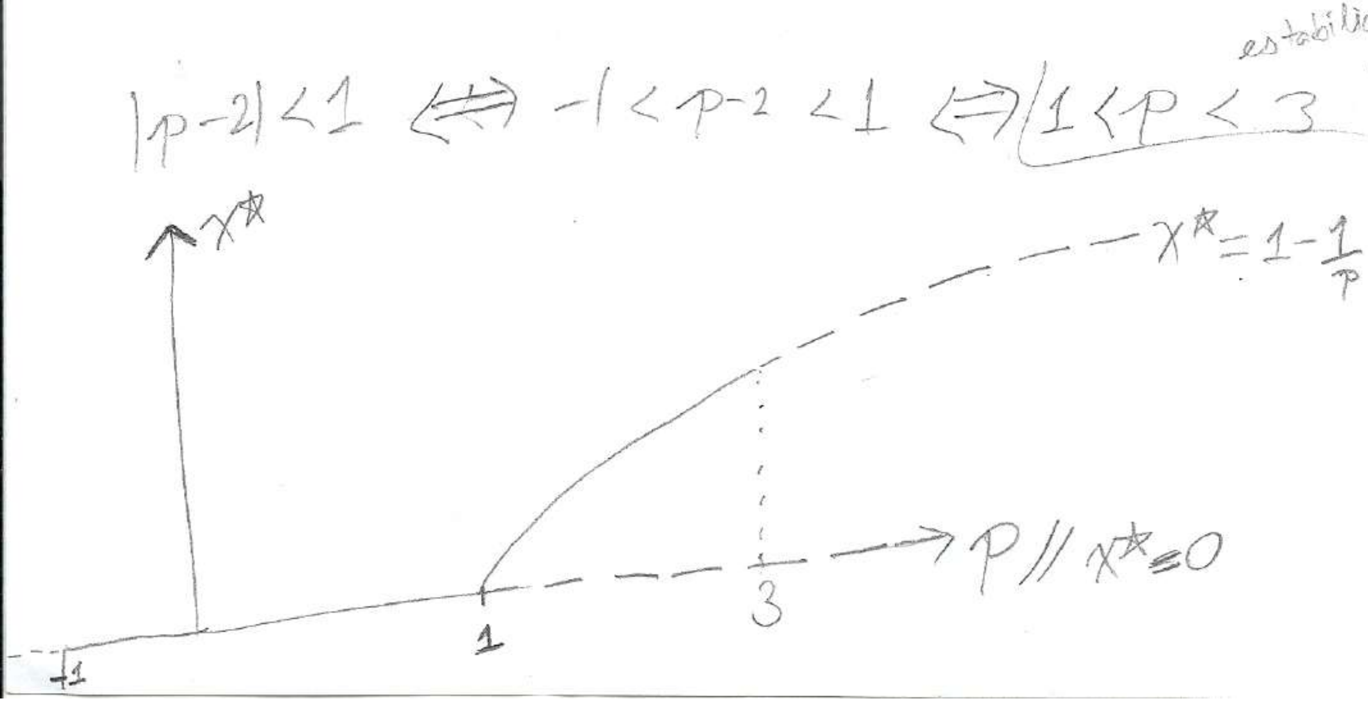
x^* é estável $\iff \left|\frac{df}{dx}\Big|_{x^*}\right| < 1$, e instável se > 1.

