Fundamentalsatz der Analysis

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

(Weitergeleitet von Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Wechseln zu: Navigation, Suche

Der **Fundamentalsatz der Analysis**, auch bekannt als **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bringt die beiden grundlegenden Konzepte der Analysis, nämlich das der Integration und das der Differentiation, miteinander in Verbindung. Er besagt: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$ ein beliebiges Element, so ist die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

stetig differenzierbar und ihre Ableitung ist $F' = f$.

Beweis des Fundamentalsatzes

Es sei $x \in I$ fest und (h_n) eine Nullfolge mit der Eigenschaft, dass $h_n \neq 0$ und $x + h_n \in I$ stets gilt. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung zu jedem n ein c_n zwischen x und $x + h_n$, so dass

$$F(x+h_n) - F(x) = \int_x^{x+h_n} f(t)\,dt = f(c_n) \cdot h_n$$

gilt. Nach dem Einschnürungsprinzip für Folgen gilt $c_n \to x$, und wegen der Stetigkeit von f folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(\lim_{n\to\infty} c_n) = f(x),$$

d.h. F ist in x differenzierbar mit der Ableitung $f(x)$.

Anwendungen

Berechnung von Integralen durch Stammfunktionen

Die hauptsächliche Bedeutung des Fundamentalsatzes liegt darin, dass er es ermöglicht, die Integrale vieler Funktionen exakt zu berechnen. Dazu verwendet man die folgende Folgerung aus dem Fundamentalsatz: ist I wieder ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f (also eine differenzierbare Funktion mit $F' = f$), so gilt für beliebige $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

.

Der Beweis dieser Folgerung ergibt sich damit, dass sich Stammfunktionen derselben Funktion nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung nur um eine additive Konstante unterscheiden können, die aber wegen der Differenzbildung nicht ins Gewicht fällt.

Damit ist das Problem der Berechnung von Integralen auf das Problem der Bestimmung von Stammfunktionen zurückgeführt; dies ist jedoch im Allgemeinen sehr schwierig.

Beispiele

Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = x^2$ besitzt die Stammfunktion $F(x) = x^3 / 3$, und wir erhalten somit

$$\int_0^2 x^2\,dx = F(2) - F(0) = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

Die auf $I = [-1,1]$ definierte Funktion $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, deren Graph den Rand eines Einheitshalbkreises beschreibt, besitzt die Stammfunktion $G(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x + x \cdot g(x))$. Für die Fläche des Einheitskreises erhält man somit den Wert

$$2\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 2(G(1) - G(-1)) = \pi.$$

Tabelle einfacher Ableitungs- und Stammfunktionen

Diese Tabelle ist zweispaltig aufgebaut. In der linken Spalte steht die Ableitung der Funktion in der rechten Spalte, umgekehrt ist die Funktion in der rechten Spalte eine Stammfunktion der Funktion in der linken Spalte (siehe auch die Bemerkung [1] am Ende der Tabelle).

$f(x)$	$F(x)$
0	C
$k\ (k \in \mathbb{R})$	$kx + C$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$2x$	x^2
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$3x^2$	x^3
$qx^{q-1}\ (q \neq 0)$	x^q
x^q	$\begin{cases} \frac{x^{q+1}}{q+1} & \text{wenn } q \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert & \text{wenn } q = -1 \end{cases}$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$a^x \ln a\ (a > 0, a \neq 1)$	a^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$e^{x \ln\lvert x\rvert}(\ln\lvert x\rvert + 1)$	$\lvert x\rvert^x$ entspricht $e^{x \ln\lvert x\rvert}$

	$(x \neq 0)$
$\dfrac{-2}{x^3}$	$\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{-1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$	$\log_a x$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{\ln a}(x \ln x - x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\cos x$
$\cot x$	$\ln\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot x$
$\arcsin x$	$x\ \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos\ x - \sqrt{1 - x^2}$
$\arctan x$	$x \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arccos x$
$\dfrac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2 + 1} + \arctan x\right)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$
$\coth x$	$\ln\sinh x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$
$\dfrac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\coth x$
$\operatorname{arsinh}\ x$	$x\ \operatorname{arsinh}\ x - \sqrt{x^2 + 1}$

$\operatorname{arcosh} x$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$
$\operatorname{artanh} x$	$x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln\left(1 - x^2\right)$
$\operatorname{arcoth} x$	$x \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - 1\right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ x > 1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x \rvert < 1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x \rvert > 1$	$\operatorname{arcoth} x$
$\sin^2 x$	$\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$
$\cos^2 x$	$\frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}$
e^{-x^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erf} x$
e^{-ax^2+bx+c}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\ e^{\frac{b^2}{4a}+c} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{a}\ x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x)$

[Bearbeiten]

Bemerkung

1. ↑ Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion ist, dann ist auch für jede Konstante C die Funktion $F(x) + C$ eine Stammfunktion. Die additive Konstante C ist daher nur für die ersten Zeilen angegeben. Zum Beispiel ist auch $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ eine Stammfunktion von $f(x) = x$.

[Bearbeiten]

Rekursionsformeln für weitere Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx, \quad n \geq 2$$

Integration durch Substitution

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Die **Substitutionsregel** ist ein wichtiges Hilfsmittel um Stammfunktionen und Integrale zu berechnen. Sie ist das Gegenstück zur Kettenregel in der Differentialrechnung. Anschaulich ausgedrückt wird durch die Substitution ein Teil des Integranden ersetzt. Das Ziel liegt dabei darin, das Integral zu vereinfachen und so letztendlich auf ein elementares Integral zurückzuführen. Es ist dabei jedoch zu beachten, immer auch das Differential und evt. auch die Integrationsgrenzen mitzusubstituieren.

Die Verallgemeinerung der Substitutionsregel auf mehrdimensionale Integrale ist der Transformationssatz.

Substitution eines bestimmten Integrals

Ist $f(x)$ eine integrierbare Funktion und $\varphi(t)$ eine auf dem Intervall $[a,\ b]$ stetig differenzierbare Funktion deren Bildbereich im Wertebereich von f liegt, dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{=\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}} \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

wobei $t = \varphi(x)$, also insbesondere $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$.

Diese Formel wird benutzt, um ein Integral in ein anderes Integral zu transformieren, das einfacher zu bestimmen ist. Man sagt $\varphi(t)$ substituiert x und umgekehrt.

Beispiel 1

Berechnung des Integrals

$$\int_0^a \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

für eine beliebige reelle Zahl $a > 0$: Durch die Substitution $t = 2x$ erhalten wir $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$ und

$$\int_0^a \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[-\cos(t)]_0^{2a} = \frac{1}{2}(-\cos(2a)+\cos(0)) = \frac{1}{2}($$

.

Beispiel 2

Berechnung des Integrals

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$$:

Durch die Substitution $t = x^2 + 1$ erhalten wir $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ und

$$\int_0^2 x\cos(x^2{+}1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 2x\cos(x^2{+}1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin(5){-}\sin($$

Man beachte, dass die untere Grenze des Integrals $x = 0$ in $t = 0^2 + 1 = 1$ umgewandelt wurde und die obere Grenze $x = 2$ in $t = 2^2 + 1 = 5$.

Beispiel 3

Berechnung des Integrals

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Man substituiert $x = \sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin(x)$, was zu $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ führt und mit $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$ die letzte Gleichung ergibt:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Das Ergebnis kann mit Partieller Integration oder mit der trigonometrischen Formel

$$\cos(t)^2 = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

und einer weiteren Substitution berechnet werden.

Substitution eines unbestimmten Integrals

Wenn $f(x)$ eine integrierbare Funktion ist und $\varphi(t)$ eine stetig differenzierbare und streng monotone Funktion, deren Bildbereich im Wertebereich von f ist, dann gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Nachdem man eine Stammfunktion der substituierten Funktion bestimmt hat, macht man die Substitution rückgängig und erhält eine Stammfunktion der ursprünglichen Funktion.

Beispiele

Beispiel 1

Mit der Substitution $x = t - 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ erhält man

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan t + C = \arctan(x + 1) + C$$

Beispiel 2

Mit der Substitution $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ erhält man

$$\int x\ \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin(t) + C') = \frac{1}{2}\sin($$

Man beachte, dass die Substitution nur für $x \geq 0$ bzw. nur für $x \leq 0$ streng monoton ist.

