

Lösungen zu Blatt 10

Aufgabe 1

a) $f_x(x, y) = 1$, $f_y(x, y) = -1$, $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$

b) $f_x(x, y) = 3x^2y - y^3$, $f_y(x, y) = x^3 - 3y^2x$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 3x^2 - 3y^2$
 $f_{xx}(x, y) = 6xy$, $f_{yy}(x, y) = -6yx$

c) $f_x(x, y) = e^{-y} + y \cos x$, $f_y(x, y) = -xe^{-y} + \sin x$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -e^{-y} + \cos x, f_{xx}(x, y) = -y \sin x, f_{yy}(x, y) = xe^{-y}$$

d) $f_x(x, y, z) = yz$, $f_y(x, y, z) = xz$, $f_z(x, y, z) = xy$

$$f_{xx}(x, y, z) = f_{yy}(x, y, z) = f_{zz}(x, y, z) = 0$$

$$f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = z, f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) = y, f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = x$$

e) $f_x(x, y) = yx^{y-1}$, $f_y(x, y) = \ln x \cdot x^y$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = x^{y-1} + y \cdot \ln x \cdot x^{y-1}$
 $f_{xx}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}$, $f_{yy}(x, y) = (\ln x)^2 \cdot x^y$

f) $f_x(x, y) = \frac{1}{x + \ln y}$, $f_y(x, y) = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{-1}{(x + \ln y)^2} \cdot \frac{1}{y}$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-1}{(x + \ln y)^2}, f_{yy}(x, y) = \frac{-1 - x - \ln y}{(x + \ln y)^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

g) $f_x(x, y, z) = f_y(x, y, z) = f_z(x, y, z) = \cosh(x + y + z)$

$$f_{xx}(x, y, z) = f_{xy}(x, y, z) = f_{xz}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = f_{yy}(x, y, z) = f_{yz}(x, y, z) \\ = f_{zx}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = f_{zz}(x, y, z) = \sinh(x + y + z)$$

h) $f_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f_y(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, $f_{xx}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_{yy}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

Aufgabe 2

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 0

Aufgabe 3

a) $z = -1 - x + 2y$ b) $z = -9 + 18x + 6y$ c) $z = 5 + 3x - 3y$

Aufgabe 4

a) $df_a(\underline{h}) = \frac{1}{2}h_1 + (1 - \frac{\ln 2}{4})h_2$ b) $df_a(\underline{h}) = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})h_1 + (2\sqrt{3} - 3)h_2$
c) $df_a(\underline{h}) = -2h_1 + h_2 + h_3 - h_4$

Aufgabe 5

a) $f_x(x, y) = x + y$, $f_y(x, y) = x$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = f_{xx}(x, y) = -1$

$f_{yy}(x, y) = 0$ = alle partiellen Abl. 3. Ordnung und höher

b) auf ganz \mathbb{R}^2

c) $df_a(\underline{h}) = 3h_1 + h_2$

d) $f(a) = 2,5$, $f(b) = 2,695$, $f(b) - f(a) = 0,195$

e) $df_a(b-a) = 0,2$

f) $df_a(b-a) \approx f(b) - f(a)$

g) $f(b) \approx f(a) + df_a(b-a)$

Aufgabe 6

$\delta = 3\varepsilon$

Lösungen zu Blatt 11

Aufgabe 1

a) $df = 2x \cos(x^2 + 2y) dx + 2 \cos(x^2 + 2y) dy$

b) $df = (6x + 4y) dx + (4x - 4y) dy$

c) $df = \frac{y^2 dx - x^2 dy}{(y-x)^2}$

d) $df = (2x \ln y + \frac{1}{x}) dx + (\frac{x^2}{y} + 2y \ln z) dy + \frac{y^2}{z} dz$

e) $df = e^{yz} (dx + xz dy + xy dz)$

f) $df = y^2 z^3 dx + 2xy z^3 dy + 3x y^2 z^2 dz$

Aufgabe 2

a) nein b) ja, $f(x, y) = y e^x + y x^2 + \frac{1}{5} y^5 + C, C \in \mathbb{R}$

c) ja, $f(x, y) = x + y + C, C \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3

a) $f_{\text{lin.}}(x, y, z) = ex + 2ey + 3ez$ b) $f_{\text{lin.}}(x, y) = -20x + 20y$

c) $f_{\text{lin.}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$

Aufgabe 4

a) $\bar{R} = 8 \Omega, \Delta R = 0,2 \Omega$ b) $\bar{T} = 8 \pi \mu F H, \Delta T = \frac{21}{20} \pi \mu F H$