$\underline{x^* = 0}$ $\quad \left|\frac{df}{dx}\right| = |p|$

$\underline{x^* = \frac{p-1}{p}}$ $\quad \left|\frac{df}{dx}\right| = \left|p\left(1 - 2\frac{(p-1)}{p}\right)\right| = \left|\frac{\cancel{p}}{\cancel{p}}\left(p - 2p + 2\right)\right|$

$$= |p-2|$$

$|p-2| < 1 \iff -1 < p-2 < 1 \iff \underbrace{1 < p < 3}$ estabilidade de $x^* = 1 - \frac{1}{p}$



Atividade 64 *Calcule algebricamente os pontos fixos $x^* = f^2(x^*) = f(f(x^*))$ em função de p. Obtenha a expressão, também em função de p, para a derivada de $f^2(x)$.*

(64) $f(x) = px(1-x) \rightarrow f(f(x)) = p\, f(x)(1-f(x))$

$$\Rightarrow f^2(x) = p^2(x(1-x))(1-px(1-x)) = p^2(x(1-x))(1-px+px^2)$$

$x^* = f^2(x^*) \Rightarrow x_1^* = 0$ é solução trivial.

Como soluções não triviais, é preciso resolver

$$1 = p^2(1-x^*)(1-px^*+px^{*2}) = p^2(1-px^*+px^{*2}-x^*+px^{*2}-px^{*3})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = 1-(1+p)x^* + 2px^{*2} - px^{*3}$$

As soluções dessa eq. são $\begin{cases} \dfrac{p-1}{p} & (=x_2^*) \\ \dfrac{1+p \pm \sqrt{p^2-2p-3}}{2p} & (=x_\pm^*) \end{cases} \quad (p \neq 0)$

Note-se que $x_\pm^*$ só aparecem quando $p^2-2p-3 \geq 0$,

ou seja, a partir de $p = \dfrac{+2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{+2 \pm 4}{2} = \begin{cases} p=3 \\ p=-1 \end{cases}$

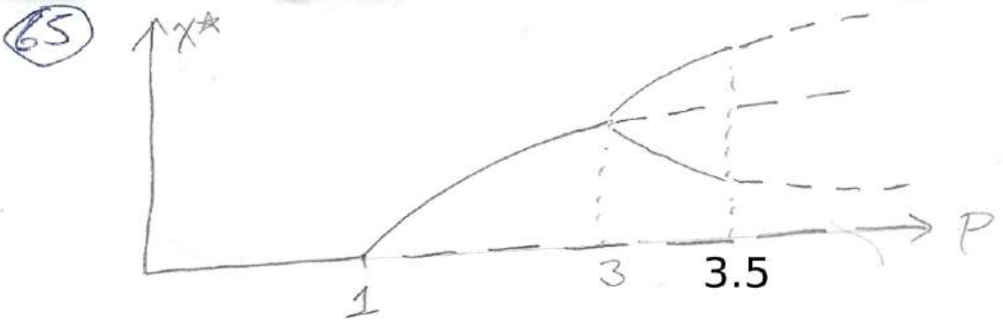
Reescrevendo $f^2(x)$, temos que

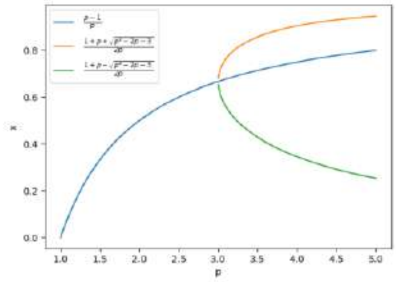
$$f^2(x) = p^2\left[1-px+px^2-x+px^2-px^3\right]x = p^2\left[x-px^2+px^3-x^2+px^3-px^4\right]$$

