Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

1

Aufgabe :(Lüling)
Für welche Wahrheitswerte von A und B sind folgende Verknüpfungen wahr?

a) $(A \vee B) \wedge \overline{A}$

b) $(A \wedge B) \vee \overline{A}$

c) $(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge A$

Lösung

a)

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$(A \vee B) \wedge \overline{A}$
W	W	W	F	F
W	F	W	F	F
F	W	W	W	W
F	F	F	W	F

b)

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A}$	$(A \wedge B) \vee \overline{A}$
W	W	W	F	W
W	F	F	F	F
F	W	F	W	W
F	F	F	W	W

c)

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	A	$(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge A$
F	F	F	W	F
F	W	W	W	W
W	F	W	F	F
W	W	W	F	F

NB: $\overline{c} = b$: $\overline{(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge A} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \vee \overline{A}$

$= (A \wedge B) \vee \overline{A}$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

2

Aufgabe:(Lüling)
Mit den Aussagen

A: 1526 ist durch 7 teilbar
B: 1528 ist durch 7 teilbar
C: 1533 ist durch 7 teilbar

sind folgende Verknüpfungen zu bilden und auf ihre Wahrheit zu überprüfen:

a) $A \Rightarrow B$ b) $A \Rightarrow C$ c) $A \Leftrightarrow B$ d) $B \Leftrightarrow C$

A: W B: F C: W

$1526 = 7 \cdot 218$
$1533 = 7 \cdot 219$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow C$
W	F	W	F	W	F	F

da $B \Rightarrow C$: W
aber $C \Rightarrow B$: F

③

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe:(Üb WS01)
Überprüfen Sie mir Hilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Beziehungen

a) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

b) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$

d) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

a)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$\Rightarrow$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	F	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

✓

b)

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W	W

beide Spalten gleich

$\overline{A \wedge B} \Rightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ und

$\Leftarrow$

q.e.d

zu 3:

c)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ wd

$\Leftarrow$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotech
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

4

Aufgabe:(Lüling)
Vereinfachen Sie ohne Verlust der Eindeutigkeit mit Hilfe der Stärke der Bindung der Junktoren den Ausdruck

$$((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)) \Leftrightarrow ((B \vee A) \wedge C) \Rightarrow D$$

Lösung: Priorität, Bindung

stark $\wedge$ $\vee$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ schwach

$$A \wedge B \Rightarrow C \vee D \Leftrightarrow (B \vee A) \wedge C \Rightarrow D$$

restliche Klammern überflüssig

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotec
und Informatik

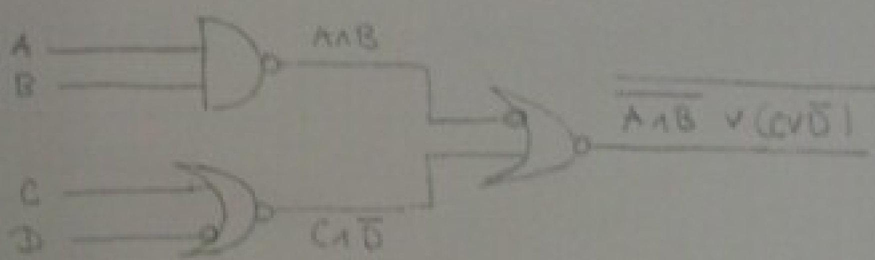
Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

5

Aufgabe:(Üb WS01)
Geben Sie eine Schaltung aus elementaren Gattern mit vier Eingängen an, die folgender logischen Aussage entspricht

$$\overline{\overline{A \wedge B} \vee (C \vee \overline{D})}$$



Fachbereich Elektrotec
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

6

Aufgabe: (Üb WS01)
Gegeben sind drei Aussagen

A(x): x ist eine gerade Zahl B(x): x ist eine ungerade Zahl
C(x,y): x ist kleiner als y

Diskutieren Sie die Aussagen

a) $\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$ b) $\exists x\, (A(x) \wedge B(x))$
c) $\forall y\, \exists x\, C(x,y)$ d) $\exists x\, \forall y\, C(x,y)$

a) $\exists x$ x grade und $\exists x$ x ungrade wahr, da
2 grade und 3 ungrade

b) $\exists x$ (x grade und ungrade) falsch, da
kein x grade und ungrade

c) $\forall y\, \exists x \quad x < y$ wahr

d) $\exists x\, \forall y \quad x < y$ falsch

7

Fachbereich Elektro
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effing

effinger@fh-muenster
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe:

Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ und $C = \{4, 5\}$. Bilden Sie folgende Produktmengen

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2 d) B^2 e) $A \times B \times C$ f) C^3

a) $\{(a,1), (a,2), \ldots, (b,3)\}$ 6 Elemente

b) $\{(1,a), (2,a), \ldots, (3,b)\}$ -"-

c) 4 Elemente

d) 9 Elemente

e) 12 Elemente

f) 8 Elemente

8

Fachbereich Ele
und Informatik

Prof. Dr. Hans Ef

effinger@fh-muen
www.et.fh-muenst

Aufgabe:
a) Geben Sie die kleinste Menge an, die die Mengen A, B und C enthält.
b) Geben Sie die größte Menge an, die in den Mengen A, B und C enthalten ist.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

Fachbereich Elektrotec
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

10

Aufgabe:

Welche dieser Relationen $R \subset \mathbb{R}^2$ sind Funktionen?

a) $R = \{(x, y) \mid y = |x| + x\}$ b) $R = \{(x, y) \mid y^2 = x(x-2)^2\}$

c) $R = \{(x, y) \mid y = x - x^3\}$ d) $R = \{(x, y) \mid |x| - |y| = 1\}$

a) Funktion $x \longmapsto |x| + x$

b) keine Funktion $(1, 1) \in R$
$(1, -1) \in R$

c) Funktion $y \longmapsto x - y^3$

d) keine Funktion $(2, 1) \in R$
$(2, -1) \in R$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. [illegible]

Aufgabe 11:

Aufgabe:
Mit A wird die Menge aller Rechtecke in der Ebene bezeichnet, deren Flächeninhalt nicht null ist. H_x ist die Höhe, B_x ist die Breite des Rechtecks x. Gegeben sind die beiden Relationen als Teilmengen von A^2:

a) $R_1 = \left\{ (x,y) \mid x,y \in A \wedge \frac{H_x}{B_x} = \frac{H_y}{B_y} \right\}$

b) $R_2 = \left\{ (x,y) \mid x,y \in A \wedge \frac{H_x}{B_x} = \frac{B_y}{H_y} \right\}$

Handelt es sich bei diesen Relationen um Äquivalenzrelationen?

a) Verhältnis H/B gleich

b) H/B = kehrwert $\frac{B}{H}$

Äquivalenzrelation

Reflexiv $(x,x) \in R$

Symmetrisch $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

transitiv $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

a) $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_x}{B_x}$ reflexiv

$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} \Leftrightarrow \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_x}{B_x}$ symmetrisch

$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} \wedge \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_z}{B_z}$

Äquivalenzrelation

b) $\frac{A_x}{B_x} = \frac{B_x}{A_x}$ nicht für alle erfüllt <u>nicht</u> reflexiv

$\frac{A_x}{B_x} = \frac{B_y}{A_y} \Rightarrow \frac{A_y}{B_y} = \frac{B_x}{A_x}$ Kehrwert

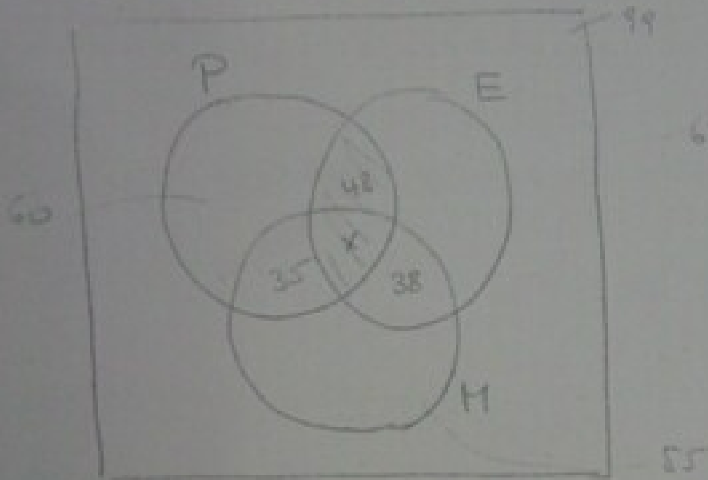
<u>symmetrisch</u>

$\frac{A_x}{B_x} = \frac{B_y}{A_y} \wedge \frac{A_y}{B_y} = \frac{B_z}{A_z}$

$\Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_z}{B_z}$ nicht transitiv

Umfg. 99 Stud.

