

Aufgabe 1 Berechnen Sie:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 2x}{\sinh^2 x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{3 - \sqrt{9 - x^2}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2x - e^{-x}}{x - \sin x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^{3x}} & \text{f) } \lim_{x \downarrow 0} x^x & \text{g) } \lim_{x \uparrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} & \text{h) } \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cot x} \end{array}$$

Aufgabe 2 Skizzieren Sie jeweils den Graphen einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$, für die gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f > 0, f' > 0, f'' < 0, & \text{b) } f > 0, f' < 0, f'' > 0, \\ \text{c) } f < 0, f' > 0, f'' > 0, & \text{d) } f > 0, f' < 0, f'' < 0. \end{array}$$

Aufgabe 3 Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

- a) Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a, b, c und d jeweils erfüllen, damit
 - i) f zwei Extremwerte besitzt,
 - ii) der Graph von f einen Wendepunkt besitzt,
 - iii) f genau einen Extremwert besitzt?
- b) Beweisen Sie: Besitzt f zwei Extremwerte, so handelt es sich hierbei um ein Maximum und ein Minimum, der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt und dieser liegt in der Mitte zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt.

Aufgabe 4

- a) Welche Höhe hat unter allen von einer Kugel mit dem Radius R einbeschriebenen spitzen Kreiskegeln derjenige mit dem größten Volumen?
- b) An eine Spannungsquelle mit der Ursprungspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R_a angeschlossen. Bei welchem Wert von R_a ist die vom Verbraucher aufgenommene Leistung maximal?

Aufgabe 5 Der Verlauf einer Straße lasse sich durch die Kurve

$$\text{a) } y = x \arctan x, -9 \leq x \leq 9, \quad \text{b) } y = \ln(x^2 - 1), \sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq 10,$$

beschreiben. Zeigen Sie, dass ein auf dieser Straße fahrendes Auto immer nur in eine Richtung lenken muss. In welche?

Aufgabe 6 Führen Sie jeweils für die Funktion f eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 & \text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} & \text{c) } f(x) = e^x \\ \text{d) } f(x) = e^{-x^2} & \text{e) } f(x) = \sin^2 x & \text{f) } f(x) = x^2 \ln x \end{array}$$

Lösungen zu Aufgabe 1 Berechnen Sie:

- | | | | |
|-------------------|------|------------------|------|
| a) $-\frac{3}{5}$ | b) 4 | c) $\frac{3}{2}$ | d) 2 |
| e) 0 | f) 1 | g) e | h) 1 |

Lösungen zu Aufgabe 3

- a) i) $a \neq 0 \wedge b^2 > 3ac$
ii) $a \neq 0$
iii) $a = 0 \wedge b \neq 0$

Lösungen zu Aufgabe 4

- a) $h = \frac{4R}{3}$
b) $R_a = R_i$

Lösungen zu Aufgabe 5

- a) Linkskurve
b) Rechtskurve