$$\frac{df^2}{dx} = p^2\left[1-2px+3px^2-2x+3px^2-4px^3\right]$$

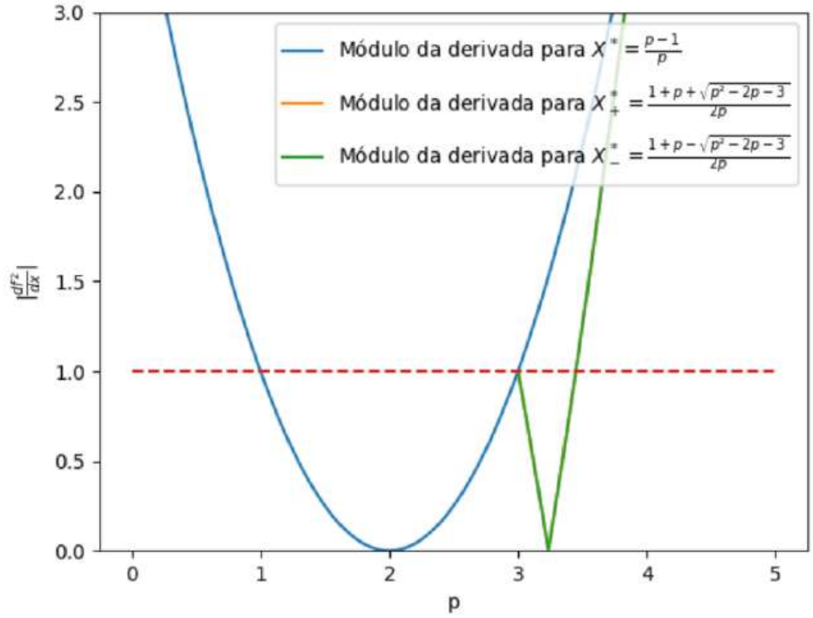
Atividade 65 *Escreva um programa para plotar* $\left|\frac{d}{dx}(f^2(x))\right|_{x^*}$ *para cada ponto fixo obtido na atividade anterior. Determine para cada um deles os intervalos de estabilidade. Para qual valor de p ocorre a bifurcação* $2 \to 4$*?.*

65





A bifurcação ocorre em $p=3$, exatamente onde $\sqrt{p^2-2p-3} = 0$, e apartir do qual é > 0 ($x^*_\pm$ passam a ser $\in \mathbb{R}$).



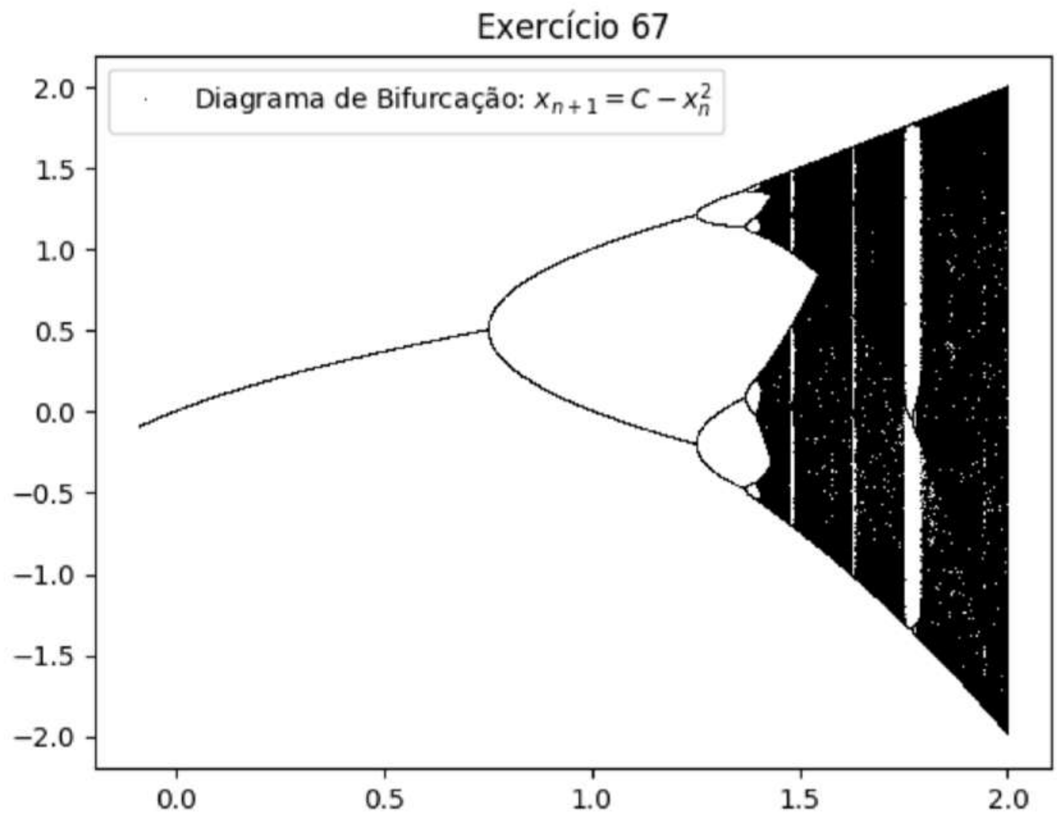
Regiões de estabilidade:

