Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

Script zur Vorlesung Mathematik I

Prof. Dr. Bauer

(WS 2004/2005)

Download unter: http://mathe.itche.de
Infos und Hinweise an: webmaster@itche.de

0 Organisatorisches

Vorlesung Di 10^{15} - 11^{45} R. 203

Mi 10^{15} - 12^{45} R. 250 (incl. 15 Min. Pause)

Ausnahmen: 19/20 Okt. Keine Vorlesung

27. Okt. zusätzl. Vorlesung 9^{00} - 10^{15} R 203

28. Okt. zusätzl. Vorlesung 10^{15} - 11^{45} R 203

Übungen: Di 15^{15} - 17^{30} R 250

Mi 14^{15} - 16^{30} R. 250

Ausnahmen: 12/13 Okt. Keine Übungen

27/28 Okt. Keine Übungen

Die Übungsblätter im Internet → www.et.fh-muenster.de/ →
→ person/bauer/uebungsblaetter.htm (pdf)

Klausur: im Vortermin (Anfang Februar 2005)

Dauer 135 Min.

Keine Hilfsmittel

Kontakt: gernot.bauer@fh-muenster.de

Sprechstunde nach Vorlesung od. nach Vereinbarung

Büro: RQ19 (AG1)

Literatur:

* Fetzer/Fränkel, Mathematik (2 Bände), Springer
* Papula, Mathematik f. Ingenieure und Naturwissenschaftler (3 Bände), Vieweg
* Westermann, Mathematik f. Ingenieure m. Maple (2 Bände), Springer

7 Tipps: Wie studiere ich Mathematik

- Mathematik ist schwer!
  Schwierige Inhalte versteht man erst nach mehreren Anläufen.
  Das ist anstrengend und kostet Mühe, aber es gibt keinen anderen Weg.
- Arbeiten Sie kontinuierlich während des ganzen Semesters von der ersten bis zur letzten Woche mit.
- Fertigen Sie eine saubere strukturierte und lückenlose Vorlesungsmitschrift an.
- Arbeiten Sie jede Vorlesung möglichst bald nach. Spätestens zu Beginn eines neuen Vorlesungstermines müssen Sie die wesentlichen Inhalte der vorhergehenden Vorlesungen kennen, damit Sie folgen können.
-
- Bilden Sie kleine Lerngruppen. (max. 5 Personen)
- Entscheidend für Ihren Erfolg sind die Übungen. Verarbeiten Sie jedes Übungsblatt ausführlich
- Fragen Sie Ihre Kommilitonen, die Tutoren und den Dozenten

1) Grundlagen

1.1 Aussagelogik

Im Unterschied zur Umgangssprache benutzt die Mathematik eine sehr präzise Sprachweise, die wir hier einführen

1.1.1 Aussage

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfasst.

Definition (Aussage)

Unter Aussage versteht man ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch sein kann

Bemerkung

Die Beschränkung auf Aussagen, bei denen es Sinn hat zu fragen, ob sie wahr oder falsch sind, heißt „Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten".

Beispiele

	Aussage	
1) 5 ist kleiner als 3	☑	F
2) Paris ist die Hauptstadt Frankreichs	☑	W
3) Das Studium ist sehr schwierig	☑	!
4) Nach dem Essen Zähneputzen!	☐	
5) Nachts ist es kälter, als draußen.	☐	

Die Werte „wahr" und „falsch" heißen Wahrheitswerte.
Jede Aussage hat einen dieser beiden Wahrheitswerte.
Das heißt aber nicht, daß dieser Wahrheitswert auch bekannt ist.

Beispiele (Forts.)

6) Der Welt Klima Konferenz wird es gelingen, die Klima Katastrophe aufzuhalten

7) Jede gerade Zahl größer 2 ist Summe zweier Primzahlen

Aussage 6 wird sich erst in Zukunft als wahr oder falsch erweisen. Bei Aussage 7 ist der Wahrheitswert unbekannt und wird vielleicht nie geklärt.

$6 = 3+3$

$50 = 31+19$

$98 = 19+79$

u.s.w.

<u>Bemerkung:</u>

Eine Aussage, die einen mathematischen Sachverhalt beschreibt und wahr ist, wird als Satz bezeichnet.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Mit A und B sei jeweils eine Aussage bezeichnet

<u>Die „und"-Verknüpfung (Konjunktion)</u>

Die zusammengesetzte Aussage A und B (Kurzschreibweise: $A \wedge B$) ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Andernfalls ist sie falsch.
Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B kann durch folgende Verknüpfungstabelle (oder Wahrheitstafel) ausgedrückt werden. (w für wahr, f für falsch)

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Beispiel („und")

A   2 ist gerade (wahr)

B $5 < 3$ (falsch)

C   Für alle reellen Zahlen gilt $x^2 \geq 0$ (wahr)

Die Aussage „2 ist gerade" und „$5 < 3$" ($A \wedge D$) ist falsch.
Die Aussage $A \wedge C$ ist wahr.

V	D.	3^{15} – 11^{15}	R 250
	M.	3^{15} – 11^{15}	R 150
Ü	D.	15^{15} – 17^{15}	R 250
	M.	15^{30} – 17^{15} (?) (?)	R 150

Die oder Verknüpfung (Disjunktion, Alternative)

Die zusammengesetzte Aussage

A oder B (Kurzbezeichnung $A \vee B$)

ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.

Sind beide Aussagen A und B falsch, dann ist auch die zusammengesetzte Aussage A oder B falsch.

Wahrheitstafel

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Beispiel („oder")

A: Weihnachten ist am 24.12. (wahr)

B: Die Erde ist eine Scheibe (falsch)

C: Heute ist Montag (an einem Montag wahr, sonst falsch)

„Die Aussage Weihnachten ist am 24.12." oder „die Erde ist eine Scheibe"

($A \vee B$) ist wahr, die Aussage „Weihnachten ist am 24.12." oder „Heute ist Montag" ($A \vee C$) ist wahr (immer).

$B \vee C$ ist nur an einem Montag wahr, sonst falsch

Die „~~[illegible]~~ entweder" oder Verknüpfung (exclusives oder)

Die zusammengesetzte Aussage

entweder A oder B ($A \dot{\vee} B$)

ist wahr, wenn eine der beiden Aussagen wahr und die andere Aussage falsch ist und nur dann

A	B	$A \dot\vee B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Beispiel (entweder-oder)

Es sei m eine ganze Zahl

A: m ist gerade

B: m ist ungerade

C: m ist durch 3 teilbar

die Wahrheitswerte hängen jeweils von der speziellen Wahl der ganzen Zahl m ab

Die Aussage „entweder ist m gerade oder m ist ungerade" ($A \dot\vee B$) ist wahr, und zwar unabhängig von m.
Dagegen hängt der Wahrheitswert der Aussage „entweder ist m gerade oder m ist durch 3 teilbar" ($A \dot\vee C$) von der speziellen Wahl von m ab. Für $m = 2, 3$ ist $A \dot\vee C$ wahr, für $m = 6, 7$ ist $A \dot\vee C$ falsch.

Bemerkungen

1) Im obigen Beispiel hängt die Aussage A und damit der Wahrheitswert von der speziell gewählten ganzen Zahl m ab. Man nennt m einen Parameter und schreibt auch $A(m)$, um die Parameterabhängigkeit auszudrücken. Ebenso $B(m)$, $C(m)$

2) Das exklusive oder wird in der Mathematik nur sehr selten verwendet

3) Im Alltagssprachgebrauch hört man häufig ~~dass~~ die Verknüpfung von Aussagen mit „und/oder", etwa „Ich komme heute und/oder morgen".
Mathematisch ist das nicht sinnvoll, ein einfaches „oder" drückt das Selbe aus.

Die Negation („nicht")

Die Aussage

nicht A (Kurzschreibweise ¬A)

ist wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt.

Die Aussage ¬A heißt die Negation von A.

Wahrheitstafel

A	¬A
W	F
F	W

Die Negation kehrt den Wahrheitswert einer Aussage um.

Die „wenn – dann" – Verknüpfung (Implikation)

Die zusammengesetzte Aussage

aus A folgt B (Kurzschreibweise: $A \Rightarrow B$)

ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist, andernfalls ist sie wahr.

Wahrheitstafel

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Weitere Sprechweisen:

- Wenn A gilt, dann gilt auch B
- A ist hinreichend für B
- A ist hinreichende Bedingung für B
- B ist notwendig für A
- B ist notwendige Bedingung für A

~~Beispiel~~

Beispiel (wenn – dann)

A Weihnachten ist am 24.12. (wahr)

B Ich fahre einen Besen (falsch)

C Weihnachten fällt auf Ostern (falsch)

D Die Goldbachsche Vermutung stimmt (Wahrheitswert unbekannt!)

Die Aussage "Wenn Weihnachten am 24.12 ist" dann "Fresse ich einen Besen" ist falsch $(A \Rightarrow B)$

Dagegen ist die Aussage "Wenn Weihnachten auf Ostern fällt", dann "Fresse ich einen Besen" $(C \Rightarrow B)$ wahr.

Die Aussagen "Wenn die Goldbachsche Vermutung stimmt, dann ist Weihnachten am 24.12" ist wahr unabhängig ob die Goldbachsche Vermutung stimmt oder nicht.

Bemerkung

Es mag zunächst überraschen, daß Schlußfolgerungen aus falschen Voraussetzungen immer wahr sind. Anders ausgedrückt: Aus einer falschen Voraussetzung kann man jede beliebige Behauptung schlußfolgern, sei diese Behauptung nun wahr oder falsch.
z.B. kann man aus der Voraussetzung „$0=1$" die Behauptung „Einstein ist der Papst" folgern.

Die „genau-dann-wenn" Verknüpfung (Äquivalenz)

Die zusammengesetzte Aussage

A ist äquivalent zu B (Kurzschreibweise $A \Leftrightarrow B$)

bedeutet: Aus A folgt B und aus B folgt A

Wahrheitstafel

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

weitere Sprechweisen:

- A gilt genau dann, wenn auch B gilt
- A gilt nur dann, wenn B gilt
- A ist gleichbedeutend mit B

Mathe 8.Okt

Beispiel („genau dann – wenn")

Es sei m eine ganze Zahl.

A: m ist durch 6 teilbar

B: m ist durch 2 und 3 teilbar

Es gilt: $A \Leftrightarrow B$

Komplizierte Verknüpfungen

Aus zusammengesetzten Aussagen können stufenweise kompliziertere Aussagen aufgebaut werden

z.B. $A \Rightarrow (B \vee C)$

$\neg(A \Leftrightarrow (B \vee (\neg C)))$

Ähnlich wie in der Zahlenalgebra („Punkt vor Strich Rechnung") gibt es auch in der Aussagenlogik Klammerkonventionen und Präferenzen und unterschiedliche Verknüpfungssymbole

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$

Präferenz nimmt ab: $\wedge, \vee$ " $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

$\Rightarrow, \Leftrightarrow$

Damit ist z.B.

$$((\neg A) \wedge B) \Rightarrow (\neg(C \vee D))$$

$$\neg A \wedge B \Rightarrow \neg(C \vee D)$$

1.1.3 Tautologien

Zusammengesetzte Aussagen, die unabhängig vom Wahrheitswert der einzelnen auftretenden Aussagen stets wahr sind heißen Tautologien. Unser gesamtes logisches Denken, das die Basis für die Mathematik darstellt, beruht auf der Anwendung von Tautologien. Man kann Tautologien auch als logische Gesetze auffassen. Die wichtigsten Tautologien lauten:

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ 1) Kommutativgesetz

2) Assoziativgesetz

$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

3) Distributivgesetz

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4) Negation der Negation

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

5) Kontraposition der Implikation

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

6) Kontraposition der Äquivalenz

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

7) Regeln von de Morgan

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

8) Abtrennungsregel

$((A \Rightarrow B) \wedge A)) \Rightarrow B$

mathe

Bemerkungen und Beispiele

- Zum Nachweis, das es sich bei einer verknüpften logischen Aussage um eine Tautologie handelt, nützt eine mehrspaltige Wahrheitstafel

z.B.

$\neg B$	B	$\neg B \Rightarrow B$	$(\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	f	f	w
f	w	w	w

die Aussage $(\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow B$ ist eine Tautologie.

- Die Tautologien 1) – 3) sind verantwortlich für die Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze der Mengenlehre S. 1.2
- zu 4): Dieses Gesetz besagt, dass die doppelte Verneinung zum Ursprung Äquivalent ist
- 5) – 8) sind werden sehr oft bei mathematische Beweisen verwendet.
- zu 5) Die Kontraposition der Implikation verdeutlicht nochmal die Begriffe „notwendig, hinreichend"

A: Es regnet

B: Die Strasse ist nass.

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist wahr Wenn es regnet, dann ist die Straße nass

Also ist A hinreichend für B

Zugleich ist B notwendig für A, denn aus nicht B folgt nicht A.

Wenn die Straße nicht nass ist dann regnet es nicht.

A ist allerdings nicht notwendig für B. Die Straße kann auch anders nass werden.

1.1.4 Beweistechniken

In Beweisen wird stets aus der Gültigkeit bestimmter Aussagen, der Vorraussetzungen auf die Gültigkeit anderer Aussagen. Es wird also gezeigt dass eine der Form $A \to B$ wahr ist. wobei vorab bekannt ist, dass die Vorraussetzung A wahr ist. Nach der Abtrennungsregel (Tautologie 8) hat man zugleich gezeigt, dass die Aussage B wahr ist.

Beweise haben auch in der Ingenieurmathematik ihre Berechtigung, da sie häufig dazu dienen Vorraussetzungen und Behauptungen genau zu identifizieren und zu formulieren. Damit tragen Beweise zum Verständnis der Sachverhalte bei.

→ Der Direkte Beweis

Ein direkter Beweis eine Aussage $A \Rightarrow B$ liegt vor, wenn der Nachweis mit der Hilfe von Behauptungen $A_1, A_2 \dots A_n$ in der Form $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \dots \Rightarrow B$ geführt wird

Beispiel

Die folgenden Aussagen ist zu beweisen: Aus der Teilbarkeit einer ganzen Zahl m durch 6 folgt die Teilbarkeit von m durch 2

Wir identifizieren

A: m ist durch 6 Teilbar

B: m ist durch 2 Teilbar

und zeigen, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist

Wenn A wahr ist, so gibt es eine ganze Zahl k mit $m = 6k$. Daraus folgt $m = 2(3k)$. Folglich ist m durch 2 Teilbar, d.h. B gilt und ~~B ist~~ die Implikation $A \Rightarrow B$ ist wahr.

Der indirekte Beweis

Häufig ist es leichter, statt der Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ die Schlussfolgerung $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen. Nach der Kontraposition der Implikation (Tautologie 5) sind beide Schlussfolgerungen gleichbedeutend. Man leitet also ausgehend von der Annahme $\neg B$ einen Widerspruch zu A ab.

Bsp

Die folgende Aussage ist zu beweisen. Wenn für eine ganze Zahl die Gleichung $m^2 = 4$ gilt, dann ist $m < 17$

Wir identifizieren

A: $m^2 = 4$

B: $m < 17$

und gehen von der Annahme $\neg B$ aus, also $m \geq 17$ Durch Quadrieren folgt $m^2 \geq 289$ und damit $\neg A$, ein Widerspruch zu A. Also gilt $\neg B \Rightarrow \neg A$ und somit $= A \Rightarrow B$.

Der indirekte Beweis

Häufig ist es leichter, statt der Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ die Schlussfolgerung $\neg A \Rightarrow \neg B$ zu zeigen. Nach der Kontraposition der Implikation sind beide Schlussfolgerungen gleichbedeutend.
Man leitet also ausgehend von der Annahme $\neg B$ einen Widerspruch zu A ab.

27.10.04 Mathematik Prof. Dr. Dauer

1.1 Mengen, Relationen und Abbildungen

Zu den wichtigsten Grundpfeilern der Mathematik gehört der Mengenbegriff.

1.1.1 Megenlehre

Definition (Menge, G. Cantor 1895):
Eine Menge ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Sprechweise und Notationen

Mengen werden mit Großbuchstaben gekennzeichnet.
Die Objekte der Menge M werden die Elemente von M genannt.
Ist das Objekt x ein bzw. kein Element von M, so schreibt man

$x \in M$ bzw. $x \notin M$

Zwei Mengen M und N heißen gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Man schreibt dann $M = N$. Sind M und N nicht gleich, schreibt man $M \neq N$.

Bei der <u>aufzählenden Schreibweise</u> zur Kennzeichnung von Mengen z.B.

$M = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

spielt die Reihenfolge keine Rolle.

Die <u>beschreibende Schreibweise</u> hat die allgemeine Struktur:

$X = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$ oder

$X = \{x \in G \mid \quad \text{"} \quad \}$, z.B.

$M = \{x \mid x \text{ ist Vokal im deu. Alphabet}\}$.

$B = \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl und } x > -4\}$

Dabei wird der senkrechte Strich gelesen als „mit der Eigenschaft" und G bezeichnet eine Grundmenge, der die Elemente von X sämtlich entstammen sollen.

Eine Menge, die kein Element besitzt, heißt <u>leere Menge</u> und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet

Im Vorgriff auf Kap. 2 nennen wir hier, ohne genau zu wissen, was eine reelle Zahl eigentl. ist, einige wichtige Zahlenmengen:

$\mathbb{R}$	reellen Zahlen
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürlichen "
$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$	ganzen "
$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = p/q \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	rationalen "

Eine Menge M heißt <u>Teilmenge</u> der Menge N, in Zeichen $M \subset N$, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Wir sagen auch: M ist in N enthalten oder N ist Obermenge von M

Ist M nicht Teilmenge von N, so schreibt man $M \not\subset N$.
Ist $M \subset N$ und $M \neq N$, so heißt M <u>echte Teilmenge</u> von N.

<u>Bemerkungen</u>

1) Mengen sind selbst wieder Objekte, d.h. sie können auch wieder zu Mengen zusammengefasst werden, z.B
$M = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, $N = \{\emptyset, 1, \{1\}\}$.
M hat 4 und N hat 3 Elemente.
Einelementige Mengen der Form $\{m\}$ und ihr Element m sind unterschiedliche Objekte.

2) Beziehungen zwischen Mengen
wie z. B. $M \subset N$ lassen sich auch durch Verknüpfungen von Aussagen über Elementzugehörigkeiten ausdrücken:

$$M \subset N \Leftrightarrow (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

$M \subset N$ und $N \subset M$ gilt genau dann, wenn $M = N$.

$$\begin{aligned} M \subset N \wedge N \subset M &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) \\ &\Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \\ &\Leftrightarrow (x \in M \Leftrightarrow x \in N) \\ &\Leftrightarrow M = N \end{aligned}$$

3) Für alle Mengen M gilt $M \subset M$ und $\emptyset \subset M$

Megenoperationen

Der Durchschnitt zweier Mengen M und N (Kurzbeschreibung: $M \cap N$) ist die Menge der Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind:

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

M und N heißen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h. $M \cap N = \emptyset$

Die Vereinigung zweier Mengen M und N $(M \cup N)$ ist die Menge der Elemente, die in M oder in N enthalten sind.

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$

Die Differenzmenge zweier Mengen M und N ($M \setminus N$) ist die Menge aller Element die in M, aber nicht in N enthalten sind:

$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

Ist beim Umgang mit Mengen eine bestimmte Grundmenge G vereinbart, so wird die Differenzmenge immer ~~auf~~ im Bezug auf die Grundmenge gebildet, ohne dass sie explizit erwähnt wird.
Statt $G \setminus N$ schreibt man $\bar{N}$ und nennt $\bar{N}$ das Kompliment von N.

Beispiele:

$M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 3, 5\}$

$M \cap N = \{3, 5\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3, 5\}$, $M / N = \{1\}$

Bemerkung:

Für die Mengenoperationen gelten folgende Rechengesetze:

1) Kommutativgesetz

$M \cup N = N \cup M$

$M \cap N = N \cap M$

2) Assoziativgesetz

$(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$

$(M \cap N) \cap S = M \cap (N \cap S)$

3) Distributivgesetz

$M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

$M \cup (N \cap S) = (M \cup N) \cap (M \cup S)$

4) Regeln von der Morgan

$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

Die Regeln 1) - 4) ergeben sich aus den entsprechenden Tautologien (S. 1.1.3) aufgrund der Entsprechungen zwischen den Mengenoperationen $\cap$ bzw. $\cup$ und den logischen Verknüpfungen $\wedge$ bzw. $\vee$.

Quantoren

Quantoren stellen ein Bindeglied zwischen Aussagelogik und Mengenlehre.
An Stelle der Aussage
es gilt ein Element x in der Menge M mit der Eigenschaft E schreibt man kurz $\exists x \in M \quad E$
Das Zeichen $\exists$ heißt Existenzquantor.
An stelle der Aussage
für alle Elemente x in der Menge M gilt die Eigenschaft E
schreibt man kurz $\forall x \in M \quad E$
Das Zeichen $\forall$ heißt Allquator oder Generalisierungsquantor.

Beispiel:

Die Aussage $\exists x \in \mathbb{Z} \; x^2 + 1 = 0$ ist falsch, denn es gibt keine ganze Zahl x, die die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ erfüllt.

Die Aussage $\forall x \in \mathbb{Z} \; x$ ist eine Primzahl ist falsch, denn $4 \in \mathbb{Z}$ ist keine Primzahl.

Unendliche Vereinigungen und Durchschnitt

Sei J eine Menge von Indizes, z. B. $J = \mathbb{N}$ und für alle $i \in J$ sei eine Menge M_i gegeben.
Die Menge $\bigcup_{i \in J} M_i$, definiert durch
$$\bigcup_{i \in J} M_i = \{x \mid \exists i \in J \quad x \in M_i\},$$
heißt unendliche Vereinigung der Mengen $M_i \, (i \in J)$. Die Menge $\bigcap_{i \in J} M_i$, definiert durch
$$\bigcap_{i \in J} M_i = \{x \mid \forall i \in J \quad x \in M_i\}$$
heißt unendlicher Durchschnitt

Bemerkung

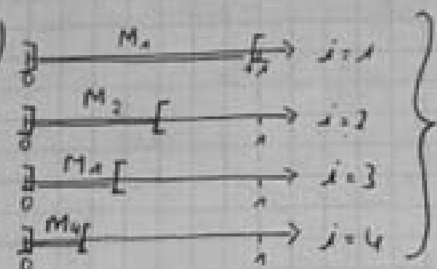
Ist die Indexmenge endlich, d. h. enthält sie nur endlich viele Elemente, etwa $J = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, so stimmen diese Definitionen mit unser bisherigen Definition von Vereinigung und Durchschnitt überein und wir schreiben auch.
$$\bigcup_{i \in J} M_i = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \ldots \cup M_k = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$$
$$\bigcap_{i \in J} M_i = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \ldots \cap M_k = \bigcap_{i=1}^{k} M_i$$

Beispiele:

1) $J = \mathbb{N}$, $M_i = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{i}\}$ Dann ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$

2) $J = \mathbb{N}$, $M_i = \{-i ; i\}$ Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

zu 1)



$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$

Kartesische Produkt

Sind M und N Mengen, so heißt die Menge $M \times N$, definiert durch

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

d.h. die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, das kartesische Produkt von M und N.

Bemerkungen und Beispiele

1) Geordnet heißt, das etwa $(1,4)$ und $(4,1)$ verschiedene Elemente von $M \times N$ sind.

2) Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ. Beispiel:

$M = \{1, 2\}$, $N = \{a, b, c\}$. Dann gilt

$M \times N = \{(1,a); (2,a); \cancel{(2,a)}; (1,b); (2,b); \cancel{(2,b)}; (1,c); (2,c)\}$

$N \times M = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2);\}$

d.h. $M \times N \neq N \times M$.

3) Für k Mengen $M_1, M_2, \dots, M_k$, kann man analog das n-fache kartesische Produkt

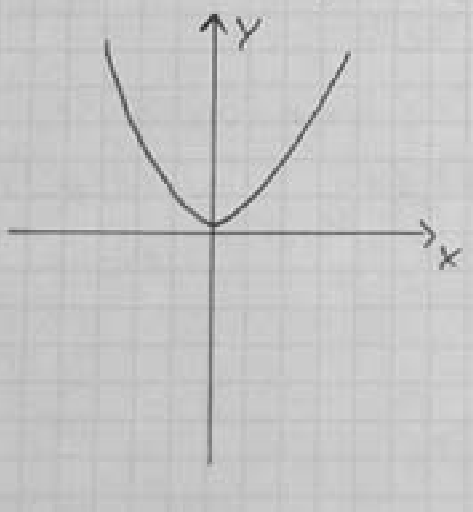
$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots \times M_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in M_i\}$$

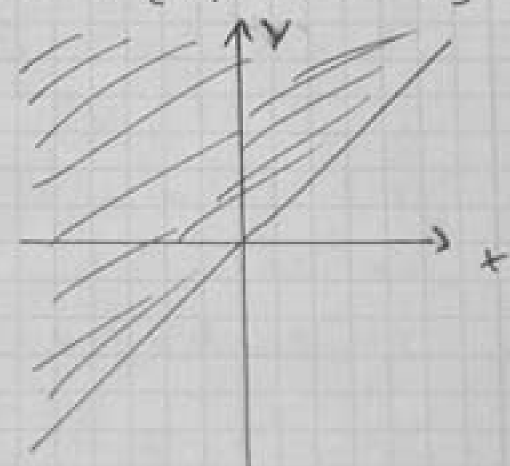
bilden. Die Elemente dieses Produktes heißen <u>geordnete k-Tupel</u>. Sind alle Mengen M gleich, $M_1 = M_2 = \dots = M_k$, so schreibt man kurz $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k = M^k$

4) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Menge der kartesischen Koordinaten in zwei Demensionen. Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ können als Punkte im kartesichen Koordinatensystem in der Ebene aufgelöst werden.

5) Mit kartesichem Produkt kann man wieder wie bei allen Mengen, Teilmengen, Schnittmengen und Vereinigungsmengen bilden, z.B

$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ oder $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y\}$





1.2.2 Relationen

Definition:

Sind M und N Mengen, so heißt eine Teilmenge $R \subset M \times N$ des kartesischen Produktes von M und N eine Relation auf $M \times N$.

Ist $M = N$, so heißt R kurz eine Relation auf M. Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch xRy.

Bemerkung

Relation heißt Beziehung. Eine Relation auf $M \times N$ beschreibt eine Beziehung, die zwischen bestimmten Paaren von Elementen der Mengen M und N besteht. Als Teilmenge von $M \times N$ enthält sie genau die Paare (x,y), für die die Beziehung xRy gilt.

Beispiele

1) Die im Beispiel 5) oben auftretende Menge $H \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Relation. Sie beschreibt die Beziehung „kleinergleich" zwischen zwei reellen Zahlen, d.h. $\cancel{(x,y) \in H \Leftrightarrow xHy}$
$(x,y) \in H \Leftrightarrow xHy \Leftrightarrow x \leq y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
Die graphische Repräsentation dieser Relation ist eine Halbebene oberhalb der Hauptdiagonalen als Begrenzung.
Alle anderen Vergleichsoperatoren $<, \geq, >, =, \neq$ entsprechen ebenfalls Relationen auf $\mathbb{R}$.

2) Ist S die Menge der Studierenden des Fachbereichs und F die Menge der angebotenen Fächern eines Studiengangs ist, so ist die Menge

$B = \{(s,f) \mid s \in S$ hat das Fach $f \in F$ erfolgreich absolviert$\} \subset S \times F$ eine Relation auf $S \times F$

<u>Eigenschaften von Relationen</u>

Es sei R eine Relation auf der Menge M

R heißt

a) <u>reflexiv</u>, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x R x$

b) <u>symmetrisch</u>, wenn für alle $x, y \in M$ gilt
$x R y \Rightarrow y R x$

c) <u>transitiv</u>, wenn für alle $x, y, z \in M$, gilt
$x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$.

Eine Relation heißt <u>Äquivalenzrelation</u>, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

<u>Beispiel:</u>

1) Unter den Vergleichsop. $\leq, <, >, \geq, =, \neq$, ist nur $=$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.

z. B. ist

$<$ nicht reflexiv, weil $x < x$ nicht gilt

$\geq$ ist nicht sym., da aus $x \geq y$ nicht $y \geq x$ folgt

$\neq$ nicht transitiv, denn $x \neq y$ und $y \neq z$ folgt nicht $x \neq z$ (x könnte gleich z sein).

2) $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m-n$ ist durch 5 teilbar$\} \subset \mathbb{Z}^2$
ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$

a) mRm, denn $m-m=0$ ist durch 5 teilbar. Also ist R reflexiv.

b) Sei mRn, d.h. $m-n=5k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n-m=5(-k)$ ebenfalls durch 5 teilbar, d.h. nRm. Also ist R symmetrisch.

c) Sei mRn und nRs, d.h. $m-n=5k$ und $n-s=5l$ für $k, l \in \mathbb{Z}$. Dann ist $m-s=(m-n)+(n-s)=5(k+l)$ ebenfalls durch 5 teilbar, d.h. mRs. Also ist R transitiv

1.2.3 Abbildungen

Definition

Gegeben seien zwei Mengen M und N und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem x aus M genau ein y aus N zuordnet. Dann ist durch M, N und diese Zuordnungsvorschrift eine Abbildung f vom M nach N gegeben.

Man schreibt $f: M \to N$ mit $x \mapsto f(x)$

oder $f: x \mapsto f(x)$ mit $x \in M$

oder $y = f(x)$ mit $x \in M$

Sprechweisen und Notationen

Mann nennt f die durch $y = f(x)$ auf M definierte Abbildung. Vor allem dann, wenn M und N Teilmengen der reellen Zahlen sind, nennt man Abbildungen auch Funktionen.