Aufgabe 5

a) $\dot{F}(t) = -t \cos t + \cos^2 t - \sin t - \sin^2 t$

b) $\dot{F}(t) = 16t [1 + \tan^2(8t^2 - 18)]$

Aufgabe 6

$$t=0$$

Aufgabe 7

$$f'(1) = \frac{493}{18}$$

Aufgabe 8

$$a) \quad \text{grad } f(3,1) = (1, 2), \quad |\text{grad } f(3,1)| = \sqrt{5}$$

$$b) \quad \text{grad } f(x,y) = (y^3(1+\tan^2(xy)), 2y \tan(xy) + y^2x(1+\tan^2(xy)))$$

$$|\text{grad } f(x,y)| = \sqrt{[y^3(1+\tan^2(xy))]^2 + [2y \tan(xy) + y^2x(1+\tan^2(xy))]^2}$$

$$c) \quad \text{grad } f(x,y,z) = (z \sin y + y^2 e^{xy}, xz \cos y + e^{xy} + yx e^{xy}, x \sin y)$$

$$|\text{grad } f(x,y,z)| = \sqrt{(z \sin y + y^2 e^{xy})^2 + (xz \cos y + e^{xy} + yx e^{xy})^2 + x^2 \sin^2 y}$$

Lösungen zu Blatt 12

Aufgabe 1

a) $\frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{-6}{\sqrt{10}}, \frac{11}{\sqrt{13}}, \sqrt{10}, \frac{-9}{\sqrt{13}}, -\sqrt{10}, 0$

$|\text{grad } f(\underline{a})| = \sqrt{10}, \underline{a} = (3, 1)$

b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ c) -22

Aufgabe 2

- a) lokales Minimum bei $(0, 0)$
- b) lokale Minima bei $(0, -\sqrt{2})$ und $(0, \sqrt{2})$
- c) lokales Maximum bei $(0, 3)$
- d) keine Extremwerte

Aufgabe 3

- a) Zentralfeld, sphärisches Feld, Gradientenfeld
- b) Zentralfeld
- c) Zentralfeld, sphärisches Feld, Gradientenfeld
- d) —
- e) zylindrisches Feld
- f) —

Aufgabe 6

$$a) y(x) = \frac{2x}{1+2Cx}$$

$$b) y(x) = -\frac{2x+1+2C}{x+C}$$

$$c) y(x) = C + Cx^3$$

$$d) y(x) = \tanh(x+C)$$

$$e) y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^6 + C}$$

$$f) y(x) = -x-1 + \tan(x-C)$$

$$g) y(x) = (4 \ln x + C) \cdot x$$

$$h) y(x) = -1 + C \sin x$$

i) nicht geschlossen lösbar

Lösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1

a) $y(x) = e^{\cos x}$

b) $y(x) = \frac{x}{x+1}$

c) $y(x) = \sqrt{2e^{2x} + 2}$

d) $y(x) = \sqrt[3]{3 - x^3 + 3x}$

e) $y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}e^{-2x}$

f) $y(x) = \frac{1}{\cos x}$

Aufgabe 2

$$v(t) = \frac{mg}{\zeta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\zeta}\right) e^{-\frac{\zeta t}{m}}$$

Aufgabe 3

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

Aufgabe 5

a) $y(x) = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + C e^{-2x}$

b) $y(x) = \frac{x^3 + C}{3x}$

c) $y(x) = x \cos x + C \cos x$

d) $y(x) = -2 \cos^2 x + C \cos x$

e) $y(x) = \frac{3}{2} + C e^{-x^2}$

f) $y(x) = \frac{\sin x - x \cos x + C}{x}$

Aufgabe 6

$$a) y(x) = \frac{1}{240} e^{17x} + A_1 e^{2x} + A_2 e^x$$

$$b) y(x) = (x-1)e^{2x} + A_1 e^{2x} + A_2 e^x$$

$$c) y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + A_1 e^{-x} + A_2 e^x$$

$$d) y(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{-x} + A_1 x e^{-x} + A_2 e^{-x}$$

$$e) y(x) = (x+2)e^{-2x} + A_1 x e^{-x} + A_2 e^{-x}$$

$$f) y(x) = \frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{19}{108} + A_1 e^{2x} + A_2 e^{3x}$$

$$g) y(x) = \frac{2}{9} \sin 3x - \frac{2}{3} x \cos 3x + A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x$$

$$h) y(x) = -\frac{3}{7} \sin 4x + A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x$$

$$i) y(x) = -\frac{1}{15} x^3 - \frac{1}{25} x^2 - \frac{2}{125} x + A_1 + A_2 e^{5x}$$

Aufgabe 7

$$a) y(x) = \frac{(x-1)e^x + e}{x^2}$$

$$b) y(x) = -e^{-2x} + e^{-3x}$$

$$c) y(x) = \frac{3}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x + \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$d) y(x) = \ln x - 1 + \frac{2}{x}$$

$$e) y(x) = 4x - \frac{14}{5} + \frac{23}{5} e^{-2x} \sin x + \frac{10}{5} e^{-2x} \cos x$$

$$f) y(x) = e^{x^3} \sin x + 2e^{x^3}$$

$$g) y(x) = 5x - \frac{9}{2} + \frac{25}{2} e^{-2x}$$

$$h) y(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2 \cos x}$$