Klausur zur Vorlesung „Mathematik 1“
Wintersemester 2004/05

Fachhochschule Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. G. Bauer

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist.

b) Untersuchen Sie, ob die Relation
$$R = \{(f,g) \in M^2 \mid f-g \text{ ist gerade}\} \text{ mit } M = \{\, f \mid f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$$
eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie jeweils auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) 0,17 ; 0,1717 ; 0,171717 ; ...

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin\frac{2}{n}\right)^n$

c) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(2-\frac{1}{x}\right) + 6}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(2-\frac{1}{x}\right) + 10}$

Aufgabe 4 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung
$$\operatorname{Im} z \geq \left|z - 1 - \tfrac{1}{2}j\right|$$
für $z \in \mathbf{C}$ und skizzieren Sie diese Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 5

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -9 \end{array}$$
und deuten Sie diese Menge geometrisch.

b) Untersuchen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

c) Zeigen Sie: Zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 einer quadratischen Matrix A gehörige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 6 Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der Wurzelfunktion an der Stelle $x_0 = 5$.

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{z \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{N} \vee z = 0 \vee -z \in \mathbb{N}\}$ 1

$\mathbb{Z}$ abzählbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ bijektive Abb. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ 1

Wähle z.B.

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$$ 2

4

b) Untersuchen Sie, ob die Relation

$$R = \{(f,g) \in M^2 \mid f - g \text{ ist gerade}\} \text{ mit } M = \{\, f \mid f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$$

eine Äquivalenzrelation ist.

i) fRf für alle $f \in M$, denn die Nullfkt $h = f - f = 0$ ist 1

gerade: $\forall x \in \mathbb{R}\ h(-x) = 0 = h(x)$. Also ist R reflexiv.

ii) $fRg \Rightarrow h = f - g$ ist gerade $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ h(-x) = h(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ -h(-x) = -h(x) \Rightarrow -h = g - f$ ist gerade 1

$\Rightarrow gRf$. Also ist R symmetrisch.

iii) $fRg \wedge gRh \Rightarrow p = f - g$ und $q = g - h$ sind gerade

$\Rightarrow f - h = (f - g) + (g - h) = p + q = r$ ist gerade, denn 2

$\forall x \in \mathbb{R}\ r(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) + q(x) = r(x)$

$\Rightarrow fRh$. Also ist R transitiv.

i), ii), iii) $\Rightarrow$ R ist Äquivalenzrelation 1

5

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsverankerung $(n=1)$:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2\cdot 1-1)^2 = 1 = \binom{3}{3} = \binom{2\cdot 1+1}{3} \quad ✓ \qquad 1$$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = (2(n+1)-1)^2 + \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \qquad 1$$

Induktionsannahme

$$= (2n+1)^2 + \binom{2n+1}{3} \qquad 1$$

$$= \frac{(2n+1)}{3!}\left[6(2n+1) + 2n(2n-1)\right] \qquad 1$$

$$= \frac{2n+1}{3!}\left[4n^2 + 10n + 6\right]$$

$$= \frac{2n+1}{3!}(2n+2)(2n+3)$$

$$= \binom{2n+3}{3} = \binom{2(n+1)+1}{3} \quad ✓ \qquad 1$$

5

Aufgabe 3 Untersuchen Sie jeweils auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) 0,17; 0,1717; 0,171717; ...

$a_1 = 0{,}17 \; ; \; a_2 = 0{,}1717 \; ; \; a_3 = 0{,}171717 \; ; \; \ldots$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 17 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^k = 17 \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{100}\right)^k - 1 \right]$$ 1

geometrische Reihe

$$\stackrel{}{=} 17 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{100}} - 1 \right]$$ 1

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 17 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 1 \right] = \frac{17}{99} = 0{,}\overline{17}$$ 1

3

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{2}{n}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{2}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \left(n \sin \frac{2}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} n \sin \frac{2}{n}$$ 1

$\sin \frac{2}{n} > 0$ für großes n

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 2$$ 1

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2 > 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$ 1

nach dem Wurzelkriterium

3

c) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

$$\lim_{x\downarrow 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\downarrow 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}}$$ 1

$$= \lim_{x\downarrow 1}\ln(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}} = \ln\left(\lim_{x\downarrow 1}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right]^{\frac{1}{x-1}}\right)$$ 1

Substitution
$y = \frac{1}{x-1}$

$$= \ln\left(\lim_{y\to\infty}\left[1+\frac{1}{y}\right]^{y}\right) = \ln e = 1$$ 1

3

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(2-\frac{1}{x}\right)+6}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(2-\frac{1}{x}\right)+10}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(2-\frac{1}{x}\right)+6}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(2-\frac{1}{x}\right)+10} = \lim_{y\uparrow 2}\frac{y^2-5y+6}{y^2-7y+10}$$ 1

$$= \lim_{y\uparrow 2}\frac{\cancel{(y-2)}(y-3)}{\cancel{(y-2)}(y-5)} = \lim_{y\uparrow 2}\frac{y-3}{y-5}$$ 1

$$= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$ 1

3

Aufgabe 4 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\mathrm{Im}\, z \geq \left|z - 1 - \tfrac{1}{2}j\right|$$

für $z \in \mathbf{C}$ und skizzieren Sie diese Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