12



P Menge der Stud, die Physik bestanden haben

E — " — E-T — " —

M — " — Mathe — " —

39 Physik nicht bestanden $99-39=60$, $\#P=60$

32 E — " — $99-32=67$, $\#E=67$

44 M " $99-44=55$ $\#M=55$

20 E&P — " — $99-20=79$ $\#(E\cup P)=79$

15 E&M — " — $99-15=84$ $\#(E\cup M)=84$

19 P&M " $99-19=80$ $\#(P\cup M)=80$

8 P&M&E " $99-8=91$ $\#(P\cup M\cup E)=91$

$\# P + \# E = \#(P \cup E) + \#(P \cap E)$

$\#(P \cap E) = 60 + 67 - 79 = 48$

$\#(E \cap M) = 67 + 55 - 84 = 38$

$\#(P \cap M) = 60 + 55 - 80 = 35$

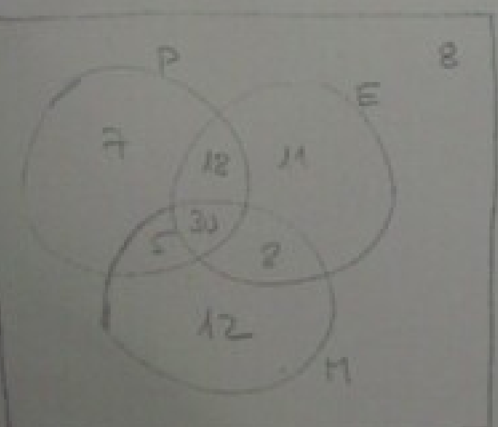
alle drei Mengen enthalten das gesuchte x

$\#(P \cup M \cup E) = 91$

Gleichung für x

$$91 = 60 + 67 + 55 - (48 - x) - (38 - x) - (35 - x) + 2x$$

$\Rightarrow \quad x = 30$



(19)

b) 1) $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4}$

Induktionsanfang

n=2:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 < \frac{16}{4} = 4 \checkmark$$

Induktionsschritt z.z. $\sum_{k=1}^{n} k^3 < \frac{(n+1)^4}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 < \frac{n^4}{4} + n^3$$

$$= \frac{1}{4}\left(n^4 + 4n^3\right)$$

$$< \frac{1}{4}\left(n^4 + 4n^3 + \underbrace{6n^2 + 4n + 1}_{>0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^4$$

qed

2) $\frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^{n} k^3$

$n=2$: $4 < \sum_{k=1}^{2} k^3 = 1+8=9$ ✓

Induktionsschluss:

z.z.: $\frac{(n+1)^4}{4} < \sum_{k=1}^{n+1} k^3$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$> \frac{n^4}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}\left(n^4 + 4(n^3+3n^2+3n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(n^4+4n^3+12n^2+12n+4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(n^4+4n^3+6n^2+4n+1\right) + \underbrace{\frac{1}{4}\left(6n^2+8n+3\right)}_{>0}$$

$$> \frac{1}{4}(n+1)^4$$

q.e.d.

20

a) $a = b = 1$

$$(a+b)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

b) $a = 1,\ b = -1$

$$(a+b)^n = 0 = \sum_{k=0}^{k} (-1)^k \binom{n}{k}$$

allgemein

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

21

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe :

Zeigen Sie, dass $\sqrt{11}$ keine rationale Zahl ist.

Indirekter Beweis:

Annahme: $\sqrt{11} \in \mathbb{Q}$

$\exists\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$ mit $\sqrt{11} = \frac{p}{q}$

p, q keine gemeinsamen Teiler

$\sqrt{11} = \frac{p}{q} \Rightarrow 11 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow p^2 = 11 q^2$

$\Rightarrow p^2$ hat Teiler 11

$\Rightarrow p$ hat Teiler 11

$\Rightarrow p = 11 p_1$

$\Rightarrow (11 p_1)^2 = 11 q^2$

$\Rightarrow 11 p_1 = q^2$

$\Rightarrow q^2$ hat Teiler 11

$\Rightarrow q$ — " —

$\Rightarrow$ p und q haben gemeinsamen Teiler 11

Widerspruch!

(22)

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe :
Welche der folgenden Ungleichungen mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist immer richtig, wenn $a \leq b$ gilt?

a) $a-3 \leq b-3$ b) $-a \leq -b$ c) $3-a \leq 3-b$
d) $6a \leq 6b$ e) $a^2 \leq ab$ f) $a^3 \leq a^2 b$

a) richtig $a \leq b \Rightarrow a-3 \leq b-3$
b) falsch $1 \leq 2$ aber $-1 \nleq -2$
c) falsch $1 \leq 2$ aber $2 \nleq 1$
d) richtig $a \leq b \Rightarrow 6a \leq 6b$
e) falsch $-1 \leq 2$ aber $1 \nleq -2$
f richtig $a \leq b \Rightarrow a^2 a \leq a^2 b$
da $a^2 \geq 0$

23

a) $3x+4 < 3x+10$

$4 < 10$ $\qquad$ $\underline{M = \mathbb{R}}$

b) $M = \{x \mid x-3<0 \wedge 2x+1>0\}$

$\cup \{x \mid x-3>0 \wedge 2x+1<0\}$

$$\left.\begin{array}{ll} x-3<0 & x<3 \\ 2x+1>0 & x>-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \; (-\tfrac{1}{2}, 3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x-3>0 & x>3 \\ 2x+1<0 & x<-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \; \emptyset$$

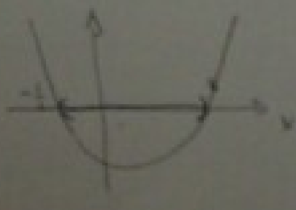
$M = (-\frac{1}{2}, 3)$

<u>oder</u>

$(x-3)(2x+1) = 2x^2-5x-3 =$

$= 2(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}) = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{24}{16}}$



$= \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

zu 23

c) $|x+4|>3$

$$M=\{x \mid x+4>3 \lor -(x+4)>3\}$$

$$=\{x \mid x>-1\} \cup \{x \mid -7>x\}$$

$$= (-\infty,-7) \cup (-1,\infty)$$

oder Fallunterscheidung

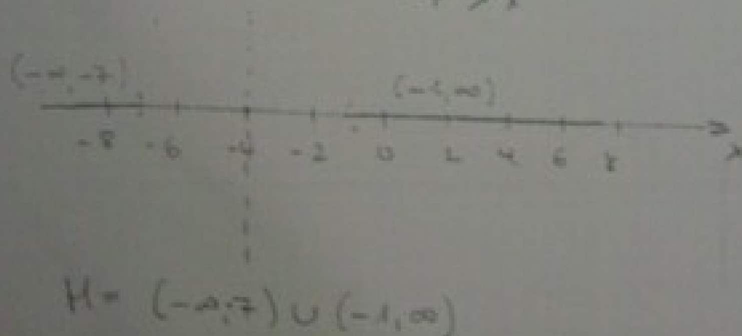
1) $x \geq -4$: $|x+4| = x+4$

$x+4>3$, $x>-1$

2) $x<-4$ $|x+4| = -(x+4)$

$-x-4>3$

$-7>x$



$M= (-\infty,-7) \cup (-1,\infty)$

d) $|x+2|-x \geq 3$

Fallunterscheidung

1) $x \geq -2$ $\quad |x+2| = x+2$

$|x+2| - x = 2 \geq 3$

nicht erfüllbar.

2) $x < -2$ $\quad |x+2| = -(x+2)$

$|x+2| - x = -x-2-x$

$= -2x-2 \geq 3$

$-2x \geq 5$

$\underline{x \leq -\frac{5}{2}}$

$M = (-\infty, -\frac{5}{2}]$

zu 23

e) $|3-x| < |x+2|$

Fallunterscheidungen

1) $3 \leq x$ $\quad |3-x| = x-3$

$|x+2| = x+2$

$x-3 < x+2 \qquad \underline{-3<2}$

erfüllt für alle $x \leq 3$

2) $-2 \leq x < 3$ $\quad |3-x| = 3-x$

$|x+2| = x+2$

$3-x < x+2 \qquad 1 < 2x \quad \underline{\frac{1}{2} < x}$

erfüllt für $x \in (\frac{1}{2}, 3)$

3) $x < -2$ $\quad |3-x| = 3-x$

$|x+2| = -x-2$

$3-x < -x-2 \qquad 3 < -2$

nicht erfüllbar

$\underline{M} = (\frac{1}{2}, 3) \cup [3, \infty) = \underline{(\frac{1}{2}, \infty)}$

f) $|2x-1| \leq 5$

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \leq 5 \wedge -5 \leq 2x-1\}$

$2x-1 \leq 5 \qquad x \leq 3 \qquad x \in (-\infty, 3]$

$-5 \leq 2x-1 \qquad -2 \leq x \qquad x \in [-2, \infty)$

$\underline{M} = (-\infty, 3] \cap [-2, \infty) = \underline{[-2, 3]}$

__Bem__: Beträge

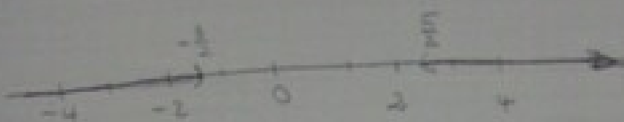
$|x| < c$

$\Leftrightarrow \quad -c < x < c$

$\Leftrightarrow \quad -c < x \ \wedge \ x < c$

(24)

a)



