Inhalt

1 Differentialrechnung

1.1 Diffenrenzenquotient

$$\lim_{(x \to x_0)} \frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)}$$ Steigung der Sekante durch P und Q

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m_s$$

1.2 Ableitungsregeln

1.2.1 Kettenregel (innere Ableitung * äußere Ableitung)

f'(g(x)) = g'(x) * f'(g(x)) b.z.w (f°g)(x)=g'(x)*f'(g(x))

1.2.2 Produktregel

f(x)*g(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)

1.2.3 Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} y' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{(g(x))^2}$$

1.2.4 Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

1.3 l´Hospital

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ Vorraussetzung: g(x) ≠ 0

1.5 Kurvendiskussion

1.5.1 Definitionsbereich

Prüfen, ob f gebrochen rational

ja: $N(x) \neq 0$
nein: Funtion auf Definitionslücken prüfen

1.5.2 Symmetrie

f gerade:

Spiegelsymmetrisch zur y-Achse Bedingung: $f(x) = f(-x)$

f ungerade:

Punktsymmetrie zum (0/0) Bedingung: $f(-x)=-f(x)$

1.5.3 Nullstellen

$f(x)=0$ setzen

1.5.4 Ableitungen

Ableitung bis f''' (siehe Ableitungsregeln)

1.5.5 Extremwerte

$f'(x)=0$ dann Einsetzen der x_i in $f''(x)$

dann Bestimmung Maximum/Minimum

Maximum, wenn $f''(x_i)<0$

Minimum, wenn $f''(x_i)>0$

1.5.6 Wendepunkte

$f''(x)=0$ dann Einsetzen der x_i in $f'''(x)$

Sattelpunkt, wenn $f'''(x)=0$

sonst Wendepunkt

1.5.7 Verhalten im Unendlichen

1.5.8 Verhalten an Definitionslücken

Asymptote bestimmen
dann substituieren

1.5.9 Wertebereich

Der Wertebreich (f(x) = y) ist die Funktion des Abbildungsbereiches (x)

1.5.10 Graph

Die einzelnen Teilschritte ein den Graphen einzeichnen

1.6 Potenzreihen

1.6.1 Definition

$$\sum_{n}^{\infty} a_n*(x-x_0)\,x^n$$

1.6.2 Konvergenzradius und Kriterien

$$r = \lim_{(n\to\infty)} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

dann r in Potenzreihe einsetzen und prüfen, ob an den Randpunkten konvergent/divergent. Dann Intervall bestimmen.

1.6.3 Addition und Multiplikation von Potenzreihen

Regel 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)'$$

Regel 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n * \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} (a_n * b_{n-k}))(x-x_0)$$

1.6.4 Differentiation von Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * (x-x_0)^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n * a_n * (x-x_0)^{n-1}$$

1.7 Taylorreihen

Bis zum m-ten Grad

$$T(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^n(x_0)}{(n!)} * (x-x_0)^n$$

Restgliedbestimmung nach LaGrange ($x_0 != 0$):

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} * (x-x_0)^{(n+1)}$$ (ξ liegt zwischen x und x_0)

Restgliedbestimmung nach LaGrange 2 ($x_0 = 0$):

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(\upsilon x)}{(n+1)!} * (x-x_0)^{(n+1)}$$ (0 < υ < 1)

2 Integralrechnung

2.1 Bestimmtes Integral

Hauptsatz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Regeln:

Faktorregel:

$$\int_a^b C * f(x)\,dx = C * \int_a^b f(x)\,dx$$

Summenregel:

$$\int_a^b [f_1(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Vertauschungsregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Integrationsgrenzen a bis b

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

Für jede Stelle $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2.2 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Anwendung gewöhnlicher Integrationsmethoden.

2.3 Uneigentliches Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

analog:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \, und \, \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

2.4 Stammfunktion

$$\int ax^b\,dx = \frac{a}{b+1} * x^{b+1}$$

2.5 Stammintegrale

siehe Anhang Stammintegrale 5.1

2.6 Integrationsmethoden

2.6.1 Substitutionsmethode

siehe Anhang Standard Substitutionen 5.2

Beispiel (ohne Integrationsgrenzen):

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx$$

Substitution: $t=\sqrt{x}$, damit $x=t^2$ und $\frac{dx}{dt}=2t$ und $dx=2t*dt$

dann

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin t * 2t\,dt = 2\int t*\sin t\,dt$$

dann lösen.

Mit Integrationsgrenzen:

Um die Grenzen des Integrals herauszubekommen, wird die Umkehrfunktion der Substitution gebildet und die Grenzen der Ursprungsfunktion in die Umkehrfunktion eingesetzt.