Weiter nennt man

x Argument oder Variable auf f

$y = f(x)$ Wert oder Funktionswert bei x

$x \mapsto f(x)$ Zuordnungsvorschrift
$y = f(x)$ für f

M, D_f Definitionsmenge von f

N Zielmenge

Der $\mapsto$ Pfeil steht zwischen Argument und Funktionswert (also zwischen Elementen), der Pfeil $\to$ steht zwischen Definitionsmenge und Zielmenge (also zwischen Mengen).

Die Bezeichnung der Variabelen ist beliebig. So bedeuten die folgenden Zuordnungsvorschriften alle das gleiche.

$x \mapsto x^2 \quad v \mapsto v^2 \quad n \mapsto n^2$

Die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in M$ heißt <u>Bildmenge</u> oder <u>Wertemenge</u> von f und wird mit $f(M)$ oder W_f bezeichnet, also

$$f(M) = \{ y \in N \mid \exists x \in M \; f(x) = y \} \subset N$$

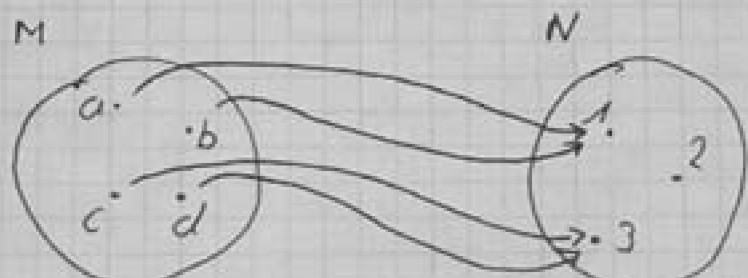
Ist $U \subset M$ eine Teilmenge der Definitionsmenge M, so heißt die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in U$ das <u>Bild</u> von U und wird mit $f(U)$ bezeichnet, also $f(U) = \{ y \in N \mid \exists x \in U \; f(x) = y \}$

Ist $U \subset N$ eine Teilmenge der Zielmenge N, so heißt die Menge aller Argumente $x \in M$ mit $f(x) \in U$ das <u>Urbild</u> von U und wird mit $f^{-1}(U)$ bezeichnet, das $f^{-1}(U) = \{x \in M \mid f(x) \in U\}$

<u>Beispiele</u>

1) Die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y$ mit $y^2 = x$ definiert keine Fkt. von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, weil z.B. $x = -1$ kein $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet ist und weil $x = 4$ und $y = 2$ und $y = -2$ zwei $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet sind.
Ebenso definiert die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ keine Fkt. von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, weil $x = 0$ kein Funktionswert zugeordnet ist.
Durch $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ ist hingegen eine Fkt. von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ definiert.

2)



Das ist Abbildung f mit
$M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3\}$
$f(M) = W_f = \{1, 3\} \neq N$

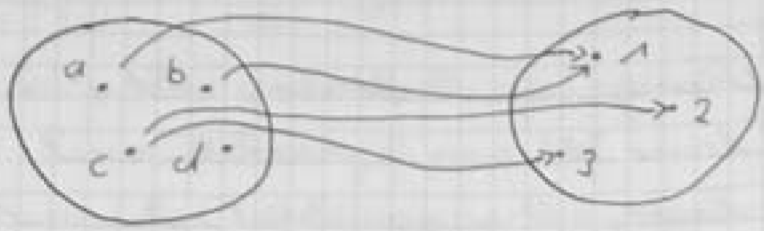
1 ist Bild von a und b
3 ist Bild von c und d
a und b sind Urbilder von 1
c und d " " von 3

Das Bild von $U = \{a, b\}$ ist $f(U) = \{1\}$

Das Urbild von $V = \{2\}$ ist $f^{-1}(V) = \emptyset$,

das Urbild von $V' = \{2, 3\}$ ist $f^{-1}(V') = \{c, d\}$

Dagegen ist:



keine Abbildung: d hat kein Bild, c hat zwei Bilder.

Mathematik

28.10.04 Prof. Dr. Bauer

Beispiele (Fortsetzung)

3) Durch die Zuordnung

$f: \{a, b, c, d, \dots, z\} \to \mathbb{N}$

mit

x	a	b	c	$\dots\dots\dots$	z
$f(x)$	1	2	3	$\dots\dots\dots$	26

ist ~~keine~~ eine Abbildung definiert.

4) Ein einfaches, aber wichtiges Beispiel ist die Abbildung

$f: M \to M$ mit $x \mapsto x$. Sie heißt identische Abbildung oder Identität, wird mit id_M bezeichnet und existiert auf jeder Menge.

Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung. f heißt

a) **injektiv**, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

b) **surjektiv**, wenn für jedes ($\forall$) $y \in N$ ein ($\exists$) $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$.

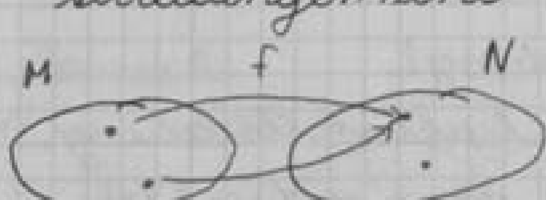
c) **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bei einer injektiven Abbildung werden verschiedene Elemente der Definitionsmenge stets auf verschiedene Elemente der Zielmenge abgebildet.

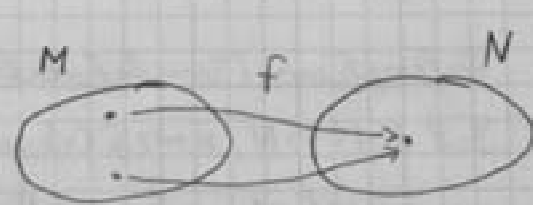
Bei einer surjektiven Abbildung hat jedes Element der Zielmenge ein Urbild, und damit ist die Zielmenge gleich der Wertemenge: $f(M) = N$

Beispiele:

1) Die folgenden anschaulich dargestellten Abbildungen sind

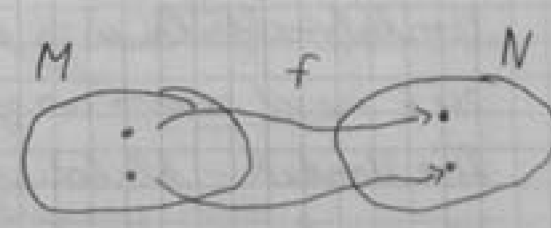


nicht injektiv,
nicht surjektiv



nicht injektiv,
surjektiv

injektiv
nicht surjektiv



bijektiv

2) Die identische Abbildung id_M ist injektiv und surjektiv, also bijektiv

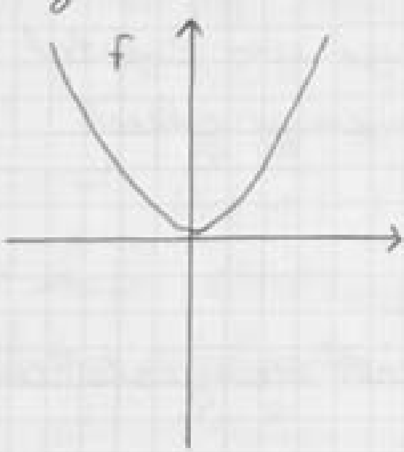
3) Die Abbildung

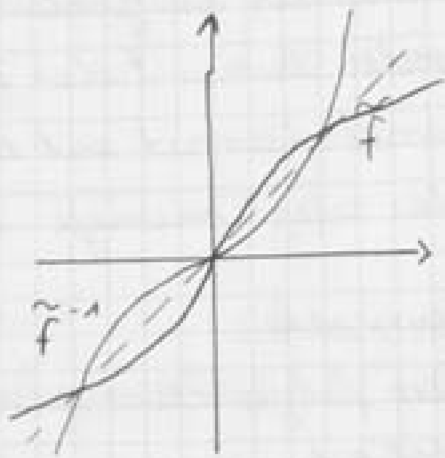
$$g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \ (m,n) \mapsto ggT(m,n)$$

ordnet jedem Paar zweier natürlicher Zahlen ihren größten ggT zu. Die Abbildung ist surjektiv, denn $ggT(n,n) = n$. Sie ist nicht injektiv, denn $ggT(7,14) = ggT(21,14)$

4) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, denn $f(-2) = f(2)$. Sie ist nicht surjektiv, denn für kein $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = -1$

Die Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ ist hingegen bijektiv



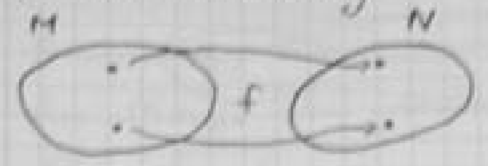


Definition (Umkehrabbildung)

Ist $f: M \to N, x \mapsto f(x)$ eine bijektive Abbildung, so wird durch $g: N \to M, y \mapsto x$ mit $y = f(x)$ eine Abbildung definiert. g heißt Umkehrabbildung oder inverse Abbildung zu f und man sagt, f sei umkehrbar. Die Umkehrabbildung wird mit f^{-1} bezeichnet.

Beispiele:

1) Die Abbildung



hat die Umkehrabbildung

2) $id_M^{-1} = id_M$

3) Die Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist nicht umkehrbar, denn sie ist nicht bijektiv. Die Fkt. $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ ist hingegen umkehrbar und es gilt

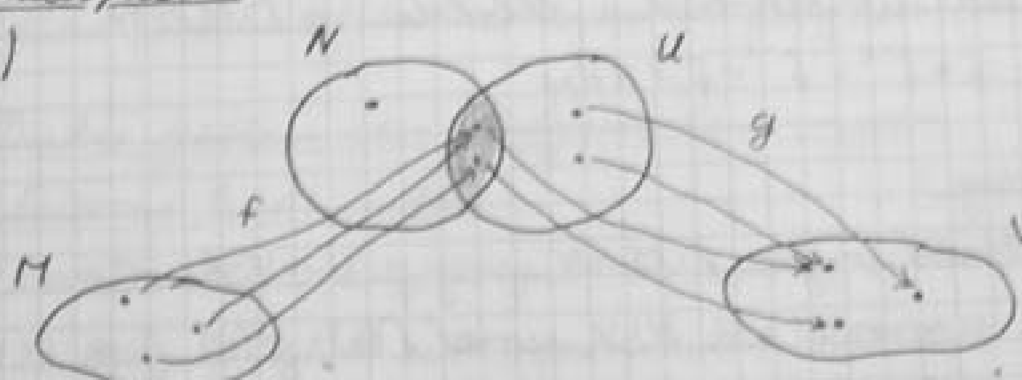
$$\tilde{f}^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

Definition (Hintereinanderausführung):

Seien $f: M \to N$, $x \mapsto f(x)$, und $g: U \to V$, $y \mapsto g(y)$, Abbildungen mit $f(M) \subset U$. Dann ist auch $h: M \to V$ mit $x \mapsto g(f(x))$ eine Abbildung. Sie heißt die Hintereinanderausführung oder Verknüpfung von f nach g und wird $g \circ f$ bezeichnet.

Beispiele:

1)



Die Hintereinanderausführung der

2. Reelle Zahlen:

Grundlage aller Rechen und Messvorgängen.
Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

2.1 Die Axiome der reellen Zahlen

Die Menge $\mathbb{R}$ wird durch 13 Axiome (Grundgesetze) festgelegt, die sich in drei Gruppen aufteilen:
die Axiome der Addition und Multiplikation, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom.

2.1.1 Die Axiome der Addition und Multiplikation (Körperaxiome)

In $\mathbb{R}$ sind zwei Operationen, die Addition und die Multiplikation erklärt, d.h. jedem Paar (a, b) zweier Elemente von $\mathbb{R}$ genau ein Element $a + b \in \mathbb{R}$ (die Summe von a und b) und genau ein Element $a \cdot b \in \mathbb{R}$ (das Produkt von a und b) zugeordnet.

Dabei gelten die folgenden neun Axiome (A1) - (A9)

(A1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$

(A2) Es gibt in $\mathbb{R}$ ein neutrales Element der Addition, bezeichnet mit 0 („Null") mit der Eigenschaft $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(A3) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert in $\mathbb{R}$ ein inverses Element der Addition, bezeichnet mit $(-a)$, mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0$.

(A4) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a + b = b + a$

(A5) Für alle $c, a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(A6) Es gibt in $\mathbb{R}$ ein neutrales Element der Multiplikation, bezeichnet mit 1 („Eins"), mit der Eigenschaft $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(A7) Zu jedem $a \neq 0$ aus $\mathbb{R}$ existiert in $\mathbb{R}$ ein inverses Element der Multiplikation bezeichnet mit a^{-1}, mit der Eigenschaft $a \cdot a^{-1} = 1$

(A8) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$

(A9) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

<u>Sprechweisen und Notationen</u>

Falls eine Verwechselung ausgeschlossen ist, kann man das $\cdot$-Zeichen für die Multiplikation weglassen: $(a\,b)\,c$ statt $(a \cdot b) \cdot c$.

Bei der Addition bzw. Multiplikation mehrerer reeller Zahlen brauchen wegen (A1) und (A5), keine Klammern gesetzt werden: $a + b + c$ statt $(a + b) + c$

Multiplikationen werden vereinbarungsgemäß vor der Addition ausgeführt, falls nicht durch Klammersetzung eine andere Reihenfolge vorgeschrieben ist.

Bemerkungen

1) Eine Menge, die den Axiomen (A1) - (A9) genügt, heißt ein Körper.

2) Aus den Körperaxiomen können zahlreiche Eigenschaften der reellen Zahlen formal hergeleitet werden. Ein Beispiel ist die folgende Aussage:

Jede Gleichung $a+x=b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Zum Beweis dieser Aussage zeigt man, dass es mindestens eine und höchstens eine Lösung der Gleichung gibt.

Eine Lösung ist $x_1 = (-a)+b$, denn

$$a + x_1 \overset{\text{Einsetzen}}{=} a + ((-a)+b) \overset{(A1)}{=} (a+(-a))+b$$

$$\overset{(A3)}{=} 0+b \overset{(A8)}{=} b+0 \overset{(A2)}{=} b$$

Es gibt nur diese eine Lösung, denn ist x_2 eine weitere Lösung, so gilt $a+x_1=b$ und $a+x_2=b$ und folglich

$$a+x_1 = a+x_2 \iff (-a)+a+x_1 = (-a)+a+x_2$$
$$\overset{A1}{\iff} ((-a)+a)+x_1 = ((-a)+a)+x_2$$
$$\overset{A3}{\iff} (0+x_1) = 0+x_2$$
$$\overset{A4}{\iff} x_1+0 = x_2+0$$
$$\overset{A2}{\iff} x_1 = x_2$$

Für die Lösung $x_1 = (-a)+b \overset{(A4)}{=} b+(-a)$ schreibt man kürzer $b+(-a) = b-a$ und nennt diese Zahl die <u>Differenz</u> von a und b. Damit ist auf Grund der

Körperaxiome die mathematischen Operation der <u>Subtraktion</u> definiert.

3) Durch Überlegungen aus Bem 2) lassen sich entsprechend auch für die Multiplikation durchführen. Für $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x = b \cdot a^{-1}$. Man schreibt $a^{-1} = \frac{1}{a}$ und $b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}$ und nennt diese Zahl <u>Quotienten</u> von a und b. Damit ist die Operation der <u>Division</u> definiert.

4) Weitere elementare Folgerungen aus den Körperaxiomen sind bspl.

a) $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \land b = 0$

b) $-(-a) = a \quad -(a+b) = -a-b$

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$

$(-a) \cdot (-b) = ab$

c) <u>Binomische Formel</u>

i $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ii $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

iii $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

d) Regeln für die Bruchrechnung

i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$ ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

iii) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ iv) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

2.1.2 Die Anordnungsaxiome

Hier geschieht die Grundlage der kleiner / Größerbeziehung zwischen reellen Zahlen.

(A10) Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Eigenschaften

$a < 0$ oder $a > 0$ oder $a = 0$

(A11) Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$

(A12) Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$a > 0 \wedge b > 0 = a \cdot b > 0$

Mathematik

03.11.04 Prof. Dr. Bauer

Sprechweisen und Notationen

Im Falle $a > 0$ heißt $a \in \mathbb{R}$ positiv, im Falle $a < 0$ negativ.

Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$ oder auch $b < a$ und nennen eine derartige Beziehung eine Ungleichung.

Man verwendet folgende Sprechweisen und Notationen

$a < b$ a ist kleiner als b

$a < b \vee a = b$ $a \leq b$ a ist kleiner gleich b

$b < a$ $a > b$ a ist größer als b

$a > b \vee a = b$ a ist größer gleich b

Für zwei Ungleichungen $a < b$ und $b < c$ schreibt man kurz gemeinsam $a < b < c$, und entsprechend mit den anderen $<, >, \leq, \geq$.

Bemerkungen:

1) Es gilt $1 > 0$. Beweis: Wegen $1 \neq 0$ muss entweder $1 >$ oder $1 < 0$ gelten.
Nehmen wir an, dass $1 < 0$ bzw $0 < -1$ gilt, so folgt
$0 \overset{(A12)}{<} (-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1$, ein Widerspruch zur Annahme.

2) Erst jetzt kann man zeigen, dass es außer 0 und 1 noch weitere Zahlen gibt. Man definiert $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, ... und erhalte aus (A11) $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$ sowie indirekt aus (A12) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \dots > 0$.

3) Aus den Anordnungsaxiomen können weitere bekannte Eigenschaften der reellen Zahlen abgeleitet werden, wie z.B:

a) $a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ hat das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ von a und b die Eigenschaft $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

Definition (Intervalle)

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden Intervalle genannt und folgendermaßen bezeichnet.

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$ abgeschlossenes In.

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b[$ rechts offenes Intervall

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b]$ linkes offenes Inter.

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[$ offenes Intervall

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} = [a, \infty[$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} =]a, \infty[$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} =]-\infty, b]$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} =]-\infty, b[$

$\{x \in \mathbb{R} / \mathbb{R}\} =]-\infty, \infty[$

Bemerkungen:

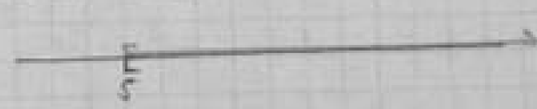
1) Die Intervalle in denen das ∞-Zeichen vorkommt, nennt man unbeschränkte oder unendliche Intervalle, alle anderen beschränkt oder endlich.

2) $\mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall.

3) Die Zahlen a und b in obiger def. werden Randpunkte der betreffenden Intervalle genannt, alle anderen Elemente des Intervalls heißen innere Punkte.

4) Intervalle lassen sich auf einer reellen Zahlengeraden veranschaulichen, z. B.

$[2, 4[$



$[5, \infty[$

Definition (Absolutbetrag)

Unter dem Absolutbetrag oder kurz Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ versteht man die reelle Zahl

$$|a| \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Bemerkungen

1) Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a-b|$ der Abstand dieser Zahlen zueinander. Z.B. gilt $|a-17| = 2$ für $a = 15$ und $a = 19$, und der Abstand dieser beiden Zahlen von $b = 17$ ist jeweils 2.

2) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für den Absolutbetrag gelten folgende wichtige Eigenschaften:

a) $|a| \geq 0$

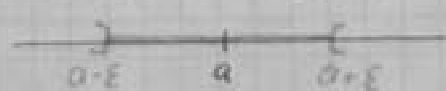
b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

c) $|ab| = |a||b|$

d) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

e) $||a| - |b|| \leq |a-b|$ (inverse Dreiecksungl.)

3) Der Absolutbetrag legt den Begriff der Umgebung einer reellen Zahl nahe. Es seien $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Unter der <u>ε-Umgebung von a</u> versteht man das bezüglich a symmetrische Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$ und bezeichnet dieses mit $U_\varepsilon(a)$



Unter der punktierten ε-Umgebung von a versteht man die mit $\dot{U}_\varepsilon(a)$ bezeichneten Menge $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

Definitionen (Beschränktheit, sup, inf, min, max)

Gegeben sei eine Menge $A \subset \mathbb{R}$.

A heißt $\left\{\begin{matrix}\text{nach oben}\\ \text{nach unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $\left\{\begin{matrix}K\\ k\end{matrix}\right\}$ gibt, so dass für alle $x \in A$ gilt $\begin{matrix}x \le K\\ x \ge k\end{matrix}$

Die Zahl $\left\{\begin{matrix}K\\ k\end{matrix}\right\}$ wird K obere u. k untere Schranke von A genannt.

Eine Menge A heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschräkt ist.

Die $\left\{\begin{matrix}\text{kleinste obere}\\ \text{größte untere}\end{matrix}\right\}$ Schranke einer nach $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt $\left\{\begin{matrix}\text{Supremum}\\ \text{Infimum}\end{matrix}\right\}$ von A und wird mit $\left\{\begin{matrix}\sup A\\ \inf A\end{matrix}\right\}$ bezeichnet.

Das $\left\{\begin{matrix}\text{Supremum } M\\ \text{Infimum } m\end{matrix}\right\}$ einer Menge A heißt $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von A und wird mit $\left\{\begin{matrix}\max A\\ \min A\end{matrix}\right\}$ bezeichnet, wenn $\left\{\begin{matrix}M \in A\\ m \in A\end{matrix}\right\}$ gilt.

Beispiel:

$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$.

A ist nicht nach oben beschränkt und hat folglich weder Supremum noch Maximum. A ist aber nach unten beschränkt z.B. ist $k = -3$ eine untere Schranke. Die größte untere Schranke von A und damit das Infimum von A ist $0 = \inf A$. Wegen $0 \notin A$ hat A kein Minimum.

2.1.3. Das Vollständigkeitsaxiom

Die bisher genannten Axiome gelten nicht nur in $\mathbb{R}$, sondern auch in anderen Zahlenmengen wie z.B. $\mathbb{Q}$.

Erst durch hinzunahme des folgenden Vollständigkeitsaxiomes ist die Menge $\mathbb{R}$ eindeutig festgelegt.

(A 13) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Bemerkung

Dass die Menge der rationalen Zahlen diese Eigenschaft nicht hat, zeigt die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Sie ist nach oben beschränkt, aber $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.2 Natürlichen Zahlen

Eine der wichtigsten Teilmengen ~~xxx~~ und grundlegend für das zählen ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

Definition (natürliche Zahlen)

Eine Menge M von reellen Zahlen heißt induktiv, wenn gilt: i) $1 \in M$ ii) $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$

Der Durchschnitt $\bigcap_{M \text{ induktiv}} M$ aller induktiven Mengen heißt Menge der natürlichen Zahlen und wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Bemerkungen

1) Induktive Mengen sind zahlreich, z.B gehören $\mathbb{R}$ oder auch die Menge aller positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^{>0}$ dazu.
   $\mathbb{N}$ ist die „kleinste" aller induktiven Mengen. Die aufzählende Schreibweise $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$ bringt zum Ausdruck, dass $\mathbb{N}$ selbst induktiv ist.
2) Die def. der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in 1.2.1 bleibt auch bei unserer axiomatischen Herangehensweise bestehen.

Die natürlichen Zahlen statten uns mit einem Zahlbegriff aus, und erlauben die folgende Charakterisierung von Mengen.

Definition (endliche, abzählbare, überabzählb. M)

Es sei $n \in \mathbb{N}^{\le n}$ die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \le k \le n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Ist A eine beliebige Menge und gibt es eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N}^{\le n} \to A$, so sagt man, A habe n Elemente oder die *Kardinalzahl n* und schreibt $\# A = n$. Die Abbildung f „nummeriert" die Elemente von A durch. Jede derartige Menge A und auch die leere Menge, für die man $\# \emptyset = 0$ setzt, heißt *endliche Menge*. Eine nicht endliche Menge heißt *unendlich*. Gibt es eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to A$, kann A also in der Form $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ beschrieben werden, so heißt A *abzählbar unendlich* oder einfach *abzählbar*. Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

9.11.04 **Mathematik** Prof. Dr. Bauer

Beispiel (Charakterisierung von Mengen)

1) Die Menge $B = \{a, b, c, \dots, z\}$ ist endlich mit $\# B = 26$, vgl.: 1.2.3

$f: \{1, 2, \dots, 26\} \to B$ bijektiv

2) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich. Das folgende Schema zeigt, dass eine Durchnummerierung erfolgen kann:

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	....
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	....
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	....
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	....
$\frac{1}{5}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Mehrfach auftretende rationale Zahlen erhalten nur beim ersten Auftreten eine Nummer und werden im folgenden einfach ausgelassen.

3) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Summen und Produktschreibweise

Für die Summe und das Produkt endlich vieler reeller Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ schreibt man

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad , \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Bemerkungen

1) Für den Index kann statt i auch irgendein anderer Buchstabe gewählt werden.

2) Summe und Produkt sind unabhängig von der Reihenfolge der Summanden bzw. der Faktoren.

3) Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

für $1 \leq m < n$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} a_i$$

ii) Indexverschiebung um $j \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+j}^{n+j} a_{i-j} \;, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1+j}^{n+j} a_{i-j}$$

iii) $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a \;, \quad \prod_{i=1}^{n} a = a^n$

4) Bislang war die Menge der Indizes immer $\{1, \ldots, n\}$. Man kann Summen und Produkte aber auch für beliebige endliche Indexmengen definieren. Ist J eine Indexmenge mit $\# J = n$ und $\phi : \{1, \ldots, n\} \to J$ eine bijektive Abbildung, so ist $\sum_{\alpha \in J} a_\alpha$ als $\sum_{i=1}^{n} a_{\phi_i}$ erklärt.

Beispiele

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + 17 = \sum_{i=1}^{17} i$ Indexversch.

2) $\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{23} = \sum_{i=0}^{16} \frac{1}{i+7} = \sum_{i=7}^{23} \frac{1}{i} = \sum_{k=}^{23} \frac{1}{k}$

3) $\sum_{i=1}^{100} i^2 + \sum_{\ell=100}^{200} (\ell-5)^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 + \sum_{\ell=101}^{195} \ell^2 = \sum_{i=1}^{199} i^2$

4) Für $J = \{3, 4, \ldots, 19\}$ ist $\sum_{\alpha \in J} a_\alpha = \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i=3}^{19} a_i$

5) Für $J = \mathbb{N}^{\leq m} \times \mathbb{N}^{\leq n}$ ist $\sum_{\alpha \in J} a_\alpha = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ z.B. ist

$$\sum_{(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}} i^j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} i^j = \sum_{i,j=1}^{3} i^j = 1^1 + 1^2 + 1^3 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 55$$

Fakultät und Binomialkoeffizent

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird das Produkt der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ die Fakultät von n oder n-Fakultät genannt und mit $n!$ bezeichnet.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

Außerdem setzt man $0! = 1$.

Für $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leq n$ wird die Zahl $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ der Binomialkoeffizent von n und k, oder kürzer n über k genannt und mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bemerkungen

1) Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist gleich $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

2) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n)$ ist gleich $\binom{n}{k}$.

3) Es gelten folgende Rechenregeln:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

4) Die Binomialkoeffizenten lassen sich, durch das sogenannte Pascal'sche Dreieck bestimmen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

usw.

usw.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

usw.

Die Symmetrie dieses Zahlenschemas bzgl. der Vertauschung von links und rechts entspricht der obigen Regel 3) i.
Die Eigenschaft des Zahlenschemas, das sich jede Zahl aus der Summe der beiden darüberstehenden Zahlen ergibt, entspricht der Regel 3ii)

5) $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

Mathematik

10.11.04 Prof. Dr. Dauer

Beispiele:

1) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $6! = 5! \cdot 6 = 720$;
$9! = 362880$
Die Fakultäten $n!$ werden mit wachsenden n „schnell" sehr groß

2) Es gibt 120 Möglichkeiten, 5 Perlen auf eine Schnur aufzufädeln.

3) $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$
$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$

4) Die Chance, beim Lotto-Spiel „6 aus 49" die richtige Kombination zu erraten ist $\binom{49}{6} =$
$\frac{49!}{6!} = 13983816$

Satz (Vollständige Induktion)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

i) $A(1)$ ist wahr.

ii) Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Sei $M = \{ n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr} \}$. Gelten i) und ii), so ist M induktiv.

Wegen $M \subset \mathbb{N}$ muss folglich $M = \mathbb{N}$ sein $\quad$ q.e.d

Bemerkungen:

1) Der Satz lautet kurz: $\overbrace{A(1)}^{i)} \wedge \overbrace{(\forall n \in \mathbb{N}\, A(n) \Rightarrow A(n+1))}^{ii)}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ A(n)$$

2) Die Bedingung i) heißt Induktionsanfang oder Induktionsverankerung. Die Bedingung ii) heißt Induktionsschritt.

3) Die vollständige Induktion dient als eines der mächtigsten Beweismittel der Mathematik.

4) Möchte man eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beweisen, so muss der Induktionsanfang lauten: i) $A(0)$ ist wahr.

Beispiele:

Man zeige $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Wir bezeichnen die zu beweisende Aussage mit $A(n)$.

i) (Induktionsanfang)

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}, \text{ d.h. } A(1) \text{ ist wahr}$$

ii) (Induktionsschritt) Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist. Dann folgt.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{n.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ d.h. } A(n+1)$$

Da somit i) und ii) gelten, ist nach dem Satz über die Vollständige Induktion $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. q.e.d

2 Satz (Geometrische Summenformel)

Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{(Geometrische Summenformel)}$$

Beweis:

Induktionsanfang:

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q} \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \overset{n.V}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$
$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}$$
$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \checkmark \quad \text{q.e.d}$$

Folgerung

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ und jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ (Verallgemeinerte geometrische Summenformel) Dies folgt aus dem Satz $q = \frac{b}{a}$.