$f(x) = |x-2| + |x+1| > 4$

1) $x \geq 2$ $\quad |x-2| = x-2$

$|x+1| = x+1$

$f(x) = |x-2| + |x+1| = x-2+x+1 > 4$

$2x-1 > 4$

$x > \frac{5}{2}$

2) $-1 \leq x < 2$

$|x-2| = 2-x$

$|x+1| = x+1$

$f(x) = 2-x+x+1 > 4$

$3 > 4$

nicht erfüllbar

3) $x < -1$

$|x-2| = 2-x$

$|x+1| = -(x+1)$

$f(x) = 2-x-(x+1) = 1-2x > 4$

$-2x > 3$

$x < -\frac{3}{2}$

$M_1 = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$

b)

$$f(x) = |x+1| - |2x-1| = |x+1| - 2\left|x-\tfrac{1}{2}\right|$$

1) $x \geq \frac{1}{2}$ $\quad |x+1| = x+1$

$\quad\quad\quad\quad |x-\frac{1}{2}| = x-\frac{1}{2}$

$$f(x) = x+1-2(x-\tfrac{1}{2}) = -x+2 \leq 4$$

$$x \geq -2 \ \checkmark$$

2) $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ $\quad |x+1| = x+1$

$\quad\quad\quad\quad |x-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}-x$

$$f(x) = x+1-2(\tfrac{1}{2}-x) = 3x \leq 4$$

$$x \leq \tfrac{4}{3} \ \checkmark$$

3) $-1 < x$ $\quad |x+1| = -(x+1)$

$\quad\quad\quad\quad |x-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}-x$

$$f(x) = -(x+1) - 2(\tfrac{1}{2}-x)$$

$$= -x-1-1+2x = x-2 \leq 4$$

$$x \leq 6 \ \checkmark$$

$\rightarrow M_2 = \mathbb{R}$

25

a) $f(x,y) = |x+1| + |y-1| \geq 1$

1) $-1 \leq x \qquad |x+1| = x+1$

1a) $+1 \leq y \qquad |y-1| = y-1$

$$f(x,y) = x+1+y-1 \geq 1$$

$$\underline{y \geq 1-x}$$

1b) $y < +1 \qquad |y-1| = 1-y$

$$f(x,y) = x+1+1-y \geq 1$$

$$-y \geq -x-1$$

$$\underline{y \leq x+1}$$

2) $x < -1 \qquad |x+1| = -x-1$

1a) 1.a

$$f(x,y) = -x-1+y-1 \geq 1$$

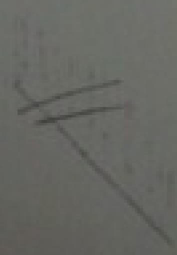
$$\underline{y \geq x+3}$$

2b) 1.b

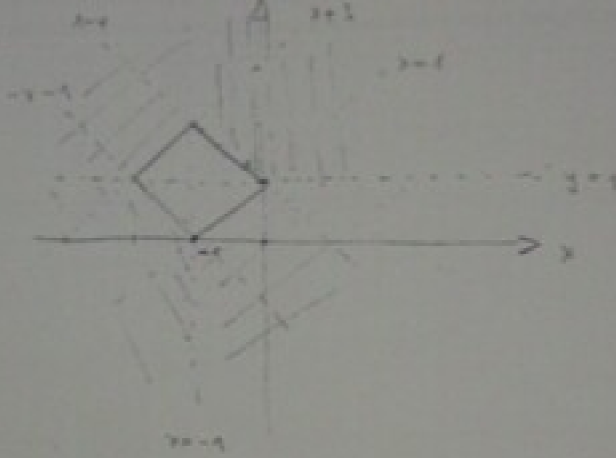
$$f(x,y) = -x-1+1-y \geq 1$$

$$-y \geq x+1$$

$$\underline{y \leq -x-1}$$



<u>Skizze</u>



A = der schraffierte Teil

$\bar{A}$ nicht zu A gehört das Innere des Quadrates aus den Punkten

(0,1) (-1,2) (-2,1) (-1,0).

(25)

b) $f(x,y) = |x-1| - |y+1| < 1$

Fallunterscheidungen

1) $1 \leq x$ $\quad |x-1| = x-1$

1a) $-1 < y$ $\quad |y+1| = y+1$

$f(x,y) = x-1-(y+1) < 1$

$x-y < 3$

$\underline{x-3 < y}$

1b) $y < -1$ $\quad |y+1| = -y-1$

$f(x,y) = x-1-(-y-1) = x-1+y+1 < 1$

$\underline{y < 1-x}$

2) $x < 1$ $\quad |x-1| = -x+1$

2a) 1.a

$f(x,y) = -x+1-(y+1) = -x-y < 1$

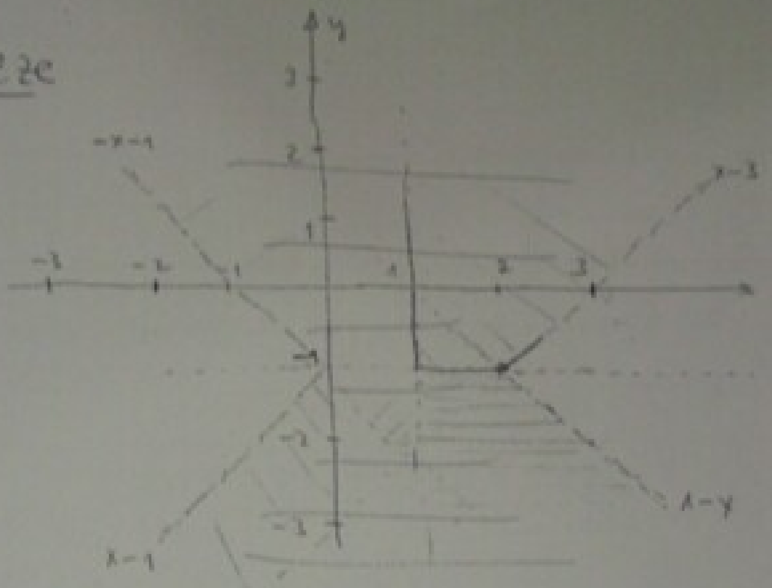
$\underline{-1-x < y}$

2b) 1.b

$f(x,y) = -x+1+y+1 = -x+2+y < 1$

$\underline{y < x-1}$

Skizze



B rot schraffiert (ohne Rand)

25

c) $f(x,y) = |2x - 3y| \leq 6$

Fallunterscheidung

a) $2x - 3y \geq 0 \qquad |2x-3y| = 2x - 3y$

$\Leftrightarrow \quad y \leq +\frac{2}{3}x$

$f(x,y) = 2x - 3y \leq 6$

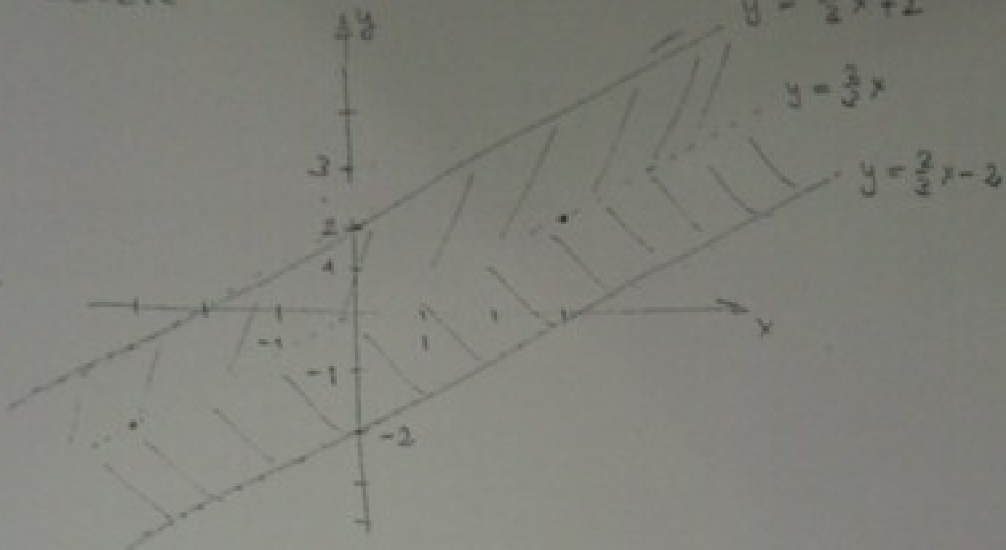
$\frac{2}{3}x - 2 \leq y$

b) $2x - 3y < 0 \qquad |2x-3y| = -2x + 3y$

$f(x,y) = -2x + 3y \leq 6$

$y \leq 2 + \frac{2}{3}x$

Skizze



C : Streifen zwischen den beiden Graden

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

mit Rand

27

Auflösung

a) $\lg x^5 + 2\lg x^1 = 20$ oder $7\lg x = 20$

$$\lg x^7 = 20$$

$$x^7 = 10^{20}$$

$$x = 10^{\frac{20}{7}}$$

b) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)\lg x = 1$

$$\lg x = \frac{6}{13}$$

$$x = 10^{6/13}$$

c)

$$\lg \frac{2x+3}{x-1} = 1$$

$$\frac{2x+3}{x-1} = 10$$

$$13 = 8x$$

$$x = \frac{13}{8}$$

d) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$

$$\ln x^2 = \ln 9$$

$$x = 3$$

28

Aufgabe

a) Flugzeug $A = 10 \lg \frac{1}{10^{-12}} = 120$ dB

Musik $A = 10 \lg \frac{0.1}{10^{-12}} = 110$ dB

TV $A = 10 \lg \frac{3.2 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 75$ dB

b) $A_i = 10 \lg \frac{I_i}{I_0}$ $i = 1,2$ Intensität

$A_1 - A_2 = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}$ $I_1 = 3 I_2$