Spezialfälle der Substitution

Logarithmische Integration

Integrale mit der speziellen Form *Zähler des Integranden ist Ableitung des Nenners* können sehr einfach mit Hilfe der logarithmischen Integration gelöst werden, was einen Spezialfall der Substitutionsmethode darstellt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \quad (\forall f(x) \neq 0)$$

Lineare Substitution

Integrale mit linearen Verkettungen können wie folgt berechnet werden:

$$\int f(mx + n)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}F(mx + n) + C \qquad (\forall\ m \neq 0)$$

Für das bestimmte Integral gilt entsprechend

$$\int_a^b f(mx + n)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\int_{ma+n}^{mb+n} f(u)\mathrm{d}u \qquad (\forall\ m \neq 0)$$

Partielle Integration

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Die **partielle Integration**, auch **Produktintegration** genannt, ist in der Integralrechnung eine Möglichkeit zur Bestimmung von Stammfunktionen. Sie kann als die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung aufgefasst werden.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$
$$\int u' \cdot v \,\mathrm{d}x = \int (u \cdot v)' \,\mathrm{d}x - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x$$
$$\int u' \cdot v \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x$$

Folglich gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

oder dasselbe, wie man es in vielen Mathematikbüchern finden kann:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

Diese Regel ist insbesondere dann von Vorteil, wenn durch Ableiten von $f(x)$ eine einfachere Funktion entsteht.

Beispiel:

$$\int_a^b x \cdot \ln(x) \,\mathrm{d}x$$

Setzt man

$f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = x$,

so ist

$f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{x^2}{2}$

und man erhält

$$\int_a^b x \cdot \ln(x)\, \mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} \cdot \ln(b) - \frac{a^2}{2} \cdot \ln(a) - \int_a^b \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{b^2}{2} \cdot \left(\ln(b) - \frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2} \cdot \left(\ln(a) - \frac{1}{2}\right)$$

Alternative Schreibweise

Es seien $u(x), v(x)$,

deren Stammfunktionen $U(x), V(x)$,

sowie deren Ableitungen $u'(x), v'(x)$.

$u(x)$ ist die Funktion, die man bevorzugt ableiten möchte, $v(x)$ ist die Funktion, die man bevorzugt integrieren möchte. Dann gilt:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\, \mathrm{d}x$$
$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x = [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\, \mathrm{d}x$$

Methoden der partiellen Integration

Zur effektiven Nutzung der partiellen Integration gibt es verschiedene Standardtricks.

- Manchmal kann man es sich zunutze machen, dass nach mehreren Schritten der partiellen Integration das ursprüngliche Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wiederkehrt, welches man dann durch Äquivalenzumformung mit dem ursprünglichen Integral auf der linken Seite zusammenfassen kann.

Beispiel 1

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x$$

Setzt man

$f(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = \sin(x)$,

so ergibt sich

$f'(x) = -\sin(x)$ und $g(x) = -\cos(x)$

und man erhält

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung das Ausgangsintegral, ergibt sich:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

Dividiert man beide Seiten durch 2, so erhält man schließlich:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x)$$

- Bei manchen Integralen bietet es sich an, für $g'(x)$ einen Term zu wählen, der sich bei der Integration nicht oder nur unwesentlich verändert, beispielsweise die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen. Dann kann der andere Term "abgeräumt" werden.

Beispiel 2

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

Setzt man jedes Mal

$g'(x) = e^x$ und für $f(x)$ den übrigen Term unter dem Integral, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x\\
&= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\
&= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\
&= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\
&= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\
&= [e^x\cdot(2x-x^2)]
\end{aligned}$$

- Steht nur ein Term unter dem Integral, auf dessen Stammfunktion ohne Tabellenwerk nicht ohne weiteres zu schließen ist, kann man gelegentlich durch Einfügen des (unsichtbar vorhandenen) Faktors "1" partiell integrieren.

Beispiel 3

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Setzt man

$f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 1$,

so erhält man

$$\int 1 \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x$$
.

Partialbruchzerlegung

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

In der Mathematik ist die **Partialbruchzerlegung** eine bestimmte Darstellung rationaler Funktionen $r(z)$ als Summe von Brüchen der Form

$$\frac{a}{(z-b)^n}$$

mit Konstanten a und b.

Definition

Eine rationale Funktion r mit n verschiedenen Polstellen z_j der Ordnung m_j lässt sich in der Form

$$r(z) = p(z) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{j,k}}{(z-z_j)^k}$$

schreiben, wobei der Grad des Polynoms p der Differenz von Zähler- und Nennergrad von r entspricht.

Diese Darstellung heißt **Partialbruchzerlegung** (Abk. PBZ).

Verwendung

Die Partialbruchzerlegung wird z.B. verwendet, um rationale Funktionen integrieren zu können. Sie wird ebenfalls bei der Lösung von Differentialgleichungen bzw. Differenzengleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation bzw. z-Transformation benötigt.

Berechnung

Diese Zerlegung kann folgendermaßen bestimmt werden:

- Falls der Grad des Zählers größer gleich dem Nennergrad ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden (man erhält p). Ansonsten ist $p=0$.
- Abhängig von der Form des Nennerpolynoms wird ein geeigneter *Ansatz* für das Ergebnis aufgestellt (siehe unten).
- Die Konstanten $a_{j,k}$ ergeben sich beispielsweise durch Koeffizientenvergleich nach Multiplikation der Zerlegung mit dem Nennerpolynom.

Ansätze

Abhängig von der Form des Nennerpolynoms müssen verschiedene Ansätze verfolgt werden. Hierfür müssen sämtliche Nullstellen des Nennerpolynoms bekannt sein. Diese sind am einfachsten sichtbar, wenn das Nennerpolynom auf folgende Form gebracht wird:

$$(x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_n)^{k_n}$$

Hierbei stellen dann k_1 etc. den Grad der jeweiligen Nullstellen und x_1 etc. die Nullstellen selbst dar.

- Nennerpolynom mit einfachen reellen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + ... + \frac{a_n}{x - x_n}$$

- Nennerpolynom mit i-facher Nullstelle x_k:

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + ... + \frac{b_1}{x - x_k} + ... + \frac{b_i}{(x - x_k)^i}$$

- Nennerpolynom mit einfacher komplexer Nullstelle z_k:
  (Die Nullstellen von x^2+ax+b sind dann z_k *und* z_k*, somit wird jede komplexe Nullstelle mit ihrer konjugiert komplexen zu einem Term zusammengefasst)

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + ... + \frac{(b_1 x + c_1)}{(x^2 + ax + b)}$$

- Nennerpolynom mit i-facher komplexer Nullstelle z_k:

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + ... + \frac{(b_1 x + c_1)}{(x^2 + ax + b)} + \frac{(b_2 x + c_2)}{(x^2 + ax + b)^2} + ... + \frac{(b_i x + c_i)}{(x^2 + ax + b}$$

Koeffizientenvergleich

Um die Konstanten a_k, b_k, ... zu ermitteln, wird der Ansatz mit der Funktion gleichgesetzt und so erweitert, dass bei $f(x)$ der Nenner entfällt. Dann werden die (noch unbekannten) Konstanten so sortiert, dass eine bis mehrere Bedingungen entstehen, woraus man sie berechnen kann.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)}.$$

Dieser Ausdruck kann (um die Nullstellen des Nennerpolynoms besser sehen zu können) auch geschrieben werden als:

$$f(x) = \frac{x}{(x + 1)(x - 1)},$$

Man erkennt zwei einfache Nullstellen. Hierfür wird der erste oben erwähnte Ansatz verwendet:

$$\frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x - 1)} = \frac{x}{(x^2 - 1)},$$

wobei A und B (unbekannte, noch zu ermittelnde) Konstanten sind. Erweitert man beide Seiten der Gleichung auf $(x^2 - 1)$ (das Nennerpolynom auf der rechten Seite), erhält man

$$Ax - A + Bx + B = x.$$

Sortiert man diese so um, dass x auch auf der linken Seite alleine steht, erhält man

$$(A + B)x + B - A = x.$$

Diese Gleichung wird folgendermaßen gelöst: Man setzt $x = 0$:

$B - A = 0 \Rightarrow A = B$ (1.)

