Übungen zur Vorlesung „Mathematik 1"
Wintersemester 2004/05
Blatt 7

Fachhochschule Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. G. Bauer

Aufgabe 1 Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 1)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9n^2+2n+1}-3n$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}}{1-\dfrac{n-1}{n}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

Aufgabe 2 Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}-\frac{1}{n^3}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$ b) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right)^n \quad (a \geq 1)$ e) $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$ f) $\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\ldots$

g) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\pm\ldots$ h) $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^3\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n+1}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$ k) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$ l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n\sqrt[6]{n^5+n-1}}$ o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10n^3-7}{12n+9n^3}\right)^n$

Aufgabe 4

a) Für alle $n \in \mathbf{N}$ sei $a_n \geq 0$, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent.

   i) Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent ist.

   ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Bedingung $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ nicht fortgelassen werden kann.

b) Zeigen Sie für die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$:

   i) die Reihe ist alternierend,

   ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

   iii) die Reihe divergiert.

   Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

c) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine absolut konvergente, eine bedingt konvergente, eine nicht absolut konvergente und eine nicht bedingt konvergente Reihe an. Bei welchen dieser Reihen ändert sich durch eine Umordnung der Reihenglieder nichts am Konvergenzverhalten?

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) $\frac{1}{3}$ e) 0 f) $\frac{1}{2}$ g) e h) 1 i) 0

Lösungen zu Aufgabe 2

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) -1 e) 1 f) 1

Lösungen zu Aufgabe 3

a) divergent	b) konvergent	c) divergent	d) konvergent	e) konvergent
f) divergent	g) konvergent	h) divergent	i) konvergent	j) konvergent
k) konvergent	l) divergent	m) divergent	n) konvergent	o) divergent

Lösungen zu Aufgabe 4

a) ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

c) absolut konvergent, nicht bedingt konvergent: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

nicht absolut konverent, bedingt konvergent: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$