$A_1 - A_2 = 10 \lg 3 \approx 4.77$ dB

c) $A_1 = 10 \lg \frac{I_2/2}{I_0} = 10 \lg \left(\frac{I_2}{I_0} \cdot \frac{1}{2}\right)$ $I_1 = I_2/2$

$= A_2 - 10 \lg 2$

$= A_2 - 3.01$

ca 3 dB

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

29

Aufgabe :

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2+3j$, $z_2 = -1+2j$, $z_3 = -3-j$ und $z_4 = 4-4j$. Berechnen Sie

a) $z_1 + z_2 + z_3$ b) $2z_1 - \frac{1}{2}z_4$ c) $z_1 z_3$ d) $z_1 z_2 z_3$ e) $\frac{z_1}{z_4}$

f) $z_1 \overline{z_4}$ g) $z_1 \overline{z_1}$ h) $|z_1|$ i) $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}$ j) $\left|\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}\right|$

a) $-2+4j$

Fehler S 1 1

b) $2+8j$

c) $-3-11j$

d) $25+5j$

e) $-\frac{1}{8}+\frac{5}{8}j$

f) $-4+20j$

g) 13

h) $\sqrt{13}$

i) $\frac{17}{40}+\frac{3}{20}i = 0.425 + 0.15i$

j) $\frac{\sqrt{13}}{8}$

(19)

a) Induktionsanfang

$n=1$

$$\frac{4}{2}=2<\frac{2!}{1!^2} \quad \text{falsch}$$

$n=2$

$$\frac{4^2}{3}<\frac{4!}{(2!)^2}$$

$$\frac{16}{3}<\frac{24}{4}=6=\frac{18}{3} \quad ✓$$

Induktionsschluss $n\geq 2$

$$\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)n!)^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\boxed{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$\underset{\text{Vor}}{>}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\,\frac{4^n}{n+1}$$

$$=\frac{(2n+1)\cdot 2\cdot 4^n}{(n+1)^2 \cdot 1}\cdot\frac{2(n+2)}{2(n+2)}\cancel{2n+1}$$

$$=\underbrace{\frac{(2n+1)(n+2)}{2\cdot(n+1)^2}}_{=f}\,\frac{4^{n+1}}{n+2}$$

$$f=\frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2}>1$$

$$>1\cdot\frac{4^{n+1}}{n+2} \quad \text{qed}$$

(30)

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe :(WS03, Fetzer 5.1.2)

Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

Vollständige Induktion $\overline{z}^n = \overline{z^n}$

1) Induktionsanfang

$n = 1 \qquad \overline{z}^1 = \overline{z^1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = \overline{z}$

2) Induktionsschritt

Vor $\qquad \overline{z}^n = \overline{z^n}$

z.z. $\qquad \overline{z}^{n+1} = \overline{z^{n+1}}$

$$\overline{z}^{n+1} = \overline{z}^n \cdot \overline{z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vor}}}{=} \overline{z^n} \cdot \overline{z} = \overline{z^n z} = \overline{z^{n+1}} \quad \text{qed}$$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$ (Vorlesung)

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

31

Aufgabe :

Es sei $z = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$.

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^2, z^3 und z^4.

b) Berechnen Sie $|z|$, $|z^2|$, $|z^3|$ und $|z^4|$.

a)

$z = \sqrt{2}(1+j)$

$z^2 = 4j$

$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+j)$

$z^4 = -16$

b)

$|z| = 2$

$|z^2| = |z|^2 = 4$

$|z^3| = |z|^3 = 8$

$|z^4| = |z|^4 = 16$

$(1+j)^2 = 1^2 + 2j + \underbrace{j^2}_{-1} = 2j$

(32)

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe :(WS03, Fetzer 5.1.6)
Es sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zerlegen Sie $a^2 + b^2$ in ein Produkt von zwei Faktoren $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$z_1 = a + jb$$

$$z_2 = a - jb \quad = \overline{z_1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = a^2 + b^2$$

33

$z = x + jy$

a) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

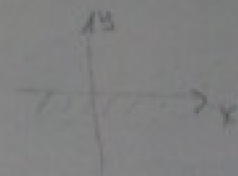
Kreis um j mit Radius 1.

b) s.u

c) weg $|z| = |\bar{z}| \Rightarrow \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

d) s.u

e) $y < 0$ untere Halbebene



f) s.u

g) $x^2 - y^2 + 2xyj = x^2 + y^2$

1) Es muß $y = 0$ oder $x = 0$ sein!

$y = 0$ $\quad x^2 = x^2$ ✓ reelle Achse

$x = 0$ $\quad -y^2 = y^2$ nur für $y = 0$.

d.h. $z^2 = |z|^2$ ist nur auf der <u>reellen</u> Achse erfüllt.

h) $|z^2| = |z z| = |z||z| = |z|^2$

gilt $\forall z \in \mathbb{C}$

(33)

b) $|z+2j| + |z-2j| = 8$

Summe der Abstände von $-2j$ und $2j$ ist konstant $= 8$.

Dies ist die Definition einer Ellipse mit großer Halbachse $\parallel$ y-Achse und Länge der Halbachse $a = \frac{8}{2} = 4$

Abstand der Brennpunkte $-2j$ und $2j$ ist $2c = 4 \quad c = 2$

kleine Halbachse $b^2 = a^2 - c^2$

$= 16 - 4 = 12$

$b = \sqrt{12}$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

33

d) $|z-3| = 2 \cdot |z+3|$

$(x-3)^2 + y^2 = 4\left[(x+3)^2 + y^2\right]$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$

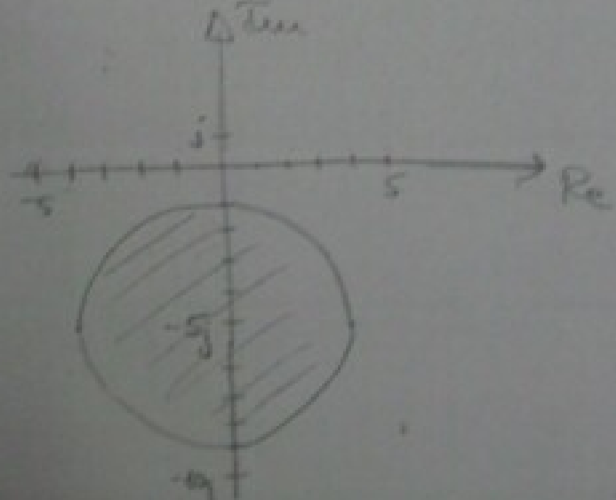
$3y^2 + 3x^2 + 30x + 27 = 0$

$y^2 + x^2 + 10x + 9 = 0$

$y^2 + (x+5)^2 = 16$

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 = 1$

Kreis um $(0,-5)$ mit Radius 4



(33)

f) $|z-j| = \mathrm{Im}(z+j)$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = y+1$$

$$x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1} = \cancel{y^2}+2y+\cancel{1}$$

$$\underline{y = \frac{1}{4}x^2}$$

Parabel

(34)

Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe :
Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexe Zahl z aus

$$(1+2j)z+(1-j)^2 = j-(2+j)z$$

Lösung

$$z = \frac{1}{2}(1+j) \qquad z = a+bj \quad , a,b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (1+2j)(a+bj)+(1-j)^2 = j-(2+j)(a+bj)$$

$$\Leftrightarrow a+bj+2aj+2bj^2+1-2j+j^2 = j-(2a+2bj+aj+bj^2)$$

$$\Leftrightarrow a+(2a+b)j-2b\cancel{+1}-2j\cancel{-1} = j-2a+b-(2b+a)j$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)+(2a+b-2)j = (b-2a)-(2b+a-1)j$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } a-2b = b-2a \Leftrightarrow \underline{a=b} \\ &\text{II. } 2a+b-2 = -2b-a+1 \Leftrightarrow 3a+3b=3 \Leftrightarrow a+b=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\text{I. } a - b = 0 \\ &\text{II. } a + b = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Cramersche Regel: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

35

Aufgabe :

In der Vorlesung wurde die bijektive Abbildung f von der Menge $\mathbb{R}^2$ in die Menge $\mathbb{C}$ angegeben

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$
$$A = (a,b) \mapsto z = a + jb .$$

Definieren Sie eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\otimes$ in der Menge $\mathbb{R}^2$, die folgende Eigenschaften besitzt. Mit $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $f(A_i) = z_i$, $i = 1,2$ soll gelten

$$f(A_1 \oplus A_2) = z_1 + z_2$$
$$f(A_1 \otimes A_2) = z_1 z_2 .$$

Bem: Eine Addition oder Multiplikation ordnet zwei Elementen einer Menge eindeutig ein Element dieser Menge zu, d.h. $A_1 \oplus A_2 \in \mathbb{R}^2$ und $A_1 \otimes A_2 \in \mathbb{R}^2$.