Diese Erkenntnis wird eingesetzt und es gilt dann:

$(A + B)x = x \Rightarrow A + B = 1$ (2.)

Aus den Bedingungen

1. $B = A$ und
2. $A + B = 1$

erhält man durch Hinsehen oder durch ineinander Einsetzen der zwei Bedingungen $A = B = \frac{1}{2}$.

Setzt man diese Werte für A und B ein, erhält man

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

welches für alle x ungleich ± 1 wahr ist.

Ein weiterer Weg ist:

Die Gleichung

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{x}{(x^2 - 1)}$$

wird mit $(x^2 - 1)$ multipliziert und man erhält

$A(x - 1) + B(x + 1) = x$.

Nun setzt man die Nullstellen ein.

$x = 1$ liefert die Gleichung
$2B = 1$.

Man erhält $B = \frac{1}{2}$.

Analog ergibt sich mit Einsetzen der zweiten Nullstelle $x = -1$.

$A = \frac{1}{2}$.

Ein weiterer, oft schnellerer Ansatz ist das Bestimmen der Koeffizienten durch eine sogenannte Koeffizientenmatrix.

Weitere Beispiele

Einfache Nullstellen

Durch Grenzwertbildung an der Polstelle (hebbare Singularität) s_0

$$P_0 = \lim_{s \to s_0} F(s) \cdot (s - s_0)$$

Beispiel

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)\cdot(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$
$$A = \lim_{s \to -1} F(s)(s+1) = 1$$

Doppelte Nullstelle

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1) + (2x - 1)}{(x-1)^2}$$
$$= 1 + \frac{2\,x - 1}{(x-1)^2}$$
$$\frac{2\,x - 1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \quad | \cdot (x-1)^2$$
$$2\,x - 1 = A(x-1) + B \quad (*)$$
$$2\,x - 1 = Ax - A + B$$

Es folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$A = 2 \wedge -A + B = -1$$

also:

$$A = 2 \wedge B = 1$$

Ab (*) auch möglich: durch scharfes Hinsehen und Probe mit A=2 sieht man:

$$2\,x - 1 = 2x - 2 + B$$

B muss also 1 sein damit die Formel stimmt!:

$A = 2$
$B = 1$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Komplexe Nullstellen und Berechnung der Koeffizienten durch Lineares Gleichungssystem

Gelöst werden soll $\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Die Nullstellen lauten $x_1 = 0$, $x_2 = i$ und $x_3 = -i$. Somit lässt sich der Term durch folgende PBZ darstellen:

$$\frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x+i)\cdot(x-i)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Durch Umstellen und Umformen erhält man

$$1x^2+2x+1 = (1x^2+0x+1x^0)\cdot A + (1x^2+0x+0x^0)\cdot B + (0x^2+1x+0x^0)\cdot C$$

Hilfreich beim Berechnen mehrerer Koeffizienten ist eine Koeffizientenmatrix, an diesem Beispiel gezeigt:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & \\ 1 & 1 & 0 & =1 \\ 0 & 0 & 1 & =2 \\ 1 & 0 & 0 & =1 \end{array}$$

Durch Lösen des LGS (Gauss, Determinanten, hier auch durch Hinsehen ...) erhält man so: A = 1, B =0 und C = 2.

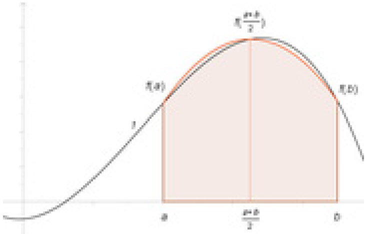
Dadurch kann das Integral folgendermaßen dargestellt und integriert werden:

$$\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + 2\cdot\arctan(x)$$

Simpsonsche Formel

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Mit der **Simpsonschen Formel** (auch **Simpsonregel**) berechnet man Näherungen zu einem Integral der Funktion f(x) im Intervall [a,b], indem man die Kurve f(x) durch eine Parabel annähert. Die Formel wurde erstmals benutzt von Evangelista Torricelli, ist aber benannt nach dem englischen Mathematiker Thomas Simpson. Sie ist die allgemeine Formulierung der Keplerschen Fassregel, die Johannes Kepler schon 200 Jahre früher aufstellte.



Simpson Formel

Die Parabel wird durch die Funktionswerte an den Stellen a, b, (a+b)/2 gelegt. Die Fläche nähert man an durch die Fläche unterhalb der Parabel.

Definition

Die Simpsonsche Formel lautet:

$$Q(f) = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Diese Formel – und auch die folgenden – kann man herleiten aus der „Allgemeinen Quadraturformel für eine Teilfläche“ (siehe Numerische Quadratur).

Integraldarstellung

Damit lässt sich das Integral darstellen als

$$J(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = Q(f) + E(f)$$

Restglied

Ist f(x) viermal stetig differenzierbar in [a,b], dann gilt für das **Restglied** E(f) folgende Abschätzung (siehe Numerische Quadratur):

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

Ist f(x) zusätzlich noch reellwertig, dann gilt mit einer Zwischenstelle ζ aus [a,b] für das Restglied:

$$E(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta)$$

Diese Restglieddarstellung wurde 1887 von Giuseppe Peano gefunden.

Summierte Simpsonsche Formel

Um das Integral noch besser annähern zu können unterteilt man das Intervall [*a*,*b*] in *N* nebeneinanderliegende, gleich große Teilintervalle der Länge *h*. In jedem Teilintervall wendet man die Simpsonsche Formel für die einzelnen Teilflächen an und addiert danach die entstandenen Näherungen. Damit erhält man die **summierte** oder **zusammengesetzte Simpsonsche Formel**:

$$Q(f) = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + 2 \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right) + \frac{1}{2} f(x_N) \right)$$

mit $h = \frac{b-a}{N}, \; x_k = a + k \cdot h$

Man sieht leicht einen Zusammenhang mit der Sehnentrapezformel $Q_S(f)$ und der Tangententrapezformel $Q_T(f)$:

$$Q(f) = \frac{1}{3}\Big(Q_S(f) + 2 Q_T(f) \Big)$$

Fehlerabschätzung für das Restglied

Die Fehlerabschätzung für das Restglied lautet:

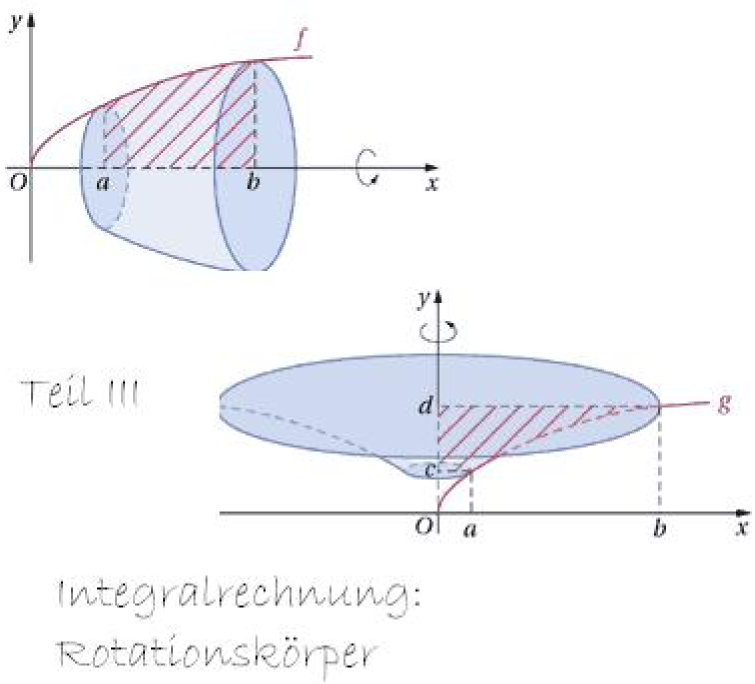
$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)}{2880} h^4 \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

bzw. für reellwertige Funktionen mit einer Zwischenstelle ζ aus dem Intervall [a,b]:

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{2880} h^4 f^{(4)}(\zeta)$$

Einführung in die Integralrechnung

Von Florian Modler



Dies ist nun der dritte Teil von "Einführung in die Integralrechnung"

Ich habe mich bemüht diesen Artikel vor allem verständlich und anschaulich zu gestalten.