$$x^* = 1 - \frac{1}{p} : 1 \leq p \leq 3$$

$$x^*_\pm = \frac{1 + p \pm \sqrt{p - 2p - 3}}{2p} : 3 \leq p \leq 3.5$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## Fórmula da derivada de f(f(x))
def df2dt(x,p):
    return p**2*(2*x-1)*(1-2*p*x+2*p*x**2)

p = np.linspace(-5,5, 1000)

## Pontos fixos
x2 = (p-1)/p
x3 = (1+p + np.sqrt(p**2-2*p-3))/(2*p)
x4 = (1+p - np.sqrt(p**2-2*p-3))/(2*p)

plt.plot(p, abs(df2dt(x2,p)), label =  r'Módulo da derivada para $X^* = \frac{p-1}{p}$')
plt.plot(p, abs(df2dt(x3,p)), label =  r'Módulo da derivada para $X_+^* = \frac{1 + p + \sqrt{p²-2p-3}}{2p}$')
plt.plot(p, abs(df2dt(x4,p)), label =  r'Módulo da derivada para $X_-^* = \frac{1 + p - \sqrt{p²-2p-3}}{2p}$')
plt.plot(p,[1 for _ in p], '--')
plt.legend()
plt.ylim(0,3)
plt.show()
```

Atividade 67 *Construa o diagrama de bifurcação em função de C no intervalo de -0.25 a 2. Sugestão: Modifique o programa feito para o mapa logístico, atividade 60.*



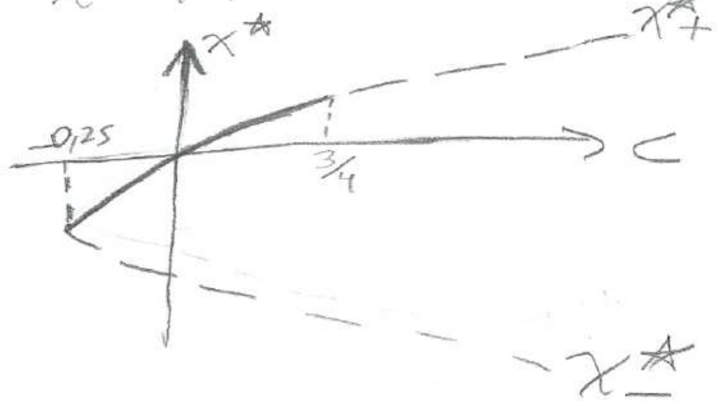

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def quadratic(x,C):
    return C - x**2

C = np.linspace(-0.5, 2, 10000)
Ttrans = 1000
Test = 100
xs = []
cs = []
for c in C:
    x = 0.9
    for _ in range(Ttrans):
        x = quadratic(x,c)
    for _ in range(Test):
        x = quadratic(x,c)
        xs.append(x)
        cs.append(c)

#x_menos = 0.5*(-1-np.sqrt(1+4*np.array(cs)))
plt.plot(cs, xs , ',k',label = r"Diagrama de Bifurcação: $x_{n+1} = C - x_n^2$")
#plt.plot(cs, x_menos, ',r', label = r"$x^*_- = \frac{-1-\sqrt{1+4C}}{2}$")
plt.title(r"Exercício $67$")
plt.legend()
plt.show()