Lösung

$$A_1 = (a_1, b_1) \longmapsto z_1 = a_1 + j b_1$$
$$A_2 = (a_2, b_2) \longmapsto z_2 = a_2 + j b_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 \oplus A_2 &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ A_1 \otimes A_2 &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \right\}$$

Damit sind $f(A_1 \oplus A_2) = z_1 + z_2$ und
$f(A_1 \otimes A_2) = z_1 \cdot z_2$

erfüllt

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

36

Aufgabe :(Leupold 88)
Die Beobachtung einer Bakterienkultur unter dem Mikroskop ergab, dass von 100 Bakterien in 1,5 Stunden 12 Bakterien zur Teilung gelangen. Um welchen Faktor wird sich diese Kultur innerhalb von 4 Tagen vermehren?

Lösung:

B_n : Zahl der Bakterien nach $n \times 1.5\,h$

$B_0 = 100$
$B_1 = 100 \times 1.12$
$B_2 = 100 \times 1.12^2$

geometrische Folge $q = 1.12$, $c = 100$

$B_n = 100 \cdot 1.12^n$

$4\,d = 4 \cdot 24\,h = 4 \cdot \overset{16}{24} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\,h$
$= 64 \times 1.5\,h$

$B_{64} = 100 \cdot 1.12^{64} = 141\,238$ Bakterien
$\approx 140\,000$

(26)

Aufgabe

a) $\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{6}} = \left(3^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{6}}$

$= \left(3^{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{6}} = 3^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\left(\sqrt[3]{7}^{\sqrt{12}} : \sqrt[3]{7}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(7^{\frac{1}{3}\sqrt{12} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

$= 7^{2-1} = 7$

(38)

Lösung

a) $\underset{\underline{a=3}}{}\left|\frac{3n+1}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon}$

$n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$

ε	$\frac{2}{\varepsilon} - 1$	n_0
10^{-2}	199	$200 = 2\,10^2$
10^{-4}	$2\,10^4 - 1$	$2\,10^4 = 20\,000$
10^{-6}	$2\,10^6 - 1$	$2\,10^6 = 2\,\text{Mio}$

b) $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 1\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$\underline{a=1}$

$\varepsilon > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$

ε	$-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$	n_0
10^{-1}	3.32	4
10^{-3}	9.96	10
10^{-5}	16.6	17

(37)

d) $a_{n+1} - a_n = -2n < 0$

a_n monoton fallend

e) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} > 1 \quad \forall n \geq 3$

$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{9} \quad a_3 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

streng monoton wachsend ab $n = 4$.

(33)

<u>Lösung</u>

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$ $\quad a = 1$

b) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$ $\quad$ bestimmt divergent

c) $a_n = 1 + (-1)^n$

$\langle a_n \rangle = 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$ $\quad$ divergent

d) $a_n = \frac{n}{2^n}$

$a_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$ $\quad a = 0$

e) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$

$a_n = 2, \frac{5^2}{3^2}, \frac{6^3}{4^3} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}, \frac{7^4}{5^4} = \frac{2401}{625}$

$$\lim a_n = \frac{\lim \left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e} = e^2$$

40

Lösung

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{2n} \right\rangle \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

b) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n-1}{n^2} \right\rangle \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

c) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3}{2^{n-1}} \right\rangle \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

d) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right\rangle$

$\qquad = \left\langle \frac{1}{n(n-1)} \right\rangle \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

e) $\langle a_n \rangle = (-1)^n n \qquad$ divergent

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

41

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Aufgabe :

a) Sei $\langle a_n \rangle$ eine monotone Folge mit $2<a_n<3$. Konvergiert diese Folge? Wenn ja, was können Sie über den Grenzwert aussagen?

b) Sei $\langle a_n \rangle$ eine monotone Folge mit $a_n<3$. Konvergiert diese Folge? Wenn ja, was können Sie über den Grenzwert aussagen?

Lösung

$$\left.\begin{array}{l}\langle a_n \rangle \text{ monoton} \\ \langle a_n \rangle \text{ beschränkt}\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \text{ konvergiert}$$

$$2 \leq a \leq 3$$

!

Bsp:

$$\langle a_n \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{n+1} \right\rangle \qquad 2 < a_n < 3$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2$$

$$\langle a_n \rangle = \left\langle 3 - \frac{1}{n+1} \right\rangle \qquad 2 < a_n < 3$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 3$$

42

Lösungen

a) $\lim \frac{2n+2}{1-3n} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-3} = -\frac{2}{3}$

b) $\lim \left[\left(\frac{4n+3}{5n-1}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{n+1}\right)\right] = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}+0\right) = \frac{2\cdot 3}{5}$

c) $\lim \frac{4+2n-3n^2}{2n^2-2} = -\frac{3}{2}$

d) $\lim \frac{3n^2-4n+5}{n+3}$ bestimmt divergent

e) $\lim \left(\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{3n^2}{4n+1}\right)$ divergent

f) $\lim \left(\frac{2-3n}{n+3}\right)^2 = \left(\lim \frac{2-3n}{n+3}\right)^2 = 9$

(44)

a) $\left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \qquad n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$

$N_0 = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right] + 1$

[.] Gaußklammer

b) $\frac{1}{n^2} < \varepsilon \qquad n > \sqrt{\varepsilon} \qquad N_0 = [\sqrt{\varepsilon}] + 1$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon^2} \qquad N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

d) $|\sqrt[n]{3} - 1| < \varepsilon$

$-\varepsilon < \sqrt[n]{3} - 1 < \varepsilon$

beachte $\sqrt[n]{3} > 1$ da $(\sqrt[n]{3})^n = 3 > 1$

$0 < \sqrt[n]{3} - 1 < \varepsilon$

$n > \frac{\ln 3}{\ln(1+\varepsilon)}$; $N_0 = [\ldots] + 1$

e) beachte $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < 1$ da $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n = \frac{1}{2} < 1$

$0 < 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \varepsilon$

$n > \frac{\ln 2}{-\ln(1-\varepsilon)} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{1-\varepsilon}}$, $N_0 = [\ldots] + 1$

f) $0 < \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$

$n^2 - \frac{1}{\varepsilon} n + 1 > 0$ quadr. Gl.

$n_{1/2} = \frac{1}{2\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}$

ist $\frac{1}{4\varepsilon^2} > 1$ dh $\varepsilon < \frac{1}{2}$

dann n_1, n_2 reell $n_1 > n_2$

ist $n > \frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - 1}$

dann $\left| \frac{n}{n^2+1} \right| < \varepsilon$.

$N_0 = [\ldots\ldots] + 1$

a) (634) $a_n = \frac{1}{3^n+1}$ $n = 1, 2, \dots$

$a_n < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n < \infty$

Reihe konvergiert wegen konvergenter Majorante
oder
Quotientenkriterium

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^n + 1}{3^{n+1} + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1.$

(45)

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $n = 1, 2, ..$

(635)

$0 < \sqrt{n} < n$ ⇒ $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert

auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante.

c) (636)

$a_n = \frac{n^3}{n!}$

Quotientenkriterium

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \to 0$

Reihe ist konvergent

d) (637) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0$$

Die Reihe ist konvergent

e) (638) $a_n = \frac{1}{(2n+1)\, 2^{2n+1}}$

$$0 < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

konvergent als Teil der geometrischen Reihe

$\Rightarrow \sum a_n < \infty$

Quotientenkrit. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{1}{4}$

(45)

7) (641) $a_n = \dfrac{n}{e^n}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$a_0 = 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{e} \to \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

konvergent

46

Aufgabe

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{a}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ mit $q = \sqrt{a}-1$

geometrische Reihe, konvergent f. $|q| < 1$

$|\sqrt{a}-1| < 1$

$-1 < \sqrt{a}-1 < 1$

$0 < \sqrt{a} < 2$

$\boxed{0 < a < 4}$

oder Wurzelkrit.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{a}-1 = q$ $|q| < 1$

10

b) Wurzelkriterium

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$

da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (VL) konvergent!

c) Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \, 2(n+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n!}$$

$$= n+1 \longrightarrow \infty$$

divergent

d) Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \left(\frac{6}{5}\right)^{n} \frac{n+1-2}{n+1+2} \, \frac{n+2}{n-2}$$

$$= \frac{5}{6} \, \frac{n-1}{n+3} \, \frac{n+2}{n-1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{5}{6} < 1$$

konvergent

e) Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

konvergent

NB: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} \underset{x=100}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = e^x - 1$

$= e^{100} - 1$

f) Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^5}{(n+1)!}\frac{n!}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5}\frac{1}{n+1}$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

konvergent

g) Quotientenkrit.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^9}\,\frac{n^9}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^9}(n+1)$$

$$\downarrow_{n\to\infty}$$

$$1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$$

divergent

h) Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{n^4}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\left(\frac{10}{9}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\frac{9}{10} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{10} < 1$$

konvergent

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{\frac{4}{n}}\cdot\frac{9}{10} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{10}$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim n^{\frac{4}{n}} = \lim\left(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\right) = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