Ich hoffe mir ist dieses gelungen.
Dieser Artikel umfasst nun einen dritten Einblick in die Integralrechnung, die man so in der Oberstufe eines Gymnasiums (12. Klasse) kennen lernt.

Es gibt noch viele Gebiete, in denen man die Integralrechnung anwenden kann. Vielleicht kommt ja noch ein vierter Teil. Das kann man nie ausschließen.
Aber jetzt erstmal viel Spaß mit meinem kleinen Einblick in die **Integralrechnung**, genauer in das Gebiet der **Rotationskörper .**

Teil 1: Einführung in die Integralrechnung

Teil 2: Stammfunktionen & Co

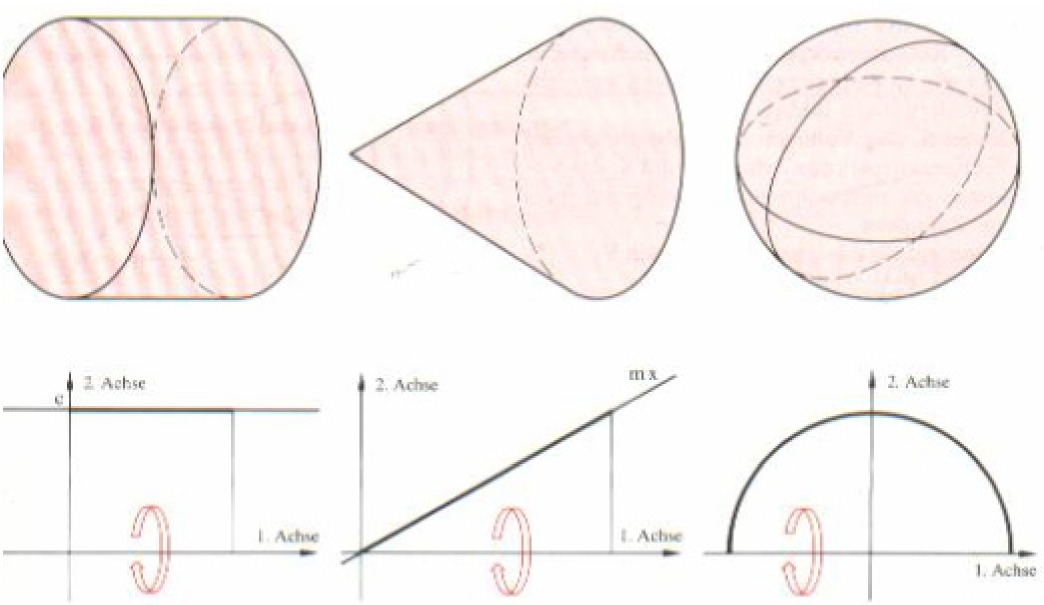
Teil 3: Rotationskörper

1 Einleitung

In meinen anderen beiden Artikeln haben wir das Integral bei der Berechnung von krummlinig berandeten Flächen gebraucht. In diesem dritten Teil wollen wir nun das Volumen eines Rotationskörpers mit Hilfe unseres Wissens über die Integralrechnung berechnen.
Zuerst werde ich eine allgemeine Aufgabe stellen, die Lösung präsentieren und euch so langsam zu einer allgemeinen Formel führen.

2 Volumen eines Rotationskörpers

2.1 Einführung



- Durch Rotation des Graphen einer konstanten Funktion $x \rightarrow c$ um die x-Achse entsteht ein **Zylinder.**

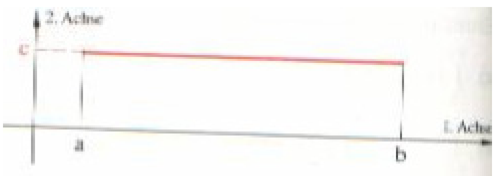
- Durch Rotation des Graphen einer der Funktion $x \rightarrow mx$ um die x-Achse entsteht ein **Kegel.**

- Durch Rotation eines Halbkreises, also des Graphen der Funktion $x \rightarrow \sqrt{r^2 - x^2}$ um die x--Achse entsteht eine **Kugel.**

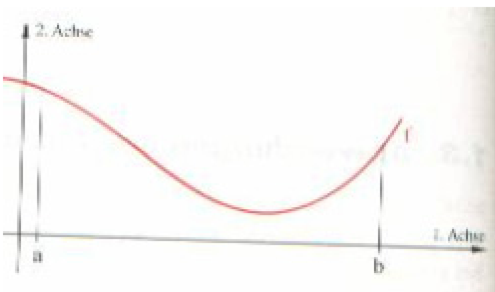
Durch Rotation des Graphen einer Funktion um die x-Achse entstehen also **Rotationskörper.** (Zylinder, Kegel und Kugel) .
Unser Ziel ist es nun, eine Formel für das Volumen von beliebigen Rotationskörpern zu gewinnen.

Dazu folgende Aufgaben mit ihren Lösungen:

a) Der Graph einer konstanten Funktion x→c über dem Intervall [a; b] mit c>0 rotiert um die x-Achse. Bestimme das Volumen für den Rotationskörper (Zylinder).



b) Der Graph einer stetigen Funktion f mit f(x)>0 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Gesucht ist auch hier das Volumen V dieses Körpers zwischen den Stellen a und b. Gib nun eine endgültige Formel an.

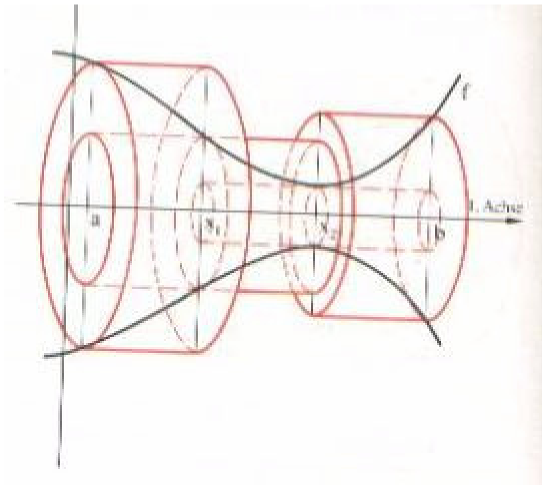


Lösungen:

a) Bei der Rotation des Graphen um die x-Achse entsteht ein Zylinder. Seine Höhe ist b-a, sein Radius c. (siehe Zeichnung)
Das Volumen V des Zylinders beträgt demnach $V = \pi c^2 \bullet (b-a)$.

b) *Grundgedanke der Lösung*

Wir teilen das Intervall [a; b] in n gleich lange Teilintervalle und betrachten die einbeschriebenen und umbeschriebenen Treppenfiguren aus Rechtecken. Diese lassen wir ebenfalls um die x-Achse rotieren. Dadurch entsteht für den Rotationskörper ein einbeschriebener und ein umbeschriebener Treppenkörper aus Zylindern. (Ähnlich wie wir im Teil I auf das Integral gekommen sind.)



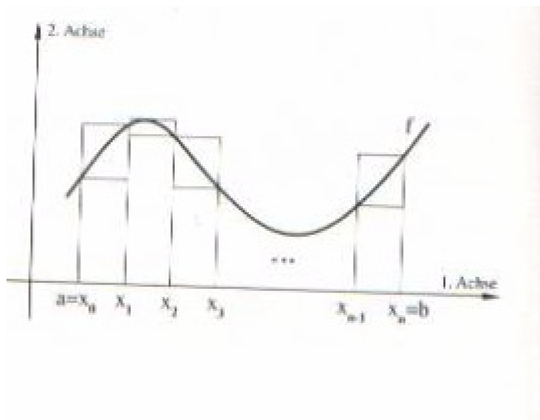
Es sei $\underline{S_n}$ das Volumen des einbeschriebenen Treppenkörpers aus Zylindern und $\overline{S_n}$ das Volumen des umbeschriebenen Treppenkörpers aus Zylindern.
Dann gilt für das gesuchte Volumen V:
$\underline{S_n} \le V \le \overline{S_n}$

Lassen wir die Anzahl n der Teilintervalle über alle Grenzen wachsen, so nähern sich $\underline{S_n}$ und $\overline{S_n}$ immer mehr dem gesuchten Volumen V an.

