Aufgabe 1

a) Gegeben seien die Funktionen f und g auf $\mathbf{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$. Bestimmen Sie alle Stellen entlang der x-Achse, an denen die Tangenten an die Graphen von f und g parallel sind.

b) Gegeben seien die Funktionen f und g auf $\mathbf{R}$ mit $f(x) = x^2+1$ und $g(x) = -x^2-1$. Gibt es Geraden, die zugleich Tangente an den Graphen von f und Tangente an den Graphen von g sind?

Aufgabe 2 Differenzieren Sie:

a) $f(x) = x^8 + 5x^4 - 3x^3 - 4$ b) $f(x) = (x^2+3)e^x$ c) $f(x) = \dfrac{1-5x}{1+5x}$

d) $f(x) = (x^7 - 3x^5 + 7)^{10}$ e) $g(x) = \sqrt{4-7x}$ f) $g(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $g(x) = x \sin x$ h) $g(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ i) $s(t) = 1 + \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t$

j) $s(t) = \dfrac{t}{\sin t - t\cos t}$ k) $s(t) = \tan^3(t^2 \sin t)$ l) $s(t) = e^{-t}\sin t$

m) $f(y) = e^{\cos y}$ n) $f(y) = e^{-y^2}$ o) $f(y) = y^2 \sinh y$

p) $f(y) = \dfrac{\cosh y}{y} - \coth y$ q) $g(u) = \sqrt{\tan 2u}$ r) $g(u) = \sin\sqrt{u} - \sqrt{u}\cos\sqrt{u}$

s) $g(u) = \frac{1}{4}\ln\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ t) $g(u) = u^{\tan u}$ u) $h(s) = (\tan s)^{\ln s}$

v) $h(s) = \ln\ln s$ w) $h(s) = \arcsin\sqrt{s}$ x) $h(s) = \operatorname{arcosh} x^2$

Aufgabe 3 Berechnen Sie:

a) $(x^5)^{(5)}$ b) $(x^5 \ln x)'''$ c) $(x^2 e^{2x})^{(4)}$ d) $(x^2 e^{-x})^{(5)}$

Aufgabe 4 Zeigen Sie jeweils für alle $n \in \mathbf{N}$:

a) $(\sqrt{x})^{(n)} = (-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}}$

b) $(\sin^2 x)^{(2n)} = (-1)^{n+1}2^{2n-1}\cos 2x$

c) Sind die Funktionen f_i $(i = 1, \ldots, n)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbf{R}$ differenzierbar, so auch die Funktion $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$ und es gilt $f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1} f_j(x_0)\cdot f_i'(x_0)\cdot\prod_{k=i+1}^{n} f_k(x_0)$. Tipp: Machen Sie sich zunächst die Bedeutung der Summen- und Produktzeichen klar.

d) Sind die Funktionen f und g in einem Intervall I n-mal differenzierbar, so auch die Funktion $f\cdot g$ und es gilt $(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}$ in I.

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$

b) $g_1 : x \mapsto y = 2x,\ g_2 : x \mapsto y = -2x$

Lösungen zu Aufgabe 2

a) $f'(x) = 8x^7 + 20x^3 - 9x^2$

b) $f'(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$

c) $f'(x) = \dfrac{-10}{(1+5x)^2}$

d) $f'(x) = 10(x^7 - 3x^5 + 7)^9(7x^6 - 15x^4)$

e) $g'(x) = \dfrac{-7}{2\sqrt{4-7x}}$

f) $g'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

g) $g'(x) = \sin x + x\cos x$

h) $g'(x) = \dfrac{x + x\tan^2 x - \tan x}{x^2}$

i) $s'(t) = -\sin^3 t$

j) $s'(t) = \dfrac{(1-t^2)\sin t - x\cos t}{(\sin t - t\cos t)^2}$

k) $s'(t) = 3\tan^2(t^2\sin t)\big(1 + \tan^2(t^2\sin t)\big)(2t\sin t + t^2\cos t)$

l) $s'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$

m) $f'(y) = -\sin y e^{\cos y}$

n) $f'(y) = -2ye^{-y^2}$

o) $f'(y) = y(2\sinh y + y\cosh y)$

p) $f'(y) = \dfrac{y^2 + y\sinh^3 y - \cosh y \sinh^2 y}{y^2\sinh^2 y}$

q) $g'(u) = \dfrac{1+\tan^2 2u}{\sqrt{\tan 2u}}$

r) $g'(u) = \frac{1}{2}\sin\sqrt{u}$

s) $g'(u) = \dfrac{u}{1-u^4}$

t) $g'(u) = \left(\dfrac{\tan u}{u} + (1+\tan^2 u)\ln u\right)u^{\tan u}$

u) $h'(s) = \left(\dfrac{\ln(\tan s)}{s} + \dfrac{1+\tan^2 s}{\tan s}\ln s\right)(\tan s)^{\ln s}$

v) $h'(s) = \dfrac{1}{s\ln s}$

w) $h'(s) = \dfrac{1}{2\sqrt{s(1-s)}}$

x) $h'(s) = \dfrac{2s}{\sqrt{s^4-1}}$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $5!$ b) $x^2(47 + 60\ln x)$ c) $16(3 + 4x + x^2)e^{2x}$ d) $(-20 + 10x - x^2)e^{-x}$