46

2) Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan(n)}$$

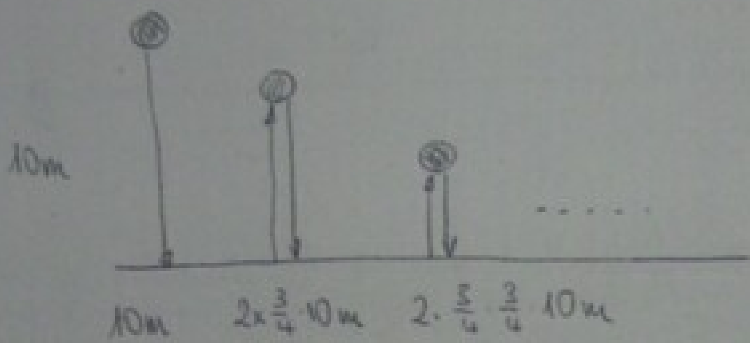
$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \arctan(n)} = \frac{1}{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi} < 1$$

konvergent

(47)

Aufgabe



Gesamtweg

$$s = 10m \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= 10m \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \right)$$

$$= 10m \left(1 + 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 \right) \right)$$

$$= 10m \underbrace{\left(1 + 2 \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}} - 1 \right)}_{= 4 - 1 = 3} \right)}_{= 7}$$

$$= \underline{\underline{70\,m}}$$

(37)

a) $$a_{n+1}-a_n = \frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)-n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

$\Rightarrow a_n$ streng monoton wachsend

b) $$a_{n+1}-a_n = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}-\frac{2^n}{1+2^n}$$

$$= 2^n\,\frac{2+2^{n+1}-1-2^{n+1}}{(1+2^{n+1})(1+2^n)}$$

$$= \frac{2^n}{(1+2^{n+1})(1+2^n)} > 0$$

a_n streng monoton wachsend

c) $$a_{n+1}-a_n = \left(3-\frac{1}{n+1}\right)-\left(3-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

$\Rightarrow a_n$ monoton wachsend
streng

48

c) (644) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $n = 1, 2 \dots$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

$\boxed{r=1}$ $|x| < 1$

$$\left(n(n+1) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{2(n+1)} (2k) \right), \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

d) (645) $a_n = \frac{1}{n^{n+1}}$

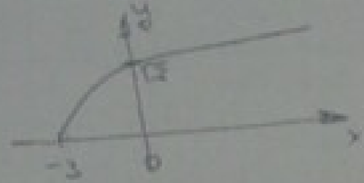
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot n} = 0$$

$\boxed{r = \infty}$ $\boxed{|x| < \infty}$

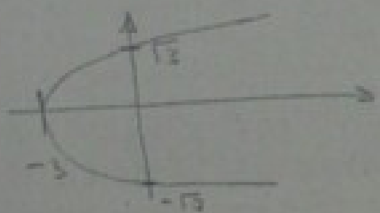
49

a) $x \mapsto \sqrt{x+3}$ $\qquad D(f) = [-3, \infty)$

$W(f) = [0, \infty)$



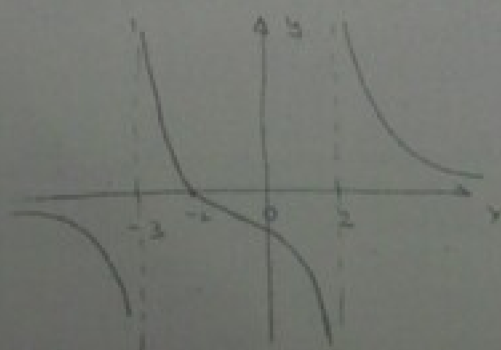
b) $y^2 = x+3$ Relation



mehrdeutig

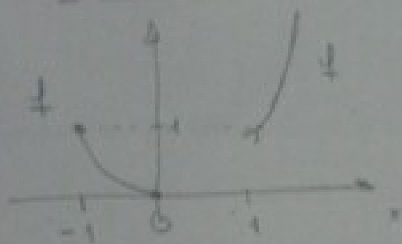
c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$ $\qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$

$W(f) = \mathbb{R}$



51

3. Restriktion (Bsp)

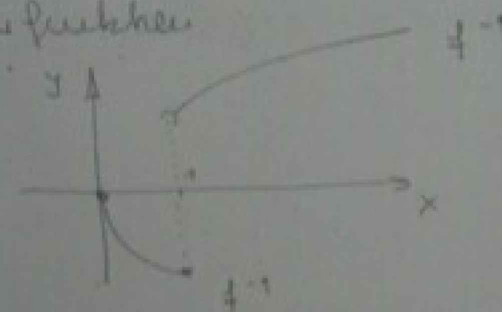


$D(f) = [-1,0] \cup (1,\infty)$ injektiv

$W(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \longmapsto x^2$

Umkehrfunktion



$D(f^{-1}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$W(f^{-1}) = [-1,0] \cup (1,\infty)$

$$x \longrightarrow \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \in [0,1] \\ +\sqrt{x}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

50

a) $F(x) = (1 + \sin(x^2))^3$

$f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$g(x) = \sin x$, $D(g) = \mathbb{R}$, $W(g) = [-1, +1]$

$h(x) = (1+x)^3$, $Dh = \mathbb{R}$, $W(h) = \mathbb{R}$

$W(f) \subset D(g)$ $W(g) \subset Dh$

b) $F(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $D(f) = (-\infty, 1]$ $W(f) = (-\infty, 1]$

$g(x) = 1 - x$ $D(g) = (-\infty, 1]$ $W(g) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

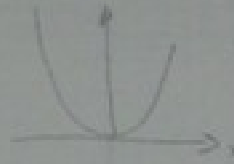
$h(x) = \sqrt{x}$ $D(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $W(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

d) $F(x) = |5 + 3x|$

$f(x) = 3x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$g(x) = 5 + x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$h(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

51

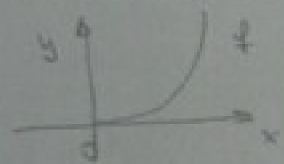
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

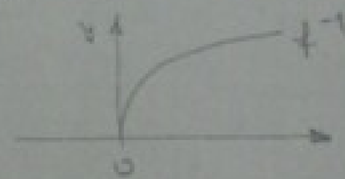


nicht umkehrbar

1. Restriktion (Vorlesung)

$$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \; x \mapsto x^2$$

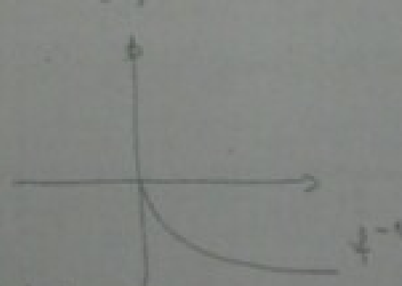




$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

2. Restriktion

$$f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$
$$x \mapsto -\sqrt{x}$$

52

$D(p_i) = W(p_i) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	1	2	3	4	5
p_1	2	4	1	5	3
p_2	2	5	4	3	1
p_3	5	4	3	2	1

a) alle drei Funktionen sind injektiv, da zwei verschiedene Argumente immer zu zwei verschiedenen Funktionswerten führen.

Inverse Funktionen

x	1	2	3	4	5
p_1^{-1}	3	1	5	2	4
p_2^{-1}	5	1	4	3	2
p_3^{-1}	5	4	3	2	1

b)

$p_1 \circ p_2$	4	3	5	1	2
$p_2 \circ p_3$	1	3	4	5	2
$p_2^{-1} \circ p_1$	4	3	5	1	3

c) beliebige weitere 120 − 8 Permutationen

d) Zahl der Permutationen mit n Elementen: $n!$

Vollständige Induktion

<u>Induktionsanfang</u>

$n = 1$ $D = W = \{1\}$

$p_1 : D \to W$ $p_1(1) = 1$

<u>eine</u> Permutation $= 1!$

<u>Induktionsschluss</u>

Vor: Zahl der Permutationen von n Elementen $= n!$

z.z: Zahl der Permutationen von $n+1$ Elementen $= n!$

gegeben sei eine der $n!$ Permutationen aus n Elementen $p_1(?)$

$p_1(1), p_1(2), p_1(3), \ldots, p_1(n)$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \ldots \quad \uparrow \quad \uparrow$

das zusätzliche Element $p_1(n+1)$ kann an $n+1$ verschiedenen Stellen eingefügt werden

$$n! * (n+1) = (n+1)!$$

(43)

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektro
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effing

effinger@fh-muenster
www.et.fh-muenster.d

Aufgabe 43:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-1}$

a) $= \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e \cdot 1 = e$

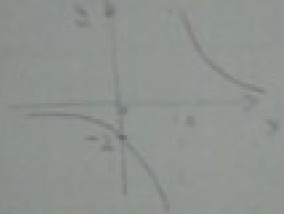
b) $= \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$

c) $= \lim \frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e \cdot e \cdot e}{1} = e^{3}$

53

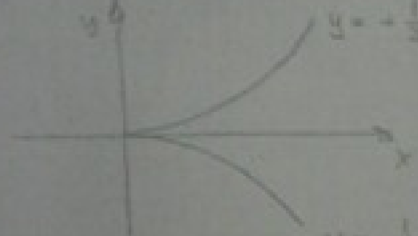
c) $\left(t, \frac{2}{t-1}\right) \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$y = \frac{2}{x-1}$ Ist Fkt. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$



d) $\left(t^2, \frac{1}{2} t^3\right) \quad t \in \mathbb{R}$

$x^3 = 4y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} x^3$ keine Fkt.