3) Satz (Binomischer Lehrsatz)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{(Binomischer Lehrsatz)}$$

Beweis

Wir zeigen zunächst:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Induktionsanfang:

$$(1+x)^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 = 1 \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \overset{\text{I.V.}}{=} (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k}$$

Index-verschiebung

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} + x^{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} + x^{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} + x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} \checkmark \text{ q.e.d}$$

Der eigentliche Satz folgt im Falle $b \neq 0$ mit $x = \frac{a}{b}$, der Fall $b = 0$ ist trivail.

Folgerungen

i) Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind zeilenweise die Koeffizienten verallgemeinerter binomischer Formeln, z.B

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

ii) Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt
$(1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung)

4) Man bezeichnet
$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ als arithmetisches Mittel
$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ als geometrisches Mittel.
n nicht negativer reeller Zahlen $x_1, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$
Mit Hilfe der vollständigen Induktion lässt sich zeigen:
$\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$
Dies ist die sog. AGM-Ungleichung.

5) Weder Induktionsanfang i) noch Induktionsschritt ii) reichen alleine aus, um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.
Z.B. gelingt für $A(n) \Leftrightarrow n = n+1$ der Induktionsschritt ii).

$\underbrace{n = n+1}_{A(n)} \Rightarrow \underbrace{n+1 = (n+1)+1}_{A(n+1)}$ Danach ist die Aussage falsch, da sich kein Induktionsanfang finden lässt.

Für $A(n) \Leftrightarrow$ „$n^2 - n + 41$ ist eine Primzahl" gilt umgekehrt zwar der I. Anfang $A(1)$ (und sogar $A(2), \dots, A(40)$), aber der Induktionsschritt gelingt nicht, insbesondere $A(40) \not\Rightarrow A(41)$

3. Folgen und Reihen

3.1 Folgen

Grundlegend für die späteren Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen und damit für die gesammte Differential- und Integralrechnung sind Folgen und ihre Grenzwerte.

3.1.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Definition (Folgen):

Eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt eine reelle Zahlenfolge oder kurz Folge.

Schreibweise und Notationen

Die Funktionswerte $f(n)$ einer Folge heißen die Glieder der Folge und werden mit a_n bezeichnet.

$a_n = f(n)$ ist das n-te Folgeglied $(n \in \mathbb{N})$

Für eine Folge, genauer gesagt für ihre Wertemenge, schreiben wir häufig $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz $\{a_n\}$.

Ebenfalls üblich ist die Angabe der ersten Folgeglieder $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, wenn hierdurch klar wird, wie die weiteren Folgeglieder lauten.

Eine Funktion $g: \mathbb{N} \setminus M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{N}$ endlich heißt Teilfolge $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, wenn $g(n) = f(n)$ für $n \in \mathbb{N} \setminus M$.

Bemerkungen

1) Eine Folge ist eine Funktion f mit der speziellen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{N}$. Ein etwas allgemeineren Folgenbegriff lässt auch $D_f = \mathbb{Z}^{\geq k} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$ oder sogar $D_f = \mathbb{Z}^{\geq k} \setminus M$ zu, mit $k \in \mathbb{Z}$ und einer endlichen Menge $M \subset \mathbb{Z}^{\geq k}$

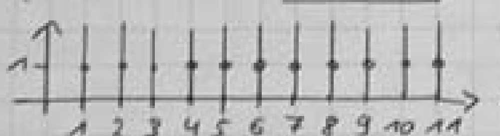
2) Die Wertemenge einer Folge ist stets endlich oder abzählbar endlich.

3) Häufig sind die Glieder einer Folge nicht explizit angegeben, sondern sie ermitteln sich nach einer bestimmten Vorschrifft aus den vorausgegangennen Folgegliedern. Man sagt dann die Folge sei rekursiv definiert.

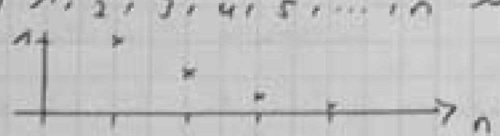
Beispiele

1) $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ bzw. $1, 1, 1, 1, \dots, 1$

Dies ist eine konst. oder stationäre Folge



2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}$ bzw. $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$



3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots$ bzw $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \end{cases}$

4) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ bzw. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

16.11.04 Prof. Dr. Bauer

5) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$

Dies ist eine rekursiv definierte Folge.

Die ersten Folgeglieder lauten

$1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots$

6) Fibonacci-Folge $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

Die ersten Glieder dieser rekursiv definierten Folgen lauten

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

<u>Definition (Monotonie)</u>

Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}$ heißt

$$\left\{\begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng} \quad '' \quad '' \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng} \quad '' \quad '' \end{array}\right\} \text{wenn gilt} \left\{\begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \end{array}\right\}$$

<u>Bemerkungen:</u>

1) Die Definition lässt sich insbesondere auf eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ anwenden ($M = \mathbb{N}, f(n) = a_n$) und dann auch so formulieren

$$\{a_n\} \text{ ist} \left\{\begin{array}{l} \text{monoton wa.} \\ \text{str.} \quad '' \quad '' \\ \text{monoton fall.} \\ \text{str.} \quad '' \quad '' \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} > a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \\ a_{n+1} < a_n \end{array}\right\}$$

2) Man bezeichnet eine Folge auch dann als monoton, wenn eine entsprechende Ungleichung ($a_{n+1} \geq a_n$) zwischen a_{n+1} und a_n, erst ab einem Index $n > 1$ gilt.

3) Um zu prüfen ob eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist betrachtet man häufig die Differenz $d_n = a_{n+1} - a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ oder den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (sofern $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) und untersucht, ob die

$$d_n \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{Bmatrix} \text{ bzw } q_n \begin{Bmatrix} \geq 1 \\ > 1 \\ \leq 1 \\ < 1 \end{Bmatrix} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist.

<u>Definition (Beschränktheit)</u>

Eine Fkt. $f: M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}$ heißt

nach $\begin{Bmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{Bmatrix}$ <u>beschränkt</u>, wenn

$f(M)$ nach $\begin{Bmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{Bmatrix}$ <u>beschränkt</u> ist.

Dann heißt $\begin{Bmatrix} \sup f(M) \\ \inf f(M) \end{Bmatrix}$ die $\begin{Bmatrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{Bmatrix}$

Grenze von f. Die Fkt. f heißt <u>beschränkt</u>,

wenn sie nach <u>oben</u> und <u>unten</u>

beschränkt ist.

<u>Bemerkungen</u>

Die Def. lässt sich insbesondere auf eine Folge $\{a_n\}$ anwenden $(M = \mathbb{N}, f(n) = a_n)$.

Definition (Alternierende Folge)

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt alternierend, wenn $a_{n+1} \cdot a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. aufeinander folgende Folgeglieder haben unterschiedliche Vorzeichen.

Beispiele

1) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots$ bzw. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

Wegen $d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}$

$= \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$\{a_n\}$ streng monoton wachsend, wegen $0 \leq \frac{n-1}{n+1} < 1$ beschränkt

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$ bzw. $a_n = \frac{n}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Wegen $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^n}{n\,2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ist ≤ 1 monoton fallend, ab dem zweiten Folgeglied sogar streng. Wegen $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq a_1$ ist $\{a_n\}$ auch beschränkt.

3) $-1, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, +\frac{1}{16}, \dots$ bzw. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$.

Diese Folge ist alternierend und damit nicht monoton. Wegen $|a_n| = \frac{1}{n^2} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge beschränkt

3.1.2 Konvergenz von Folgen

Unter der Konvergenz einer Folge verstehen wir, dass die Glieder a_n der Folge, mit wachsenden n einer bestimmten reellen Zahl „immer mehr annahern". Die folgende Definition ist eine exakte Formulierung dieses Sachverhaltes.

Definition (Konvergenz von Folgen)

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent mit Grenzwert a, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - a| < \varepsilon$$

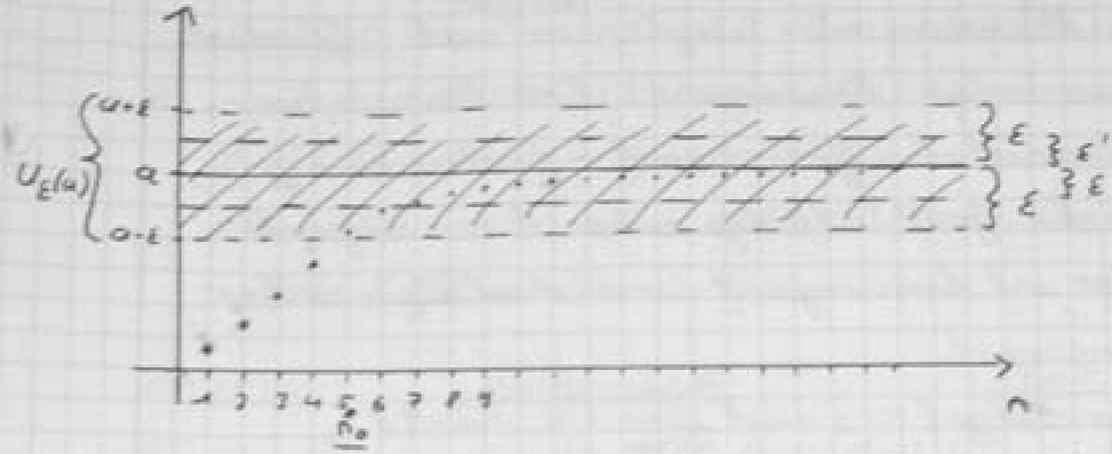
Folgen die keinen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergent sind, heißen divergent.

Schreibweise und Notation

Ist eine Folge $\{a_n\}$ konvergent mit Grenzwert a, so sagt man auch, die Folge $\{a_n\}$ konvergiert gegen a und schreibt hierfür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Bemerkungen

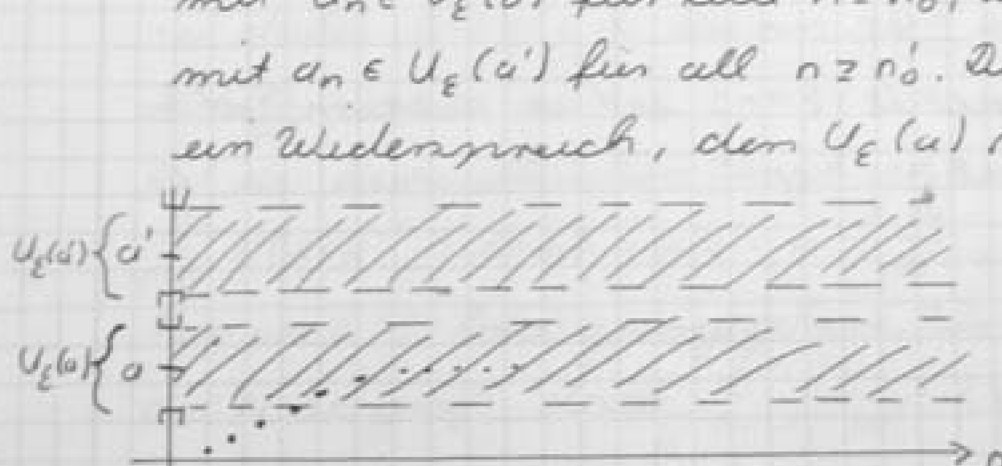
1) Anschaulich bedeutet die Konvergenz einer Folge $\{a_n\}$ gegen den Grenzwert a, dass in jeder (!) beliebig kleinen Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a, ab einem Index n_0 alle Glieder der Folge liegen.



Man sagt daher auch, dass fast alle oder alle bis auf endlich viele Glieder der Folge in $U_\varepsilon(a)$ liegen

2) Der Index n_0, ab dem alle Glieder der Folge in der Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen, hängt von ε ab. Je kleiner ε und damit $U_\varepsilon(a)$ ist, desto größer ist im allgemeinen n_0. Man schreibt auch $n_0(\varepsilon)$, um diese Abhängigkeit auszudrücken.

3) Der Grenzwert a einer konvergenten Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt. Angenommen nämlich, $\{a_n\}$ konvergiert gegen a und gegen a' mit $a \neq a'$. Wählt man dann $\varepsilon = \frac{|a-a'|}{3} > 0$, so gilt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$, und ein n_0' mit $a_n \in U_\varepsilon(a')$ für all $n \geq n_0'$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$



4) Das Abändern oder Weglassen endlich vieler Glieder einer Folge (konvergent) hat keinen Einfluss auf den Grenzwert. Anders ausgedrückt: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den selben Grenzwert.

5) Eine Folge $\{a_n\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} = 0$ heißt Nullfolge. Eine Folge $\{b_n\}$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert b, wenn die Folge $a_n = b_n - b$ eine Nullfolge ist.

6) Der Grenzwert a einer konvergenten Folge $\{a_n\}$ ist immer eine reelle Zahl. Es gilt also keine Konvergenz „gegen Unendlich" im eigentlichen Sinne. Wenn jedoch zu jedem $\left\{\begin{matrix} K \\ k \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \left\{\begin{matrix} > K \\ < k \end{matrix}\right\}$ für alle $n \geq n_0$, kurz

$$\left\{\begin{matrix} \forall K \in \mathbb{R} \\ \forall k \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad a_n \left\{\begin{matrix} > K \\ < k \end{matrix}\right\},$$

so sagt man, $\{a_n\}$ habe den uneigentlichen Grenzwert $\left\{\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right\}$ und schreibt

$$\lim_{n \to \infty} a_n \left\{\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right\}.$$

Man beachte: $\{a_n\}$ ist in diesem Falle divergent.

Beispiele

1) $u_n = a$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$. Diese Folge konvergiert trivialerweise gegen a, denn $|a_n - a| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier ist der Grenzwert zugleich Glied der Folge

17.11.04 Mathematik Prof. Dr. Dauer

2) $u_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.
Zum Beweis müssen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 finden, so dass $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Hierzu wählt man n_0 so, dass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt. Eine solche natürliche Zahl existiert immer.
Für $n \geq n_0$ gilt dann $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt analog $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.
Zum Beweis muss man entsprechend $n_0 > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$ wählen. (z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = 0$)

3) Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} |q|^n = 0$.
(z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)
Beweis: ~~Wir betrachten die Folge $\{b_n\}$ mit $b_n =$~~ Für $q = 0$ ist die Behauptung wahr, sei daher $0 < |q| < 1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{R}, k > 0$, mit $\frac{1}{|q|} = 1 + k$.
Mit der Bernoullischen Ungleichung folgt
$\frac{1}{|q|^n} = (1+k)^n \geq 1 + nk > nk = n\,\frac{1 - |q|}{|q|}$, d. h. $|q|^n < \frac{1}{n}\,\frac{|q|}{1-|q|}$.
Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{n_0}\,\frac{|q|}{1 - |q|} < \varepsilon$ ist.

Für alle $n \geq n_0$ gilt dann
$|q|^n < \frac{1}{n} \frac{|q|}{1-|q|} \leq \frac{1}{n_0} \frac{|q|}{1-|q|} < \varepsilon$. Also ist
$n \mapsto |q|^n$ eine Nullfolge.

4) Es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Beweis: Wir betrachten die Folge $\{b_n\}$ mit
$b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Es gilt $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Aus dem Binomischen Lehrsatz folgt
$n = (1 + b_n)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^{\,n-k} \geq 1 + \binom{n}{n-2} b_n^2$ bzw.
$b_n < \sqrt{\frac{n-1}{\binom{n}{n-2}}} = \sqrt{\frac{2}{n}}$ für $n \geq 2$.
Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sqrt{\frac{2}{n_0}} < \varepsilon$ ist.
Für alle $n \geq n_0$ gilt dann
$|b_n - 0| = |b_n| = b_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{n_0}} < \varepsilon$. Also ist
$\{b_n\}$ eine Nullfolge. q.e.d

Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen)

$\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Weiter seien $\lambda, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dann sind $\{a_n + b_n\}$, $\{\lambda a_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ wenn $b_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$,
$\{a_n^r\}$ wenn $a \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$, ebenfalls konvergent und es gilt:

i) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a + b$

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lambda a$

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = |\lim\limits_{n \to \infty} a_n| = |a|$

iv) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$

v) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

vi) $\lim_{n\to\infty} a_n^? = (\lim_{n\to\infty} a_n)^? = a^?$

<u>Beweis:</u>

<u>Wir beweisen nur exemplarisch i) und iii)</u>

i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$

Daraus folgt $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dreiecksungl.}\\ |x+y| \leq |x| + |y|\end{array}\right\} \longrightarrow \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$< \varepsilon$$

iii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Mit der inversen Dreiecksungleichung folgt:

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

<u>Beispiele</u>

1)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 6}{6n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - 6\frac{1}{n^3}}{6 + 2\frac{1}{n}} = \frac{4 - 6\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{6 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{4 - 6 \cdot 0}{6 + 2 \cdot 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{5 + 2\frac{1}{n}}\right)^3 = \left(\frac{2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{5 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)^3$$

$$= \frac{8}{125}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3\cdot 10^n + 4\cdot 10^{2n}}{4\cdot 10^{n+1} - 2\cdot 10^{2n+1}}\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n + 4}{4\left(\frac{1}{10}\right)^n - 2\cdot\frac{1}{10}}\right|$

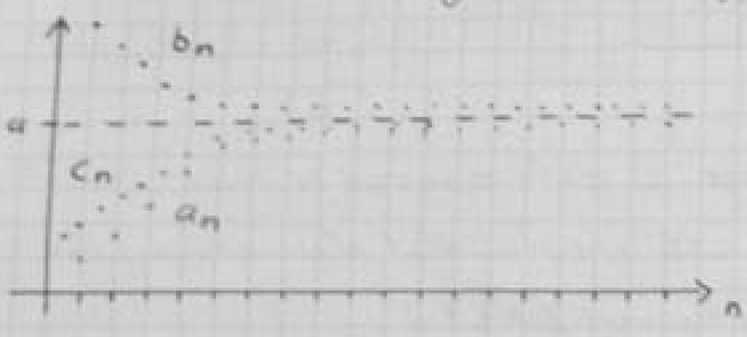
$$= \left|\frac{3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n + 4}{4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} - 2\cdot\frac{1}{10}}\right| = |-20| = 20$$

Satz (Sandwich-Theorem)

$\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

i) Ist $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \le b$

ii) Ist $a = b$ und $a_n \le c_n \le b_n$ für eine Folge $\{c_n\}$, so ist $\{c_n\}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$



Beispiel

Für alle $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ (z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{17} = 1$). Zum Beweis unterscheiden wir drei Fälle.

i) $q = 1$. Wegen $\sqrt[n]{1} = 1$ ist dieser Fall trivial

ii) $q > 1$. Wir betrachten die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt[n]{q} - 1$ um zu zeigen, dass $\{c_n\}$ eine Nullfolge ist. Wegen $q > 1$ gilt $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt außerdem $q = (1 + c_n)^n \geq 1 + nc_n$, d.h. $c_n \le \frac{q-1}{n}$.
Definieren wir Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ mit $a_n = 0$, $b_n = \frac{q-1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, so gilt

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Sandwich - Theorem ist folglich $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

iii) $q < 1$. Dieser Fall ergibt sich mit $r = 1/q$ und $\sqrt[n]{q} = 1/\sqrt[n]{r}$ unmittelbar aus ii) da $r > 1$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r}} = 1$

<u>Bemerkungen:</u>

Die Rechenregeln und das Sandwich - Theorem für konvergente Folge lassen sich gewisser Weise auch auf divergente Folgen mit uneigentlichen Grenzwerten übertragen. Genauer gilt folgendes.

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \begin{cases} \infty \text{ für } \lambda > 0 \\ -\infty \text{ für } \lambda < 0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \infty$$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und ($\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$$

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

3.1.3 Konvergenzkriterien von Folgen

Kann man einer Folge, ohne etwas von ihrem möglichen Grenzwert zu wissen, „ansehen", ob sie konvergiert oder divergiert?
Hilfreich zur Bewertung dieser Frage sind die folgenden Konvergenzkriterien.

Satz (Beschränktheit)

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

„$\{a_n\}$ konv." „$\{a_n\}$ besch."

$A \Rightarrow B$

Die Beschränktheit ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge. Mann kann auch sagen: Jede nicht beschränkte Folge heißt divergent. Die Beschränktheit ist aber keine hinreichende Bedingung für Konvergenz.

Satz (Monotoniekriterium)

Ist eine Folge monoton $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$ und nach $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkt, so ist die Folge konvergent.

Bemerkung

Die Beschränktheit und Monotonie zusammengenommen eine hinreichende Bedingung für Konvergenz (das sagt der Satz), aber

keine notwendige Bedingung.
Beispielsweise gilt für die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ zwar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, die Folge ist aber nicht beschränkt <u>und</u> monoton.

<u>Beispiele</u>

1) Die Folge $a_n = \frac{n}{2^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ ist konvergent, denn aus 3.1.1 wissen wir, dass sie monoton fallend und ist beschränkt

<u>Mathematik</u>

23.11.04 Prof. Dr. Bauer

<u>Beispiele (Forts.)</u>

2) Die Folge mit dem rekursiven Bildungsgesetz $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^r - q}{r\, a_n^{r-1}}$ $(n\in\mathbb{N}); p.q > 0; a_0 > \sqrt[r]{q}$] ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie konvergiert $\sqrt[r]{q}$

Bsp. $\sqrt{2}$; $q=2$; $r=2$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2\, a_n}$$

3) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ist monoton wachsend und beschränkt.

Beweis:

i) Monotonie. Wegen $a_n > 0$ $(n\in\mathbb{N})$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \quad \text{für } n \geq 2$$

Mit der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1 - n\frac{1}{n^2}\right)\frac{n}{n-1} = 1 \text{, d.h. } a_n \geq a_{n-1} \text{ für } n \geq 2$$

ii) Beschränktheit

Aus dem Binomischen Lehrsatz und der geometrischen Summenformel folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}}_{\leq 1}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3 \text{, d.h.}$$

$a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz konvergiert die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ also. Ihr Grenzwert heißt die Eulersche Zahl und wird mit e bezeichnet:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Allgemeiner kann man sagen (zeigen), das für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Folge $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert. Ihren Grenzwert bezeichnet man mit e^x:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$ Hierdurch wird eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ definiert. Sie heißt e-Funktion.

3.2 Reihen

Wir geben nun dem Begriff „Summe unendlich vieler Zahlen" einen mathematisch exakten Sinn.

3.2.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Definition (Reihe)

Gegeben sei eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Die Summe S_n der ersten n Glieder von a_n, also

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

heißt n-te Partialsumme von $\{a_n\}$. Die Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen von $\{a_n\}$ heißt die zur Folge $\{a_n\}$ gehörigen unendliche Reihe.

Beispiele

1) Harmonische Reihe. Die zur Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ gehörige unendliche Reihe $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (n\in\mathbb{N})}$, heißt harmonische Reihe.

2) Geometrische Reihe. Es sei $q\in\mathbb{R}$ mit $q\neq 1$. Die zur Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = q^n$ gehörige unendliche Reihe $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (n\in\mathbb{N})$$ heißt

geometrische Reihe

Da eine Reihe eine Folge (von Partialsummen) ist, kann der Begriff der Konvergenz für Folgen auf Reihen übertragen werden.

Definition (Konvergenz Reihen)

Ist die zu einer Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige unendliche Reihe $\{S_n\}$ mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergent, so heißt ihr Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ die unendliche Summe von $\{a_n\}$ und man schreibt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Bemerkungen

1) Weitere Begriffe für Folgen wie „divergent“ „uneigentlicher Grenzwert“ etc. übertragen sich ebenfalls analog auf Reihen.
Ist etwa die Partialsummenfolge $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, so schreibt man $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$$

2) Häufig bezeichnet man mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht nur den Grenzwert einer Reihe, sondern auch die Reihe selbst. Eine typische Aufgabe könnte z.B. lauten: Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ konvergiert.

Beispiele

1) Die harmonische Reihe divergiert für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^k < n \leq 2^{k+1}$, und für $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ folgt damit

$$S_n = 1 + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \dots + 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} k$$

Die Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist also nicht beschränkt und somit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

2) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$. Wegen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ gilt auch für $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

$$q = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 2$$

Rechenregeln für konvergente Reihen

Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien konvergent, $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Weiter seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ ist konvergent und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a + \mu b$

b) Ist $a_k \le b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, d.h. $a \le b$.

c) Für eine Teilfolge $\{a'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a'_k$ wiederum konvergent (mit u.U. anderen Grenzwert)

<u>Mathematik</u>

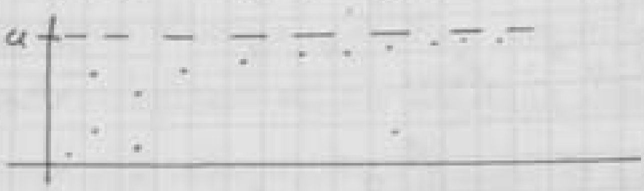
24.11.04 Prof. Dr. Bauer

<u>Bemerkung</u>

Teil iii) des Satzes besagt, dass endlich viele Glieder keinen Einfluss ~~haben~~ auf das Konvergenzverhalten einer Reihe haben. Die Änderung endlicher vieler Glieder führt allerdings (anders als bei Folgen) im allgemeinen zu einer Änderung des Grenzwertes einer konvergenten Reihe.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \cancel{a_1} + 2a_2 + a_3/4 + \cancel{a_4} + \dots$ sei konvergent

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$



<u>Beispiel:</u>

zu i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\overset{i)}{=} 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{} - 1\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1\right)$$

$$= 3 - 1 = 2$$

3.2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Wir beginnen mit einer notwendigen Bedingung für die Konvergenz für Reihen.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bemerkung

Die harmonische Reihe zeigt dass dieses Kriterium nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe ist.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ d.h $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beispiel

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{1+k}\right)^k$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} > 0$ ist die Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{1+k}\right)^k$ divergent

Die folgenden Kriterien sind für die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe hinreichend. Sie beruhen auf dem Vergleich der zu untersuchenden Reihe mit einer weiteren Reihe.

Satz Majoranten- und Minorantenkriterium f. Reihen

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

i) Gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $|a_n| \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \le n$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ebenfalls konvergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt dann eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Gibt es eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit dem uneigentlichen Grenzwert $\begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$ und $a_n \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \end{Bmatrix} c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ebenfalls divergent mit dem gleichen uneigentlichen Grenzwert.

Im Falle $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$ heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine divergente Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Beispiel</u>

1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Beweis:

Zunächst zeigen wir, das die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ konvergiert. Für $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, gilt

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)m} = \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)}_{n=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_{n=3} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}_{n=4} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right)}_{n=m}$$

$$= 1 - \frac{1}{m} \text{ und folglich}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(n-1)n} = \lim_{m \to \infty} 1 - \frac{1}{m} = 1$$

Wegen $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert

Der Grenzwert ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

Wegen $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante. Allgemeiner kann man zeigen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Satz (Quotientenkriterium)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge $\left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei konvergent und

$\alpha = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

i) Falls $\alpha < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

ii) Falls $\alpha > 1$, so ist " " " divergent.

Bemerkung

1) Das Kriterium ist hinreichend, aber nicht notwendig.

2) Der Satz macht keine Aussage für den Fall $\alpha = 1$. In diesem Fall kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren $\left(\text{z.B. } \sum \frac{1}{n^2}, \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \right)$ oder auch divergieren $\left(\text{z.B. } \sum \frac{1}{n}, \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \right)$

Mathematik

30.11.04 Prof. Dr. Bauer

Beispiel (zum Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ konvergiert denn $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 \, 3^n}{3^{n+1} \, n^2} = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{\to 1} = \frac{1}{3} < 1$

Satz Wurzelkriterium

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die Folge $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent und $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

i) Falls $\alpha < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

ii) " $\alpha > 1$, " " " divergent.

Bemerkung

Das Wurzelkriterium ist, ähnlich wie das Quotientenkriterium, hinreichend, aber nicht notwendig, und es macht über den Fall $\alpha = 1$ keine Aussage.

Beispiel

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n n^4}$ divergiert, denn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n n^4}} = \frac{5}{4} \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^4} = \frac{5}{4} > 1$$

Satz Leibnitzkriterium

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei alternierend und die Folge $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Bemerkung

Dieses hinreichende Kriterium lässt sich auch anwenden, wenn die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erst ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ alternierend oder die Folge $\{|a_n|\}$ als Nullfolge erst ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist.

Beispiel:

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \pm$ konvergiert, denn $\{|a_n|\} = \{\frac{1}{n}\}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. (Der Grenzwert ist $-\ln 2$)

Wir wissen von konvergenten Folgen, dass eine beliebige Umordnung ihrer Glieder keinen Einfluss auf die Konvergenz und den Grenzwert hat. Das Kommutativgesetz für Addition sagt uns, dass man in *endlichen* Summen die Summanden in beliebiger Weise umordnen kann, ohne das sich die Summe ändert. Darf man auch bei *unendlichen* konvergenten Reihen nach Belieben die Summanden umordnen, ohne den Grenzwert zu beeinflussen? Die alternierende harmonische Reihe $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \pm \dots \pm = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ zeigt, dass das nicht der Fall ist.

Durch die Umordnung

$$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} - \frac{1}{9} \pm \dots$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) + \frac{1}{16} \mp \dots$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

ergibt sich nämlich eine Reihe die wiederum konvergent ist, aber einen anderen Grenzwert hat.

Wie charakterisiert man konvergente Reihen, die bei jeder beliebigen Umordnung ihre Konvergenz und den Grenzwert beibehalten.