```

Atividade 68 *Obtenha os pontos fixos $x^* = f(x^*)$, e plote-os em função de C.*

Atividade 69 *Estude a estabilidade destes pontos em função de C.*

68 $x^* = C - x^{*2} \Leftrightarrow x^{*2} + x^* - C = 0$

$\Rightarrow x^*_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4C}}{2}$



69

$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d(C-x^2)}{dx} = -2x$

$= 1 \mp \sqrt{1+4C}$

x^*_+ se torna instável quando $\left|\frac{df}{dx}\right|_{x^*_+} = |1-\sqrt{\ }| > 1$

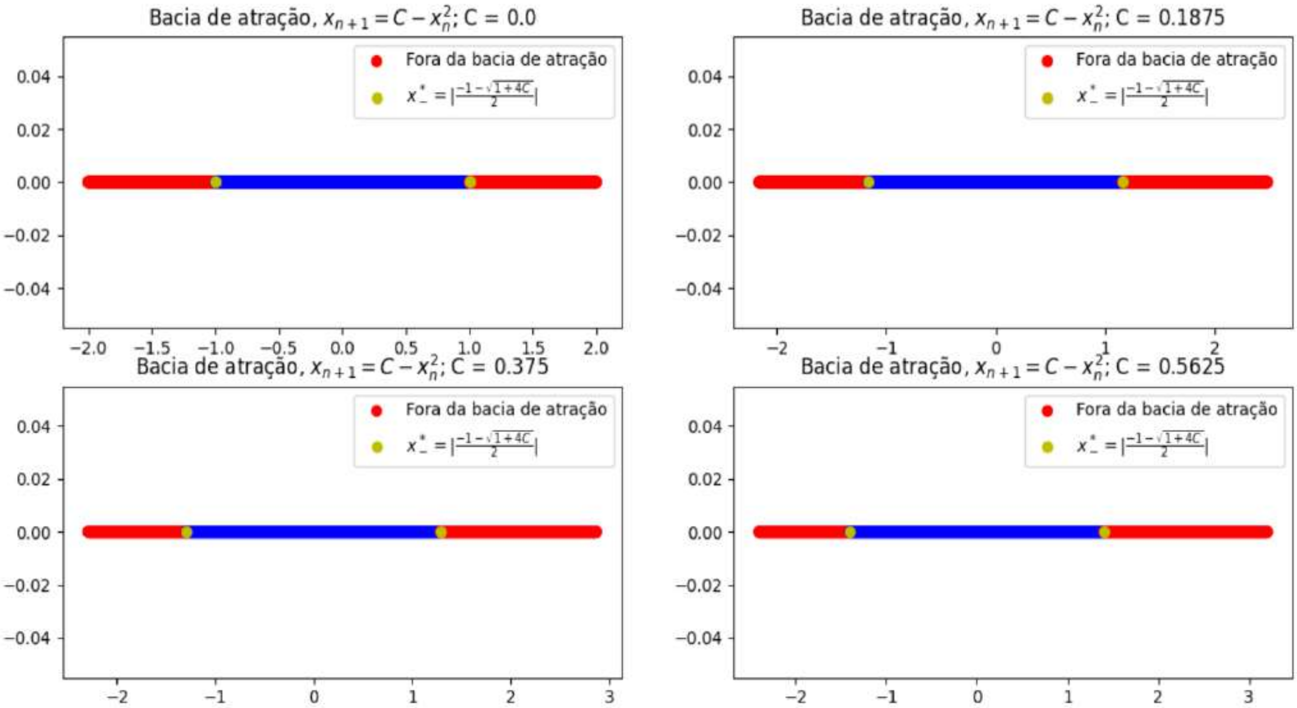
No limiar disso, $1 - \sqrt{\ } = -1 \Rightarrow +\sqrt{1+4C} = 2$

$\Rightarrow 1+4C = 4 \Rightarrow C = \frac{3}{4}$.