$\mathrm{Im}\, z \geq |z - 1 - \frac{1}{2} j|$

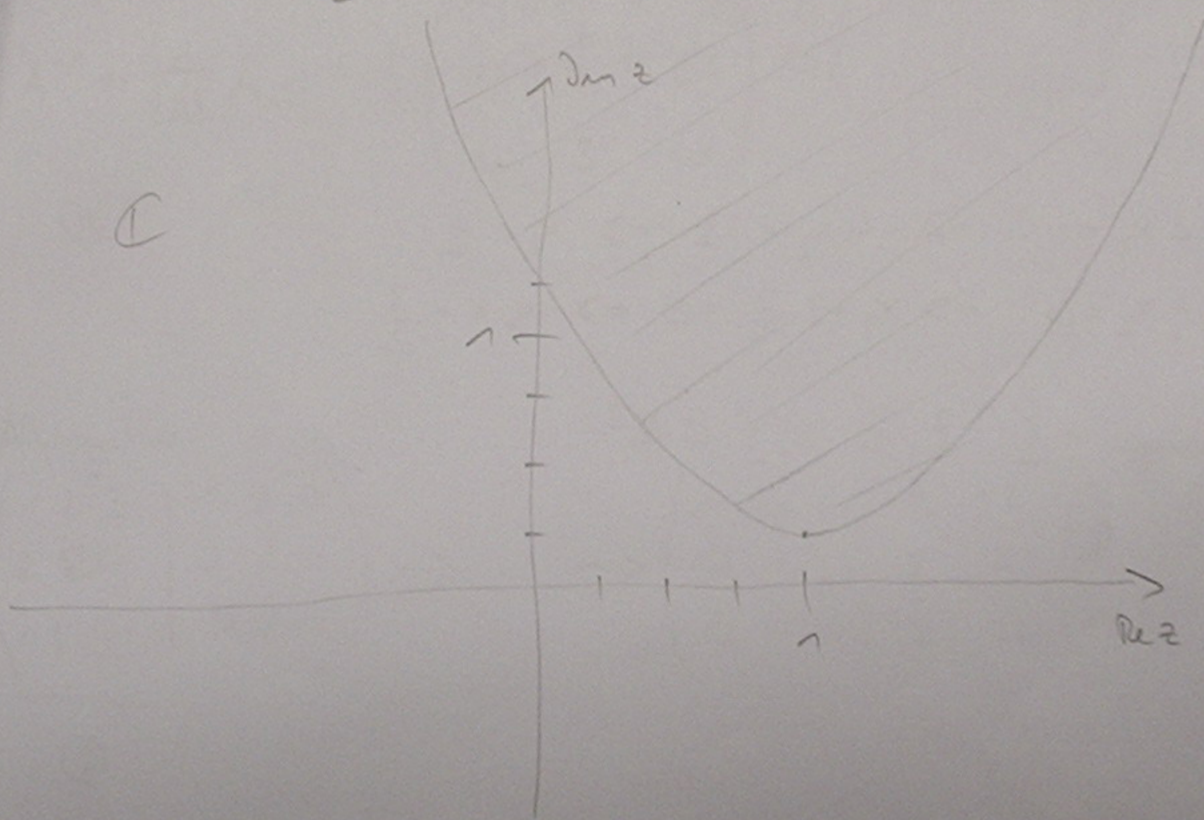
$\Leftrightarrow \; y \geq \sqrt{(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2} \qquad (z = x + jy)$ 2

$\Leftrightarrow \; y^2 \geq (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \;\wedge\; y \geq 0$

$\Leftrightarrow \; y^2 \geq (x-1)^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} \;\wedge\; y \geq 0$

$\Leftrightarrow \; y \geq (x-1)^2 + \frac{1}{4}$ 1

Lösungsmenge $= \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + jy,\; y \geq (x-1)^2 + \frac{1}{4},\; x \in \mathbb{R},\; y \in \mathbb{R} \}$ 1



1 ... 1

5

Aufgabe 5

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \\ 4x_2 - x_3 &= 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= -9 \end{aligned}$$

und deuten Sie diese Menge geometrisch.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -12 & 6 & -9 \end{array}\right)$$ 1

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 1

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ -4x_2 + 2x_3 = -3 \Rightarrow -4x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 2\cdot\frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} \end{array}\right\}$$ 1

Lösungsmenge $= \{(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ 1

Punkt im $\mathbb{R}^3$ 1

5

b) Untersuchen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1(-1) = 2$$ 1

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar 1

$$\left.\begin{array}{lll} |U_{11}| = 1 & |U_{12}| = 10 & |U_{13}| = 7 \\ |U_{21}| = -1 & |U_{22}| = 4 & |U_{23}| = 3 \\ |U_{31}| = -1 & |U_{32}| = -2 & |U_{33}| = -1 \end{array}\right\}$$ 2

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_{adj} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$ 1

5

Alternativ:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

c) Zeigen Sie: Zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 einer quadratischen Matrix A gehörige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind linear unabhängig.

Annahme: $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ linear abhängig

$\Rightarrow \underline{x}_1 = \mu\, \underline{x}_2$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ ①

$\Rightarrow A\underline{x}_1 = \mu A \underline{x}_2$

$\Rightarrow \lambda \underline{x}_1 = \mu \lambda_2 \underline{x}_2$ ①

$\Rightarrow \lambda_1 \underline{x}_1 = \lambda_2 \underline{x}_1$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, ①

Widerspruch zur Voraussetzung. ①

Also sind $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ linear unabhängig.

④

Aufgabe 6 Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der Wurzelfunktion an der Stelle $x_0 = 5$.

$f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R}^{\geq 0})$ ①

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5}}$$ ①

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}$$ ①

③