Definition (Absolut und bedingt Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, heißt bedingt konvergent.

Satz (Absolute Konvergenz und Umordnung)

i) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

ii) Eine konvergente Reihe behält genau dann bei jeder beliebigen Umordnung ihrer Summanden ihre Konvergenz und Grenzwert bei, wenn sie absolut konvergent ist.

iii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe, so gilt es zu jedem $S \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ der Reihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$

Bemerkung

1) Nach dem Satz dürfen absolut konvergente Reihen nach belieben umgeordnet werden. Der Grenzwert ändert sich dadurch nicht.

2) Wird die Konvergenz einer Reihe durch das Majoranten-, Quotienten- oder Wurzelkriterium nachgewiesen, so ist die Reihe sogar absolut konvergent

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{n}$ ist nicht absolut konvergent. Sie ist bedingt konvergent.

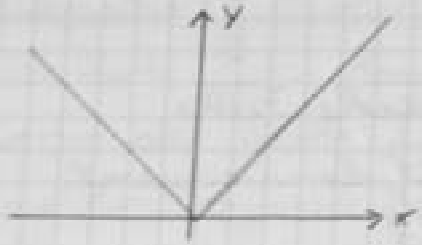
Satz (Multiplikation von Reihen)

Die Reihen $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent und es sei $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = a \cdot b$

4 Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel untersuchen wir Abbildungen $f: M \to N$ mit $M, N \subset \mathbb{R}$
Zur Veranschaulichung einer solchen Fkt. und zur graphischen Verdeutlichung vieler Sachverhalte im Zusammenhang mit Fkt. ist es fast immer hilfreich, den Graphen $\{(x,y)\} \in M \times N \mid y = f(x)\}$ zu skizzieren. Wegen $M, N \subset \mathbb{R}$ können die Elemente des Graphen als Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Dessen Achsen beschriften wir zunächst mit x bzw. y und den Graphen selbst mit dem

Namen der Funktion. Bspl. hat für die Betragsfkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = |x|$, der Graph von f die folgende Gestallt.



4.1 Allgemeine Eigenschaften von Fkt. auf $\mathbb{R}$

Im zusammenhang mit Folgen haben wir bereits die Begriffe Monotonie und Beschränktheit von Fkt. kennen gelernt.

Definition (Gerade und Ungerade Fkt.)

Die Menge $D \subset \mathbb{R}_0$ sei symmetrisch zur Null gelegen, d. h. $0 \in D$ und für jedes $x \in D$ ist auch $-x \in D$

Eine Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ heißt $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$, wenn für alle $x \in D$ gilt $f(x) = \left\{\begin{matrix} f(-x) \\ -f(-x) \end{matrix}\right\}$.

Bemerkung.

Der Graph einer geraden Fkt. ist symmetrisch zur y-Achse. Man spricht von Achsensymmetrie.

" " einer ungeraden Fkt. ist symm. zum Ursprung (0,0) des koordinatensyst. Man spricht von Punktsymmetrie.

Beispiel:

1) Die Fkt. $f, g\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$
sind gerade

2) " " $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x)\ x^3$
sind ungerade

3) " " $f, g\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$, $g(x) = (x+2)^3$
weisen keine symm. auf.

Definition (Periodische Fkt)

Eine Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn es ein $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, gibt so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x+p) = f(x)$.

Bemerkung

Eine solche Zahl p heißt Periode von f
Mit p ist auch jedes $p \cdot k = p'$ $(k \in \mathbb{N})$ eine Periode

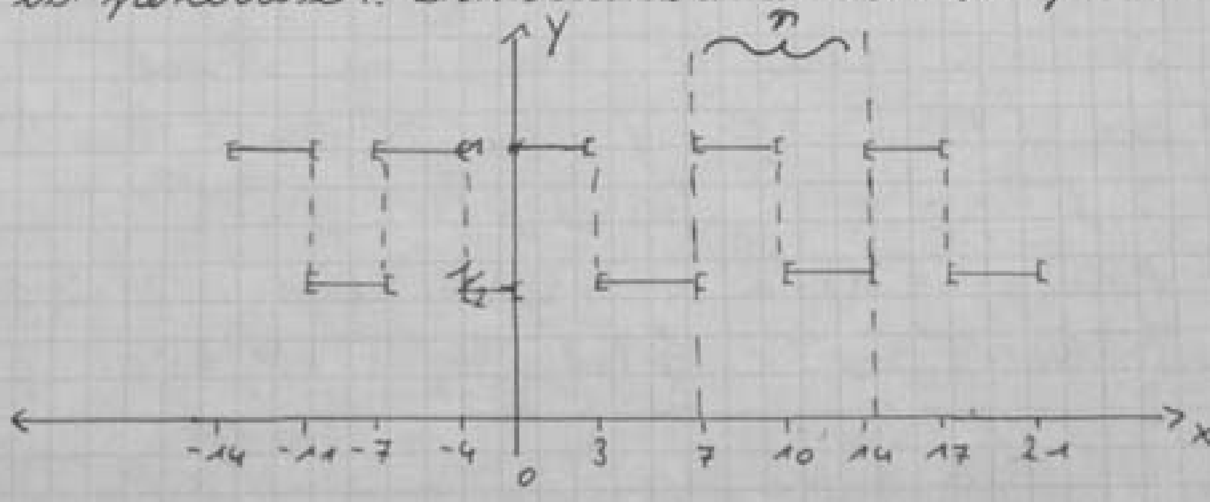
Mathematik

1.12.04 Prof. Dr. Bauer

Beispiel:

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x [7k, 7k+3[\\ 1/2 & \text{" } x \in [7k+3, 7k+7[\end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

ist periodisch. Ihre kleinste Periode ist $p = 7$.



Die in diesem Kapitel betrachtete Funktionen $f: M \to M$ haben wegen $M \subset \mathbb{R}$ relle Funktionswerte. Man sagt, solche f seien <u>reellwertig</u>. Sie erlauben die folgende Definition.

<u>Definition (Elementare rechnerische Verknüpfung von Funktionen)</u>

Gegeben seien die Fkt. $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann def. man:

i) $h = f + g$ durch $h: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$

ii) $h = f - g$ ——— " ——— $f(x) - g(x)$

iii) $h = f \cdot g$ ——— " ——— $f(x) \cdot g(x)$

iv) $h = f/g$ ——— " ——— $f(x)/g(x)$ $g(x) \neq 0$

v) $h = |f|$ durch $h: D_f \to \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)|$

vi) $h = \lambda f$ ——— " ——— $\lambda f(x)$

vii) $h = f^n$ ——— " ——— $f(x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

<u>Bemerkung</u>

Folgende Schreibweisen sind streng auseinander zu halten: $f \circ g$ und $f \cdot g$, sowie f^{-1} und $\frac{1}{f}$

<u>Beispiele:</u>

$f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ dann ist

$(f+g)(x) = (x+1)^2$, $(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 2x$

$f/g\,(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $|f|(x) = 2|x|$

$f^2(x) = 4x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2+1)$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{2x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$

4.2 Grenzwerte von Funktionen

Wir kennen bereits den Begriff der Konvergenz bei Folgen. Nun definieren wir einen entsprechenden Begriff für Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ (oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$) definiert sind.

~~Definition~~

~~Gegeben~~

4.2.1 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

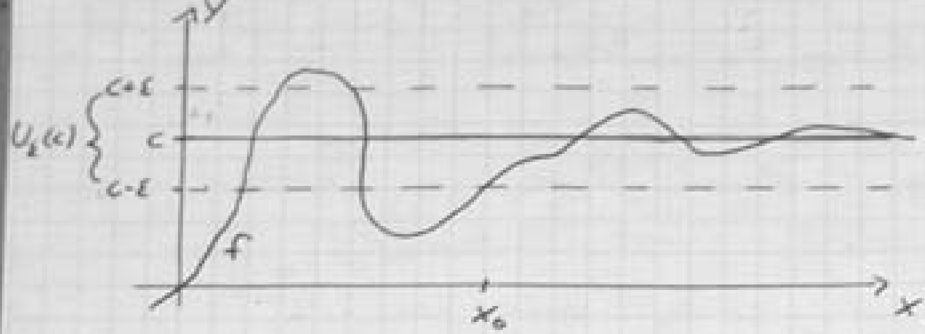
Definition

Gegeben sei eine Fkt. $f: [a, \infty[\to \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$.
Wir sagen, f besitze für $x \to \infty$ den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ oder f konvergiere für $x \to \infty$ gegen $c \in \mathbb{R}$ und schreibt dafür
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x > x_0$ gilt $|f(x) - c| < \varepsilon$ kurz:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \Leftrightarrow \forall_\varepsilon > 0 \; \exists x_0 \in \mathbb{R} \; \forall x > x_0 \; |f(x) - c| < \varepsilon$$

Bemerkungen

1) Anschaulich bedeutet die Konvergenz von f gegen $c \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$, dass in jeder (!) beliebig kleinen Umgebung $U_\varepsilon(c)$ von c ab einem Stelle x_0 alle Funktionswerte der Fkt. liegen.



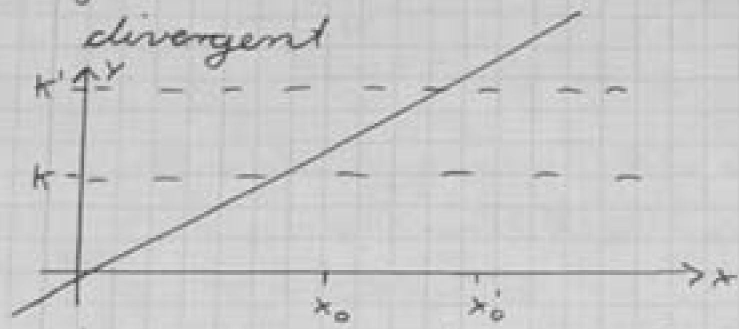
2) Die Stelle x_0, ab der (nach rechts) alle Funktionswerte in der Umgebung $U_\varepsilon(c)$ liegt, hängt von ε ab: je kleiner ε und damit die Umgebung $U_\varepsilon(c)$ ist, desto größer ist im allgemeinen x_0. Man schreibt daher auch $x_0(\varepsilon)$, um diese Abhängigkeit auszudrücken.

3) Konvergiert eine Fkt. f für $x \to \infty$ gegen einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ so ist dieser eindeutig. Dass es keinen weiteren Grenzwert $c' \neq c$ geben kann, zeigt man wie bei konvergenten Folgen.

4) Der Grenzwert von f für $x \to \infty$ ändert sich nicht, wenn f in einem beschränkten Teilintervall von D_f abgeändert wird.

5) Konvergiert eine Fkt. f für $x \to \infty$, so ist der Grenzwert $c = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ immer eine reelle Zahl. Es gilt also keine Konvergenz „gegen Unendlich" im eigentlichen Sinne. Wenn jedoch zu jedem $\left\{ \begin{matrix} K \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \left\{ \begin{matrix} > K \\ < k \end{matrix} \right\}$ für alle $x > x_0$, kurz

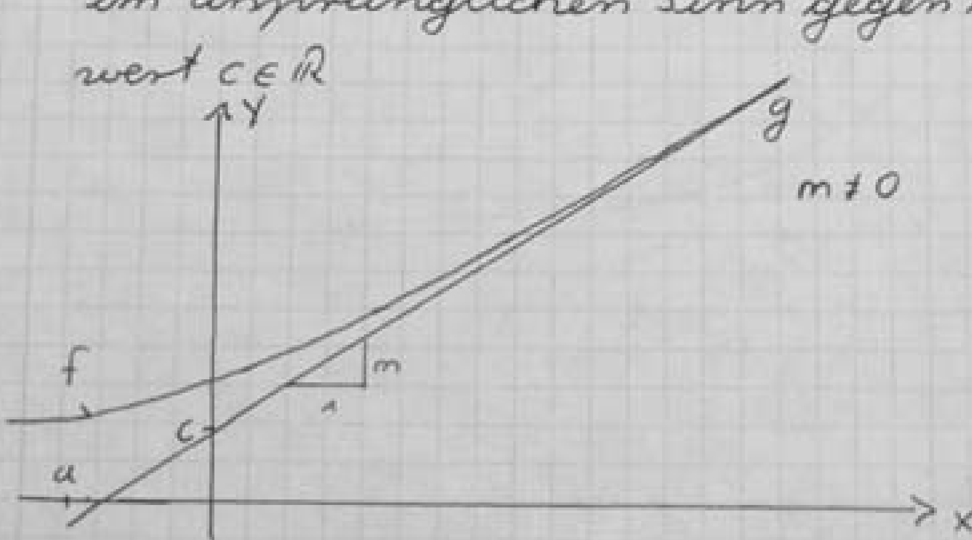
$\left\{ \begin{matrix} \forall K \in \mathbb{R} \\ \forall k \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \exists x_0 \in \mathbb{R} \; \forall x > x_0 \;\; f(x) \left\{ \begin{matrix} > K \\ < k \end{matrix} \right\}$, so sagt man, f besitze für $x \to \infty$ den uneigentlichen Grenzwert $\left\{\begin{matrix}\text{plus}\\ \text{minus}\end{matrix}\right\}$ unendlich und schreibt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \left\{\begin{matrix}+\infty\\ -\infty\end{matrix}\right\}$. Beachte jedoch f ist in diesem Fall für $x \to \infty$ divergent

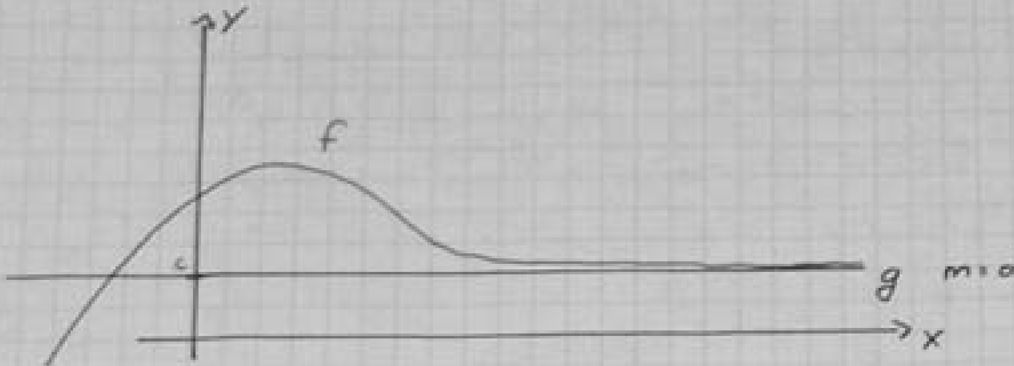


6) Gegeben sei eine Fkt. $f: [a,\infty[\to \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ und eine Fkt. $g: [a,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = mx + c$ $(m, c \in \mathbb{R})$. Der Graph von g ist eine Halbgerade. Konvergiert die Fkt. $h: [a,\infty[\to \mathbb{R}$, $h = f - g$, für $x \to \infty$ gegen den Grenzwert Null, d.h.:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0,$$

so heißt g eine Asymptote von f für $x \to \infty$ und man sagt auch, f konvergiere für $x \to \infty$ gegen die Gerade g. Im Falle $m = 0$ (die Geradensteigung ist Null) und nur in diesem Fall konvergiert dann f auch im ursprünglichen Sinn gegen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$





7) Die Definition und alle vorausgegangenen Bemerkungen lassen sich analog auch für $x \to -\infty$ formulieren, etwa:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 \in \mathbb{R} \; \forall x < x_0 \; |f(x) - c| < \varepsilon$$

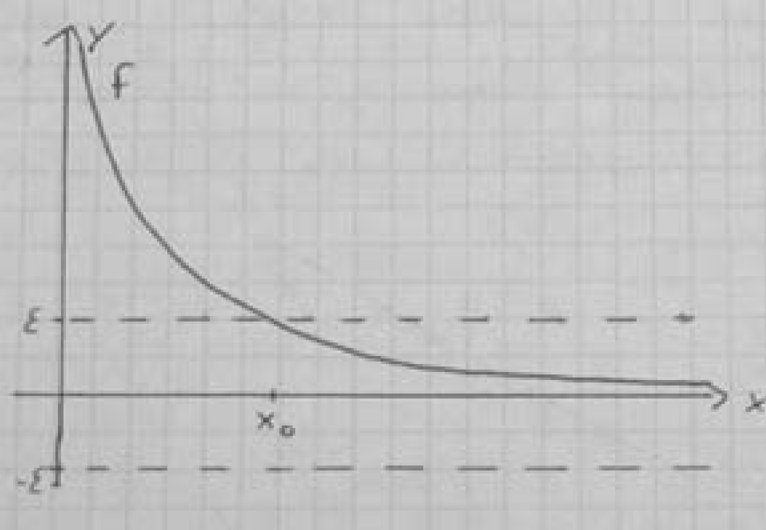
<u>Beispiele:</u>

1) $f(x) = 1/x$ $\left(x \in \,]0, \infty[\, = \mathbb{R}^{>0}\right)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setzen wir $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle $x > x_0$:

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} = \varepsilon$$

$$|f(x) - c| \qquad < \qquad \varepsilon$$

Also ist f für $x \to \infty$ konvergent gegen Null. Analog gilt auch $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = c$



2) $f(x) = \frac{6x-17}{3x+4}$ $(x \in [0,\infty[)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. (divison Vorfaktoren)

$$\left|\frac{6x-17}{3x+4} - 2\right| = \left|\frac{(6x+8)-25}{3x+4} - 2\right| = \left|\frac{6x+8}{3x+4} - \frac{25}{3x+4} - 2\right|$$

$$= \left|\frac{-25}{3x+4}\right| = \frac{25}{3x+4} < \varepsilon$$ gilt genau dann, wenn $25 < \varepsilon(3x+4) = 3\varepsilon x + 4\varepsilon$

$\Leftrightarrow x > \frac{25-4\varepsilon}{3\varepsilon}$. Wählt man $x_0 = \frac{25-4\varepsilon}{3\varepsilon}$, so gilt für alle $x_0 < x$: $|f(x) - 2| < \varepsilon$

Also konvergiert f für $x \to \infty$ gegen 2

Mathematik

7.12.04 Prof. Dr. Bauer

Beispiele (forts.)

3) $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R}^{>0})$.

$g: \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x-3$ ist Asymtote von f für $x \to \infty$, denn

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

f selbst ist für $x \to \infty$ divergent, allerdings mit dem uneigentliche Grenzwert $+\infty$

: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

4) $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz (Rechenregeln für Grenzwerte $x \to \infty$)

Für die Funktionen $f_1, f_2 : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ gelte $\lim_{x\to\infty} f_i(x) = c_i$ $(i = 1,2)$. Dann existieren alle nachfolgenden Grenzwerte und es gilt:

a)

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = c_1 \pm c_2$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)\cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = c_1\cdot c_2$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x)} = \dfrac{c_1}{c_2}$ wenn $c_2 \neq 0$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} |f_1(x)| = \left|\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)\right| = |c_1|$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)^q = \left(\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)\right)^q = c_1^{\,q}$, sofern $f_1(x)>0$

für alle $x\in[a,\infty[$ und $c_1>0$ $\quad q\in\mathbb{R}$

b) Ist $f_1(x)\le f_2(x)$ für alle $x\in[a,\infty[$, so gilt $c_1\le c_2$

<u>Bemerkung</u>

Der Satz gilt analog für $x\to-\infty$

<u>Beispiel</u>

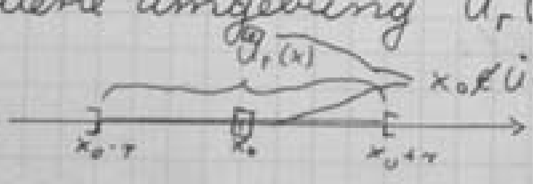
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-12x^2+7}{4x^3+x-19}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3-12\cdot\frac{1}{x}+7\frac{1}{x^3}}{4+\frac{1}{x^2}-19\frac{1}{x^3}}\right)$$

$$=\left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-12\frac{1}{x}+7\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x^2}-19\frac{1}{x^3}\right)}\right)=\left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}12\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}7\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}19\frac{1}{x^3}}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

<u>4.2.2 Grenzwerte für $x\to x_0$</u>

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Funktion f „in der Nähe" einer Stelle $x_0\in\mathbb{R}$. Dabei ist unerheblich, ob f an der Stelle x_0 überhaupt definiert ist. Deshalb nehmen wir als Definitionsmenge für f eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<r,\ x\neq x_0\}$



$x_0\notin \dot{U}(x_0) = U_r(x_0)\setminus\{x_0\}$ an $(r>0)$

Definition

Gegeben sei eine Funktion $f: \dot{U}_r(x_0) \Rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0 \in \mathbb{R})$, $r > 0$. Wir sagen, f besitze an der Stelle x_0 den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ oder f konvergiere gegen $c \in \mathbb{R}$ und schreiben hierfür

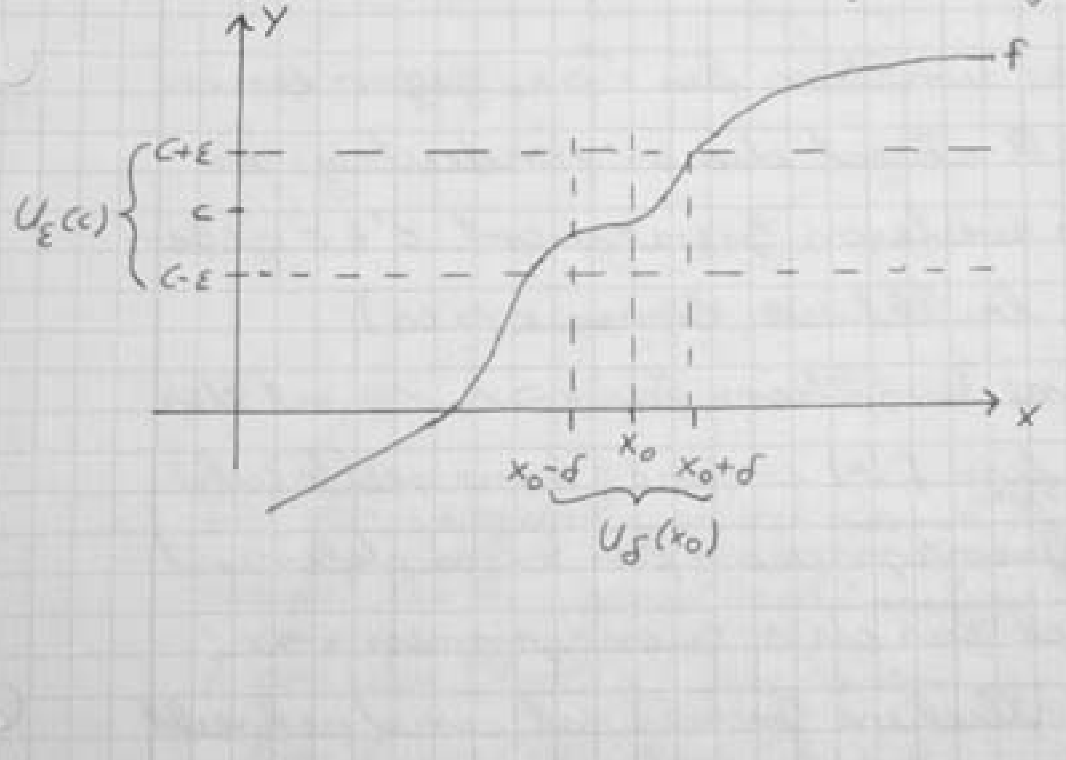
$$\lim_{x \Rightarrow x_0} f(x) = c,$$

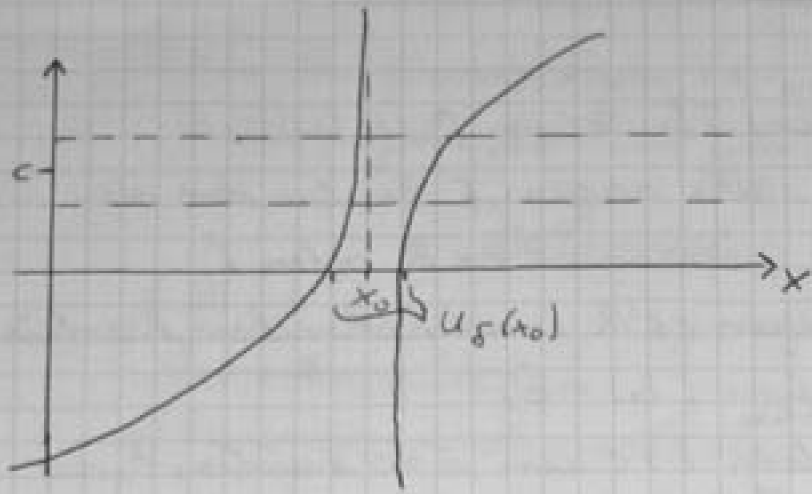
wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \dot{U}_r(x_0)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - c| < \varepsilon$. kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \dot{U}_r(x_0) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

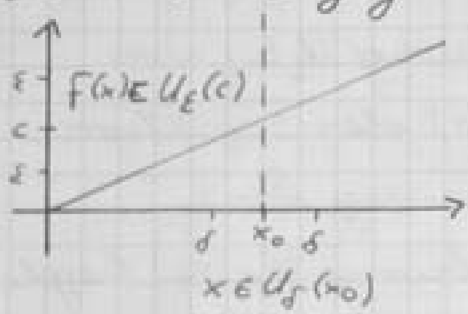
Bemerkungen

1) Anschaulich bedeutet die Konvergenz von f gegen $c \in \mathbb{R}$ für $x \Rightarrow x_0$, dass in jeder (!) beliebig kleinen Umgebung $U_\varepsilon(c)$ von c alle Funktionswerte $f(x)$ der Funktion liegen, sofern x „nahe genug bei x_0", nämlich in der Umgebung $U_\delta(x_0)$ liegt.





2) Die Umgebung $U_\delta(x_0)$, in der x liegen muss, damit $|f(x) - c| < \varepsilon$ gilt, und damit die Zahl δ selbst, hängt von ε ab: je kleiner ε und damit die Umgebung $U_\varepsilon(c)$ ist, desto kleiner ist im allgemeinen δ. Man schreibt auch $\delta(\varepsilon)$, um diese Abhängigkeit auszudrücken.



3) Konvergiert eine Funktion für $x \to x_0$ gegen einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ so ist dieser eindeutig: es kann keinen weiteren Grenzwert $c' \neq c$ geben (vgl. Folgen, bei Fkt. im Limes $x \to \infty$)

4) Konvergiert eine Funktion für $x \to x_0$, so ist der Grenzwert $c = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ immer eine reelle Zahl. Analog zum Grenzprozess für $x \to \infty$ definiert man aber auch für den Grenzprozess $x \to x_0$ einen uneigentlichen Grenzwert und schreibt gegebenenfalls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

5) Für den Grenzprozess $x \to x_0$ gelten analog die Rechenregeln für den Grenzprozess $x \to \pm\infty$

<u>Mathematik</u>

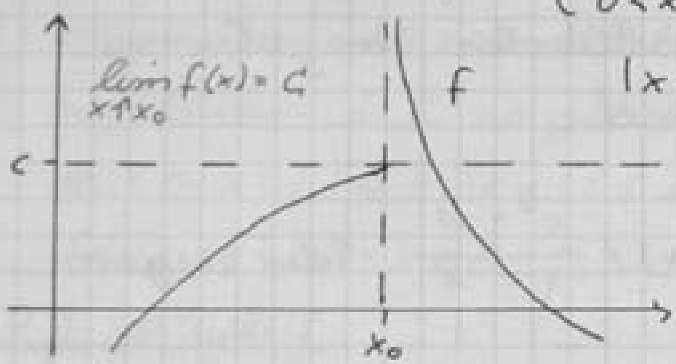
8.12.04 Prof. Dr. Bauer

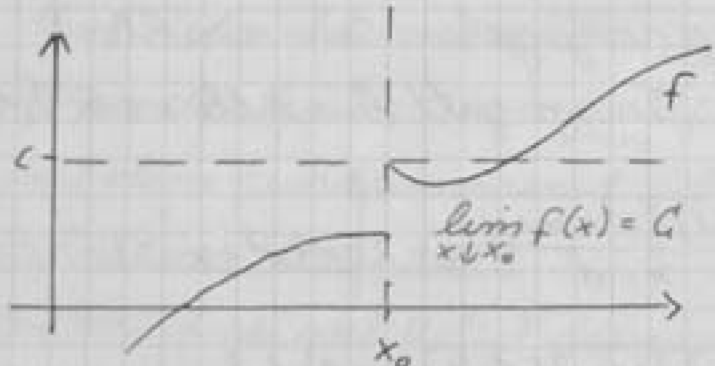
<u>Bemerkung (Forts.)</u>

6) Bisweilen untersucht man das Verhalten von f in der Nähe einer Stelle x_0 lediglich links oder rechts von x. Wir sagen, f besitze an der Stelle x_0 den $\begin{Bmatrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{Bmatrix}$ seitigen Grenzwert c und schreiben hierfür $\begin{Bmatrix}\lim\limits_{x\uparrow x} f(x)\\ \lim\limits_{x\downarrow x} f(x)\end{Bmatrix} = c$, wenn gilt: $\cancel{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \dot{U}_r(x_0) \begin{Bmatrix} 0 < x_0 - x < \delta \\ 0 < x - x_0 < \delta \end{Bmatrix} \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

$|x - x_0| < \delta$

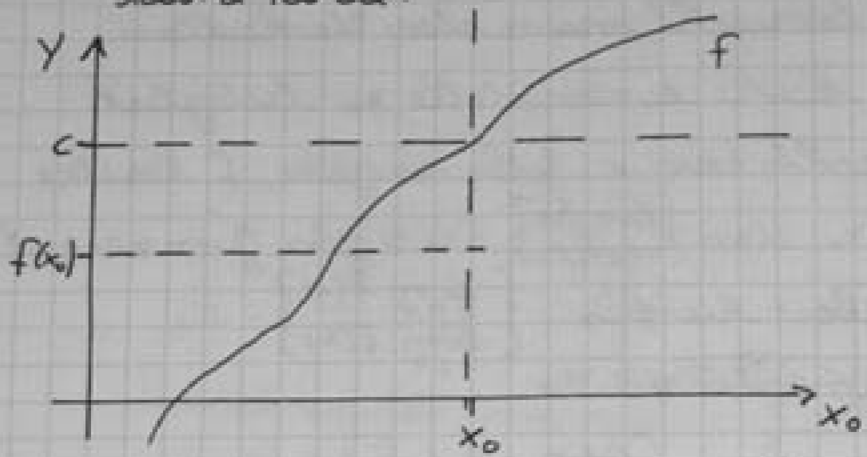




$f(x)$ konvergiert genau dann für $x \to x_0$ gegen $c \in \mathbb{R}$, wenn links- und rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle x_0 existieren und gleich c sind.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = c$$

7) Die Def. der Konvergenz von f gegen c für $x \to x_0$ lässt sich auf Fkt. ausweiten, die bei $x = x_0$ definiert sind. Der Funktionswert $f(x_0)$ spielt allerdings für das Konvergenzverhalten und den Grenzwert bei $x = x_0$ keine Rolle.



