Aufgabe 1 Berechnen Sie jeweils den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\lim\limits_{x\to 7} 5x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+3)^2-9}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x-a}$ $(a\in\mathbf{R})$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-3x^4}{5x^3-3x^5}$ g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ $(n\in\mathbf{N})$ j) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{11}{8-x^3}\right)$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie für $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ mit $f(x)=\frac{3x^2-48}{x+4}$ für $x\neq -4$, $f(-4)=-24$ und $x_0=-4$, dass f in x_0 stetig ist, indem Sie zu jedem $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ so angeben, dass für alle x mit $|x-x_0|<\delta$ gilt: $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

b) Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon U_r(x_0)\to\mathbf{R}$ $(x_0\in\mathbf{R}, r>0)$ ist genau dann stetig an der Stelle x_0, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $\{a_n\}$ mit $a_n\in U_r(x_0)$ $(n\in\mathbf{N})$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(x_0)$.

c) Für die Funktion $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gelte $f(0)=1$ und $f(x+y)\leq f(x)f(y)$ für alle $x,y\in\mathbf{R}$. Zeigen Sie: Wenn f stetig an der Stelle 0 ist, dann ist f stetig auf ganz $\mathbf{R}$.

d) Die Funktion $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ sei stetig und es gelte $f(0)=f(1)$. Zeigen Sie: Zu jedem $n\in\mathbf{N}$ gibt es ein $x\in[0,1]$ mit $f(x)=f(x+1/n)$. Tipp: Nutzen Sie die Darstellung

$$f(1)=f(0)+\sum_{m=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{m+1}{n}\right)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right)$$

und betrachten Sie $g(x)=f(x+1/n)-f(x)$.

Aufgabe 3 Stellen Sie die folgenden Polynome f jeweils in der Form $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{r}(x-x_i)^{m_i}h(x)$ dar, mit paarweise verschiedenen reellen Nullstellen x_i, ihren Vielfachheiten m_i und einem Polynom h, das keine reellen Nullstellen besitzt.

a) $f(x)=x^3-x^2-x+1$ b) $f(x)=2x^3+4x^2+4x+2$ c) $f(x)=-x^2+x+6$

d) $f(x)=x^4-191x^2-980$ e) $f(x)=2x^2+4x+20$ f) $f(x)=4x^4-1$

Aufgabe 4 Geben Sie jeweils eine ganzrationale Funktion 4. Grades $f\colon x\mapsto y=f(x)$ an,

a) deren Graph die x-Achse bei $x=-3$ und $x=3$, und nur dort, schneidet (aber nicht berührt),

b) deren Graph die x-Achse bei $x=-3$ und $x=3$, und nur dort, berührt (aber nicht schneidet),

c) die keine reellen Nullstellen besitzt, gerade ist und deren Graph durch die Punkte (0,-6) und (1,-2) geht,

d) die Nullstellen bei $x=-3$ und $x=6$ besitzt, gerade ist und deren Graph die Ordinate bei $y=-3$ schneidet.

Aufgabe 5 Geben Sie jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine gebrochenrationale Funktion $f\colon x\mapsto f(x)$ die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) $D_f=\mathbf{R}$

b) f hat keine reellen Nullstellen

c) der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der Ordinate

d) f ist gerade

e) f ist ungerade

f) f ist beschränkt

g) die x-Achse ist Asymptote von f für $x\to\pm\infty$

h) eine Parallele zur x-Achse, aber nicht die x-Achse selbst, ist Asymptote von f für $x\to\pm\infty$

i) eine Gerade mit von Null verschiedener Steigung ist Asymptote von f für $x\to\pm\infty$

Lösungen zu Aufgabe 1

a) 245 b) 0 c) 6 d) 4 e) $3a^2$ f) $\frac{4}{5}$ g) $\frac{1}{3}$ h) 6 i) n j) -1 k) $\frac{1}{2}$

l) Grenzwert existiert nicht, $\lim\limits_{x\uparrow 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{11}{8-x^3}\right)=\infty$ (uneigentlicher Grenzwert),
$\lim\limits_{x\downarrow 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{11}{8-x^3}\right)=-\infty$ (uneigentlicher Grenzwert)

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $f(x)=(x-1)^2(x+1)$

b) $f(x)=(x+1)(2x^2+2x+2)$

c) $f(x)=(x+2)(x-3)(-1)$

d) $f(x)=(x-14)(x+14)(x^2+5)$

e) $f(x)=2x^2+4x+20$

f) $f(x)=\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(4x^2+2)$

Lösungen zu Aufgabe 4

a) z.B. $f(x)=x^4-8x^2-9$

b) z.B. $f(x)=x^4-18x^2+81$

c) z.B. $f(x)=-2x^4+6x^2-6$

d) $f(x)=-\frac{1}{108}x^4+\frac{5}{12}x^2-3$

Lösungen zu Aufgabe 5 Es sei Z das Zählerpolynom und N das Nennerpolynom von f.

a) $N^{-1}(\{0\})=\emptyset$ (d.h. N hat keine reellen Nullstellen)

b) $Z(x)=0\Rightarrow N(x)=0$ (d.h. jede reelle Nullstelle von Z ist auch Nullstelle von N)

c) $N(0)=0$

d) $Z(x)$ und $N(x)$ enthalten nur gerade Exponenten oder $Z(x)$ und $N(x)$ enthalten nur ungerade Exponenten

e) $Z(x)$ enthält nur gerade und $N(x)$ nur ungerade Exponenten oder $Z(x)$ enthält nur ungerade und $N(x)$ nur gerade Exponenten

f) grad $Z\le$ grad N und jede Nullstelle von N der Vielfachheit m ist Nullstelle von Z der Vielfachheit m' mit $m'\ge m$

g) grad $Z<$ grad N (d.h. f ist echt gebrochenrational)

h) grad $Z=$ grad N

i) grad $Z=$ grad $N+1$