Logo, x^*_+ é estável em $C \in [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

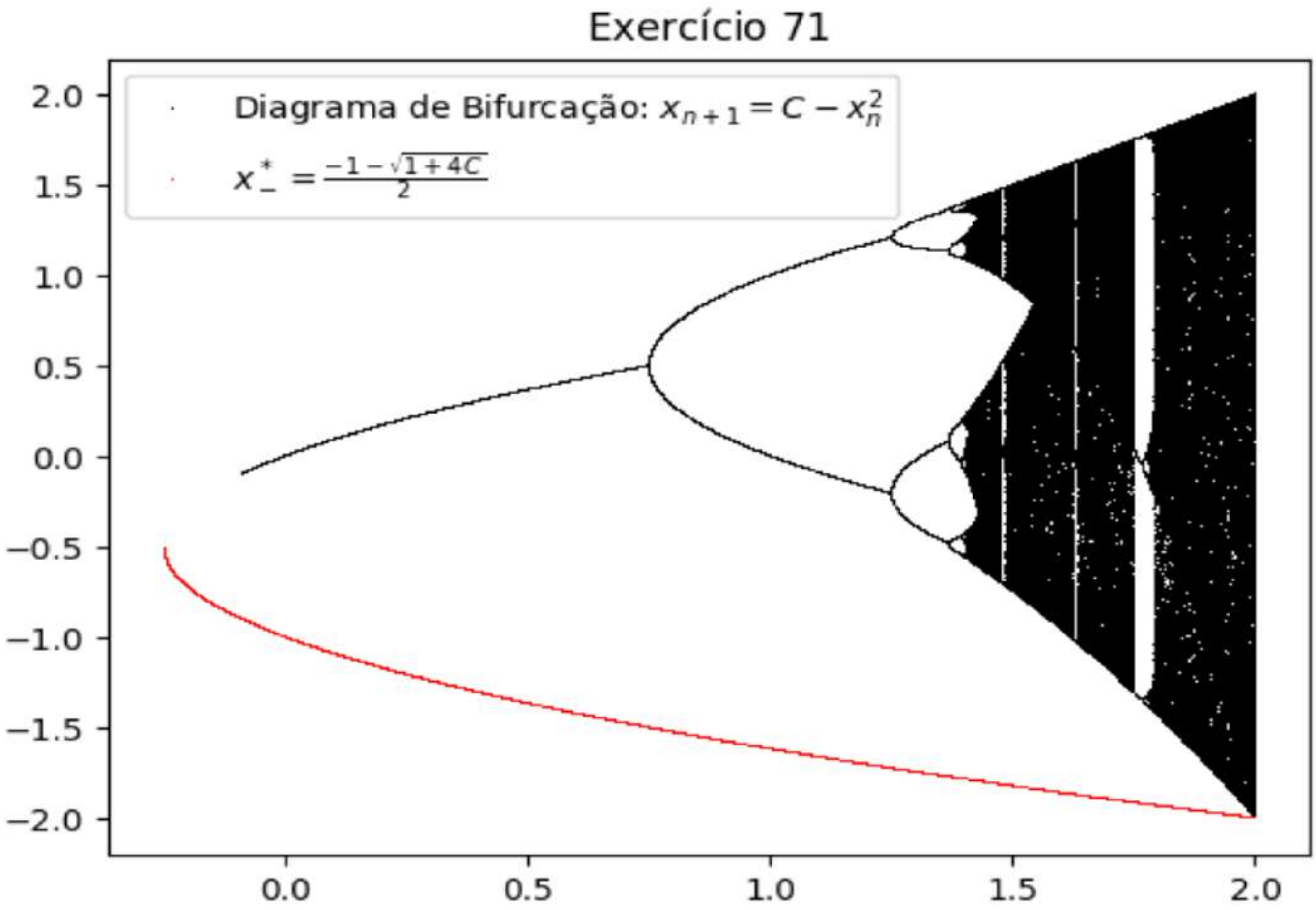
x^*_- é sempre instável $\left(\left|\frac{df}{dx}\right|_{x^*_-} = |1+\sqrt{\ }| > 1, \forall C > -\frac{1}{4} \right)$