Deshalb haben wir Funktionen betrachtet, die auf einer punktierten Umgebung $\dot{U}_r(x_0)$ definiert sind.

Beispiele:

1) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$. Wir zeigen $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $\delta = \min\{1, \varepsilon/4\}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $|x - 1| < \delta$:

$$|f(x) - 3| = \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - 3\right| = |x^2 + x - 2|$$

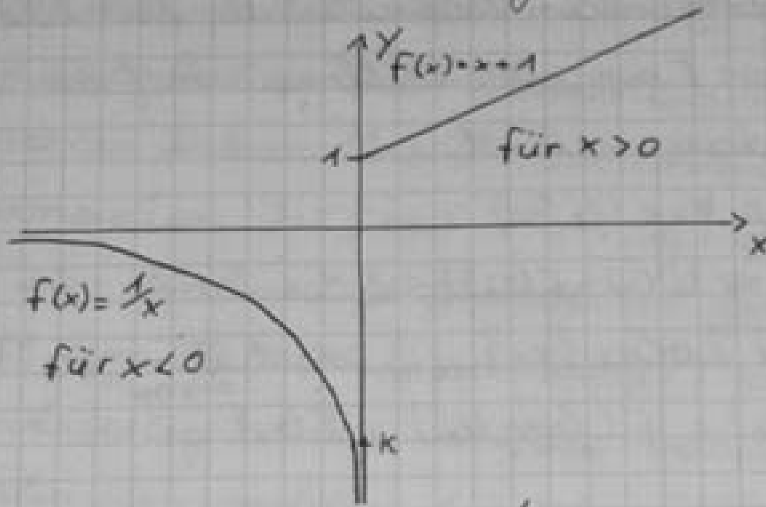
$$= |x - 1|\,|x + 2| < 4|x - 1| < \varepsilon$$

Für die Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ \alpha & \text{für } x = 1 \end{cases}$ gilt ebenfalls $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$. Dabei ist $\alpha = f(x_0) \in \mathbb{R}$ beliebig.

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{für } x < 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

Es gilt $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 1$.

Ist einerseits $k < 0$ beliebig klein vorgegeben



und wählt man $\delta = -\frac{1}{k} > 0$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $0 < -x < \delta$ (d.h. $|x-0| < \delta$ und $x < 0$)

$f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{-\delta} = k$, d.h. $f(x) < k$.

Ist andererseits $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und wählt man $\delta = \varepsilon$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $0 < x < \delta$ (d.h. $|x-0| < \delta$ und $x > 0$):

$|f(x) - 1| = |x| = x < \delta = \varepsilon$, d.h. $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

4.3 Stetigkeit

Nun betrachten wir Fkt. f mit $x_0 \in D_f$, bei denen der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Definition (Stetigkeit)

Die Fkt. f sei auf $U_r(x_0)$ definiert ($x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$). f heißt stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0}$ existiert und wenn gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Bemerkungen

1) Um an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig zu sein, muss f in einer Umgebung $U_r(x_0)$ $(r>0)$ definiert sein

2) Die beiden folgenden Definitionen für die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 sind zur obigen Definition äquivalent.

i) $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \forall x \in U_r(x_0)$

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

ii) Für jede Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(x_0)$

3) Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f an der Stelle x_0, dass sich der Graph von f in einer Umgebung $U_r(x_0)$ von x_0 „ohne absetzen des Stiftes" zeichnen lässt.

4) Man sagt, f sei an der Stelle x_0 unstetig, wenn:

i) f auf einer Umgebung $U_r(x_0)$ definiert, aber an der Stelle x_0 nicht stetig.

ii) f auf einer punktierten Umgebung $\dot{U}_r(x_0)$, nicht jedoch in x_0 def. ist. x_0 heißt dann eine Unstetigkeitsstelle. Im Falle ii) heißt x_0 eine Definitionslücke. Ist x_0 eine Def. Lücke und f für $x \to x_0$ konvergiert gegen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \in \mathbb{R}$, so ist die Fkt. $g: U_r(x_0) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \dot{U}_r(x_0) \\ c & \text{für } x \in x_0 \end{cases}$$ stetig an der Stelle x_0 und f heißt in x_0 stetig ergänzbar.

Ist x_0 eine Def. lücke und gilt $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim f(x)$ so heißt x_0 eine Unendlichkeitsstelle oder Pol von f

5) Die Stetigkeit an den Randpunkten abgeschlossener Intervalle definiert man folgendermaßen. Ist f auf $]x_0 - r, x_0]$ def. $(x_0 \in \mathbb{R}, r > 0)$ ex. der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ und gilt $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0)$, so heißt f an der Stelle x_0 linksseitig stetig. Analog versteht man unter der rechtsseit. Stetigkeit an der Stelle x_0 für eine Fkt. $f: [x_0, x_0 + r[\to \mathbb{R}$.

6) Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und ist die Fkt: $f: J \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x_0 \in J$ stetig bzw. (an etwaigen Randpunkten von J links bzw. rechtsseitig stetig), so heißt f stetig auf J.

7) Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und die Fkt $f: J \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Ist f stetig auf J bis auf endl. viele Stellen, so heißt f auf J stückweise stetig.

<u>Beispiele</u>

1) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^M = f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$

2) Die Fkt. $f: \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sqrt{x} = f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$, rechtsseitig stetig in $x_0 = 0$ und somit stetig auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

3) Die Fkt. $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (dort gilt $f(x) = x^2+x+1$), weist jedoch bei $x_0 = 1$ eine Def. lücke auf. f ist in $x_0 = 1$ stetig ergänzbar, denn $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 1) in 4.2.2

4) Die Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [7k, 7k+3[\\ 1/3 & \text{für } x \in [7k+3, 7k+7[\end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ist stückweise stetig auf $[-700, 700[$

4.4. Eigenschaften stetiger Funktionen

Der folgende Satz dient für den leichteren Nachweis, das eine Fkt. stetig ist.

Satz (Elementare rechnerische Verknüpfungen Hintereinanderausführung und Umkehrung stetiger Fkt.)

a) Die Fkt. f_1 und f_2 seien in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig. Dann sind auch die Fkt. $f_1 \pm f_2$; $f_1 \cdot f_2$; $|f_1|$; $\frac{f_1}{f_2}$ wenn $f(x) \neq 0$, f_1 wenn $f_1(x_0) \geq 0$ $(q > 0)$ stetig in x_0.

b) Die Fkt f sei in $x_0 \in D_f$ stetig, die Fkt g sei in $u_0 = f(x_0) \in D_g$ stetig und es sei $W_f \subset D_g$. Dann ist auch $g \circ f$ in x_0 stetig und es gilt $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(f(x_0))$

c) Es sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und die Fkt. $f: I \to W_f$ sei auf I stetig und umkehrbar. Dann ist $f^{-1}: W_f \to I$ stetig auf W_f und W_I ist ein Intervall.

Mathematik I

14. 12. 04 Prof. Dr. Bauer

Satz von Weierstraß

Die Fkt. f sei auf dem geschl. Intervall $[a, b]$ stetig. Dann existiert ein $x_m \in [a, b]$ und ein $x_M \in [a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Bemerkungen

1) Man bezeichnet $f(x_m) = \min f([a, b])$ bzw. $f(x_M) = \max f([a, b])$ als (absolutes) Minimum bzw. Maximum von $f[a, b]$. Der Satz besagt:
Eine stetige Fkt. besitzt in einem abgeschl. Int. ein absolutes min. bzw absolutes max.

2) Später werden wir mit Hilfe der Differenzialrechnung x_m und x_M gezielt zu ermitteln lernen.

Beispiel

1) Die Fkt. $f: x \mapsto x^2 - 1$ ist stetig auf $[-2, 3]$ und es gilt $-1 \leq f(0) \leq f(x) \leq f(3)$ für alle $x \in [-2, 3]$

2) Die Fkt. $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ ist zwar stetig auf $]0, 1]$, aber nicht beschränkt und nimmt folglich auf $]0, 1]$ kein Max an. Das Int. $]0, 1]$ ist nicht abgeschlossen.

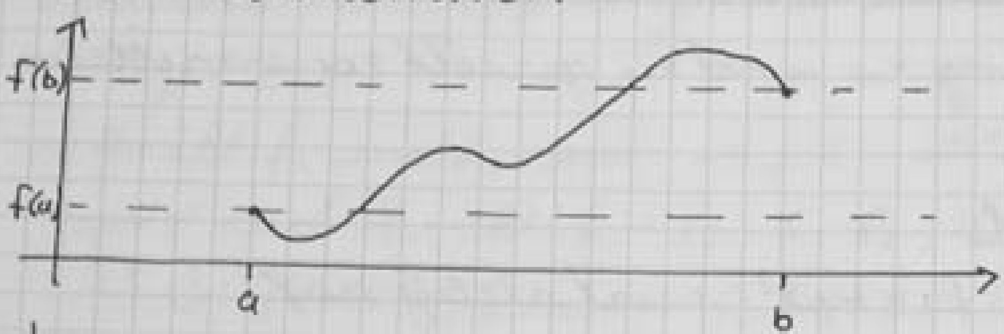
3) Die Fkt. $f: x \mapsto x$ ist zwar auf $[0,1[$ stetig und auch beschränkt, nimmt aber dennoch auf $[0,1[$ kein Max an. Das Intervall $[0,1[$ ist nicht abgeschlossen.

Zwischenwertsatz

Die Fkt. f sei auf dem abgeschl. Int $[a,b]$ stetig und es sei $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert zu jedem y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x_0 \in]a,b[$ mit $f(x_0) = y_0$.

Bemerkung

1) Der Satz besagt (das anschaulich Selbstverständliche), dass eine ste. Fkt. auf einem Int. zwischen zwei verschiedenen Funktionswerten auch jeden Zwischenwert annimmt.



2) Ist f eine reellwertige Fkt. auf $D_f \subset \mathbb{R}$, so heißt eine Stelle $x_0 \in D_f$ mit $f(x_0) = 0$ eine Nullstelle von f.

Besitzt eine stetige Fkt. auf einem Int. positive und negative Funktionswerte, so besitzt sie nach dem Zw.-wertsatz auch min. eine Nullstelle.

Beispiel

Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^6 - 7x^5 + 3x^2 - 9$ gilt
$f(1) = -12$ und $f(7) = 138$.

Folglich besitzt f in $]1,7[$ eine Nullstelle

4.5 Elementare stetige Fkt.

4.5.1 Ganzrationale Fkt.

Definition

Eine Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, heißt ganzrationale Fkt. n-ten Grades oder Polynom n-ten Grades.

Sprechweise und Notationen

Die Zahlen a_k $(k = 0, \ldots, n)$ heißen die Koeffienten des Polynoms f. Man nennt n den Grad des Polynoms f und schreibt $n = \operatorname{grad} f$.

Beispiel

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^7 + 16x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$ ist eine ganzrationale Fkt. 7. Grades, d.h $\operatorname{grad} f = 7$. Wir haben $a_7 = 4$; $a_6 = a_5 = a_1 = 0$; $a_4 = 16$
$a_2 = 9$; $a_0 = 1$

Satz (Koeffizientenvergleich)

Zwei ganzrat. Fkt. n-ten Grades f und g, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ $(x \in \mathbb{R})$, sind genau dann gleich, wenn ihre Koeff. allesamt gleich sind, d.h. wenn $a_k = b_k$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

In zahlreichen Anwendungsbereichen spielen beim Umgang mit Polynomen die Nullstellen eine besondere Rolle.

Satz (Nullstellen ganzrat. Fkt.)

a) Eine ganzrationale Fkt. n-ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

b) Ist f eine ganzrat. Fkt. n-ten Grades und ist x_1 eine Nullst. von f, so existiert eine ganzrat. Fkt. g vom Grade $n-1$ ~~und~~ mit $f(x) = (x-x_1)\,g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

c) Ist f eine ganzrat. Fkt. n-ten Grades und $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ die verschiedenen Nullst. von f ($r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$), so gilt die Produktdarstellung $f(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{m_r}\, h(x)$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \ldots, r$) und einer ganzrat. Fkt. h vom Grade $n - \sum_{i=1}^{r} m_i \geq 0$, die keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

d) Ist f eine ganzrat. Fkt. n-ten Grades mit n verschiedenen Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$, so gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k{}^k = a_n (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x-x_i)$.

Bemerkungen

1) In einer Darst. $f(x) = (x-x_1)\,g(x)$ für f wie in Teil b) des Satzes heißt der Faktor $(x-x_1)$ ein Linearfaktor des Polynoms f. Man sagt, f sei (ohne Rest) durch $(x-x_1)$ teilbar. Das Verfahren zur Bestimmung von g auf f bei bekannter Nullst. x_1 heißt Polynomdiv.

2) Die Darst. $f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-x_i)^{m_i} h(x)$ für f wie in Teil c) des Satzes ergibt sich aus der Darst. $f(x) = (x-x_1)\, g(x)$ in Teil b),

$$\underbrace{f(x)}_{\text{grad } n} = (x-x_1)\underbrace{g(x)}_{\text{grad } n-1} = (x-x_1)(x-x_2)\underbrace{g(x)}_{\text{grad } n-2} = \ldots\ldots$$

indem man von g sukzessive weitere Linearfaktoren „abspaltet". Die Exponenten m_i heißen die Vielfachheiten der jeweiligen Nullst. $(i=1,\ldots,n)$

3) Für den Falle, dass das Polynom h in Teil c) des Satzes konstant ist, $h(x) = a_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow$ grad $h = 0$), gilt $f(x) = a_n \prod_{i=0}^{r} (x-x_i)^{m_i}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Summe aller Vielfachheiten m_i ist dann gleich n, $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$, und man sagt, f zerfalle vollständig in Linearfaktoren. Ein Spezialfall dieser Situation liegt in Teil d) des Satzes vor: hier gilt $r = n$ und m_1 für $i \in \{1,\ldots,n\}$

<u>Beispiel:</u>

Durch $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3$ ist ein Polynom 3. Grades gegeben. Wir erhalten die Nullst. $x_1 = 1$ und führen eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{l}
3x^3 + 3x^2 - 3x - 3 : (x-1) = 3x^2 + 6x + 3 \\
\underline{-(3x^3 - 3x^2)} \\
\quad 6x^2 - 3x - 3 \\
\quad \underline{-(6x^2 - 6x)} \\
\qquad 3x - 3 \\
\qquad \underline{-(3x-3)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

f ist also ohne Rest durch $(x-1)$ teilbar und es gilt die Darst.

$f(x) = (x-1)(3x^2+6x+3) = (x-1)\,g(x)$ gemäß Teil b)

des Satzes. Wegen $g(x) = 3x^2+6x+3 = 3(x^2+2x+1)$

$$= 3(x+1)^2$$

zerfällt f vollständig in Linearfaktoren

$f(x) = 3(x-1)^1(x+1)^2$

f hat also die Nst. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ mit

den Vielfachheiten $m_1 = 1$; $m_2 = 2$

<u>Mathematik</u>

15.12.04 Prof. Dr. Bauer

<u>4.5.2 Gebrochenrationale Fkt.</u>

<u>Definition:</u>

Eine Fkt $R: x \mapsto R(x)$ der Form

$$R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}{\sum_{l=1}^{m} b_l x^l} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

mit ganzrationalen Fkt. Z und N heißt gebrochenrationale Fkt. Im Falle $n = \text{grad}\, Z < \text{grad}\, N = m$ heißt R echt gebrochenrational, andernfalls unecht gebrochenrational.

<u>Bemerkungen:</u>

1) Die max. Definitionsmenge von R ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullst. des Nennerpolynoms N, d.h. $D_R = \mathbb{R} \setminus N^{-1}\{0\}$. Auf dieser Def.menge ist R stetig.

2) Eine gebrochenrationale Fkt. R lässt sich als Summe von Teilchen (oder Partialbrüchen) schreiben, etwa

$$R(x) = \frac{c_1}{x-x_1} + \frac{c_{21}}{x-x_2} + \frac{c_{22}}{(x-x_2)^2}$$

Man gewinnt eine solche Darstellung (falls sie möglich ist) durch die sogenannte Partialbruchzerlegung (wir werden diese erstmals im Kap. über Integralrechnung nutzen und dort einführen)

3) $R(x)$ kann auf der max Def. menge mit einer ganzrat. Fkt. übereinstimmen, wenn nämlich $Z(x)$ ohne Rest durch $N(x)$ teilbar ist.

Beispiele:

1) $f: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ist eine unecht gebrochenrat. Fkt. Sie stimmt auf $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ mit der ganzrat. Fkt. $x \mapsto x+2$ überein.

2) Die Fkt. f mit $f(x) = \frac{-x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30}$ ist echt gebrochenrat.

Sie lässt sich durch Partialbruchzer. auch in der Form $f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$ schreiben

Wir haben $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3; -2; -5\}$

4.5.3 Potenzfunktionen

Definition:

Es sei $r \in \mathbb{R}$. Eine Fkt. $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^r$ heißt Potenzfkt.

Bemerkungen:

1) Für $r \geq 0$ ist auch $0 \in D_f$ zugelassen. Denn $0^r = 0$

2) Potenzfkt. sind auf ihrer Def. menge stetig

3) Für $r \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, d.h. $r = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, ist $x^r = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ $(x \in \mathbb{R}^{\geq 0})$ und heißt n-te Wurzel von x^m

4) Um x^r für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ mathem. streng zu Def. benötigt man die Exponentialfunktion. (s.u.)

<u>Satz (Rechenregeln f. Potenzfunktionen)</u>

Es seien $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x, x_1, x_2 \in \left]0, \infty\right[$:

i) $x^{-r} = 1/x^r$ ii) $x^0 = 1$, $x^1 = x$

iii) $(x_1 x_2)^r = x_1^r x_2^r$ iv) $x^{r_1 + r_2} = x^{r_1} x^{r_2}$ v) $x^{r_1 \cdot r_2} = (x^{r_1})^{r_2}$

4.5.4 Exponential- und Logarithmusfkt.

Die Exponentialfkt. o. e-Fkt. wurde bereits in 3.1.3 def. durch $e^x : x \mapsto \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

<u>Satz (Eigenschaften e-Fkt.)</u>

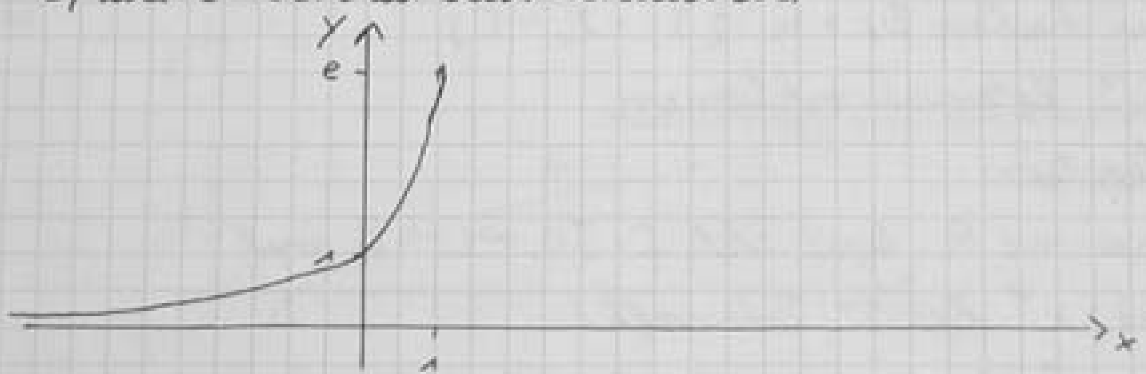
a) $D_e = \mathbb{R}$; $W_e = \mathbb{R}^{>0}$

b) Die e-Fkt. ist stetig auf $\mathbb{R}$

c) Die e-Fkt. ist streng mon. wachsend auf $\mathbb{R}$

d) $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ und $e^{x_1 \cdot x_2} = (e^{x_1})^{x_2}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

e) Die e-Fkt hat das Schaubild



<u>Bemerkungen:</u>

1) Die Eigenschaft d) zeigt das für die e-Fkt. die gleichen Gesetze wie bei der Potenzrechnung gelten. Sie rechtfertigen erst die Beziehung e^x für $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

2) Das bei der Exponentialfkt. die unabh. Variable im Exp. auftritt, ermöglicht erst die strenge mathem. def. von Potenzen x^r mit $r \in \mathbb{R}$, $r \notin \mathbb{Q}$ (vgl. Bem. 4) in 4.5.3)

Aus den Eigensch. a) - c) folgt, dass die e-Fkt. eine stetige Umkehrfkt. auf $\mathbb{R}^{>0}$ hat.

<u>Definition (Umkehrfkt. od. Logarithmusfkt.)</u>

Die Umkehrfkt. der e-Fkt heißt (natürlicher) Logarithmus-Funktion und wird mit ln bezeichnet.

<u>Satz (Eigenschaften der ln-Funktion</u>

a) $\mathbb{D}_{ln} = \mathbb{R}^{>0}$, $W_{ln} = \mathbb{R}$

b) Die ln-Fkt. ist stetig auf $\mathbb{R}^{>0}$

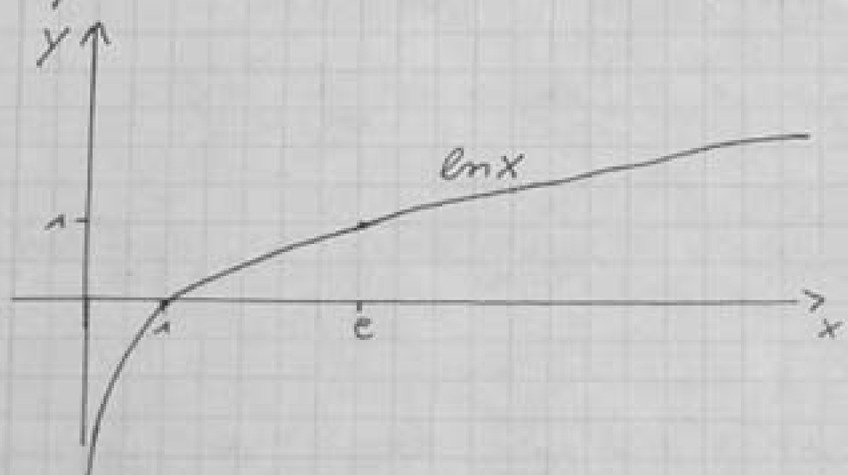
c) Die ln-Fkt. ist streng mon. wachsend

d) Für alle $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\ln 1 = 0$ ii) $\ln e = 1$ iii) $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

iv) $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2$ v) $\ln x^r = r \ln x$

e) Die ln-Fkt. hat das Schaubild



Mit Hilfe der e- und der ln-Fkt. lassen sich auch allgemeinere Exponentialfkt. $x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ und ihre Umkehrfkt. definieren P!

<u>Definition</u>

Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die Fkt. $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ für $x \in \mathbb{R}$ heißt Exponentialfkt. zur Basis a oder allgemeine Exponentialfkt.

Die Fkt. $\log_a : x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ für $x \in \mathbb{R}^{>0}$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a oder allgemeine Logarithmusfkt.

<u>Bemerkungen</u>

1) Exponential- und Logarithmusfkt. zur Basis a sind jew. Umkehrfkt. voneinander.

2) Im Falle $a = 10$ bzw $a = e$ nennt man $\log_{10} x$ bzw. $\log_e x = \ln x$ den dekadischen bzw. natürlichen Logarithmus von x.

3) Für a^x und $\log_a x$ gelten analog die Rechenregeln wie für e^x und $\ln x$. Insbesondere gilt ($a, b \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^{>0}$):

i) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ ii) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

4) Für $a > 1$ gilt:

i) $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$, $\lim_{x \downarrow 0} \log_a x = -\infty$

ii) Für $0 < a < 1$

$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$; $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$; $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$; $\lim_{x \downarrow 0} \log_a x = \infty$

4.5.5 Hyperbelfkt.

In zahlreichen physikalischen Anwend. treten Linearkombinationen der Exponentialfkt. auf.

Definition

Unter den Hyperbelfkt. oder hyperbolischen Fkt. versteht man die Fkt.

$\sinh : x \mapsto \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ für $x \in \mathbb{R}$ („sinus hyperbol.")

$\cosh : x \mapsto \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ — " — („cosinus — " —")

$\tanh : x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ — " — („tangens — " —)

$\coth : x \mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ — " — („cotangens — " —")

Satz (Eigenschaft der Hyperbelfkt)

a) $D_{\sinh} = D_{\cosh} = D_{\tanh} = \mathbb{R}$; $D_{\coth} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$W_{\sinh} = \mathbb{R}$; $W_{\cosh} = [1, \infty[$; $W_{\tanh} =]-1, 1[$; $W_{\coth} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

b) Die Hyperbelfkt. sind stetig auf ihrem Def. bereich.

c) cosh ist eine gerade Fkt. ; sinh, tanh, coth sind ungerade Fkt.

d) Für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

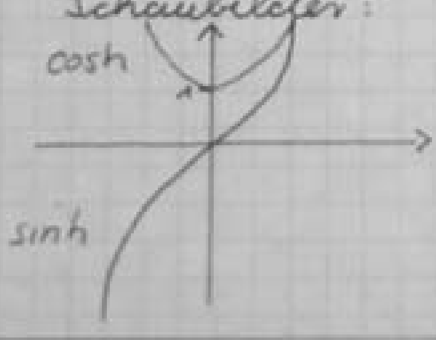
i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

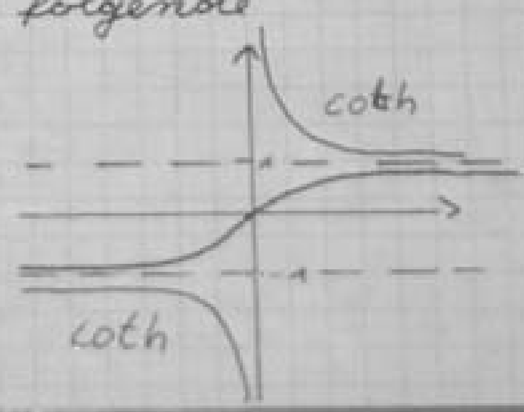
ii) $\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2$

$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2$

iii) $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx \quad (n \in \mathbb{Z})$

e) Die Hyperbelfkt. haben folgende Schaubilder:





f) Es gilt:

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \coth x$

iii) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \coth x = -\infty$; $\lim\limits_{x\downarrow 0} \coth x = \infty$

__Definition__

Die Fkt. sinh, tanh, coth und die Einschränkung von cosh auf die Def. menge $\mathbb{R}^{\geq 0}$ sind umkehrbar und ihre Umkehrfunktionen heißen Arealfunktionen:

$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x$

$\operatorname{arcosh}: [1, \infty[\to \mathbb{R}^{\geq 0} \quad x \mapsto \operatorname{arcosh} x = (\cosh|_{\mathbb{R}^{\geq 0}})^{-1} x$

$\operatorname{artanh}:]-1, 1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x$

$\operatorname{arcoth}: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

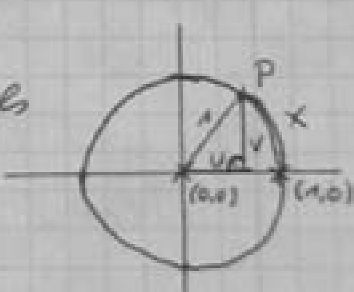
$\qquad x \mapsto \operatorname{arcoth} x = \coth^{-1} x$

__4.5.6 Trigonometrische Fkt__

Zu den wichtigsten Fkt. der Mathematik gehören die Sinus und die Kosinusfkt.

__Definition__

Es sei $P = (u, v)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $P \in S_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$



Bezeichnet x das Bogenmaß des Winkels $\sphericalangle(P, (0,0), (1,0))$, so nennt man u bzw. v den Kosinus bzw Sinus von x und schreibt $u = \cos x$ u. $v = \sin x$

Auf diese Weise sind zwei Fkt. $\cos: x \mapsto \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$

$\sin: x \mapsto \sin x$ " $x \in \mathbb{R}$

definiert. Sie heißen Kosinusfkt bzw. Sinusfkt.

