Aufgabe 1 Es sei V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, $< . , . >$ ein Skalarprodukt auf V und $\| . \|$ die durch $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ $(v \in V)$ gegebene Norm auf V. Zeigen Sie:

a) Die m Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ $(m \in \mathbf{N})$ sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.

b) Die m Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ $(m \in \mathbf{N})$ sind genau dann linear abhängig, wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ gibt mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ und $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_m^2 = 0$.

c) Die zwei Vektoren $u, v \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die beiden Vektoren $u + v$ und $u - v$ linear unabhängig sind.

d) Bilden die n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbf{N})$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $a \in V$ genau ein n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ mit $a = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

e) Bilden die n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbf{N})$ eine Orthogonalbasis von V, so gilt für jedes $a \in V$: $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{< a, v_i >}{\|v_i\|^2} v_i$.

f) Bilden die n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbf{N})$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für jedes $a \in V$: $a = \sum\limits_{i=1}^{n} < a, v_i > v_i$.

g) Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für $< . , . >$ und $\| . \|$ folgt die Dreiecksungleichung für $\| . \|$.

Aufgabe 2

a) Es sei $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ein Intervall und $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbf{R} \text{ stetig}\}$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$. Auf $C[a, b]$ sei in der üblichen Weise eine Addition und eine Skalarmultiplikation erklärt. Zeigen Sie:
   i) $C[a, b]$ ist ein Vektorraum.
   ii) Die Funktionen $f, g \in C[0, 2\pi]$ mit $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ sind linear unabhängig.

b) Es sei $V = \{p \mid p : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ ist Polynom, } \operatorname{grad} p \leq 1\}$ der Vektorraum aller reellwertigen Polynome auf $\mathbf{R}$ mit einem Grad kleiner zwei.
   i) Zeigen Sie: durch $<p, q>= \frac{2}{3} a_1 b_1 + 2 a_0 b_0$ für $p, q \in V$, $p(x) = a_1 x + a_0$, $q(x) = b_1 x + b_0$, ist ein Skalarprodukt $< . , . >$ auf V erklärt.
   ii) Geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

Aufgabe 3 Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbf{R}^3$. Berechnen Sie:

a) $|\mathbf{a}|$ b) $|\mathbf{b}|$ c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e) $3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ f) $4(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + 10\mathbf{c}$ g) $(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot 4\mathbf{c}$

h) den zu $\mathbf{a}$ gehörigen Einheitsvektor i) den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$

j) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ k) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ l) $\left|\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sqrt{3} \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\right|$ $(\alpha \in \mathbf{R})$

m) den zu $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ gehörigen Einheitsvektor n) den Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

o) den Winkel zwischen der Hauptdiagonalen und den Kanten eines Würfels

Aufgabe 4

a) Liegen die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf einer Geraden im $\mathbf{R}^3$? Falls ja: Geben Sie diese Gerade in der Parameterdarstellung an.

b) Geben Sie eine Basis des $\mathbf{R}^3$ an, die den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbf{R}^3$ bilden.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $\sqrt{29}$	b) $\sqrt{20}$	c) -22	d) -29	e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -20 \end{pmatrix}$	f) $\begin{pmatrix} -22 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}$
g) -436	h) $\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$	i) $\arccos \frac{-22}{\sqrt{29}\sqrt{20}}$	j) 1	k) 0	l) 2
m) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	n) $\frac{\pi}{3}$	o) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$			

Lösungen zu Aufgabe 4

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$ b) z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$