Ausführung der Lösung im Einzelnen:

<u>1. Schritt: Einteilen des Intervalls [a; b] in n Teilintervalle und Bestimmen der Minima und Maxima in den Teilintervallen:</u>

Die Teilpunkte seien:
$x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$
Die Breite der Teilintervalle sei $\mathrm{V}x$.
Die Minima in den Teilintervallen seien m_1, m_2, ..., m_n, die Maxima M_1, M_2, ..., M_n.
Diese Werte sind auch die Radien der Zylinder. $\mathrm{V}x$ ist die Höhe der einzelnen Zylinder.
Die Volumina der Zylinder sind
$\pi \bullet m_1^2 \bullet \mathrm{V}x, \pi \bullet m_2^2 \bullet \mathrm{V}x, ..., \pi \bullet m_n^2 \bullet \mathrm{V}x bzw.$
$\pi \bullet M_1^2 \bullet \mathrm{V}x, \pi \bullet M_2^2 \bullet \mathrm{V}x, ..., \pi \bullet M_n^2 \bullet \mathrm{V}x$



<u>2. Schritt: Berechnen des Volumens der Treppenkörper der Zylinder:</u>
2.1 Unterer Treppenkörper der Zylinder

Das Volumen $\underline{S_n}$ beträgt: $\underline{S_n} = \pi \bullet m_1^2 \bullet \mathrm{V}x + \pi \bullet m_2^2 \bullet \mathrm{V}x + ... + \pi \bullet m_n^2 \bullet \mathrm{V}x$

2.2 Oberer Treppenkörper der Zylinder

Das Volumen $\overline{S_n}$ beträgt: $\overline{S_n} = \pi \bullet M_1^2 \bullet \mathrm{V}x + \pi \bullet M_2^2 \bullet \mathrm{V}x + ... + \pi \bullet M_n^2 \bullet \mathrm{V}x$

Für das gesuchte Volumen V des Rotationskörpers gilt: $\underline{S_n} \le V \le \overline{S_n}$

3. Schritt: Bestimmen der Grenzwerte für $n \to \infty$:

Wir lassen n über alle Grenzen wachsen und bilden die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \underline{S_n}$ und $\lim_{n\to\infty} \overline{S_n}$.

Nun ist $\underline{S_n}$ die Untersumme der Funktion $x \to \pi \bullet (f(x))^2$ im Intervall [a; b] und $\overline{S_n}$ die entsprechende Obersumme. Da f stetig ist, ist auch $x \to \pi \bullet (f(x))^2$ stetig. Nach folgendem Satz: Jede Funktion im Intervall [a; b] stetige Funktion f ist dort auch integrierbar, d.h. das Integral $\int_a^b f$ existiert. Ist auch die Funktion $x \to \pi \bullet (f(x))^2$ integrierbar. Die beiden Grenzwerte stimmen überein und sind nach der analytischen Definition (siehe Teil I) des Integrals gleich $\int_a^b \pi \bullet (f(x))^2 dx$.

Wegen $\underline{S_n} \le V \le \overline{S_n}$ muss dieser Wert gleich dem gesuchten Volumen sein.
Wir erhalten für das gesuchte Volumen V:

$$V = \int_a^b \pi \bullet (f(x))^2 dx$$

2.2 Integralformel für das Volumen eines Rotationskörpers

Integralformel für das Volumen eines Rotationskörpers

Die Funktion f sei stetig über dem Intervall [a; b]. Ihr Graph rotiere über dem Intervall [a; b] um die x-Achse. Dann gilt für das Volumen V des entstehenden Körpers

$$V = \int_a^b \pi \bullet (f(x))^2 dx$$

Beispiel: f(x)=x² über [0; 1]

$$V = \int_0^1 \pi \bullet (x^2)^2 dx = \int_0^1 \pi \bullet x^4 dx = \pi \bullet \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}\pi$$

2.3 Aufgaben zur Übung

1. Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse werde um die x-Achse gedreht. Zeichne die zu drehende Fläche und berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

$$b) f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

2. Durch Rotation der Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{10x + 40}$ und $g(x) = \sqrt{15x - 75}$ über den Intervallen [0; 20] bzw. [5; 20] um die x-Achse entsteht ein schalenförmiger Körper, dessen Volumen zu berechnen ist.

3.

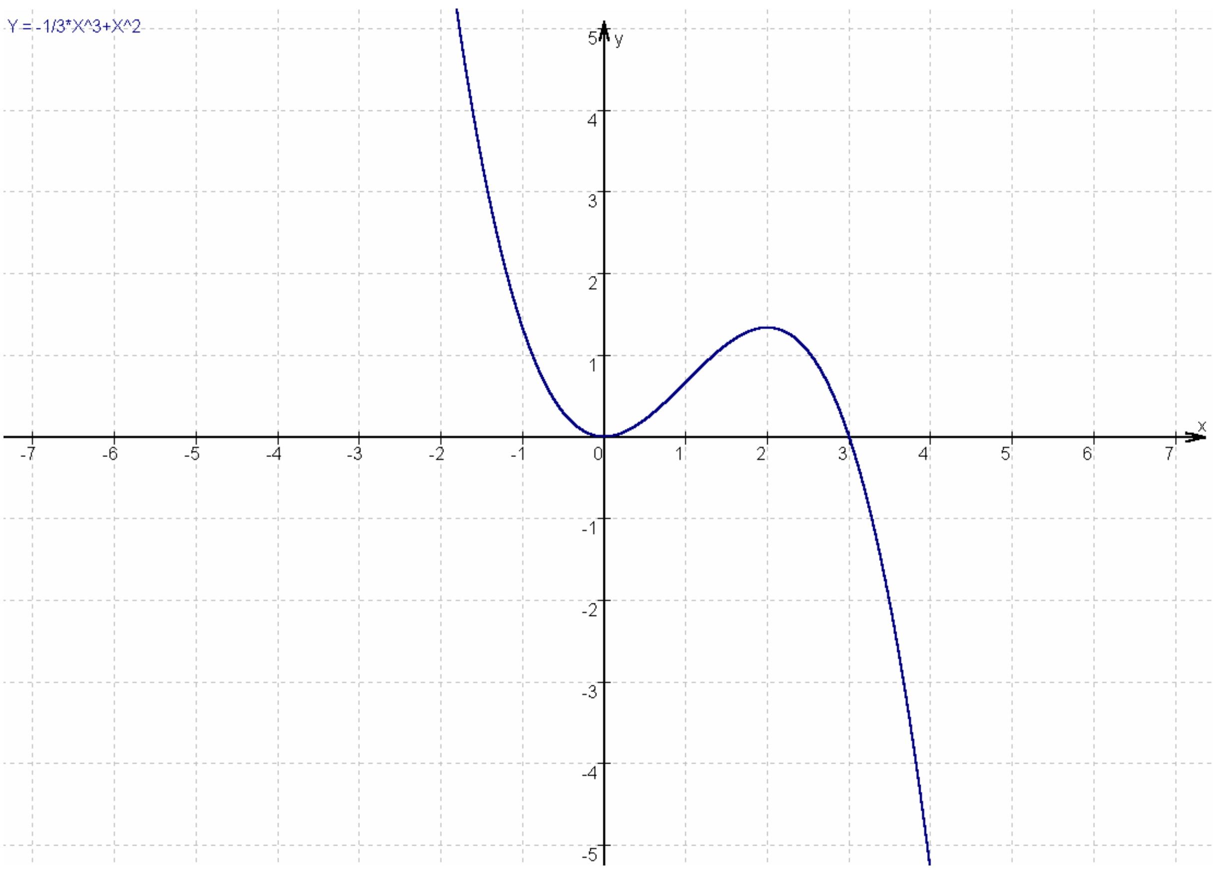
a) Bestimme die Gleichung der Tangente mit dem Berührpunkt P(3; f(3)) an den Graphen von

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{25 - x^2}\ .$$

b) Durch Rotation des Graphen von f und der Tangente um die x-Achse entsteht ein stromlinienförmiger Körper. Berechne sein Volumen.

Lösungen:

1.