21.12.04 **Mathematik** Prof. Dr. Zeuner

Bemerkung

cos und sin sind damit für $x \in \mathbb{R}$ (und nicht für $x \in [0, 2\pi[$) erklärt, weil der Punkt P neben dem Bogenmaß $x \in [0, 2\pi[$ auch durch die Bogenmaße $x + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ beschrieben wird.

Satz (Eigenschaften der Kosinus- u. Sinusfkt.)

a) $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$; $W_{\sin} = W_{\cos} = [-1, 1]$

b) sin und cos sind stetig auf $\mathbb{R}$

c) sin und cos sind periodische Fkt. mit der kleinsten Periode 2π, d.h. für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(2\pi k + x) = \cos x$

d) sin ist eine ungerade Fkt. auf $\mathbb{R}$, cos ist eine gerade Fkt. auf $\mathbb{R}$. d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

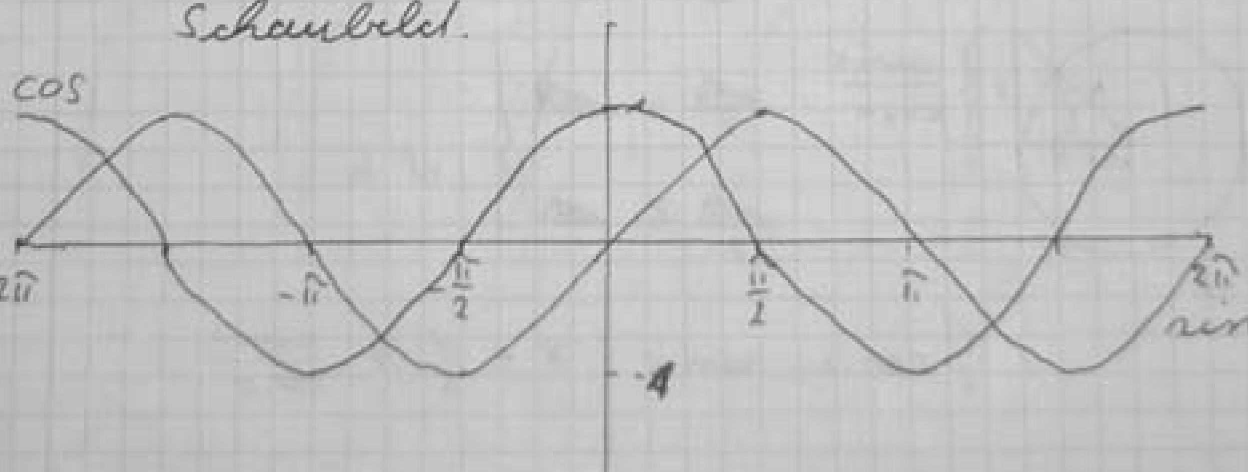
e) Für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \sin x$

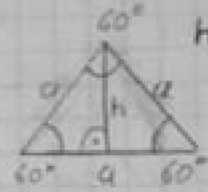
ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Satz des Pytagoras)

iii) $\sin(x_1 \mp x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1$

iv) sin und cos haben folgendes Schaubild.



Beispiele

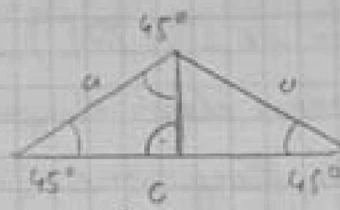


$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

1) $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\, a}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

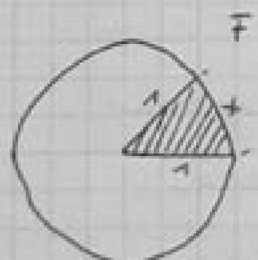


$c = \sqrt{2}\, a$

2) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin^2 x - 2 = 0$?

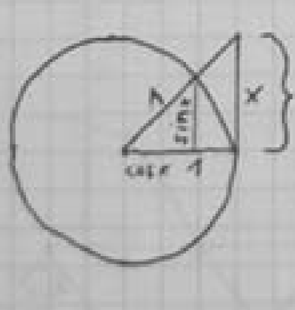
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ führt zu der Gleichung $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$. Mit der Substitution $u = \sin x$ folgt $u^2 + u - 2 = (u-1)(u+2) = 0$. Die Lösung $u = -2$ scheidet wegen $|\sin x| \leq 1$ aus. Somit muss $u = \sin x = 1$ gelten und die Lösungsmenge lautet $\{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3) Berechne $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Es genügt, $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ zu untersuchen, denn wenn dieser Limes existiert, so auch $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\sin(-x)}{(-x)}$ $= \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

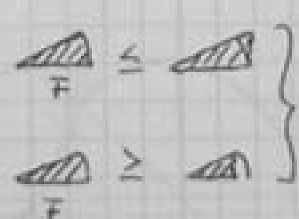


Für die Fläche F des zu x gehörigen Kreissegments gilt

$\frac{x}{2\pi \cdot 1} = \frac{F}{\pi \cdot 1^2}$, und



$\frac{\sin x}{\cos x}$



d.h.

$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \leq F \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

und somit

$$\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \text{ bzw.}$$

$$\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}.$$

Wegen $\lim\limits_{x \downarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ folgt schließlich

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definition (Tangens und Kotangensfkt.)

Unter der Tangensfkt. und der Kotangensfkt. versteht man die Fkt.

$\tan : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cot : x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Satz (Eigensch. der Tang. u. Kotangensfkt.)

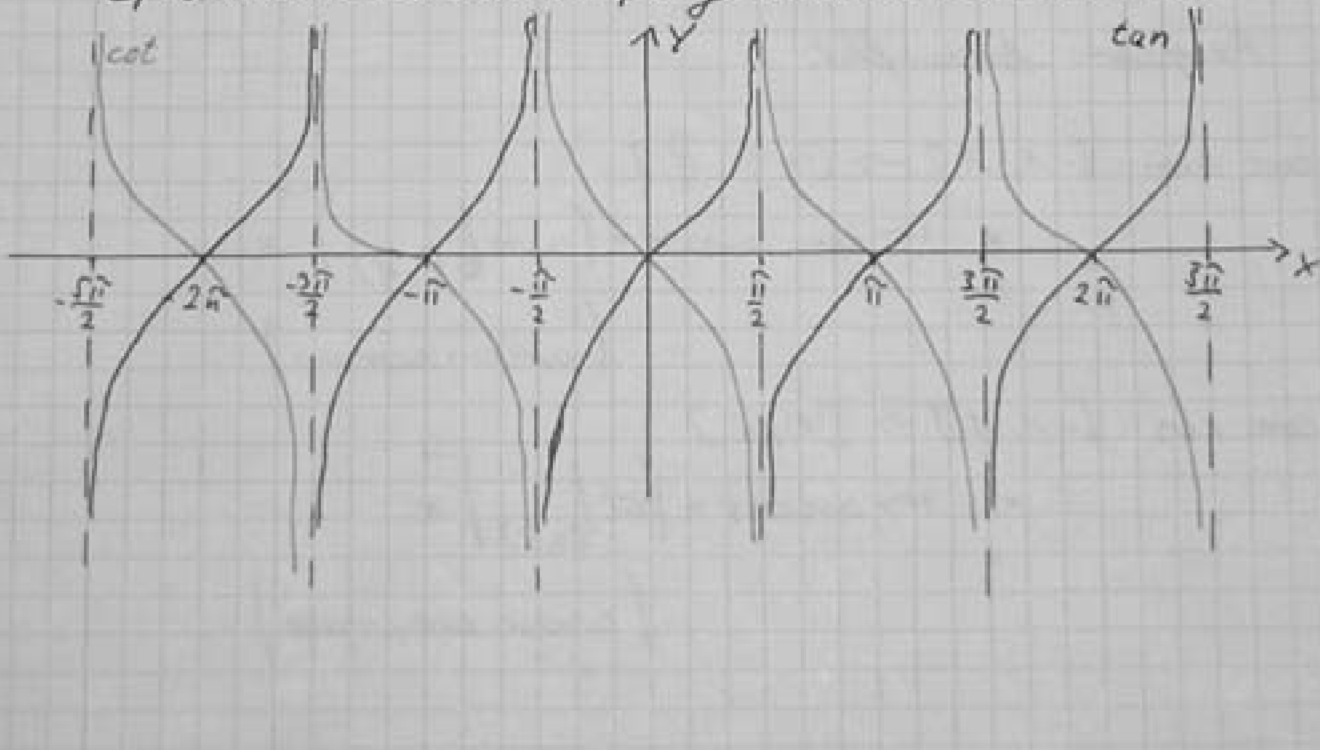
a) $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $W_{\tan} = W_{\cot} = \mathbb{R}$

b) tan und cot sind auf ihrem Def. Menge stetig

c) tan und cot sind periodische Fkt. mit der kleinsten Periode π

d) tan und cot sind ungerade Fkt auf $\mathbb{R}$

e) tan und cot haben folgendes Schaubilder.



__Beispiel__

Für $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$
$= \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

Die trigonometrischen Fkt. sin, cos, tan und cot können schon auf grund ihrer periodizität nicht umkehrbar sein. Sie lassen sich aber auf einer eingeschränkten Def. menge, in der sie streng monoton sind umkehren.

__Definition (Arcusfkt.)__

Die Einschrankung der Fkt.

$$\left\{\begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \tan \\ \cot \end{matrix}\right\} \text{ auf die Def. menge } \left\{\begin{matrix} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ [0, \pi] \\ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ ]0, \pi[\end{matrix}\right\} \text{ sind}$$

umkehrbar und ihre Umkehrfunktionen heißen Arcusfkt.

$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$$x \mapsto \arcsin x = \left(\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} x$$
(arcus sinus)

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
$$x \mapsto \arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1} x$$
(arcus cosinus)

$\operatorname{arctan}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \mapsto \operatorname{arctan} x = \left(\tan\big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} x$$

(arcus tangens)

$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to \left]0, \pi\right[$

$$x \mapsto \operatorname{arccot} x = \left(\cot\big|_{]0,\pi[}\right)^{-1} x$$

(arcus cotangens)

Mathematik

22.12.04 Prof. Dr. Dauer

Bemerkungen

Die Arcus Fkt. kommen immer dann zum Einsatz, wenn zu gegebenem Wert einer trigonometrischen Fkt. der zugehörige Winkel (in Bogenmaß, lat. arcus) gesucht wird.

Beispiel

$$\operatorname{arctan} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ für } x \in \mathbb{R}, \text{ denn}$$

$$\tan\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\cos\left(\quad " \quad - \quad " \quad \right)}$$

mit $\cos = \pm\sqrt{1-\sin^2}$
$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = x$$

5. Komplexe Zahlen

Wir erschließen uns in diesem Kapitel einen neuen Zahlenraum, in dem unter anderen das Wurzelziehen aus negativen Zahlen, insbesondere $\sqrt{-1}$, definiert ist. Dieser Zahlenraum, die Menge der Komplexen Zahlen, bildet für viele Naturvorgänge und techn. Sachverhalte eine weitaus angemeinere Beschreibungsgrundlage als $\mathbb{R}$

5.1 Die Menge $\mathbb{C}$

Definition

In der Menge $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ aller geordneten Paare reeller Zahlen def. wir auf folgende Weise eine Rechenoperation „+" (Addition) und eine Rechenoperation „·" (Multiplikation):

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (Addition)

b) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (Multipl.)

Die mit diesen Rechenoperationen ausgestattete Menge bezeichnet man mit $\mathbb{C}$. Jedes Element von $\mathbb{C}$ heißt eine komplexe Zahl.

Bemerkung

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$ sind genau dann gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Beispiele

$(4,1) + (7,-2) = (11,-1)$; $(1,3) + (0,0) = (1,3)$

$(4,1) \cdot (7,-2) = (30,-1)$; $(1,3) \cdot (0,0) = (0,0)$

$(17,11) \cdot (1,0) = (17,11)$; $(0,1) \cdot (1,0) = (-1,0)$

Satz (Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$)

Die komplexen Zahlen bilden einen Körper, d.h. die Addition und die Multiplikation kompl. Zahlen genügen den Axiomen (A1) - (A9) aus 2.1.1 (mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ anstatt $\mathbb{R}$)

Bemerkungen

1) Add. und Multi. kompl. Zahlen sind also assoziativ, kommutativ und distributiv.
Das neutrale Element der Addition in $\mathbb{C}$ ist die kompl. Zahl $(0,0)$. Das inverse Element der Add. in $\mathbb{C}$ zu einem $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ ist die komplexe Zahl $-z=(-x,-y)$
Das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist die komp. Zahl $(1,0)$
Das inverse Element der Multiplikation in $\mathbb{C}$ zu einem $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ mit $z\neq(0,0)$ ist die komplexe Zahl $z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$, denn

$$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$$

2) Alle Gesetze und Rechenregeln für reelle Zahlen, die nur auf den Körperaxiomen beruhen, wie z. B. die Binomischen Formeln, gelten entsprechend auch für kompl. Zahlen. Auch Schreibweisen, wie z. B.: $\frac{1}{z}=z^{-1}$; $z^3=z\cdot z\cdot z$ oder $z_1+z_2+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ werden übernommen.

3) Die Anordnungsaxiome gelten in $\mathbb{C}$ nicht, d.h. $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper. Eine Beziehung $z_1<z_2$ zw. kompl. Zahlen macht (i.A) keinen Sinn.

Beispiele

Für welches $z \in \mathbb{C}$ gilt $(-3,4) \cdot z = (2,3)$?

Die Lösung lautet $z = (2,3) \cdot (-3,4)^{-1} = (2,3) \cdot \left(\frac{-3}{25}, \frac{-4}{25}\right)$

$= \left(\frac{6}{25}, \frac{-17}{25}\right)$

Definition (Imaginäre Einheit, Realteil, Imaginärteil)

i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $(x,0) \in \mathbb{C}$ setzt man kurz $(x,0) = x$.

ii) Die kompl. Zahl $(0,1)$ erhält die spezielle Bezeichnung $(0,1) = j$. Man nennt j die <u>imaginäre Einheit</u>.

iii) Jede komplexe Zahl $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ lässt sich mit i) und ii) in der Form $x + jy$ schreiben, denn

$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) \overset{i)}{=} x + (0,1) \cdot (y,0) \overset{ii)}{=} x + jy$

Die Darstellung einer kompl. Zahl $\boxed{z = x + jy}$ heißt <u>kartesische Darstellung</u>. Mann nennt x den Realteil und y den Imaginärteil von z und schreibt $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

Bemerkungen

1) Realteil $x = \operatorname{Re} z$ und Imaginärteil $y = \operatorname{Im} z$ einer kompl. Zahl sind immer reelle Zahlen $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

2) Für die imaginäre Einheit j gilt $j^2 = -1$ (s. o.) Beachtet man dies, so lässt sich mit kompl. Zahlen formal so zu rechnen wie mit reellen.

Beispiel

Für $z_1 = 2+3j$ und $z_2 = -3+2j$ gilt

$z_1 + z_2 = (2+3j) + (-3+2j) = -1+5j$

$z_1 \cdot z_2 = (2+3j)\cdot(-3+2j) = (-6-9j) + 4j + 6j^2$

$= -6-5j-6 = -12-5j$

$$z_1/z_2 = \frac{(2+3j)}{(-3+2j)} = \frac{(2+3j)(-3-2j)}{(-3+2j)(-3-2j)} = \frac{-6-9j-4j-6j^2}{9-6j+6j-4j^2}$$

$$= \frac{-6-13j+6}{9+4} = -j$$

Definition (kompl. Konjugation)

Ist $z = x+jy$ eine kompl. Zahl mit $x, y \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man $\bar{z} = x - jy$ als konjugiert komplexe Zahl zu z und schreibt $\bar{z} = x - jy$.

Die Abbildung $\begin{matrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{matrix}$ heißt kompl. Konjugation

Satz (Regeln für d. kompl. Konjug.)

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

i) $\overline{(\bar{z})} = z$

ii) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z-\bar{z})$

iii) $z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq 0$

iv) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \ \bar{z}_2$

v) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Beweis

Exemplarisch zeigen wir i) - iii)

i) $\overline{(\bar{z})} = \overline{(x-jy)} = x+jy = z$

ii) $\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(x+jy+x-jy) = \frac{1}{2}(z \cdot \bar{z})$

ii) $\operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2j}(x+jy-x+jy) = \frac{1}{2j}(z \cdot \bar{z})$

iii) $z \cdot \bar{z} = (x+jy)(x-jy) = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

Definition (Betrag einer kompl. Zahl)

Ist $z = x + jy$ eine kompl. Zahl mit $x, y \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man $\sqrt{x^2+y^2}$ als Betrag von z und schreibt $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Bemerkung

Die Def. ist mit dem Begriff des Absolutbetrages reeller Zahlen konsistent, denn für $z = x \in \mathbb{R}$ gilt $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$

Satz (Regeln für den Betrag kompl. Zahlen)

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

i) $|z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0$

ii) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

iii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

iv) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis

Exemplarisch zeigen wir i) - iv)

i) $|-z| = |-x - jy| = |(-x) + j(-y)| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = |z|$

$|\bar{z}| = |x - jy| = |x + j(-y)| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$

$\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

ii) $|\mathrm{Re}\, z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

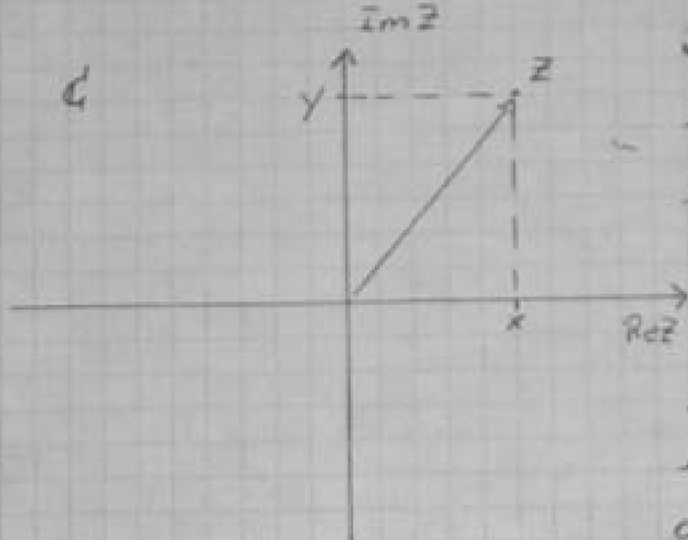
$|\mathrm{Im}\, z| = |y| = \sqrt{y^2} \leq$ " $= |z|$

iii) $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$

iv) $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)}} = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1| |z_2|$

Veranschaulichung der kompl. Zahlen im Gaußschen Zahlenschema

Wir haben kompl. Zahlen ursprüngl. als geordnete Paare reeller Zahlen definiert. Damit können wir sie auch als Punkte in einer Ebene auffassen, die mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist. Diese Ebene heißt Gaußsche Zahlenebene oder komplexe Ebenene.

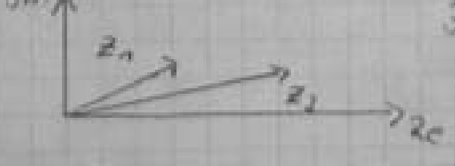


Die Punkte $(x,0) = x$, $x \in \mathbb{R}$ bilden die (mit Re z) reelle Achse, die Punkte $(0,y) = iy$, $y \in \mathbb{R}$, bilden die (Im z) imaginäre Achse. Häufig wird eine kompl. Zahl auch durch einen Pfeil vom Ursprung $(0,0)$ zum entsprechenden Punkt der Zahlenebene veranschaulicht.

Die kompl. Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ entspricht einer Spiegelung der kompl. Zahl z an der reellen Achse.

Der Betrag $|z|$ einer kompl. Zahl z entspricht der Länge des zu z gehörigen Pfeiles.

Die Addition $z_1 + z_2$ einer kompl. Zahl z_2 zu einer kompl. Zahl z_1 entspricht das „Anheften" des Fußpunktes des zu z_2 gehörigen parallelverschobenen Pfeiles



an die Spitze des zu z_1 gehörigen Pfeiles

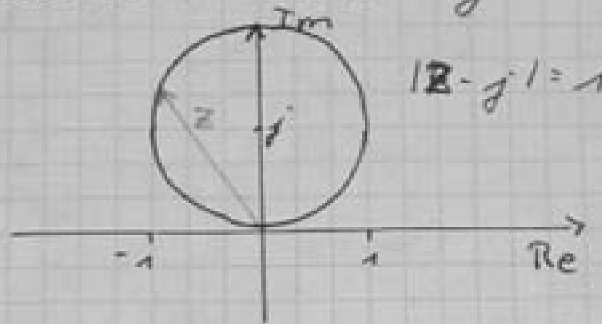
Mathematik

05.01.05 Prof. Dr. Bauer

Beispiele:

1) Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-j| = 1$?

$|z-j|$ ist der Abstand zwischen z und j. Mann sucht daher alle $z \in \mathbb{C}$, die von $j \in \mathbb{C}$ den Abstand 1 haben. Die Gesuchte Menge ist also ein Kreis um j mit Radius 1.



2) Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-j| = \operatorname{Im}(z+j)$?

Wir suchen alle Pkt. $z = x + jy \in \mathbb{C}$ mit

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = y+1 \Leftrightarrow y \geq -1 \wedge x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq -1 \quad x^2 - 2y = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

Die Lösungsmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid z = x + j\frac{1}{4}x^2, x \in \mathbb{R}\}$

5.2 Darstellungsformen kompl. Zahlen

Neben der kart. Darst. $z = x + jy = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z$ einer kompl. Zahl bieten sich je nach Zusammenhang noch zwei weitere Darstellungsformen an. Beide basieren darauf eine kompl. Zahl als Pfeil in der Gaußschen Zahlenebene aufzufassen und durch die Länge r des Pfeiles sowie den Winkel φ zu charakterisieren, den der Pfeil mit der positiven reellen Achse einschließt.

Definition (Trigonometrische Darst.)

Die eindeutige Darst. einer kompl. Zahl $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ in der Form $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, heißt trigonometrische Darst. oder Darst. in Polarkoordinaten von z. Dabei nennt man r den Betrag und φ das Argument von z und man schreibt $r = |z|$, $\varphi = \arg z$

Bemerkungen

1) Die Benennung von r als Betrag ist wegen

$$|z| = |r\cos\varphi + jr\sin\varphi| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}$$
$$= r\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r$$

mit unserem früheren Begriff konsistent.

2) Zwischen Kart. Darst. und trigon. Darst. besteht der Zusammenhang

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$

Umgekehrt lassen sich r und φ auch in der Form $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } y \geq 0, x > 0 \\ \pi/2 & \text{für } y > 0, x = 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0 \\ 3\pi/2 & \text{für } y < 0, x = 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi & \text{für } y < 0, x > 0 \end{cases}$$

durch x und y ausdrücken

Beispiele:

1) $z = 1 + j = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z = -3 = 3(-1 + j\,0) = 3(\cos\pi + j\sin\pi)$

3) $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Für eine weitere Darstellungsformen benötigen wir den folgenden bestimmten Satz

Satz (Eulersche Formel)

Für alle $\varphi \in [0, 2\pi[$ gilt $\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$

Beweis: siehe später

Definition

Die eindeu. Darst einer kompl. Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, in der Form $z = r e^{j\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, heißt exponentielle Darst. von z.

Bemerkungen

1) Die expont. Darst. ergibt sich mit Hilfe der Eulerschen Formel unmittelbar aus der trigono. Darst.

2) Die exp. Darst. liefert auf sehr elegante Weise Rechenregeln für kompl. Zahlen. Sind $z = r e^{j\varphi}$, $z_i = r_i e^{j\varphi_i}$ $(i = 1, 2)$ kompl. Zahlen, so gilt:

i) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$

iii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$ für $r_2 \neq 0$

iii) $z^n = r^n e^{jn\varphi}$, d.h. kompl. Zahlen werden potenziert indem man ihre Beträge potenziert und ihre Argumente mit dem Exp. multipliziert. $(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi$

Um zu gewährleisten, dass in i) das Argument von $z_1 \cdot z_2$ wieder in $[0, 2\pi[$ liegt, muss $\varphi_1 + \varphi_2$ im Falle $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 2\pi$ durch den Rest der Division $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi}$ ersetzt werden.
$\arg z_1 \cdot z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ ist also „modulo 2π" zu verstehen. Entsprechend bei ii) und iii).

3) Das Potenzieren kann gegenüber 2) iii) auf allgemein Exp. $\omega \in \mathbb{C}$ verallgemein. werden:

$$z^\omega = (re^{j\varphi})^\omega = r^\omega e^{j\varphi\omega} = r^{\mathrm{Re}\,\omega} r^{j\mathrm{Im}\,\omega} e^{-\varphi \mathrm{Im}\,\omega} e^{j\varphi \mathrm{Re}\,\omega}$$
$$= \left(r^{\mathrm{Re}\,\omega} e^{-\varphi \mathrm{Im}\,\omega}\right) e^{j(\ln r \,\mathrm{Im}\,\omega + \varphi \mathrm{Re}\,\omega)}, \text{ d.h.}$$

$|z^\omega| = r^{\mathrm{Re}\,\omega} e^{-\varphi \mathrm{Im}\,\omega}$, $\arg z^\omega = \ln r \,\mathrm{Im}\,\omega + \varphi \mathrm{Re}\,\omega$ modulo 2π

Es gelten die üblichen Potenzgesetze, z.B. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

<u>Beispiele</u>

1) $1 + j \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$

2) $(1+j)^j = \left(\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^j = \sqrt{2}^{\,j} e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{j\ln\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}}$, d.h
$|(1+j)^j| = e^{-\frac{\pi}{4}}$ und $\arg (1+j)^j = \ln\sqrt{2}$

In obiger Bemerkung ~~zu~~ 2) fehlt noch eine Rechenregel für das Wurzelziehen. Im komplexen ist das Wurzelziehen aus negativen Zahlen erlaubt, und die Gl. $z^n = z_0$ zu gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, lässt unter Umständen mehrere Lösungen zu $z \in \mathbb{C}$.

Definition (nte Einheitswurzel)

Die Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ hat genau n-Lösungen, nämlich

$$z = \cos k\frac{2\pi}{n} + j \sin k \frac{2\pi}{n} = e^{jk\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Sie heißen nte Einheitswurzeln und werden als Gesamtheit symbolisch mit $\sqrt[n]{1}$ bezeichnet.

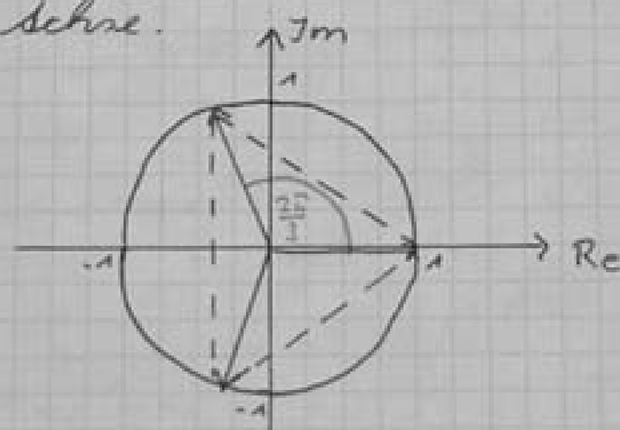
Bemerkungen

1) Für $z = e^{jk\frac{2\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ gilt in der Tat

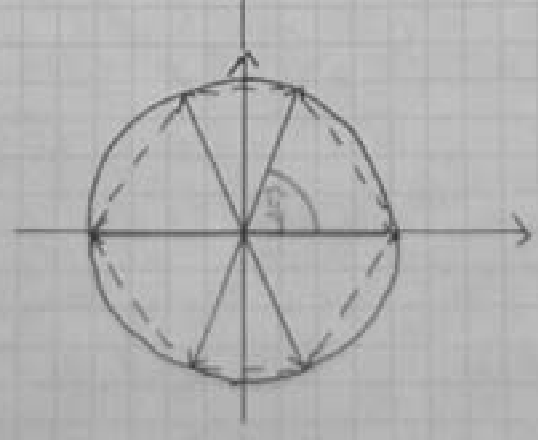
$$z^n = \left(e^{jk\frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{jk2\pi} = \cos 2\pi k + j \sin 2\pi k = 1$$

2) Die n-te Einheitswurzeln liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Einheitskreis um den Ursprung und sind Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks symmetrisch zur reellen Achse.

$z^3 = 1$



$z^6 = 1$



3) Ist $z_0 = r_0 e^{j\varphi_0} \in \mathbb{C}$ gegeben, so lassen sich die Lösungen der Gl. $z^n = z_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ wegen

$$(re^{j\varphi})^n = r_0 e^{j\varphi_0} \iff \frac{r^n e^{jn\varphi}}{r_0 e^{j\varphi_0}} = 1 \iff \left(\frac{r}{\sqrt[n]{r_0}}\right)^n e^{jn(\varphi - \frac{\varphi_0}{n})} = 1$$

$$\iff \left(\frac{r}{\sqrt[n]{r_0}} e^{j(\varphi - \frac{\varphi_0}{n})}\right)^n = 1$$

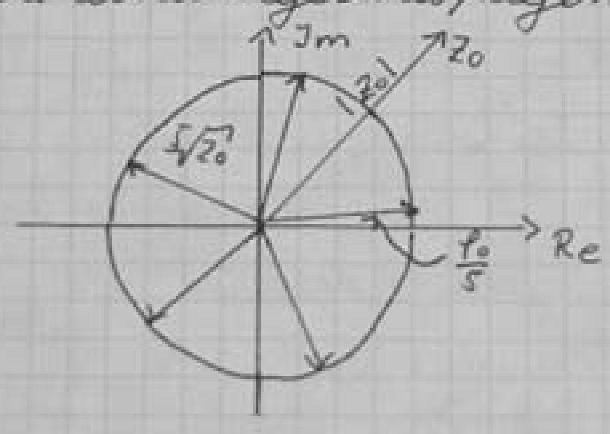
$$\iff \frac{r}{\sqrt[n]{r_0}} e^{j(\varphi - \frac{\varphi_0}{n})} = e^{jk\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

auf die n-ten Einheitswurzeln zurückzuführen. Die Gleichung hat genau die n Lösungen

$$z = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + j\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r_0}\, e^{j\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}}$$

$(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Sie heißen n-te Wurzeln von z_0 und werden als Gesamtheit symbolisch mit $\sqrt[n]{z_0}$ bezeichnet. Sie liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r_0}$ um den Ursprung und sind Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.

