Aufgabe 1 Stellen Sie eine Funktionstabelle der Funktion f mit $f(x,y) = 2x - 3y + 1$ auf, wobei den beiden Variablen jeweils die Werte von 0 bis 5 mit einer Schrittweite von Eins gegeben werden.

Aufgabe 2 Auf der Menge D sei die Funktion f gegeben. Skizzieren Sie für die ebenfalls gegebenen Zahlen c jeweils die Höhenlinie von f zur Höhe c in der x-y-Ebene. Gibt es Punkte aus D, in denen die Funktion f ihren höchsten bzw. niedrigsten Wert annimmt? Falls ja: Welche Punkte sind dies und wie lauten die zugehörigen Funktionswerte?

a) $f(x,y) = x + 2y,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x,y \in [-4,4]\},\qquad c = -4,-2,0,2,4$

b) $f(x,y) = \sqrt{2x^2+y^2} - y,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x,y \in [-4,4]\},\qquad c = 0,2,4,6$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x,y \in [-4,4],\ (x,y) \neq (0,0)\},\qquad c = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$

d) $f(x,y) = \dfrac{4}{x^2-y^2},\qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x,y \in [-4,4],\ |x| \neq |y|\},\qquad c = -4,-1,1,4$

Aufgabe 3 Gegeben sei die auf ganz $\mathbf{R}^2$ definierte Funktion f mit $f(x,y) = |x-1| + |y|$. Skizzieren Sie zur Veranschaulichung des Verhaltens von f für verschiedene ganzzahlige Konstanten $c \in \mathbf{Z}$ jeweils die Höhenlinie von f zur Höhe c und die Schnittkurven von f parallel zur x-z- bzw. y-z-Ebene mit Achsenabschnitt c.

Aufgabe 4 Gegeben sei die auf $D = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 \,|\, \mathbf{x} = (x_1,x_2), x_1 \neq x_2\}$ definierte Funktion f mit

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}.$$

a) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine gegen $(0,0)$ konvergente Punktfolge $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ im $\mathbf{R}^2$ an, so dass

$$\text{i)}\ \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = -1 \qquad \text{ii)}\ \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = 1 \qquad \text{iii)}\ \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = 2.$$

b) Zeigen Sie, dass eine reelle Zahlenfolge $\{f(\mathbf{x}_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$, mit einer gegen $(0,0)$ konvergenten Punktfolge $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ im $\mathbf{R}^2$, gegen jeden beliebigen Grenzwert konvergieren kann, je nachdem, wie $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ gegen $(0,0)$ konvergiert.

c) Ist es möglich, den Definitionsbereich von f so um den Punkt $(0,0)$ zu erweitern, dass f in $(0,0)$ stetig ist?

Aufgabe 5 Untersuchen Sie folgende Funktionen f auf Stetigkeit.

a) $f(x,y) = \sin(xy + y^2)$

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + \sqrt{xy})$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^y-1}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$

Aufgabe 6 Zeigen Sie für $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mit $\mathbf{x} = (x_1,x_2) \mapsto f(\mathbf{x}) = 3x_1 - 7x_2$ und $\mathbf{x}_0 = (2,5)$, dass f in $\mathbf{x}_0$ stetig ist, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle $\mathbf{x}$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ gilt: $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$.

Lösungen zu Aufgabe 2

a) $\max f(D) = 12,\ f^{-1}(12) = \{(4,4)\},$
$\min f(D) = -12,\ f^{-1}(-12) = \{(-4,-4)\}$

b) $\max f(D) = \sqrt{48}+4,\ f^{-1}(\sqrt{48}+4) = \{(-4,-4),(4,-4)\},$
$\min f(D) = 0,\ f^{-1}(0) = \{(x,y) \in D \mid x = 0,\ y \geq 0\}$

c) kein Maximum,
$\min f(D) = 1/\sqrt{32},\ f^{-1}(1/\sqrt{32}) = \{(-4,-4),(4,-4),(-4,4),(4,4)\}$

d) kein Maximum, kein Minimum

Lösungen zu Aufgabe 4

a) i) $\mathbf{x}_k = \left(0, \frac{1}{k}\right)$ ii) $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ iii) $\mathbf{x}_k = \left(\frac{3}{k}, \frac{1}{k}\right)$

c) nein

Lösungen zu Aufgabe 5

a) stetig auf $\mathbf{R}^2$

b) stetig auf $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x \neq 0, xy \geq 0\right\}$

c) stetig auf $\mathbf{R}^2$

d) stetig auf $\mathbf{R}^2$

e) stetig auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, unstetig bei $(0,0)$

f) stetig auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, unstetig bei $(0,0)$

Lösung zu Aufgabe 6 $\delta = \frac{1}{10}\epsilon$