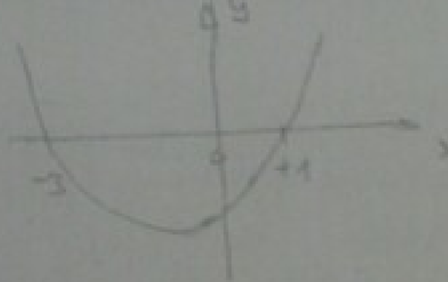
nur $t \in [0, \infty) \Rightarrow$ Funktion

6)

e) $(2t+1,\ t(t+2))$ $t \in \mathbb{R}$

$x = 2t+1$ injektiv $\Rightarrow t = \frac{1}{2}(x-1)$

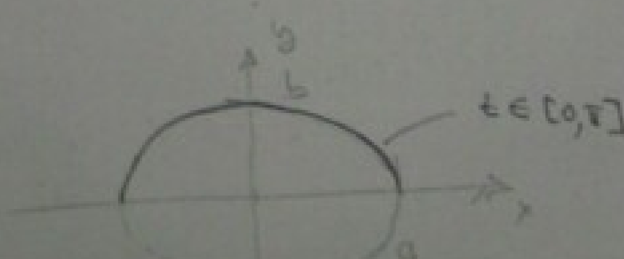
$y(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x+3)$ Parabel



Funktion

f) $(a\cos(t),\ b\sin(t))$ $t \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ Ellipse



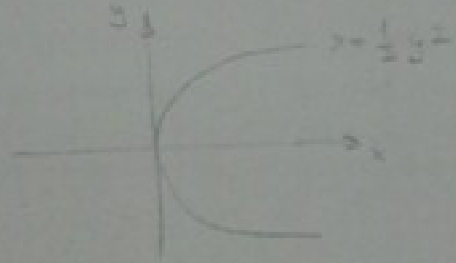
$t \in [0,\pi]$ Funktion

53

a) $(x(t), y(t)) = (\frac{1}{2}t^2, t) \quad t \in \mathbb{R}$

$y(t) = t$ injektiv $\Rightarrow t(y) = y$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$



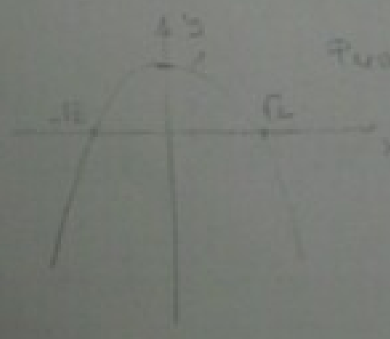
keine Fkt!

aber für $t \in [0, \infty)$ $\quad y = \sqrt{2x}$ Funktion!

c) $(\sin t, \cos 2t) \quad t \in \mathbb{R}$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$\Rightarrow y = 1 - 2x^2$ Funktion



Parabel

Lösung 54

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrrrrrl}
 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \\
-1 & & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & & \\
\hline
-1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & & &
\end{array}
$$

$x_1 = -1$ Nullstelle 2. Ordnung

$$x^{10} + 2x^9 + x^8 + x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \underline{(x^8+1)}$$

55

a) $x^4 - 19x^2 + 30x = x(x+5)(x-2)(x-3)$

b) $t^3 + 9t^2 - 210t + 200 = (t+20)(t-1)(t-10)$

c) $x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = (x-7)(x^2 - 8x + 25)$

$$= (x-7)(x-(4+3j))(3-(4-3j))$$

Methode

Suche ganzzahlige Nullstellen als Teiler des konstanten Terms a_0.

→ Hornerschema

$$x^2 - 8x + 25 = 0$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-25}$$

$$= 4 \pm 3j$$

(56)

Lösung

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) \quad , \sinh z = \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})$$

a) $\cosh^2 z + \sinh^2(z) =$

$$= \frac{1}{4}\left\{ e^{2z}+2+e^{-2z} + e^{2z}-2+e^{-2z} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{2z}+e^{-2z} \right\} = \cosh(2z)$$

b) $2 \sinh z \cosh z$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\left(e^{z}-e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2z}-e^{-2z}\right)$$

$$= \sinh(2z)$$

c) $$1-\tanh^2 z = 1-\frac{\sinh^2(z)}{\cosh^2 z} = \frac{\overbrace{\cosh^2 z - \sinh^2 z}^{1}}{\cosh^2 z}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 z}$$

d) $$1-\coth^2 z = 1-\frac{\cosh^2 z}{\sinh^2 z} = \frac{\sinh^2 z - \cosh^2 z}{\sinh^2 z}$$

$$= -\frac{1}{\sinh^2 z}$$

57

a) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-4} = \frac{x^2-2}{x^2-2} \cdot \frac{1}{x^2+2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{6}$

b) $f(x) = \frac{3x^2-4x}{2x+5} \xrightarrow[x \to -1]{} = \frac{7}{3}$

c) $f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{3-x}}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)\sqrt{3-x}}{(x-2)(x+3)}$

$\xrightarrow[x \to 2]{} \frac{1}{5}$

d) $f(x) = \frac{2-\sqrt{4-x}}{x} \cdot \frac{2+\sqrt{4-x}}{2+\sqrt{4-x}}$

$= \frac{4-(4-x)}{x(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x}} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{4}$

e) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3}$ Hauptnenner

$= \frac{x^3+3x-4}{(x-1)(x^3-1)} = \frac{x^2+x+4}{x^3-1}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Zähler} \to 6 \\ \text{Nenner} \to 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht.

57

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-x}{2x^2-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{(x-1)x}{(x+1)(x-1)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}$$

g) rechtsseitiger Grenzwert

$$g^+ = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \operatorname{sgn}(x-3) = -1$$

$$g^- = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{4x^2-4x-8}{12-3x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{x+1}{x+2} = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = -1$$

$g^+ = g^- = g$ Grenzwert -1.

1.67

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 0 \end{vmatrix}^{(n,n)}$

$\text{Zeile}_2' = \text{Zeile}_2 - \text{Zeile}_1$
$\;\;\;\;\;3 \qquad\qquad 3 \qquad\quad 1$
...

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Zeile}_1' = \text{Zeile}_1 + \text{Zeile}_2 \\ \;\;\;\;\;1 \qquad\qquad 1 \qquad\quad 3 \\ \ldots\end{array}\right\}$ $(n-1)$ mal

$= \begin{vmatrix} (n-1) & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & -1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ Dreiecksmatrix

$= \underline{(-1)^{n-1}(n-1)}$ Speziell $n=6$: $\underline{-1 \cdot -5}$

A.61

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & & n+1 & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & & n+2 & n+3 \\ & & & & & & \\ n & n+1 & & & & 2n-2 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & & & & 2n-1 & 2n \end{vmatrix}$$

$\text{Zeile}_3' = \text{Zeile}_3 - \text{Zeile}_2$
$\text{Zeile}_2' = \text{Zeile}_2 - \text{Zeile}_1$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & & \end{vmatrix}$$

Zwei gleiche Zeilen

$\det B = 0.$

1.67

c) Beachte Differenzen zweiter Ordnung

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \\ & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \\ & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 16 & 25 & 36 & 49 & 64 \\ 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \end{vmatrix}$$

$Z_5' = Z_5 - Z_4$
$Z_4' = Z_4 - Z_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$$

$Z_5' = Z_5 - Z_4$
$Z_4' = Z_4 - Z_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

1.67

d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2a} & 4 \\ a & \sqrt{8a} \end{vmatrix} = \sqrt{16a^2} - 4a = 0$

e) $\begin{vmatrix} e^x+e^{-x} & e^x-e^{-x} \\ e^x-e^{-x} & e^x+e^{-x} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{vmatrix}$

$= 4(\cosh^2 x - \sinh^2 x) = 4$

f) $\begin{vmatrix} n! & (n+1)! \\ (n+1)! & (n+2)! \end{vmatrix} = n!(n+2)! - (n+1)!(n+1)!$

$= (n!)^2\big((n+1)(n+2) - (n+1)^2\big)$

$= (n!)^2(\cancel{n^2}+3n+2-\cancel{n^2}-2n-1) = (n!)^2(n+1)$

g) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \cos^2 y \end{vmatrix} = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y$

$= \sin^2 x - \sin^2 y$

$= (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$

1.68

Lösung entweder über die Adjungierte oder mittels Gaußschem Algorithmus

a) $\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad |A| = -31$

Probe ✓

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$

$|B| = 1\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{vmatrix} + (-3)(-1)\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 11+39 = 50$

Adjunkten

$B_{11} = \begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix} = 9$, $B_{12} = (-1)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 3$, $B_{13} = \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix} = -10$

$B_{21} = 6$, $\qquad B_{22} = 2$ $\qquad B_{23} = 10$

$B_{31} = 11$ $\qquad B_{32} = -12$ $\qquad B_{33} = 10$

$$B^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix}9 & 3 & -10\\ 6 & 2 & 10\\ 11 & -12 & 10\end{pmatrix}^T = \underline{\frac{1}{50}\begin{pmatrix}9 & 6 & 11\\ 3 & 2 & -12\\ -10 & 10 & 10\end{pmatrix}}$$

Probe ✓

1.68

Gauß

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

Tausche Zeile$_1$ und Zeile$_3$

$z_1 \leftrightarrow z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$z_3' = z_3 - 3z_1$, $z_2' = z_2 - 2z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$z_3' = z_3 - z_2$