$z^5 = z_0$



Beispiele

1) Suche alle Lösungen von $z^3 = j$. Es ist $z_0 = j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$, d.h. $r_0 = 1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Die dritten Wurzeln sind somit

$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$

$z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$

$z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2} = -j$

2) Suche alle Werte für $\sqrt[4]{-81}$. Es gilt $z_0 = -81 = 81(\cos\pi + j\sin\pi)$, d.h. $r_0 = 81$, $\varphi_0 = \pi$. Die vier vierten Wurzeln von -81 sind somit

$z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1+j)$, $z_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+j)$

$z_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1-j)$, $z_4 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1-j)$

<u>Bemerkungen</u>

1) Durch das Wurzelziehen aus negativen Zahlen im komplexen werden Gleichungen der Form $x^4+1=0$ lösbar. Wenn wir als Variable für ganzratio. Funkt. (Polynome) komplexe Zahlen zulassen, also $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dann haben wir reichhaltigere Lösungsmengen: Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass im kompl. jedes Polynom mind. eine Nullst. besitzt und vollst. in Linearfaktoren zerfällt.

2) Für eine Verallgemeinerung unseres bisherigen Funktionsbegriffs auf Fkt. der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lassen sie bisherige Begrifflichkeiten wie z.B. die Stetigkeit einfach übernehmen.

z.B. $f(t) = t^2 e^{jt}$ oder $f(z) = \sin z$ sind stetig komplexwertig.

11.01.05 **6. Lineare Algebra** Prof. Dr. Bauer

Wir führen nun den Umgang mit mathematischen und physikalischen Größen ein, die nicht allein durch eine (reelle o. kompl.) Zahl, sondern daneben auch durch eine Richtung und eine Orientierung charakterisiert sind. Beispiele sind Kräfte, Geschw. und elektro-magn. Feldstärken. Größen dieser Art heißen Vektoren.

6.1 Vektoren

6.1.1 Abstrakte Vektorräume

Definition (Vektorraum)

Es sei $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$. Ein Vektorraum (oder auch k-Vektorraum) ist eine Menge V mit samt einer Verknüpfung „+" (Addition)

$+: V \times V \to V$ und einer Verknüpfung „·" (Skalarmultiplikation)

$$(v, w) \mapsto v + w$$

$$\cdot : k \times V \to V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

so dass folgende Axiome gelten:

(A1) Für alle $v, w, u \in V$, gilt $v + (w + u) = (v + w) + u$

(A2) Es gibt in V neutrales Element der Addition, bezeichnet mit 0 („Null") mit der Eigenschaft $v + 0 = v$ für alle $v \in V$.

(A3) Zu jedem $v \in V$ ex. in V ein inverses Element der Addition bzw. multipl. $(-v)$ mit der Eigensch. $v + (-v) = 0$

(A4) Für alle $v, w \in V$ gilt $w + v = v + w$

(S1) Für alle $\lambda, \mu \in k$, $v \in V$ gilt $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

(S2) Für alle $\lambda, \mu \in k$, $v \in V$ gilt $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda (\mu \cdot v)$

(S3) Für alle $\lambda \in k$, $v, w \in V$ gilt $\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$

(S4) Für alle $v \in V$ gilt $1 \cdot v = v$

Sprechweisen und Notationen

Die Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren. Das neutrale Element 0 der Add. in V heißt Nullvektor, das zu einem $v \in V$ inverse Element $(-v)$ der zu v negative Vektor. Die Elemente des Körpers k werden zur Unterscheidung als Skalare bezeichnet.

Statt $\lambda \cdot v$ mit $\lambda \in k, v \in V$ schreibt man auch nur λv. Die Konvention, dass die Addition in V und k schwächer „bindet" als die Skalarmulti., erspart Klammern, z. B. $(\lambda \cdot v) + (\lambda w) = \lambda v + \lambda w$

Bemerkung

Die Ax (A1) - (A4) sind formal dieselben wie für die reellen Zahlen (vgl. 2.1.1) und die kompl. Zahlen (vgl. 5.1)

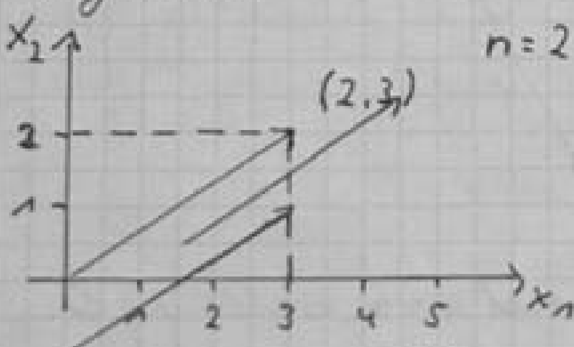
Beispiele

1) Standardbeispiel für Vektorräume ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, die Menge aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen, in der Addition und Skalarmultipl. durch

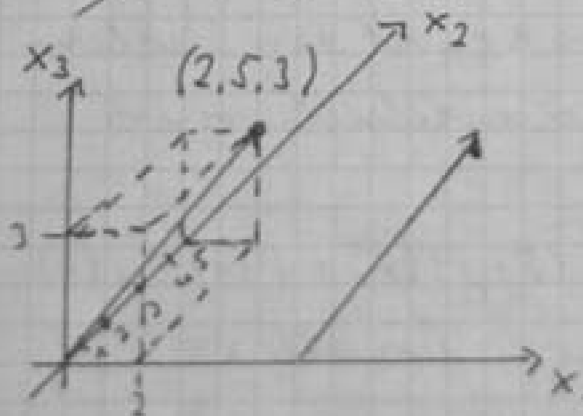
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, y_n + x_n)$$

$$\lambda (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$ erklärt sind

Für $n = 2$ bzw $n = 3$ lässt sich ein Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ als Punkt in der Ebene bzw. im Raum veranschaulichen, mit x_i $(i = 1, \ldots, n)$ als kartesisch Koordinatensystem

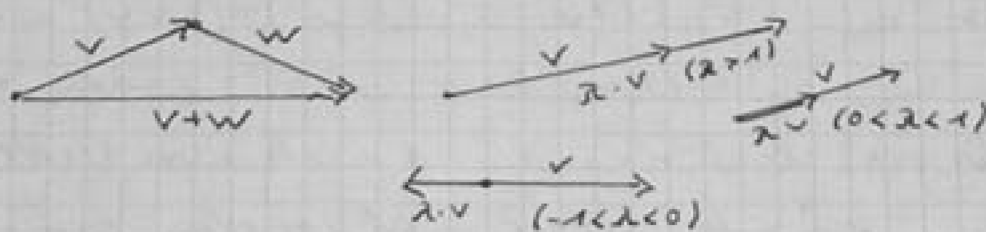


$n = 2$

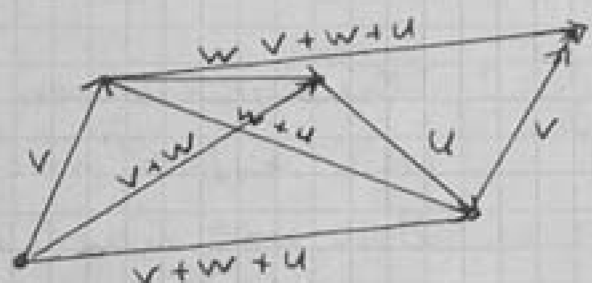


Häufig wird ein Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ bzw. $n = 3$ auch durch einen Pfeil vom Ursprung des Koordin. zum Entsprechenden Punkt in der Ebene bzw. Raum und die Gesamtheit aller hierzu parallelgleichen Pfeile veranschaulicht.

Gezeichnet werden jeweils nur ein oder mehrere Vektoren dieser Menge an parallelgleichen Pfeilen.
Die Addition v+w zweier Vektoren entspricht das „Anheften" des Fußpunktes eines zu w gehörigen Pfeiles an die Spitze eines zu v gehörigen Pfeiles.
Der Skalarmult. $\lambda \cdot v$ eines Vektors mit einem Skalar entspricht das Strecken bzw Stauchen der Länge eines zu v gehörigen Pfeiles um den Faktor λ.



Auf diese Weise lassen sich die Vektorraumaxiome gut veranschaulichen
z. B.



2) Es sei D eine Menge und $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$.
Die Menge $V = \{ f \mid f: D \to k \}$ ist ein Vektorraum, wenn man die Addition in V durch

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{mit } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f,g) \mapsto f+g \qquad \text{für alle } x \in D$$

und die Skalaremultiplikation durch

$\cdot : k \times V \to V$ mit $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

$(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ für alle $x \in D$

definiert.

Definition (Linearkombination und lineare Unabhängigkeit)

Es seien V ein k-Vektorraum und $v_1, v_2, \dots, v_m$ $(m \in \mathbb{N})$ endlich viele Elemente von V

i) Ein $v \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_m$, wenn es Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gibt mit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$

ii) Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt:
Sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$ und ist $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ so folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$

Mathematik

12.01.05 Prof. Dr. Bauer

Bemerkungen

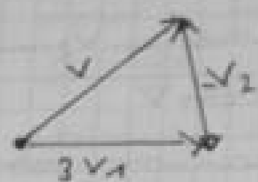
1) Die m Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$ sind genau dann lin. unabh., wenn sich der Nullvektor nur auf eine einzige Weise aus $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear kombinieren lässt,
$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m$, nämlich nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

2) Die m Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$ sind genau dann lin. unabh. wenn keiner dieser Vektoren eine Linearkom. der übrigen ist

Beispiele

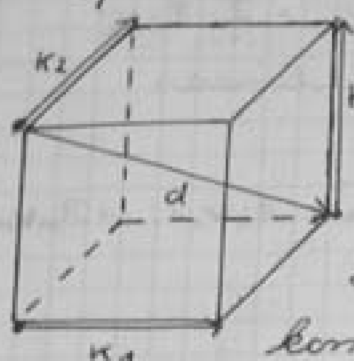
1) Gegeben seien die ~~Vector~~ Vektoren v, v_1 und v_2 im $\mathbb{R}^2$. v lässt sich als Linearkomb. von v_1 und v_2 darstellen,

nämlich $v = 3v_1 - v_2$



Damit sind v, v_1 und v_2 linear abhängig: $0 = -v + 3v_1 - v_2$

2)



Versieht man die Kanten eines Würfels im $\mathbb{R}^3$ mit einer Orientierung, d.h. versteht man sie als Pfeile, so lässt sich jede Hauptdiagonale als Linearkombination von dreien dieser Kantenvektoren darstellen:

$$d = k_1 + k_2 - k_3$$

Die Kantenvektoren k_1, k_2, k_3 sind linear unabhängig.

3) Im $\mathbb{R}^3$ soll der Vektor $v = (10,-4,-10)$ als Linearkomb. der Vektoren $v_1 = (1,-2,3)$, $v_2 = (-3,4,2)$ und $v_3 = (1,2,-3)$ dargestellt werden. Es sind also Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$(10,-4,-10) = \lambda_1(1,-2,3) + \lambda_2(-3,4,2) + \lambda_3(1,2,-3)$$

$$(10,-4,-10) = \cancel{\lambda_1 1 - \lambda_1 2 + \lambda_1 3 +}$$

$$(\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3, -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3)$$

zu bestimmen. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem (5.6.4) mit der Lösung $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

4) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \{ p \mid p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Polynom, grad $p \leq n \}$

versehen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation für Funktionen. räume (vgl. Bsp 2 oben), ist V ein Vektorraum.

Ist beispielsweise $n = 4$, so sind die Vektoren $v_1 : x \mapsto x^2$, $v_2 : x \mapsto x^3$ und $v : x \mapsto 7x^3 - 4x^2$ linear abhängig, denn $v = 7v_2 - 4v_1$

<u>Definition (Basis und Dimension)</u>

Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ($n \in \mathbb{N}$) endl. viele Elemente von V. sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig und lässt sich jeder beliebige Vektor $v \in V$ als Linearkomb. von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen, so bilden $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Die Zahl n heißt dann die Dimension von V und man schreibt dann $V = n$.

<u>Bemerkungen</u>

1) Man sagt, dass Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ den Raum V erzeugen oder aufspannen.

2) Besitzt ein Vektorraum V keine Basis (im obigen Sinne), so sagt man, V sei unendlich Dimensional und schreibt $V = \infty$.

Beispiele

1) Drei Kantenvektoren eines Würfels im $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass sie sich zu einer Hauptdiagonalen des Würfels linear kombinieren lassen (vgl. k_1, k_2, k_3 im Beispiel oben) bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

2) Die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n \in K^n$ mit $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$, $e_i = (0,0,\ldots,\underset{i\text{te Stelle}}{1},\ldots,0,0)$ $(1 \leq i \leq n)$ bilden eine Basis des K^n. Sie heißt Kanonische Einheitsbasis des K^n. Folglich ist $\dim K^n = n$. Insbesondere bilden $(1,0)$ und $(0,1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ (und des $\mathbb{C}^2$) sowie $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (und des $\mathbb{C}^3$).

3) Der Vektorraum $V = \{p \mid p: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist Polynom, } \operatorname{grad} p \leq 2\}$ hat die Basis $v_i: x \mapsto x^i$ $(i = 0,1,2)$

i) die v_i sind linear unabh., denn aus

$\lambda_0 \cdot v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ bzw.

$\lambda_0 + \lambda_1 \cancel{x} + \lambda_2 x^2 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

folgt $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ii) Jedes Polynom $p \in V$ lässt sich als Linearkombination $p = \lambda_2 v_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_0 v_0$ bzw. $p(x) = \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ darstellen. Folglich ist $\dim V = 3$

4) $V = \{p \mid p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Polynom$\}$ ist ein unendlich dimensionierter Vektorraum.

Definition (Skalarprodukt)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt (oder inneres Produkt) auf V ist eine Abbildung

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) Linearität in der ersten Variable

$\langle v_1 + v_2 , w \rangle = \langle v_1 , w \rangle + \langle v_2 , w \rangle$ und

$\langle \lambda v , w \rangle = \lambda \langle v , w \rangle$

ii) Symetrie

$\langle v , w \rangle = \langle w , v \rangle$ für alle $v, w \in V$

iii) positive Definitheit

$\langle v , v \rangle > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$

Bemerkungen

1) Die Eigensch. i) und ii) zusammen implizieren, dass ein Skalarprodukt auch linear in der zweiten Variable ist.

2) Ein Skalarprodukt lässt sich auch für $\mathbb{C}$-Vektorräume V def., $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

Dann muss es in ii) $\langle v , w \rangle = \overline{\langle w , v \rangle}$ heißen und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ist in der zweiten Variable nicht mehr linear („sonder nur noch semi-linear")

Beispiele

1) Das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^m$ ist durch $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_m)\,(y_1, \dots, y_m) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$$

$= \sum_{i}^{m} x_i y_i$ gegeben.

z.B. ist

$\langle (1,2), (-2,1) \rangle = 1(-2) + 2 \cdot 1 = 0$

$\langle (1,2,3), (0,4,7) \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 29$

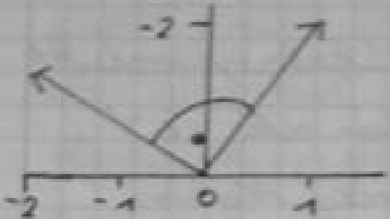
2) Auf $V = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ ist durch $\langle f, g \rangle = f(0) \cdot g(0)$ kein Skalarprodukt gegeben. Es gilt zwar die Linearität in der ersten Variable und die Symmetrie, aber die positive Definitheit ist verletzt. Für $f(x) = x$ gilt $\langle f, f \rangle = 0$ trotz $f \neq 0$

Definition (Orthogonalität, Orthogonalsystem, Orthogonalbasis)

Sei V ein k-Vektorraum mit Skalarprod. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen orthogonal (oder senkrecht zueinander), wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Sind m Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ paarweise orthogonal, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ $(1 \le i, j \le m)$, so sagt man, sie bilden ein Orthogonalsystem. Ist eine Basis von einem Orthogonalsystem, so heißt sie eine Orthogonalbasis.

Beispiele

1) Die Vektoren $(1,2)$ und $(-2,1)$ in $\mathbb{R}^2$ sind (mit dem Standard Skalarpr.) orthogonal



2) Die kanonische Einheitsbasis des k^n ist eine Orthogonalbasis. Z.B. ist im $\mathbb{R}^3$

$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = 1\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle = 1\cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$\langle e_2, e_3 \rangle = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle = 0\cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Definition (Norm)

Es sei V ein k-Vektorraum. Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ für alle $v \in V$, $\lambda \in k$

ii) es gilt die Dreiecksungleichung
$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$

iii) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

Beispiele

1) Die Standard-Norm in k^n ist für $k = \mathbb{R}$ durch

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

und $k = \mathbb{C}$ durch

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$$
$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \sqrt{z_1 \cdot \overline{z}_1 + \dots + z_n \overline{z}_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z}_i}$$

gegeben z.B. ist

$\|(3,1,-\sqrt{6})\| = \sqrt{9+1+6} = 4$

$\|(j,1+j,2)\| = \sqrt{j(-j)+(1+j)(1-j)+4} = \sqrt{7}$

2) In einem k-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist durch $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ für alle $v \in V$ eine Norm gegeben. Zwischen der Norm und dem Skalarprodukt steht die Cauchy-Schwatzsche Ungleichung:

$|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Die Standard-Norm k^n geht genau in dieser Weise aus dem Skalarprodukt in k^n hervor,

z.B. $\|(1,2)\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{\langle (1,2)(1,2) \rangle}$

Mathematik

18.01.05 Prof. Dr. Bauer

Sprechweisen und Notationen

Mann die Norm $|\underline{v}|$ häufig auch als Betrag oder als Länge von $\underline{v}$

Zwei Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, heißen parallel oder kolinear, wenn sie linear abhä. sind.

Ein Vektor $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$ heißt Einheitsvektor. Ist $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor mit $\underline{a} \neq \underline{0}$, so heißt der Vektor $\frac{1}{|a|}\underline{a}$ der zu $\underline{a}$ gehörige normierte Vektor. Er ist ein Einheitsvektor.

Für Vektoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ist neben $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch die Hochkantschreibweise

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Definition (Winkel zw. Vektoren)

Es sei $V = \mathbb{R}^2$ o. $V = \mathbb{R}^3$ und $\underline{a}, \underline{b} \in V$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.
Die eindeu. best.
Zahl $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\underline{a} \cdot \underline{b} = |a| \cdot |b| \cos \varphi$ heißt der Winkel zw. den Vektoren $\underline{a}$ u. $\underline{b}$

Bemerkungen

1. Im Falle $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ gilt $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, d.h. $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind orthogonal. Damit entspricht der abstrakte Begriff der Orthogonalität in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ unserem ansch. Verst. zw. senkrechten Vektoren d.h. zwei Vektoren die einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ (bzw. $90°$) einschließen.
2. Wegen $|\cos \measuredangle| \leq 1$ folgt aus $\underline{a} \cdot \underline{b} = |a| \cdot |b| \cos \varphi$ die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung. $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$

Beispiel:

Die Vekt. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ senkr. zueinan., $\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 12 - 12 + 0 = 0$

Definition (Vektorprodukt)

Für $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, ist das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt), (äußeres Produkt) von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ def. durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

1) Das Kreuzprodukt $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$ zw. Vektor. $\underline{a}$ & $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ ist seinerseits wieder ein Vektor.

2) (Anschaulich Bed. das Kreuzp.)

i) Bezeichnet $\varphi \in [0, \pi]$ den Winkel zw. den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^3$, so gilt $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \varphi$ Das bedeutet: der Betrag van $\underline{a} \times \underline{b}$ ist der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelograms sind $\underline{a}$ und $\underline{b}$ parallel. d.h. $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ bzw. $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$, so ist $\underline{a} \times \underline{b} = 0$

ii) Der Vektor. $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht auf a und senkrecht auf b, denn $(a \times b) \cdot \underline{a} = (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{b} = \underline{o}$

3) (Rechenregeln für das Kreuzprodukt)

i) $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ für alle $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, d.h. das Kreuzpr. ist nicht kommutativ

ii) Das Kreuzpr. ist nicht assoziativ, d.h es gilt $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}$

iii) $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ für alle $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, d.h. das Kreuzpr. ist distributiv.

iv) $(\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \lambda (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$ für alle $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Beispiele

1) Für die kanonischen Einheitsbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$,

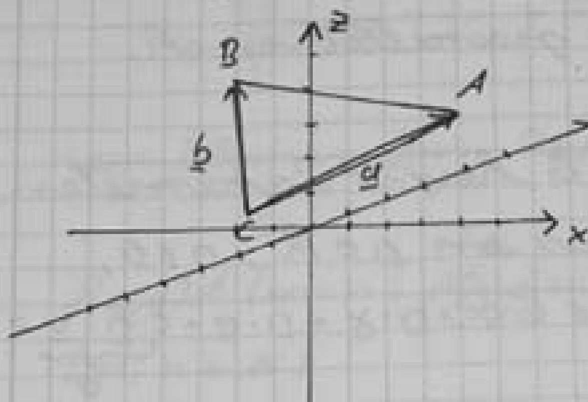
$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ gilt

$\underline{e}_1 \times \underline{e}_1 = \underline{0}$ $\quad \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$ $\quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_3$

$\underline{e}_2 \times \underline{e}_2 = \underline{0}$ $\quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$ $\quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_1$

$\underline{e}_3 \times \underline{e}_3 \ \underline{0}$ $\quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$ $\quad \underline{e}_1 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_2$

2) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC im Raum mit den Eckpunkten $A = (1,2,3)$; $B = (-2,0,4)$; $C = (-1,-1,2)$



Die Dreiecksfläche ist die halbe Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren

$\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und

$\underline{b} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Also

$$F = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{25+25+25} = \frac{1}{2}\sqrt{75}$$

Definition (Spatprodukt)

Das Spatprodukt $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$ dreier Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ ist die Zahl $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$

Bemerkung

Der Betrag $|[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]|$ des Spatproduktes von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ ist das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelepipeds

Wir erwähnen zwei weitere Anwendungen des Vektorbegriffs in R^n, nämlich die Beschreibung von Geraden und Ebenen.

Definition (Gerade im $\mathbb{R}^n$)

Es seien $\underline{a}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $v \neq 0$. Die Menge $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} = \underline{a} + t\underline{v},\ t \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt $\underline{a}$ und Richtungsvektor $\underline{v}$.

Bemerkungen

1) Der Vektor $\underline{a}$ ist hier als fester Punkt im kart. Koordinatensystem des $\mathbb{R}^n$ zu verstehen, der keine parallelversch. zu lässt.

2) Die obige Darst. für G heißt Parameterdarst. Für $n = 2$ gibt es ein $\underline{n} \in \mathbb{R}^2$, $n \neq 0$, mit $\underline{n} \cdot \underline{v} = \underline{0}$ und $\underline{x} \in G \Leftrightarrow \underline{n} \cdot \underline{x} = \underline{n} \cdot \underline{a} + t \underbrace{\underline{n} \cdot \underline{v}}_{0} = \underline{n} \cdot \underline{a}$

$\Leftrightarrow \cancel{\underline{n} \cdot \underline{x} - \underline{n} \cdot \underline{a}}\ \underline{n}(\underline{x} - \underline{a}) = 0$ und folglich $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{n}(\underline{x} - \underline{a}) = 0\}$. Diese Darst. heißt Punkt-Normalen-Form

Definition (Ebene im $\mathbb{R}^n$)

Es sei $\underline{a}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$. Zudem seien $\underline{v}$ und $\underline{w}$ linear unabh. Die Menge $E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} = \underline{a} + s\underline{v} + t\underline{w},\ s, t \in \mathbb{R}\}$ heißt Ebene im $\mathbb{R}^n$

Bemerkung

Für $n=3$ gibt es ein $n \in \mathbb{R}^3$ (z.B. $\underline{n} = \underline{v} \times \underline{w}$), $\underline{n} \neq \underline{0}$, mit $\underline{n} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{n} \cdot \underline{w} = 0$ und $E = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{n} \cdot (\underline{x} - \underline{a}) = 0 \}$.

6.2 Matrizen

Matrizen sind für das lösen linearer Gleichungssysteme nützliche Zahlenschemata.

Definition (Matrix)

Ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von Elementen $a_{kl} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$
$l = 1, \dots, n$

heißt $(m \times n)$ Matrix oder einfach Matrix $(m, n \in \mathbb{N})$

Schreibweise und Notationen

Die Elemente $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ bilden die k-te Zeile, die Elemente $a_{1l}, \dots, a_{ml}$ bilden die l-te Spalte der $(m \times n)$-Matrix A. Dabei heißt k Zeilenindex und l Spaltenindex

Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen wird mit $M(m \times n)$ bezeichnet. Für $A \in M(m \times n)$ schreibt man auch $A = (a_{kl})$. Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n)$, $A = (a_{kl})$, $B = (b_{kl})$ heißen gleich, wenn

$a_{kl} = b_{kl}$ für alle $k = 1, \dots, m$ und $l = 1, \dots, n$ und man schreibt dann $A = B$.

Matrizen aus $M(1 \times n) = \mathbb{R}^n$ heißen Zeilenmatrizen oder Zeilenvektoren.

Matrizen aus $M(m \times 1) = \mathbb{R}^n$ heißen Spaltenmatrizen oder Spaltenvektoren.

Fortsetzung:

Matrizen $A \in M(m \times n)$ heißen quadratisch. Ihre Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a$ bilden die Hauptdiagonale und heißen Diagonalelemente. Ihre Elemente $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-1}, \dots, a_{n1}$ bilden die Nebendiagonale.

Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n)$ heißt symmetrisch, wenn $a_{kl} = a_{lk}$ für alle $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ist, schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch, wenn $a_{kl} = -a_{lk}$ für alle $k, l \in \{1, \dots, n\}$, obere bzw. untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{kl} = 0$ $k > l$ bzw. $k < l$ ist, und Diagonalmatrix, wenn $a_{kl} = 0$ für $k \neq l$ ist

Die Matrix $E = (\delta_{kl}) \in M(m \times n)$ mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$ heißt n-reihige Einheitsmatri

Die Matrix $N = (a_{kl}) \in M(m \times n)$ mit $a_{kl} = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$ heißt Nullmatrix

Ist $A=(a_{k\ell})\in M(m\times n)$, so heißt die Matrix $B=(b_{k\ell})\in M(n\times m)$ mit $b_{k\ell}=a_{\ell k}$ die zu A transponierte Matrix und man schreibt $B=A^t$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\in M(3\times 2),\ (1,2,3)\in M(1\times 3)=\mathbb{R}^3$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist quadratisch und obere Dreiecksmatrix, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch, $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 9 \\ 7 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ist schiefsymmetrisch

$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ ist die 4-reihige Einheitsmatrix: diagonal, symmetrisch.

<u>Bemerkungen:</u>

1) Für jede Matrix A gilt $(A^t)^t=A$
2) Für eine symmetrische Matrix A gilt $A^t=A$
3) Die Diagonalelemente einer schiefsymmetrischen Matrix sind alle gleich Null.

<u>Satz (Vektorraumeigenschaft von $M(m\times n)$)</u>

Die Menge $M(m\times n)$ ist ein Vektorraum, wenn man in $M(m\times n)$ durch

$+: M(m\times n)\times M(m\times n)\to M(m\times n)$

$(A,B)=((a_{k\ell}),(b_{k\ell}))\to A+B=(a_{k\ell}+b_{k\ell})$ eine Addition und durch

$\cdot : \mathbb{R} \times M(m \times n)$

$(\lambda, A) =$ ~~[illegible]~~ $(\lambda, (a_{kl})) \mapsto \lambda A \; (\lambda a_{kl})$ eine

Skalarmultiplikation definiert

Bemerkungen

Damit gelten in $M(m \times n)$ die Axiome (A1) - (A4) und (S1) - (S4) als Rechenregeln

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 34 \\ 51 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition (Matrizenmultiplikation)

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times l)$ und $B = (b_{jk}) \in M(l \times n)$

Das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen A und B ist die $(m \times n)$ - Matrix $P = (p_{ik})$ mit

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Bemerkungen

1) Für die Bildung des Matrizenprod. $A \cdot B$ muss die Zeilenzahl von B gleich der Spaltenzahl von A sein.

2) Wegen $p_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{il} b_{lk}$ ist das Element p_{ik} von $P = A \cdot B$ gleich dem Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem k-ten Spaltenvektor von B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1l} \\ a_{i1} \dots a_{il} \\ a_{m1} \dots a_{ml} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{l1} & b_{lk} & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & & p_{1n} \\ & p_{ik} & \\ p_{m1} & & p_{mn} \end{pmatrix}$$

3) Für $A \in M(m\times n)$ und $B \in M(n\times m)$ ist $A\cdot B \in M(m\times m)$ und $B\cdot A \in M(n\times n)$, d.h. $AB \neq BA$ für $m \neq n$. Aber auch im Falle quadr. Matrizen, $A, B \in M(n\times n)$ gilt i.A. <u>nicht</u> $A\cdot B = B\cdot A$, siehe unten.