$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

$$0 = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 = x^2(-\frac{1}{3}x + 1)$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

$$V=\pi\bullet\int_0^3(-\frac{1}{3}x^3+x^2)^2dx=\pi\bullet\int_0^3(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4)dx$$

$$F(x)=\frac{1}{63}x^7-\frac{1}{9}x^6+\frac{1}{5}x^5$$

$$V=\pi\bullet\int_0^3(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4)dx=\pi\bullet[\frac{1}{63}x^7-\frac{1}{9}x^6+\frac{1}{5}x^5]_0^3$$

$$=\pi\bullet(\frac{1}{63}\bullet 3^7-\frac{1}{9}\bullet 3^6+\frac{1}{5}\bullet 3^5)=(34\frac{5}{7}-81+48,6)\bullet\pi=7,27$$

2.

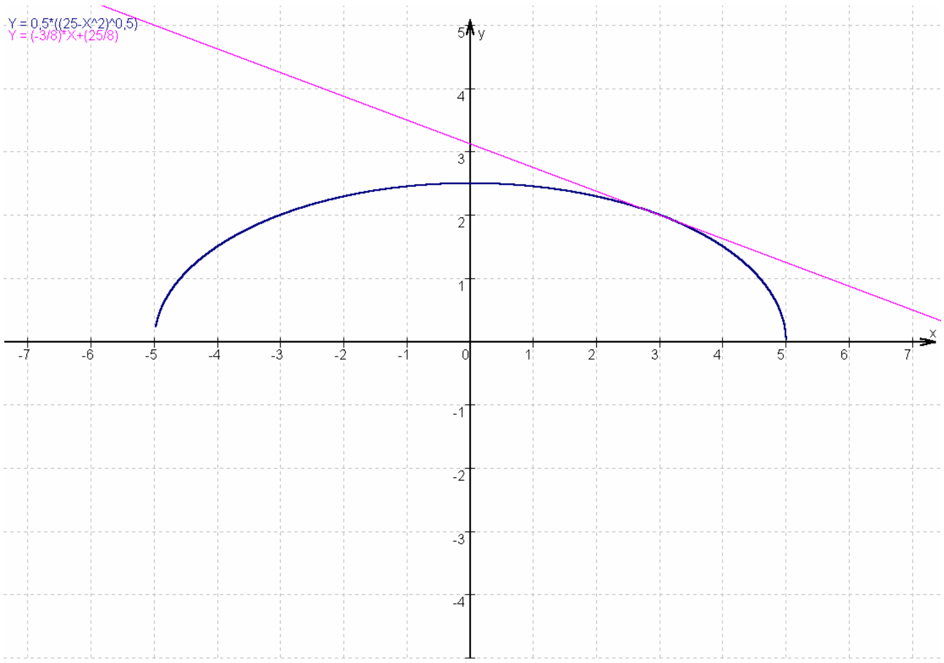
$$f(x)=\sqrt{10x+40}$$
$$g(x)=\sqrt{15x-75}$$

$$V=\pi\bullet(\int_0^{20}(10x+40)dx-\int_5^{20}(15x-75)dx)=\pi\bullet((10\bullet\frac{20^2}{2}+40\bullet 20)-(15\bullet(\frac{20^2}{2}-\frac{5^2}{2})-75\bullet 15))$$

$$=\pi\bullet(2800-1687,5)=\pi\bullet 1112,5=3495,02$$

3.

a)



$$P(3;2); f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{25-x^2}}; f'(3) = m = \frac{-3}{2 \bullet 4} = -\frac{3}{8}$$

$$m = -\frac{3}{8}; P(3;2)$$

$$y = mx + b$$

$$2 = -\frac{9}{8} + b$$

$$b = 3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$$

$$t(x) = -\frac{3}{8} + \frac{25}{8}$$

$b)$

$Nullstellenberechnung:$

$$0 = \frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$$

$$0 = 25 - x^2$$

$$x = + - 5$$

$$0 = -\frac{3}{8} + \frac{25}{8}$$

$$x = \frac{25}{3}$$

$$V = \pi \bullet \int_{-5}^{3} \frac{1}{4}(25-x^2)dx + \pi \bullet \int_{3}^{\frac{25}{3}} (-\frac{3}{8} + \frac{25}{8})^2 dx$$

$$V = \pi \bullet 37,3 + \pi \bullet 7,3 = 139,63$$

3 Zusammenfassung Teil III

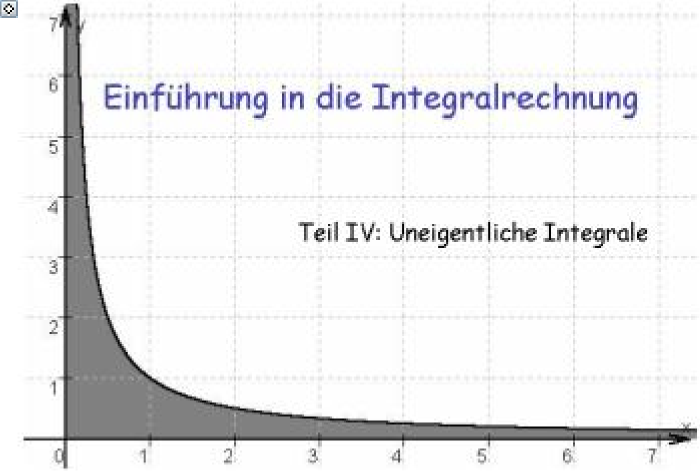
Integralformel für das Volumen eines Rotationskörpers

Die Funktion f sei stetig über dem Intervall [a; b]. Ihr Graph rotiere über dem Intervall [a; b] um die x-Achse. Dann gilt für das Volumen V des entstehenden Körpers

$$V = \int_a^b \pi \bullet (f(x))^2 dx$$

Beispiel: $f(x)=x^2$ über [0; 1]

$$V = \int_0^1 \pi \bullet (x^2)^2 dx = \int_0^1 \pi \bullet x^4 dx = \pi \bullet [\frac{1}{5}x^5]_0^1 = \frac{1}{5}\pi$$



Uneigentliche Integrale

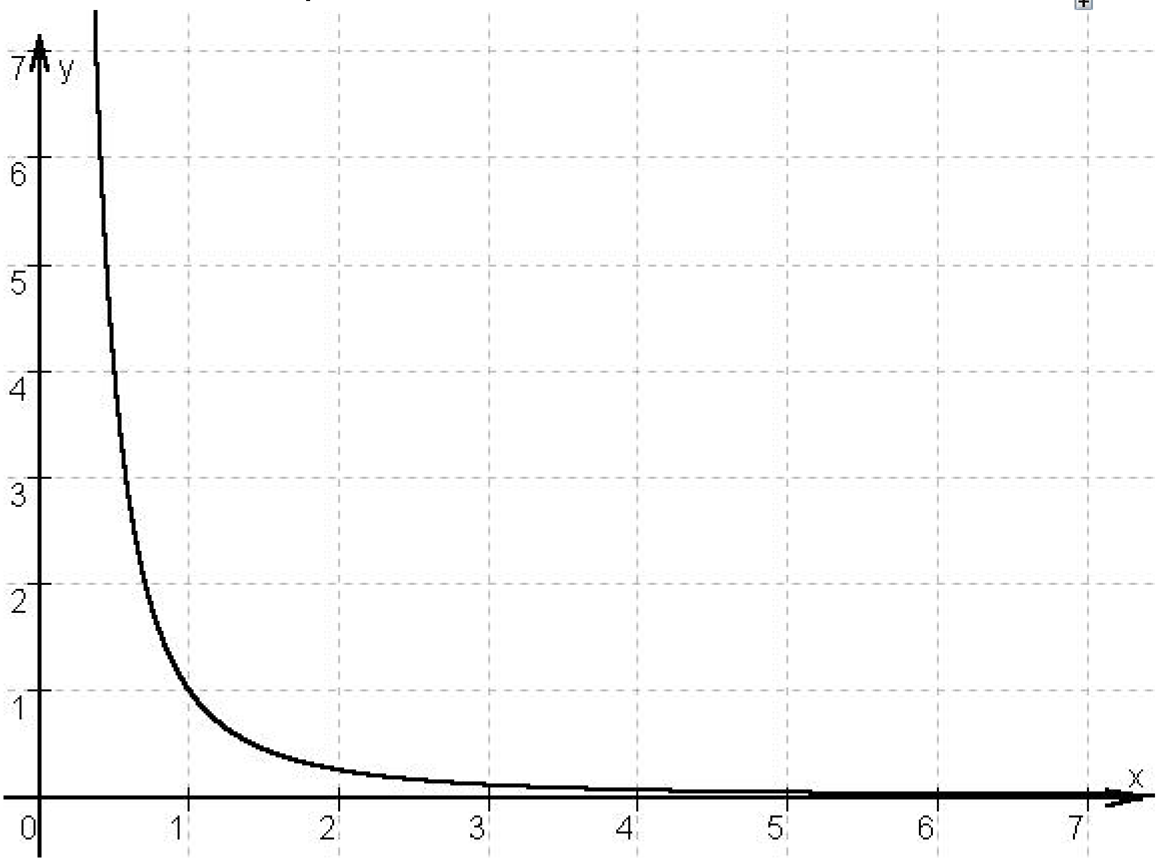
Gelegentlich gibt es Flächen, die "ins Unendliche" reichen. So spielt zum Beispiel in der Stochastik die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ eine Rolle. Sie reicht nach zwei Seiten ins Unendliche.