$z_3' = -\frac{1}{5} z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$z_2' = z_2 - 3z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$z_2' = \frac{1}{10} z_2$

$z_1' = z_1 + 3z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{50} & \frac{6}{50} & \frac{11}{50} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{50} & \frac{2}{50} & -\frac{13}{50} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{50} & \frac{10}{50} & \frac{10}{50} \end{array}\right)$$

$\uparrow B^{-1}$

1.68)

c) $\begin{vmatrix} -a & 2b+1 \\ -b & -a-4 \end{vmatrix} = a(a+4) + b(2b+1)$

Determinante $= 0$ wenn $\dfrac{(a+2)^2}{\sqrt{\frac{33}{8}}^{\,2}} + \dfrac{(b+\frac{1}{4})^2}{\sqrt{\frac{33}{16}}^{\,2}} = 1$

d.h. a, b auf Ellipse

$C^{-1} = \dfrac{1}{a(a+4)+b(2b+1)} \begin{pmatrix} -a-4 & -2b-1 \\ b & -a \end{pmatrix}$

1.69)

$A \cdot X \cdot B = C$

$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

<u>Lösung</u>

a) $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

wenn Inversen existieren

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Probe ✓

$X1 = CB^{-1}1^{-1}$

$X1 = C$

$X = C \cdot 1^{-1}$

$1X = C$

$X = 1^{-1}C$

b) $B^{(4,3)} = X^{(4,3)} A^{(3,3)}$

Falls A regulär $\quad X = BA^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Probe ✓

(1.69)

<u>Berechnung von A^{-1}</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} z_2' = z_2 - z_1 \\ z_3' = z_3 - 2z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3' = -z_3]{z_3' = z_3 + z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1' = z_1 - z_3]{z_1' = z_1 - z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Probe ✓

c) jeder beliebige Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ kann als Linearkombination der drei Basisvektoren dargestellt werden

$$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = \vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Löse das lineare Gleichungssystem oder Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = 6\vec{a}$$

$$A^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$A^{-1}\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = 1 \cdot \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$$

1.7d)

a) Drehung um $30° = \frac{\pi}{6} = \varphi$

laut Vorlesung

$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \sin\varphi$
$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$
$= 1$

Determinante $= 1$

$$D_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \text{Drehung um } -\frac{\pi}{6}$$

D_2^{-1} berechnen aus $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

b)

$$T\vec{x} = \begin{pmatrix} a & 0 & u \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+u \\ by+v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{=}$ Skalierung der x-Achse mit a
— " — y-Achse mit b
und
Verschiebung in x-Richtung um u
— " — y- — " — um v

$$D_3^{(3,3)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ wie oben

1.10/

Inverse Matrizen über Adjunkten $A_{ik} = (-1)^{i+k}|U_{ik}|$ berechnen

$\det D_3^{(2,1)} = 1$ (Entwicklung nach 3. Spalte)

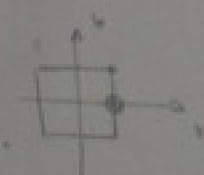
$\det T = ab$ (Dreiecksmatrix)

$$D_3^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

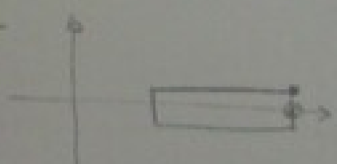
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{u}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{v}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TD : zuerst drehen, dann verschieben und skalieren

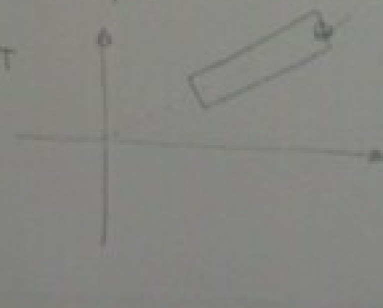
DT : zuerst verschieben und skalieren dann drehen



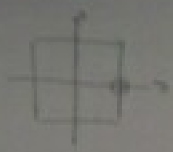
T



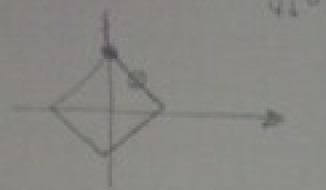
DT



A.10)



D :



TD :

Offensichtlich

$$DT \neq TD$$

Bew:

$$DT = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -b\sin\varphi & u\cos\varphi - v\sin\varphi \\ a\sin\varphi & b\cos\varphi & u\sin\varphi + v\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TD = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -a\sin\varphi & u \\ b\sin\varphi & b\cos\varphi & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi = \frac{\pi}{4} \hat{=} 45°, \; a = 1 \;\; b = \frac{1}{10} \;, u = 5, v = 0$

$$DT = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{10\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{10\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{DT} \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$TD = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 \\ \frac{1}{10\sqrt{2}} & \frac{1}{10\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{TD} \begin{pmatrix} \frac{1 + 5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{10\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.71)

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

71

Aufgabe : (WS03, Fetzer 6.2.22)
Es sei $A^{(n,n)} = (a_{ii})$ eine Diagonalmatrix mit $a_{ii} \neq 0$ für alle i. Wie lauten die Elemente der Inversen A^{-1}, falls sie existiert?

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$$

$\Rightarrow$ A^{-1} existiert

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Aufg 12

Aufgabe

a) $V = \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R},\ a,b \in \mathbb{R} \}$ Vektorraum?

b) $\langle f, g \rangle = f(x_0)\, g(x_0)$; $x_0 \in [a,b]$ Skalarprodukt?

a) Überprüfung der Definition eines Vektorraums

I 1) jedem $f, g \in V$ wird eine $f+g \in V$ zugeordnet. o.k.

2) es existiert ein neutrales Element (Nullvektor)

$f_0 : x \longmapsto 0$

$f + f_0 = f \quad \forall f \in V$ ok

3) zu jedem f existiert ein additives Inverses f' mit $f + f' = f_0 = 0$ erfüllt durch $f' : x \longmapsto -f(x) \in V$

4) Assoziativgesetz

$(f+g)+h = f+(g+h)$ erfüllt, da

$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$

5) Kommutativgesetz

$f+g = g+f$ erfüllt, da

$f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$

Aufg. 72

II 1) Die Fkt $\lambda f \in V$ wenn $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$ erfüllt

3) $\lambda(f+g)$ — " — "

4) $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$ — " —

5) $1 \cdot f = f$ "

$\Rightarrow$ V ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

b) Skalarprodukt

1) $(f,f) = f(x_0)^2 \geq 0$ erfüllt

$(f,f) = 0$ genau dann wenn $f = 0$

nicht erfüllt, da

$(f,f) = 0$ gilt bereits wenn $f(x_0) = 0$.

2) $(f,g) = (g,f)$ erfüllt

3) $(f, g+h) = (f,g) + (f,h)$ erfüllt

4) $\lambda(f,g) = (\lambda f, g) = (f, \lambda g)$

wegen 1) ist (f,g) kein Skalarprodukt.

Aufg. 13

Lösung:

$$1 \cdot [\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}] + 1 \cdot [\vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b}] + 1 \cdot [\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}] = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Es existiert eine Linearkombination der drei Vektoren [ ], [ ], [ ] mit nicht-verschwindenden Koeffizienten 1, 1, 1, die den Nullvektor ergibt.

$\Rightarrow$ [ ], [ ], [ ] sind drei linear abhängige Vektoren

Aufg. 14

Lösung

a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind 3 linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad\quad &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

besitzt nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Bew: entweder direkt lösen oder

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\det = 1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det = 1$, eindeutig lösbar

3 linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

b) Die Vektoren sind nicht normiert und nicht orthogonal zueinander

Aufg. 15

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{2}{400} & -\frac{6}{400} & \frac{2}{200} & 0 & \frac{6}{200} \end{array}\right) \xrightarrow[z_1' = z_1(-1)]{z_3' = -\frac{400}{2} z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -6 & -2 & -7 & 6 & 0 & -14 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1' = z_1 + 2z_3]{z_2' = z_2 - [illegible] z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -6 & 0 & -1 & 2 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1' = z_1 + 6z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & +8 & 0 & +4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Lösungen $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

2)

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & 4 \\ 25 & 16 & -11 \end{pmatrix}$$

Aufg. 16

Lösung

a)

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 2 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_2' = z_2 - \frac{10}{8} z_1 \\ z_1' = z_1/8}]{z_3' = z_3 + z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3' = \frac{1}{8} z_3]{z_2' = \frac{2}{3} z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{z_3' = z_3 - z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{24} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_2' = z_2 - z_3 \\ z_1' = z_1 - \frac{5}{4} z_3}]{z_3' = 4 z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{97}{24} & \frac{5 \cdot 13}{24} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & \frac{17}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{z_1' = z_1 - \frac{1}{4} z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & \frac{17}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -18 & 12 & -3 \\ -25 & 17 & -3 \\ 20 & -13 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_2' = -\frac{1}{2} z_2 \\ z_3' = -\frac{1}{6} z_3}]{z_1' = \frac{1}{5} z_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[z_3' = z_3 - z_1]{z_2' = z_2 - z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[z_3' = -3 z_3]{z_2' = -2 z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{z_3' = z_3 - z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

$Rg(A) = 2 < 3$ A singulär