Atividade 70 *Verifique numericamente que a bacia de atração é dada pelo valor absoluto do ponto fixo instável.*



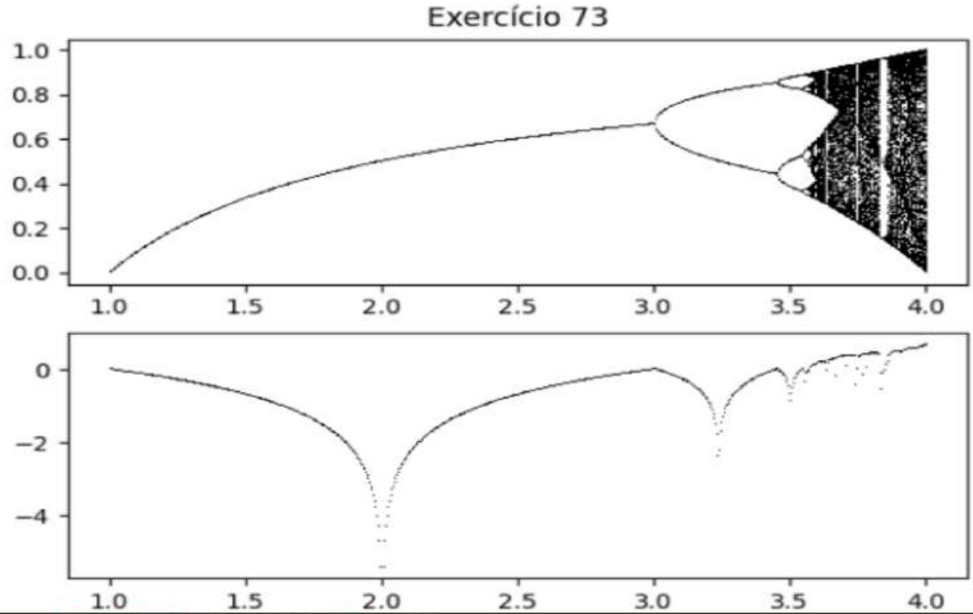

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def quadratic(x,C):
    return C - x**2

Cs = [i*0.75/4 for i in range(4)]

for i in range(4):
    C = Cs[i]
    ## Pontos fixos
    x_mais = 0.5*(-1+np.sqrt(1+4*C))
    x_menos = 0.5*(-1-np.sqrt(1+4*C))

    ## Queremos ver se a bacia de atração
    ## tem raio igual a |x_menos|
    x0s = np.linspace(x_mais-abs(x_mais-x_menos)- 1, x_mais+abs(x_mais-x_menos)+ 1, 5000)
    ys = []
    color = []
    Tit = 1000

    for x0 in x0s:
        x = x0
        for _ in range(Tit):
            x = quadratic(x,C)