<u>Beispiele:</u>

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{-2 \quad 3} \\ 6 \quad -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \neq A\cdot B$$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \end{pmatrix}$

3) Für $A = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 4&0&0 \end{pmatrix}$ gilt $A\cdot A = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 4&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 4&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 4&0&0 \end{pmatrix} = A$

(obwohl $A \neq E$ und $A \neq N$) (Nullmatrix $= N$)

4) Für $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$ gilt $G\cdot G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(obwohl $G \neq N$)

<u>Satz (Rechenregeln für die Multiplikation)</u>

Sei $m, m', m'', m''' \in \mathbb{N}$, $E = (\delta_{k\ell}) \in M(m\times m)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Die Matrixmult. ist nicht kommutativ

b) Für alle $A \in M(m\times m')$, $C, B \in M(m'\times m'')$, $D \in M(m''\times m''')$ gilt $A\cdot(B+C) = AB + AC$ $\quad (B+C)D = BD + CD$ (Distributivgesetz)

c) Für alle $A \in M(m\times m')$, $B \in M(m'\times m'')$, $C \in M(m''\times m''')$ gilt $A\cdot(B\cdot C) = (AB)C$ (Assoziativgesetz)

d) Für alle $A \in M(m \times m')$, $B \in M(m' \times m'')$ gilt

$E \cdot A = A \qquad B \cdot E = B$

Für alle $A \in M(m \times m')$, $B \in M(m' \times m'')$ gilt

e) $\lambda (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

Klausur f) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Bemerkungen

1) Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, werden bei der Matrixmultiplikation Punkte und Klammern weggelassen, also $A \cdot B = AB$, $A(BC) = ABC$, $(\lambda A)B = \lambda AB$ usw.
2) Für $A \cdot A$, $A \cdot A \cdot A$ usw. schreibt man A^2, A^3 usw.

Definition (Inverse Matrix)

Die Matrix A sei quadratisch, $A \in M(n \times n)$, $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $B \in M(n \times n)$ heißt inverse Matrix (oder kurz Inverse) von A, wenn gilt: $AB = BA = E$

Man schreibt dann $B = A^{-1}$. Beschreibt A eine inverse Matrix, so heißt A regulär andernfalls singulär

Bemerkungen

1) Ist A regulär, so wegen $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$ auch A^{-1}
2) Die Inverse B einer Matrix A ist, falls sie existiert, eindeutig. Denn ist C eine weitere Inverse von A, so folgt

$B = B \cdot E = B(AC) = (BA)C = EC = C$

Mathematik

19.01.05 Prof. Dr. Bauer

Beispiele

1) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ist regulär, ihre inverse lautet $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist singulär. Wäre $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine inverse von A, so müsste gelten: $E = A \cdot B$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$0 = a = 1$, $0 = b = 1$, also ein Widerspruch.

Satz (Rechenregeln für die inverse Matrix)

Die Matrizen $A, B \in M(n \times m)$ seien regulär, $n \in \mathbb{N}$.
Dann ex. alle folgenden Matrizen und es gilt:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

c) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$

d) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

e) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beweis:

Exemplarisch zeigen wir a) und b)

a) $A \cdot A^{-1} = E$, $A^{-1} \cdot A = E \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$

b) Aus $A \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^t = E^t = E$

$\Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1})^t} \cdot A^t = E$

$A^{-1} \cdot A = E \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)^t = E^t = E \Leftrightarrow A^t \cdot \underbrace{(A^{-1})^t}_{(A^t)^{-1}} = E$

folgt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Definition (Determinante) (2×2 Matrizen)

Es sei $A = (a_{ik}) \in M(2\times 2)$. Dann heißt die Zahl $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die Determinante von A. Man schreibt

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ist $\det A = |A| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= -20 + 6 = -14$$

Wir wollen den Begriff der Determinante auf allgemeine $(n\times n)$ Matrizen erweitern und dabei möglichst auf den Fall 2×2 zurückführen. Sei A zunächst eine 3×3-Matrix. Wir versehen jede Elementposition in A nach folgendem Schema mit einem Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Matrix $\left((-1)^{i+k}\right) \in M(3\times 3)$

Als Unterdeterminante U_{ik} von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ bezeichnen wir die Determinante jener (2×2)-Untermatrix von A, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. z. B.

$$|U_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

Sei nun a_{ik} ein beliebiges Element von A.
Als Adjunkte von a_{ik} bezeichnet man das Produkt der zugehörigen Unterdeterminanten $|U_{ik}|$ mit dem entspr. Wert $(-1)^{i+k}$ aus dem obigen Vorzeichenschema: $(-1)^{i+k}|U_{ik}|$. Summiert man entlang der ersten Zeile von A die Elemente von A, jeweils multipliziert mit ihrer Adjunkte, so ergibt sich

$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Rechnet man dies aus, so stellt man fest, dass sich dieselbe Zahl auch dann ergibt, wenn man $a_{ik}(-1)^{i+k}|U_{ik}|$ entlang einer beliebigen anderen Zeile oder Spalte summiert hätte! Es liegt nahe, diese Zahl daher als Determinante der (3×3)-Matrix A zu bezeichnen.
Das geschilderte Verfahren lässt sich rekusiv auf beliebige $(n\times n)$-Matrizen verallgemeinerm.

<u>Satz und Definition (Laplacescher Entwickl.)</u>

Es sei $A = (a_{ik}) \in M(n\times n)$ und U_{ik} jeweils die $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrix von A, die durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Dann ist die Summe

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|U_{ik}|$ unabhängig von

$i=1,\dots,n$, die Summe
$\sum_{i=1}^{n}(a_{ik})(-1)^{i+k}|U_{ik}|$ unabhängig von $k=1,\dots,n$,
und beide haben denselben Wert. Dieser heißt die Determinante von A und wird mit $|A|$ oder $\det A$ bezeichnet. Also:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{n+k}|U_{ik}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{n+k}|U_{ik}|$$

__Bemerkungen__

1) Die Determinante ist <u>nur</u> für quadratische Matrizen definiert.
2) Die Summen im Satz heißen Entwicklung von $|A|$ nach der i-ten Zeile bzw. k-ten Spalte.
3) Zur Vermeidung von Rechenaufwand ist es zweckmäßig, bei der Berechnung der Det. nach einer Zeile o. Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthält.
4) <u>(Regel von Sarrus)</u>
Im Falle $n=3$ – und nur in diesem Fall – lässt sich die Det. auch nach folgendem Schema berechnen:

$$\begin{array}{|ccc|cc} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & \overset{-}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Man addiert die Produkte der Elemente in Richtung der Hauptdiagonalen und subtrahiert die Produkte der Elemente in Richtung der Nebendiagonalen.

Beispiele

1) $$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -2 + 6 = 4$$

oder:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} = -1 + 6 - 0 - 1 - 0 = 4$$

nach der Regel von Sarrus.

2) $$\begin{vmatrix} 7 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 1 & 1 & \boxed{7} & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{0} & -1 \\ -1 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & \boxed{+} & - \\ - & + & \boxed{-} & + \\ + & - & \boxed{+} & - \\ - & + & \boxed{-} & + \end{pmatrix}$$

da in der 3. Spalte die meisten Nullen auftreten. Weiter mit dem Entwicklungs-satz oder der Regel von Sarrus.

Häufig lässt sich die Berechnung der Det. $|A|$ dadurch vereinfachen, dass man die Matrix A umformt, ohne dass sich hierdurch der Wert der Det. ändert. Solche Umformungen beruhen auf folgenden Eigenschaften der Determinante.

Satz (Eigenschaft der Determinanten)

Es seien $A, B \in M(n \times n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, Dann gilt:

a) $|A^t| = |A|$

b) Ist $A = (a_{ik})$ eine Dreiecksmatrix, so ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

c) Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten von A, so ändert man das Vorzeichen der Determinante.

d) Multipliziert man alle Elemente einer Zeile oder einer Spalte von A mit λ, so multipliziert man die Det. mit λ.

e) Addiert man zu einer Zeile bzw. Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile bzw. Spalte so ändert man die Det. nicht.

f) Sind zwei Zeilen oder zwei Spalten von A gleich, so ist $|A| = 0$

g) Sind alle Elemente einer Zeile oder alle Elemente einer Spalte von A gleich Null, so ist $|A| = 0$

h) Ist eine Zeile bzw. Spalte von A die Summe von vielfachen anderer Zeilen bzw. Spalten, so ist $|A| = 0$

i) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

j) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

<u>Bemerkung</u>

1) Eigenschaft b) besagt, dass bei Dreiecksmatrizen die Det. gleich dem Produkt der Hauptdiagonalen Elemente ist.

Dies gilt insbesondere für Diagonalmatrizen.

2) Eigensch. h) besagt: $|A| = 0$ genau dann, wenn ihre Zeilenvektoren (und damit auch ihre Spaltenvektoren) linear abhängig sind.

Beispiele

1) $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & -12 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{d)}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{e)}{=}$

$\overset{e)}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{e)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$\overset{c)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \end{vmatrix} \overset{e)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \end{vmatrix}$

$\overset{e)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot (-3) \cdot 26 = 1560$

2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 121 & 9 \\ 0 & \sqrt{2} & \pi & e \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 12{,}1 & 0{,}9 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \end{vmatrix} \overset{h)}{=} 0,$$
da die 1. Zeile das 10-fache der 3. Zeile ist.

„Fahrplan" bis zur Klausur

1) morgen (26. 1) letzte Vorlesung und letzte reguläre Übungsstunde
2) Mi 2.2, 16^{00} Uhr Sonderübung
3) Fr. 11. 2, 11^{30} Klausur

Mathematik

25. 1. 2005 Prof. Dr. Bauer

Definition (Adjunkte)

Es sei $A \in M(n \times n)$. Dann heißt die $(n \times n)$-Matrix
$$\left((-1)^{i+k} |U_{ik}| \right)^t$$
mit U_{ik} wie im laplaschen Entwickl., die adjungierte Matrix (oder kurz die Adjungierte) von A und wird mit A_{adj} bezeichnet:
$$A_{adj} = \left((-1)^{i+k} |U_{ik}| \right)^t$$

Bemerkung

Man konstruiert die Adj. von A, indem man jedes Element von A durch seine Adjunkte ersetzt und die so entstandene Matrix anschließend transponiert.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|U_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $|U_{21}| = 1$

$|U_{12}| = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$; $|U_{22}| = -2$

$|U_{13}| = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $|U_{23}| = 1$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$|U_{31}| = 4$; $|U_{32}| = -7$; $|U_{33}| = 4$

Die adjungierte Matrix ist das entschei. Hilfsmittel zur Berechnung der inversen Matrix.

Satz:

Es sei $A \in M(n \times n)$. A ist genau dann invertierbar, wenn $|A| \neq 0$. Ist A invertierbar, so gilt $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_{adj}$

Beispiele

1) A sei wie im obigen Bsp. Aus $|A| = 8 - 8 - 1 = -1$ (Sarrus) und $A_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ folgt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Die Probe (immer zu empfehlen) ergibt in der Tat $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$

2) $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

$|U_{11}| = a_{22} = \cos\alpha$; $|U_{12}| = a_{21} = \sin\alpha$

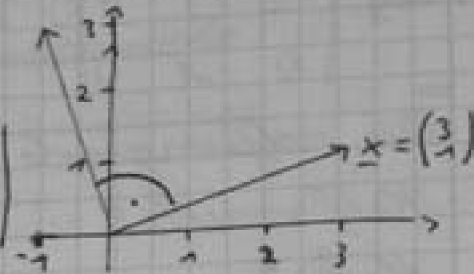
$|U_{21}| = a_{12} = -\sin\alpha$; $|U_{22}| = a_{11} = \cos\alpha$

$|A(\alpha)| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\hat{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = A(-\alpha)$$

$A(\alpha)$ ist eine „Drehmatrix", d. h. die Matrixmultipl. $A(\alpha) \cdot \underline{x}$ mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bewirkt eine Drehung des Vektors $\underline{x}$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn. Z.B. ist für $\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad A(\frac{\pi}{2}) \cdot \underline{x}$

$$A(\alpha) \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Folglich bewirkt die $A(\alpha)^{-1}$ eine Drehung um α <u>mit</u> dem Uhrzeigersinn. Dies entspricht einer Drehung um $-\alpha$ gegen den Uhrzeigersinn, daher $A(\alpha)^{-1} = A(-\alpha)$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (LGS) sind in Wiss. und Techn. allgegenwärtig. Die Matrizenrechnung ist ein wichtiges Hilfsmittel zu ihrer Beschr. und Lösung.

<u>Definition</u>

Ein lineares Gleichungssystem ist eine Gleichung der Form $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit einer Matrix $A \in M(m \times n)$, einer Matrix (bzw. einem Spaltenvektor) $\underline{x} \in M(n \times 1) = \mathbb{R}^n$ und einer Matrix (bzw. Spaltenvekt.) $\underline{b} \in M(m \times 1) = \mathbb{R}^m$, ausgeschrieben

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_{mn}$$

Im Fall $\underline{b} = 0$ heißt das LGS homogen, andernfalls inhomogen

Sprechweisen und Notationen

Mann nennt die Gleich. $A\underline{x} = \underline{b}$ auch kurz ein lineares $(m \times n)$-System. Dabei heißen die Elemente a_{ij} von A Koeffizienten, die Komponenten x_j von $\underline{x}$ die Unbekannten und die Komponenten b_i von $\underline{b}$ die rechten Seiten oder Störungen des Systems. Man sagt auch es handle sich bei dem System um m Gl. mit n Unbekannten. Als Lösungsmenge des Sys. bez. man die Menge $L(A, \underline{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{b} \}$ Zu ihrer Bestimmung benötigt man häufig die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M(m \times (n+1))$$

die aus A durch Hinzufügen einer weiteren Spalte aus aus den Komp. von $\underline{b}$ entsteht.

Beisp.

Das lin. Gl. (2×3)-System

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$$

lässt sich kompakt als

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$ schreiben

Bevor wir Verfahren zur Lös. lin. Gl. Sys. kennenlernen, halten wir folgende allgem. Aussage zum Lösungsverhalten fest.

Satz (Lösungsverh. lin. Gl. Sys.)

Gegeben sei das lin. $(m \times n)$-Sys. $A\underline{x} = \underline{b}$.

Dann gilt:

a) Ist das Sys. inhomogen (d.h. $\underline{b} \neq 0$), so besitzt es entweder keine oder genau eine oder unendlich viele Lösungen.

b) Ist das Sys. homogen (d.h. $\underline{b} = 0$), so besitzt es entw. genau eine Lösung nämlich $\underline{x} = 0$ oder unendlich viele Lösungen

c) Ist $\underline{x}_p \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Systems, so gilt $L(A, b) = \{ \underline{x}_p + \underline{x}_n \mid \underline{x}_n \in L(A, 0) \}$, d.h. man erhält alle Lösungen des inhomogenen Sys. indem man zu einer speziellen Lös. $\underline{x}_p$ dieses Sys. alle zugehörigen homogenen Lös. des Sys. $A\underline{x} = 0$ addiert.

Bemerkungen

1) Man nennt eine spezielle Lös. von $A\underline{x} = \underline{b}$ auch eine partikuläre Lösung. (x_p)

2) Ein homogenes Sys. $A\underline{x} = 0$ hat immer zumind. die Lösung $\underline{x} = 0$. Sie heißt triviale Lösung des homo. Sys.

6.3.1 Das Gaußsche Eliminationsverfahren)

Das Gaußsche El. verf. (oder auch Gaußscher Algorhytmus) ist eine Technik zur Lösung von LGS. Es beruht darauf, das folgende Manipulationen des LSG die Lösungsmenge unverändert lassen.:

a) die Vertauschung zweier Zeilen

b) die Multipli. einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

c) die Addition eines vielfachen einer Zeilen zu einer anderen Zeile.

Diese Manipulationen eines LGS $A\underline{x} = \underline{b}$ sind gleichbed. mit elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ (vgl. c) d) e) im Satz über Eigensch. von Determinanten)

Regel (Gaußsches El. verf.)

Gegeben sei das lin. $(m \times n)$-Sys. $A\underline{x} = \underline{b}$.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge $L(A|b)$ des Sys. geht man wie folgt vor.

1) Zunächst wird die erw. koeff. matrix
$(A|b)$ durch elementare Zeilenumfor. in
eine Matrix $(A'|b')$ überführt, bei der A'
Trapezform hat.

2) Es gilt $L(A'|b') = L(A|b)$. Dabei sind drei
Fälle zu unterscheiden:

i) Die Elemen. $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ sind nicht alle
gleich Null
Dann besitzt das System <u>keine</u> Lösung.
Man sagt, das System sei überbestimmt

ii) $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$ und $r = n$
Dann ist A' eine obere Dreiecksmatrix
(0∇) und das System besitzt genau eine
Lösung. Sie lässt sukzessive von unten
nach oben berechnen

iii) $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$ und $r < n$
Dann hat das System mehr Unbekannte
(naml. n) als Gl. (naml. r) und besitzt
unenendl. viele Lös.: $n-r$ der n Unbekanten
konnen als Param. frei gewählt werden.
Man sagt auch, das Sys. sei unter-
bestimmt

Mathematik

Prof. Dr. Bauer

26.01.05

Beispiele:

1) $3x_1 - 4x_2 = 2$

$-x_1 + 5x_2 = 4$

$5x_1 + 2x_2 = 12$

Diesem LGS entspricht die erw. Koeff. matrix

$$(\underline{A}, \underline{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 27 & 32 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 27 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{26}{11} \end{array}\right) = (A' | b')$$

Hier ist $m = 3$; $n = 2$, $r = 2$ und $b_3' \neq 0$, d.h. das LGS hat keine Lösungen

2) $$(A | \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$ (rechnung-fehlerhaft)

$$\xrightarrow{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A' | b')$$

Hier ist $m = 4$, $n = 3 = r$ und $b_4' = 0$, d.h. das LGS hat genau eine Lösung, die sich sukzessive von unten nach oben berechnen läßt.

$x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$-x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$, also $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$-x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1$

3) $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & -2 & 8 & -28 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|\underline{b}')$

Hier ist $m = 3$, $n = 3$, $r = 2 < n$ und $b'_3 = 0$.

Das entsprechende LGS

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7$$
$$-x_2 + 4x_3 = -14$$
$$0x_3 = 0$$

ist unterbestimmt. x_3 kann als Parameter frei gewählt werden, $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_2 = 4\lambda + 14 \Rightarrow x_1 = -6\lambda - 21$ d. h.

$$L(A, \underline{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} -6\lambda - 2 \\ 4\lambda + 14 \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \underline{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösungsmenge ist also eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ mit Aufpunkt $\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkungen

In analoger Weise kann das Gau. El. verf. auch zum Invertieren einer quadr. Matrix $\in M(n \times n)$ genutzt werden. Man geht aus von der erweiterten $(n \times 2n)$-Matrix $(A|E)$, in deren rechten Hälfte E steht, und überführt diese auch durch el. Zeilenumf. in die Matrix $(E|A)$. Dann ist $A' = A^{-1}$

__Beispiel__

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{a)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) = (E|A^{-1})$$

__6.3.2 Quadr. lin. Systeme__

Ist in dem LGS $A\underline{x} = \underline{b}$ die Matr. A quadr. und invertierbar, so lässt sich die Lösung neben dem Gauß. El. verf. auch mit Hilfe der folgenden Regel bestimmen.

__Satz (Krammersche Regel)__

Die Matrix $A \in M(n \times n)$ sei quadr. und invertierbar. Dann gilt:

a) Für jedes $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ ist das LGS $A\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig lösbar mit der Lösung
$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

b) Ist Δ_j die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die j-te Spalte von A durch den Spaltenvektor $\underline{b}$ ersetzt, so ist j-te Komponente der Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ durch

$$x_j = \frac{|\Delta_j|}{|A|} \quad (j = 1 \dots n) \text{ gegeben.}$$

Beweis (nur von a)

$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow E\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ und $\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow A\underline{x} = AA^{-1}\underline{b}$

$\Rightarrow A\underline{x} = E\underline{b} \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ also

$A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x} = A^{-1} b$

Beispiel

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8$$
$$-x_1 - 4x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$$

d. h $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 31 \neq 0$, $|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 155$,

$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -62$; $|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Mit der Kramerschen Regel folgt:

$x_1 = \frac{155}{31} = 5$, $x_2 = \frac{-62}{31}$, $x_3 = 0$

6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Jeder quadr. Matrix $A \in M(n \times m)$ entspr. einer lin. Abb. $\underline{x} \mapsto \underline{y} = A \cdot \underline{x}$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Z.B. könnte A eine Drehung oder auch eine Spieglung des Vektors $\underline{x}$ bewirken (vgl. Bsp. 2 zur Inversen). Häufig interessiert die Frage, für welche Vektoren $\underline{x}$ der zugehörige (z.B. „gedrehte" oder „gespiegelte") Bildvektor $\underline{y}$ wieder die gleiche Richtung hat wie $\underline{x}$, d. h. $\underline{y} = A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

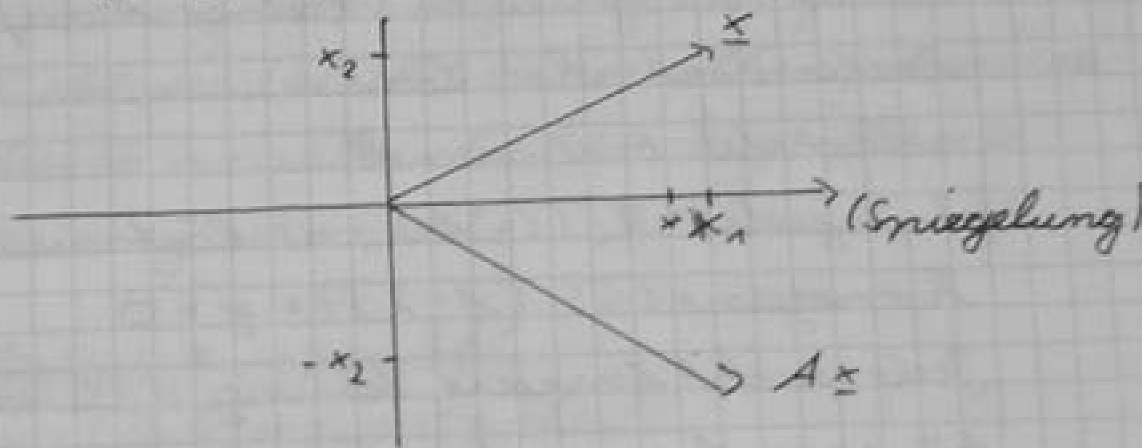
Definition (Eigenwert, Eigenvektor)

Gegeben sei eine quadr. Matrix $A \in M(n \times n)$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{x} \neq 0$ gibt, sodass $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ gilt. Jeder derartige Vektor $\underline{x} \neq 0$ heißt Eigenvektor von A

Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ entspricht einer Spiegelung an der x_1 Achse:

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$



Für jeden Vektor, der in der x_1-Achse liegt, also die Form $\underline{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ hat $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$, gilt $A\underline{x} = \underline{x}$, d. h. er bleibt von der Spiegelung unberührt. Damit ist $\lambda = 1$ ein EW von A, und z. B. $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein zugh. EV.

Die Bestimmungsgl. $A\underline{x} = \lambda \underline{y}$ für EW λ kann man auch in der Form $(A-\lambda E)\cdot\underline{x} = 0$ geschrieben werden. Damit dieses homogene quadr. lin. GS eine nicht triviale Lös. $\underline{x} \neq 0$ hat, muss $\det(A-\lambda E) = 0$ sein. Dabei ist $\det(A-\lambda E)$ ein Polynom mit der Variable λ vom Grad n ($A \in M(n \times n)$) und heißt charakterisiertes Polynom.

<u>Regel (Berechnung der EW und EV)</u>

Zur Berechnung der EW und EV einer Matrix $A \in M(n \times n)$ geht man in 2 Schritten vor:

1) Man stellt die charakter. Gleichung $\det(A-\lambda E) = 0$ der Matrix A auf und bestimmt ihre Lös. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Diese sind die EW von A.
2) Für jedes λ_i ($i = 1, \dots, n$) löst man das homogene LGS $(A-\lambda E)\cdot\underline{x} = 0$
   Jede nicht triviale Lösung $\underline{x} = 0$ ist ein EV von A zum EW λ_i.

<u>Beispiel</u>

Bestimme die EW und EV der Matrix

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Die charakter. Gl.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{5}{8}\lambda & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{8}-\lambda\right)^2 - \frac{9}{64} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{8}-\lambda = \pm\frac{3}{8} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = 1$$

liefert die EW $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ und $\lambda_2 = 1$

2) Die LGS

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{3}{8}x_1 - \frac{3}{8}x_2 = 0 \\ -\frac{3}{8}x_1 + \frac{3}{8}x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} -\frac{3}{8}x_1 - \frac{3}{8}x_2 = 0 \\ -\frac{3}{8}x_1 - \frac{3}{8}x_2 = 0 \end{matrix}$$

liefern $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R}, s \neq 0)$ als EV zum EW $\lambda_1 = \frac{1}{4}$

und $\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$ als EV zum EW $\lambda_2 = 1$

7. Differentialrechnung

Für die Untersuchung von Fkt. erweist sich die Betrachtung der Steigung des Graphen als äußerst nützlich. Die mathe. präzisierung dieses anschaulichen Begriffes ist die Ableitung einer Fkt.

7.1 Ableitung einer Fkt

Definition (Deferenzierbarkeit)

Die Fkt. f. sei auf $U_r(x_0)$ def $(x_0 \in \mathbb{R}, r > 0)$ f heißt differenzierbar an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x_0 \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.
Dieser Grenzwert heißt dann die Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Bemerkungen

1) Um an einer Stelle x_0 diffb. zu sein, muss f in einer Umgebung $U_r(x_0)$ $(r>0)$ def. sein.

2) Die folgende Def. ~~d~~ für die Diffb. von f an der Stelle x_0 ist zu obigen Def. äquivalent

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall x\in U_r(x_0)\;|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

Vergleicht man diese Def. mit der entspr. def. der Stetigkeit, dann fällt auf:
f ist genau dann diffbar. bei x_0, wenn die Fkt. g auf $U_r(x_0)$ mit

$$g(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x\neq x_0\\ f'(x_0) & \text{für } x=x_0\end{array}\right\} \text{ bei } x_0 \text{ stetig ist}$$

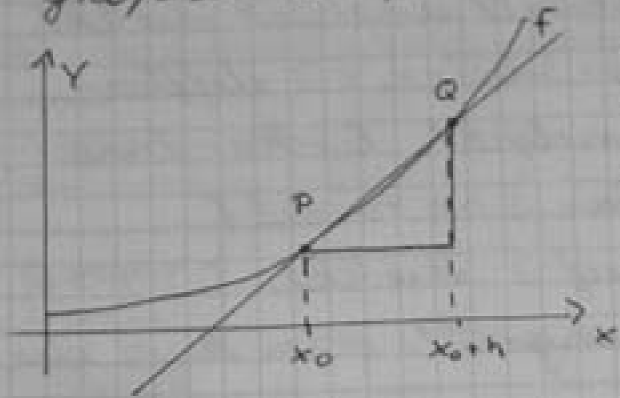
Wegen $f(x)=f(x_0)+g(x)(x-x_0)$ folgt hieraus insbesondere: Ist f an der Stelle x_0 diffb., so ist f an dieser Stelle auch stetig.

3) Das Berechnen der Ableitung, also des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, nennt man Differenzieren.

4) Der Quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt differenzenquotient. Häufig ersetzt man $h=x-x_0$ und schreibt den Differenzenquo. bzw. die Ableitung folgendermaßen:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

5) Zur Veranschaulichung des Begriffs der Ableitung betrachten wir die Pkt. $P = (x_0, f(x_0))$ und $Q = (x_0 + h, f(x_0+h))$ auf dem Graphen von f.



Die Gerade durch die Punkte P und Q heißt eine Sekante des Graphen und hat die Steigung $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, d. i. der Differenzenquotient. Durch den Grenzübergang $h \to 0$ bleibt der Pkt. P fest, aber Q wandert auf dem Graphen und strebt gegen P.
Die Steigung der Sekante geht in die Steigung der Tangente im Pkt. P über. Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist also die Steigung der Tangente an dem Graphen von f im Pkt. $P = (x_0, f(x_0))$.

6) Die Diffbarkeit an den Randpkt. abgeschl. Intervalle def. man folgendermaßen. Ist f auf $]x_0 - r, x_0[$ def. und ex. der linkseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, so heißt f an der Stelle x_0 linkseitig Diffb..
Der Grenzwert heißt die linkseitige Ableitung an der Stelle x_0 und wird mit $f'_l(x_0)$ oder häufiger, wenn missverstän.

ausgeschlossen sind, auch einfach mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Analog def. man die rechtsseitige Abl.

7) Ist $J \in \mathbb{R}$ ein Intervall und ist die Fkt. $f: J \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle $x_0 \in J$ diffbar. (bzw. an den Randpkt. links- bzw. rechtsseitig diffbar.) so heißt f differenzierbar auf J. Die Fkt. $f': J \to \mathbb{R}$ heißt die Ableitungsfkt. oder kurz die Ableitung von f.

<u>Beispiel</u>

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$ $\qquad f'(x_0) = ?$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$$