Aufgabe 1 Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem. Führen Sie dazu eine Trennung der Variablen und eventuell zuvor eine geeignete Substitution durch.

a) $y' + y \sin x = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{e}$ b) $x(x+1)y' = y, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

c) $yy' = 2e^{2x}, \quad y(0) = 2$ d) $y^2 y' + x^2 = 1, \quad y(2) = 1$

e) $y' + 2y = x, \quad y(0) = 1$ f) $y' = y^2 \sin x, \quad y(0) = 1$

Aufgabe 2 Die Sinkgeschwindigkeit $v(t)$ eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit als Funktion der Zeit t wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$m\dot{v} + kv = mg,$$

wobei k der Reibungsfaktor und g die Erdbeschleunigung ist. Wie lautet die Lösung dieser Differentialgleichung bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$?

Aufgabe 3 Ein Kondensator der Kapazität C wird zunächst auf die Spannung U_0 aufgeladen und dann über einen ohmschen Widerstand R entladen. Die Differentialgleichung für diesen zur Zeit $t = 0$ einsetzenden Ausschaltvorgang lautet

$$RC\dot{U} + U = 0.$$

Berechnen Sie den Verlauf der Kondensatorspannung $U(t)$ als Funktion der Zeit t.

Aufgabe 4 Welche reellwertige Funktion f einer Variable hat als Eigenschaften, dass die Kurve $y = f(x)$ durch den Punkt $(2, 3)$ geht und dass die von den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen begrenzten Abschnitte aller Tangenten jeweils durch ihren Berührungspunkt halbiert werden?

Aufgabe 5 Berechnen Sie jeweils durch Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

a) $y' + 2y = \cos x$ b) $xy' = x^2 - y$ c) $y' + y \tan x = \cos x$

d) $y' + y \tan x = 2 \sin x \cos x$ e) $y' + 2xy = 3x$ f) $xy' + y = x \sin x$

Aufgabe 6 Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

a) $y'' - 3y' + 2y = e^{17x}$ b) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ c) $y'' - y = \cos x$

d) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ e) $y'' + 2y' + y = xe^{-2x}$ f) $y'' - 5y' + 6y = x^2$

g) $y'' + 9y = 4 \sin(3x)$ h) $y'' + 9y = 3 \sin(4x)$ i) $y'' - 5y' = x^2$

Aufgabe 7 Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem.

a) $xy' + 2y = e^x, \; y(1) = e$ b) $y'' + 10y' + 21y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 4$

c) $y'' + 2y' + 2y = e^{-2x}, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$ d) $xy' + y = \ln x, \; y(1) = 1$

e) $y'' + 4y' + 5y = 20x + 2, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$ f) $y' = 3x^2 y + e^{x^3} \cos x, \; y(0) = 2$

g) $y'' + 4y' + 4y = 20x + 2, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$ h) $y' - y \tan x = 2 \sin x, \; y(0) = 0$