        ## Se o ponto da órbita estiver próximo do ponto estável (i.e. dentro da bacia), plotar em azul
        if np.isclose(x, x_mais, atol = 5e-05):
            color.append('b')
        else:
        ## Caso contrário, plota em vermelho
            color.append('r')
        ys.append(0)

    plt.subplot(2,2,i+1)
    plt.scatter(x0s,ys,color=color)
    ## Visualizar a fronteira da bacia, dada pelo valor absoluto de x_menos
    plt.scatter([x_menos, -x_menos],[0,0],color='y')
    plt.title(r"Bacia de atração, $x_{n+1} = C - x_n^2$; " + f"C = {C}")
    plt.legend(["Fora da bacia de atração",r"$x^*_- = \left|\frac{-1-\sqrt{1+4C}}{2}\right|$"])
plt.show()
```

Atividade 71 *Refaça o diagrama de bifurcações e plote simultaneamente o ponto fixo instável.*




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def quadratic(x,C):
    return C - x**2

C = np.linspace(-0.5, 2, 10000)
Ttrans = 1000
Test = 100
xs = []
cs = []
for c in C:
    x = 0.9
    for _ in range(Ttrans):
        x = quadratic(x,c)
    for _ in range(Test):
        x = quadratic(x,c)
        xs.append(x)
        cs.append(c)

x_menos = 0.5*(-1-np.sqrt(1+4*np.array(cs)))
plt.plot(cs, xs , ',k',label = r"Diagrama de Bifurcação: $x_{n+1} = C - x_n^2$")
plt.plot(cs, x_menos, ',r', label = r"$x^*_- = \frac{-1-\sqrt{1+4C}}{2}$")
plt.title(r"Exercício $71$")
plt.legend()
plt.show()
```

Atividade 73 *Modifique os seus programas de diagramas de bifurcações (atividades 57 e 60) para incluir o cálculo do expoente de Lyapunov, utilizando a equação 5.18, em função do parâmetro de controle. Plote simultaneamente o diagrama de bifurcações e o expoente de Lyapunov em função do parâmetro de controle. Sugestão: para cada mapa calcule a derivada, e para cada série temporal obtida em função do parâmetro de controle calcule λ com a equação 5.18.*




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def logistic(x,p):
    return p*x*(1-x)

def derivative(x,p):
    return p*(1-2*x)

ps = np.linspace(1, 4, 667)
x0 = 0.6
Ttrans = 5000
Test = 200
lyapunovs = []
pps = []
xs = []

for p in ps:
    x = x0
    lyapunov = np.log(abs(derivative(x,p)))
    for _ in range(Ttrans):
        x = logistic(x,p)
        lyapunov += np.log(abs(derivative(x,p)))
    for _ in range(Test):
        x = logistic(x,p)
        xs.append(x)
        pps.append(p)
        lyapunov += np.log(abs(derivative(x,p)))
    lyapunov /= (Ttrans+Test)
    lyapunovs.append(lyapunov)

plt.subplot(2,1,1)
plt.title("Exercício 73")
plt.plot(pps,xs, ',k')
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(ps,lyapunovs,',k')
plt.show()
```

72) Queremos mostrar que há um mapa $y = ax + b$ tal que

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \xleftrightarrow{x = ay + b} y_{n+1} = C - y_n^2.$$

$$x_{n+1} = a y_{n+1} + b = r(a y_n + b)(1 - a y_n - b)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{-b}{a} + \frac{r}{a}\left[b - b^2 + a y_n (1-b) - ab y_n - a^2 y_n^2\right]$$

$$= \frac{-b}{a} + r\left[\frac{b - b^2}{a} + \cancel{a} y_n (1 - 2b) - a y_n^2\right]$$

Queremos que $y_{n+1} = C - y_n^2$. Analisemos $r[\dots]$:

$$r\left[\frac{b-b^2}{a} + \underbrace{y_n(1-2b)}_{\text{queremos que seja } 0} - \underbrace{a y_n^2}_{\text{queremos que seja } -y_n^2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = \frac{1}{r}} \\ 1 - 2b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Portanto, resta

$$y_{n+1} = \underbrace{\frac{-b}{a} + r^2(b - b^2)}_{\equiv C} - y_n^2 \Rightarrow y_{n+1} = C - y_n^2$$

logo, o mapa $x = \frac{y}{r} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = r\left(x - \frac{1}{2}\right)$

relaciona o mapa quadrático com o mapa logístico.