Aufgabe 1 Ermitteln Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils das Konvergenzintervall, indem Sie den Konvergenzradius bestimmen und das Verhalten an den Rändern des Konvergenzintervalles untersuchen.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n} x^n$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} x^n \qquad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n x^n \qquad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}} x^n$$

Aufgabe 2 Nutzen Sie die geometrische Reihe, um die nachfolgenden Funktionen jeweils durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt Null darzustellen, und ermitteln Sie das Konvergenzintervall.

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{1}{3+5x} \qquad \text{b)}\ f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\text{c)}\ f(x) = \frac{4x+4}{3+2x-5x^2} \qquad \text{d)}\ f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Tipp zu d): Differenzieren Sie f zunächst.

Aufgabe 3 Wie lauten die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen bezüglich der Stelle Null? Zeigen Sie, dass die Funktionen jeweils durch ihre Taylor-Reihe dargestellt werden.

$$\text{a)}\ f(x) = \sinh x \qquad \text{b)}\ f(x) = \cos x \qquad \text{c)}\ f(x) = e^{2x}$$

$$\text{d)}\ f(x) = \cos^2 x \qquad \text{e)}\ f(x) = xe^x \qquad \text{f)}\ f(x) = e^x \sin x$$

Aufgabe 4 Entwickeln Sie das Polynom $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ nach Potenzen von $(x-2)$.

Aufgabe 5 Approximieren Sie jeweils die Funktion f durch ihr Taylor-Polynom m-ten Grades bezüglich der Stelle x_0. Nutzen Sie das Taylor-Polynom zur näherungsweisen Berechnung der Zahl y und schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes den Fehler ab.

$$\text{a)}\ f(x) = e^x,\ x_0 = 0,\ m = 2,\ y = \sqrt[3]{e} \qquad \text{b)}\ f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 1,\ m = 3,\ y = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$\text{c)}\ f(x) = \sinh x,\ x_0 = 0,\ m = 5,\ y = \sinh 1 \qquad \text{d)}\ f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ m = 2,\ y = \sqrt{2}$$

Tipp zu d): $2 = \frac{9}{4}(1 - \frac{1}{9})$.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ in der Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ von $\sin(xe^x)$.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes eine Funktion f, die folgenden Bedingungen genügt: $f(0) = f'(0) = 1,\ f'' = -f$.

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $]-2,2[$ b) $\mathbf{R}$ c) $]-1,1]$ d) $[-1,1]$ e) $\{0\}$ f) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right[$

Lösungen zu Aufgabe 2

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^{n+1}}\,x^n,\quad \left]-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right[$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\,x^n,\quad]-1,1[$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\frac{5^n}{3^{n+1}}\right)x^n,\quad \left]-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right[$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}\,x^n,\quad]-1,1[$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$ b) $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\,x^{2n}$

c) $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\,x^n$ d) $T(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\,x^{2n}$

e) $T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\,x^n$ f) $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n,\quad a_n=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{für } n=4k,\ k\in\mathbf{Z}\\ (-1)^k\,4^k & \text{für } n=4k+1,\ k\in\mathbf{Z}\\ (-1)^k\,2\cdot4^k & \text{für } n=4k+2,\ k\in\mathbf{Z}\\ (-1)^k\,2\cdot4^k & \text{für } n=4k+3,\ k\in\mathbf{Z}\end{array}\right\}$

Lösungen zu Aufgabe 4

$f(x)=-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$

Lösungen zu Aufgabe 5

a) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}e^{\xi}x^3,\quad \frac{25}{18}\le\sqrt[3]{e}\le\frac{225}{161}$

b) $\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{5}{81}(x-1)^3-\frac{10}{243}\xi^{-\frac{11}{3}}(x-1)^4,\quad \left|\frac{5585}{5184}-\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right|\le\frac{10}{62208}$

c) $\sinh x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}\sinh\xi\,x^6,\quad \frac{141}{120}\le\sinh 1\le\frac{846}{719}$

d) $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}(x-1)^3,\quad \left|\frac{1833}{1296}-\sqrt{2}\right|\le\frac{3}{16384}$

Lösung zu Aufgabe 6

$0,1,1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{7}{10}$

Lösung zu Aufgabe 7

$f(x)=\sin x+\cos x$