Aufgabe 1 Berechnen Sie jeweils das totale Differential df von f.

a) $f(x,y) = \sin(x^2+2y)$ b) $f(x,y) = 3x^2+4xy-2y^2$ c) $f(x,y) = \frac{xy}{y-x}$

d) $f(x,y,z) = x^2\ln y + \ln x + y^2 \ln z$ e) $f(x,y,z) = xe^{yz}$ f) $f(x,y,z) = xy^2z^3$

Aufgabe 2 Handelt es sich bei den folgenden Ausdrücken jeweils um das totale Differential einer Funktion f der Variablen x und y? Falls ja: Wie lautet f?

a) $x^2y\,dx + x^2y\,dy$ b) $(ye^x+2xy)dx + (e^x+x^2+y^4)dy$ c) $dx+dy$

Aufgabe 3 Linearisieren Sie jeweils die Funktion f an der Stelle $\mathbf{a}$.

a) $f(x,y,z) = e^x + 2e^y + 3e^z, \quad \mathbf{a} = (1,1,1)$

b) $f(x,y) = 5\frac{y^2}{x}, \quad \mathbf{a} = (1,2)$

c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^2+x_2)\sin x_2 + x_3x_4 + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x_4), \quad \mathbf{a} = (-1,\frac{\pi}{2},-2,1)$

Aufgabe 4 Wenden Sie die Regel für die lineare Fehlerfortpflanzung an.

a) Zur Berechnung eines elektrischen Widerstandes $R = U/I$ werden die Stromstärke $I = (10 \pm 0,5)A$ und die Spannung $U = (80 \pm 2)V$ gemessen. Wie groß sind Näherungswert und Messunsicherheit von R?

b) Zur Berechnung der Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{LC}$ eines ungedämpften elektromagnetischen Schwingkreises werden die Kapazität $C = (32 \pm 2)\mu F$ und die Induktivität $L = (0,5 \pm 0,1)H$ gemessen. Wie groß sind Näherungswert und Messunsicherheit von T?

Aufgabe 5 Verwenden Sie die Kettenregel, um die Funktion F mit $F(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$ nach t zu differenzieren.

a) $f(x,y) = xy - y, \quad x(t) = 1-\sin t, \quad y(t) = t - \cos t$

b) $f(x,y) = \tan(xy), \quad x(t) = 2t-3, \quad y(t) = 4t+6$

Aufgabe 6 Für die Koordinaten x, y und z eines punktförmigen Teilchens im dreidimensionalen Raum als Funktionen der Zeit gelte $x(t) = 7\cos t$, $y(t) = 7\sin t$ und $z(t) = 3t$, d.h. das Teilchen bewege sich entlang einer Schraubenlinie. Ermitteln Sie auf zwei unterschiedliche Arten den Zeitpunkt t, zu dem der Abstand des Teilchens zum Ursprung des Koordinatensystems minimal ist.

Aufgabe 7 Die reellwertige Funktion f einer Variable sei implizit durch die Gleichung $g\big(x,f(x)\big) = 0$ definiert, wobei $g(x,y) = y^2 - 16x^2y - 17x^3$. Es gelte $f > 0$. Berechnen Sie $f'(1)$.

Aufgabe 8 Beweisen Sie die folgende Produktregel für Gradienten, wobei f und g auf R^n definierte, reellwertige und total differenzierbare Funktionen seien:

$$\mathrm{grad}(fg) = \mathrm{grad}f \cdot g + f \cdot \mathrm{grad}g.$$

Aufgabe 9

a) Berechnen Sie $\mathrm{grad}f(\mathbf{a})$ und $|\mathrm{grad}f(\mathbf{a})|$ für $f(x,y) = x + y^2$ und $\mathbf{a} = (3,1)$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{grad}f(x,y)$ und $|\mathrm{grad}f(x,y)|$ für $f(x,y) = y^2\tan(xy)$.

c) Berechnen Sie $\mathrm{grad}f(x,y,z)$ und $|\mathrm{grad}f(x,y,z)|$ für $f(x,y,z) = xz\sin(y) + ye^{xy}$.