Mit solchen, liebe Schüler und Schülerinnen, ins Unendliche reichende Flächen, ihrem Flächeninhalt und einer entsprechenden Erweiterung des Integralsbegriffs wollen wir uns hier beschäftigen.

Es ist nun mein vierter Teil von "Einführung in die Integralrechnung".
Es gibt noch viele Gebiete, in denen man die Integralrechnung anwenden kann. Ein fünfter Teil wird demnach auf jeden Fall noch folgen.
Aber jetzt erstmal viel Spaß mit meinem kleinen Einblick in die Integralrechnung, genauer in das Gebiet der **Uneigentlichen Integrale**.

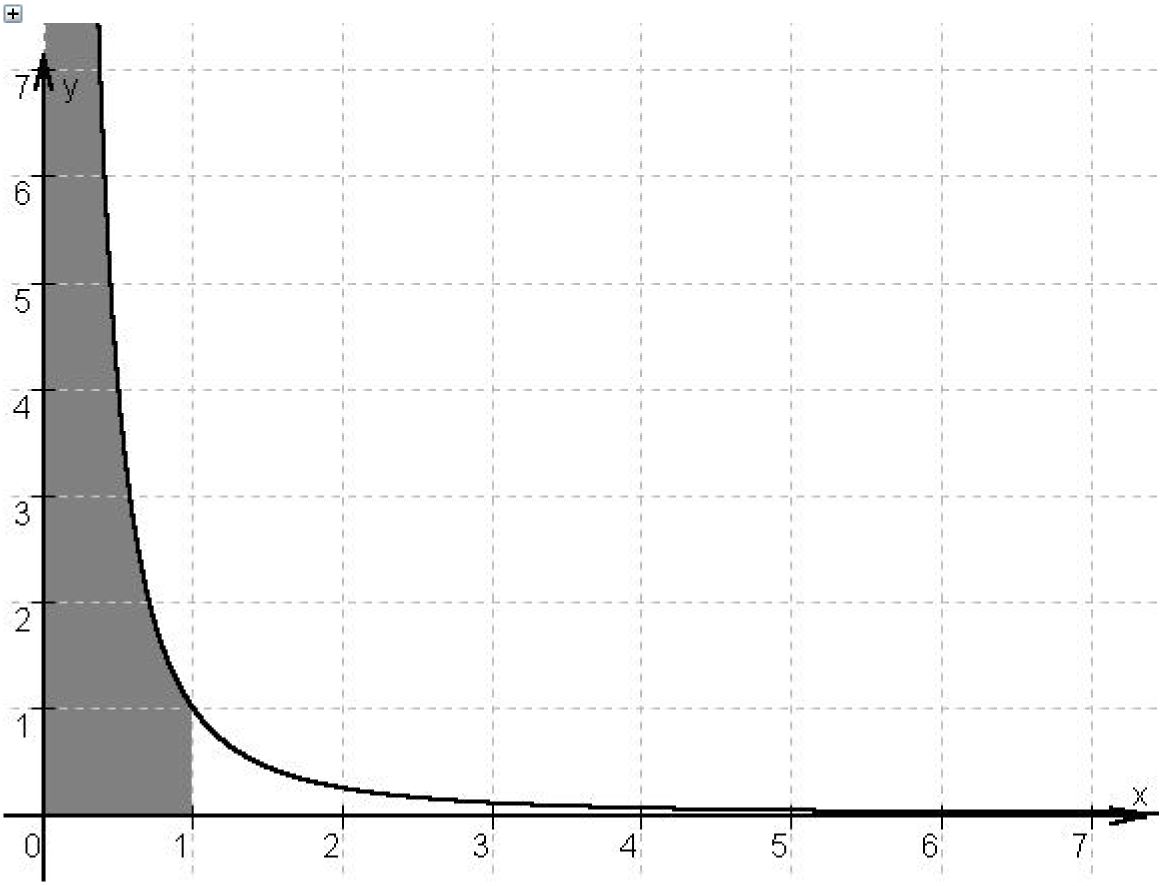
1 Ein paar Beispiele mit Lösungen

Schauen wir uns am Anfang die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ an . Und zwar nur den Teil im 1. Quadranten.



Wenn wir nun die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen wollen, stellen wir fest, dass die y - Achse eine Asymptote ist und es somit keinen Schnittpunkt mit der y - Achse gibt.

Dies sieht man sehr schön am Graphen. Die grau markierte Fläche soll berechnet werden.



Die Fläche "reicht ins Unendliche". Zu ihrer Berechnung kann man das

Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil f nicht im ganzen
Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist f unbeschränkt.

Zur Berechnung der Fläche verspricht folgender Gedanke Aussicht auf Erfolg.

Wir berechnen $\int_a^1 f(x)\,dx$ (für $0 < a < 1$) und bestimmen den Grenzwert

$\lim\limits_{a \to 0} \int_a^1 f(x)\,dx$ $(a > 0)$.

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion f.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}\ ;\ F(x) = \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$$

Somit erhalten wir, wenn wir unsere Idee fortsetzen:

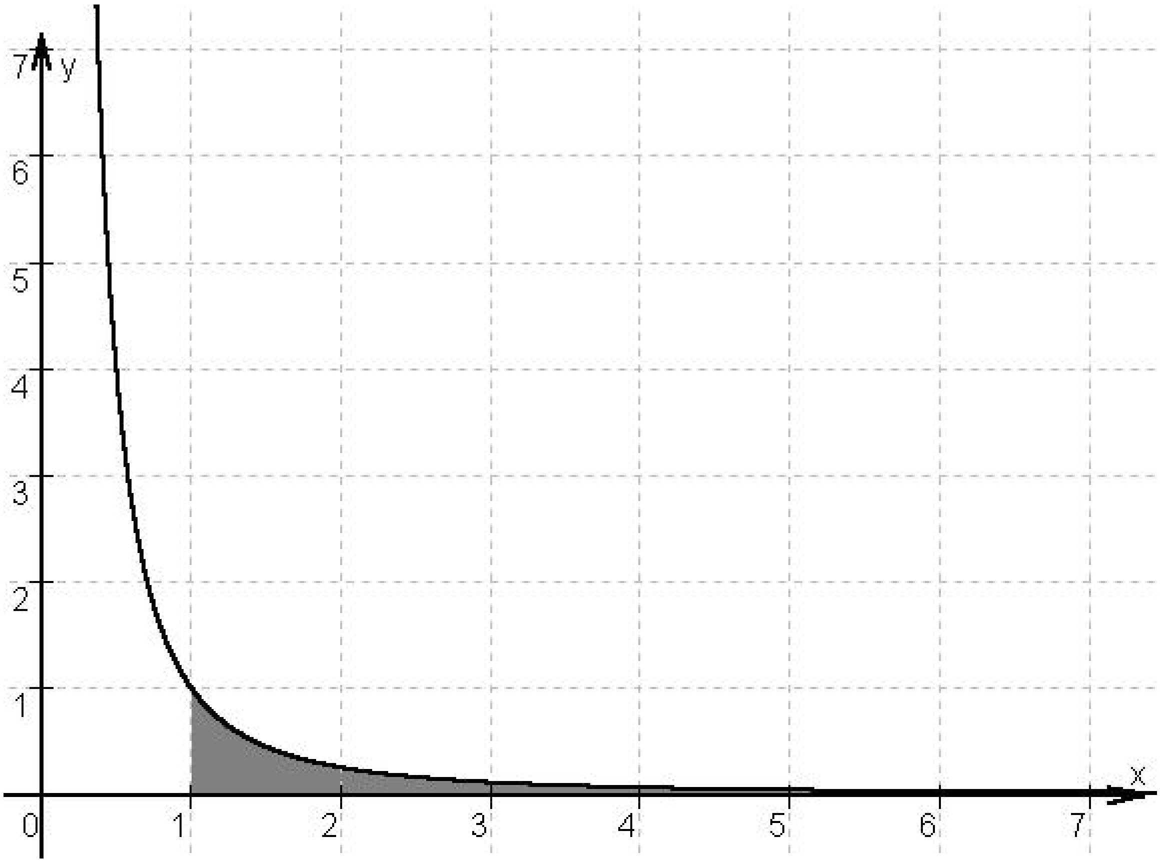
$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a \to 0} -1 + \frac{1}{a}$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{a}$ nicht existiert. Gibt es also doch keinen Grenzwert? Ist unsere Idee doch nicht so aussichtsreich,
wie wir uns das gedacht haben?
Wir halten fest:

Satz:
Für $a \to 0$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von a bis 1 jede Schranke.

Nicht verzweifeln, nehmen wir einfach ein weiteres Beispiel.

Wir wollen von dieser Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ die Fläche über dem Intervall $[1; \infty]$ berechnen.
Die zu berechnende Fläche sieht wie folgt aus:



Wir gehen zur Berechnung dieser Fläche wie oben vor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + \lim_{b\to\infty} 1 = 0 + 1 = 1$$

Die Fläche von f über diesem Intervall beträgt also 1.

Wir sehen, dass unsere Idee doch nicht so schlecht ist.

Halten wir erst einmal unser Ergebnis fest:

Satz:

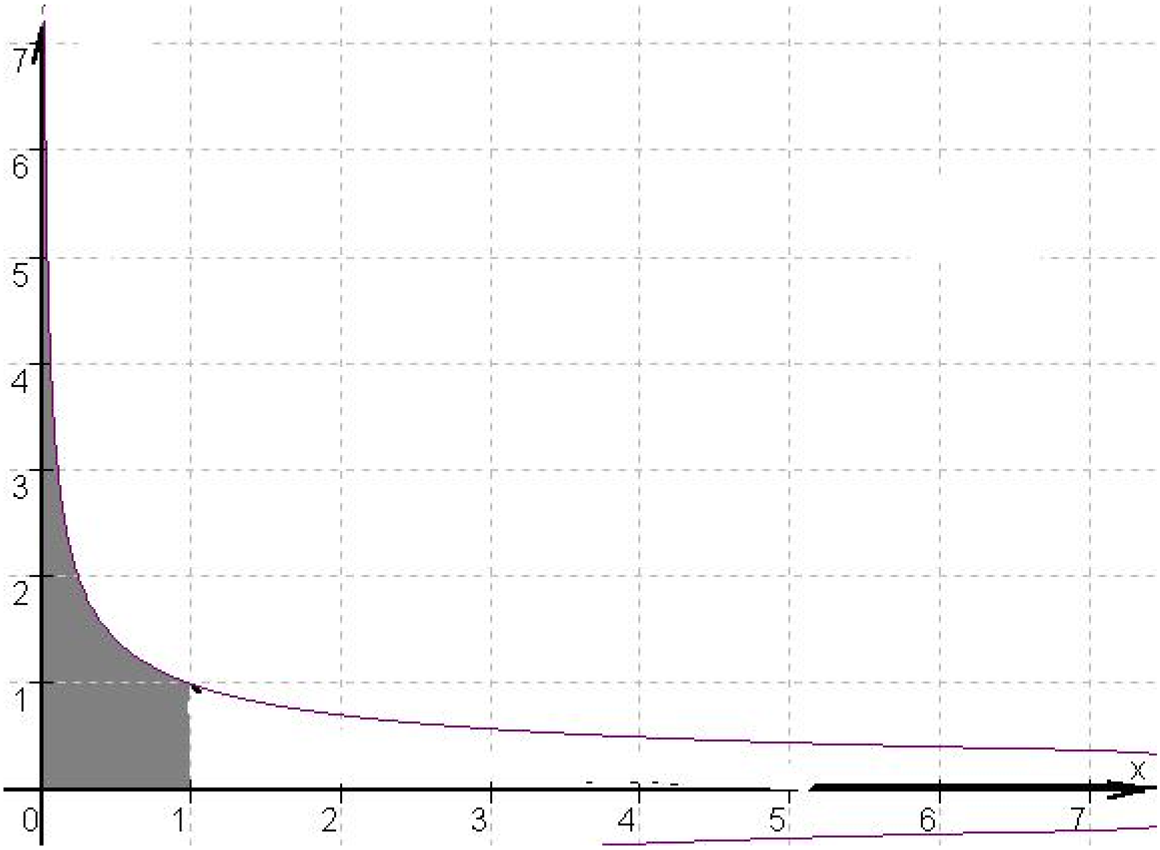
Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von 1 bis

Unendlich hat den Flächeninhalt 1.

Weil es so gut geklappt hat, nehmen wir uns nun eine zweite Funktion.

Und zwar g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Die über dem Intervall [0; 1] zu berechnende Fläche sieht wie folgt aus:



7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

Auch hier wollen wir die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen. Auch hier stoßen wir auf das gleiche Problem wie oben. Die Fläche "reicht ins Unendliche". Zu ihrer Berechnung kann man das Integral $\int_0^1 g(x)\,dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil g nicht im ganzen Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist g unbeschränkt. Zur Berechnung der Fläche gehen wir mit derselben Methode wie oben vor.

Wir berechnen $\int_a^1 g(x)\,dx$ (für $0 < a < 1$) und bestimmen den Grenzwert

$\lim\limits_{a \to 0} \int_a^1 g(x)\,dx$ $(a > 0)$.

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion g.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\ ;\ G(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} = 2 \cdot \sqrt{x}$$

Wir berechnen den Flächeninhalt:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to 0} \left[2 \cdot \sqrt{x}\right]_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0} (2 - 2 \cdot \sqrt{a}) = \lim_{a \to 0} 2 - \lim_{a \to 0} 2 \cdot \sqrt{a} = 2 - 0 = 2$$

Satz:

Der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ von 0 bis 1 beträgt 2.

Berechnet auch hier die Fläche über dem Intervall $[1; \infty]$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[2 \cdot \sqrt{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (2 \cdot \sqrt{b} - 2) = \lim_{b \to \infty} 2 \cdot \sqrt{b} - \lim_{b \to \infty} 2$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim\limits_{b \to \infty} 2 \cdot \sqrt{b}$ beliebig groß wird.

Satz:
Für $b \to \infty$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ von 1 bis b jede Schranke.

[Bearbeiten]

2 Definition des uneigentlichen Integrals

Meine Beispiele haben gezeigt, dass Flächen, die "ins Unendliche reichen", einen endlichen Flächeninhalt haben können. Hierbei kann einmal der Fall vorliegen, dass das "Intervall ins Unendliche reicht" oder zum anderen, dass die Funktion nicht im ganzen Intervall definiert ist (und dort unbeschränkt ist). Es ist daher nahe liegend, den Integralbegriff aus meinem ersten Teil der Serie zu erweitern.
Der Einfachheit halber setzen wir die Stetigkeit der Integrandenfunktion f voraus.

Definition:
(1) Die Funktion f sei stetig für alle $x > a$ bzw. für alle $x < b$. Dann sei:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

(2) Die Funktion f sei stetig für $]a; b]$ bzw. $[a; b[$. Dann sei:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\,dx \text{ , falls f definiert ist für }]a; b];$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx \text{ , falls f definiert ist für } [a; b[\text{ .}$$

Die Integrale links vom Gleichheitszeichen nennt man **uneigentliche Integrale.**
Existiert der Grenzwert rechts vom Gleichheitszeichen nicht, existiert das uneigentliche Integral nicht.