2.6.2 Partialbruchzerlegung

Falls $f(x)=\frac{Z(x)}{N(x)} mit\, Z(x)>N(x)$ dann ist die Funktion unecht gebrochen rational dann folgt die ...

2.6.2.1 Polynomdivision

$$Z(x):N(x)=P(x)+R(x)$$

mit P(x) als ganzrationalem und R(x) als echt gebrochen Rationalem Anteil

2.6.2.2 Nullstellen des Nenners suchen

$Beispiel\; x_1=1 \rightarrow x_1-1=0$

Weitere NST durch Polynomdividion b.z.w. pq-Formel

$$x_1 / x_2 = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

2.6.2.3 Zerlegung der echt gebrochen rationalen Funktion

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{B}{x-x_2} + ... + \frac{N}{x-x_n}$$

2.6.2.4 Bestimmung der Konstanten A,B,...,N und Abschluß

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{B}{x-x_2} + ... + \frac{N}{x-x_n}$$

Da der Nenner beider Seiten ausmultipliziert gleich ist, kann man diesen streichen und nur noch den Zähler betrachten.

Beispiel:

$$Z(x) = A_1 * (x-x_1) * (x-x_2) + A_2 * (x-x_2) + B * (x-x_1)^2$$

Danach folgt das Einsetzen der NST.
Somit erhält man die Konstanten A ... N und setzt diese in den Term ein.

2.6.3 Partielle Integration

Die Formel der partiellen Integration lautet:

Unbestimmtes Integral:

$$\int u(x) * v'(x) dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x) dx$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u(x) * v'(x) dx = [u(x) * v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) * v(x) dx$$

2.7 Kreisgleichung

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Fläche
$$A_{Kreis} = \Pi r^2$$

2.8 Integration von Potenzreihen

Erklärung anhand des Beispieles:

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\,dx = ?$$

Potenzreihe nach Mac Laurin für cos z

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \ldots \quad (|z| < \infty)$$

Substitution $z = \sqrt{x}$:

$$\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} \pm \ldots \quad (|x| < \infty)$$

Gliedweise Integration:

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} \pm \ldots\right) dx =$$
$$= \left[x - \frac{x^2}{2*2!} + \frac{x^3}{3*4!} - \frac{x^4}{4*6!} \pm \ldots \quad \right]_0^1 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2*2!} + \frac{1}{3*4!} - \frac{1}{4*6!} \pm \ldots \quad \approx 0{,}763$$

2.9 Anwendung der Integralrechnung

2.9.1 Linearer Mittelwert

$$y_{linear} = \frac{1}{b-a} * \int_a^b f(x)\,dx$$

2.9.2 Quadratischer Mittelwert

$$y_{quadratisch} = \sqrt{\frac{1}{b-a} * \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

2.9.3 Flächeninhalt

zwischen zwei Funktionen

$$A = \int_a^b (f_{oben}(x) - f_{unten}(x))$$

zwischen Funktionen und x-Achse

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

2.9.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2.9.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

2.9.6 Volumen eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse:

$$V_x=\Pi*\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

2.9.7 Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M_x=2\Pi*\int_a^b f(x)*\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2 .9.8 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers

Rotation um x- Achse

$$y_s=0 \quad x_s=\frac{\Pi}{V(x)}*\int_a^b x*y^2\,dx$$

3 Funktion mehrerer Variablen

3.1 Darstellungsformen

$f(x;y;...;n)=?$

3.2 Stetigkeit

$f_{xy}=f_{yx}$ Satz von Schwarz

Wenn die Reihenfolge der Ableitungen irrelevant ist, so ist die Funktion stetig.

3.3 Partielle Ableitung

$$\frac{\delta}{\delta x}=[f(x;y)]=f_x(x;y), \qquad \frac{\delta}{\delta y}=[f(x;y)]=f_y(x;y)$$

höherer Ordnung analog dazu weiter ableiten

3.4 Totales Differential

Totales Differential von $y=f(x_1;x_2;...;x_n)$

$$dy=f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+...+f_{x_n}dx_n=\frac{\delta f}{\delta x_1}dx_1+\frac{\delta f}{\delta x_2}dx_2+...+\frac{\delta f}{\delta x_n}dx_n$$

3.5 Tangentialebenen

$$(z-z_0)=f_x(x_0;y_0)*(x-x_0)+f_y(x_{0,}y_0)*(y-y_0)$$

3.6 Bedingungen für Extremwerte

Zuerst: Finden der Extremwertkandidaten

1.) $f_x(x_0;y_0)=0$ analog zur Berechnung der Extremwerte mit einer Variablen

$f_y(x_0;y_0)=0$

2.) $\Delta=f_{xx}(x_0;y_0)*f_{yy}(x_0;y_0)-f_{xy}^2(x_0;y_0)>0$
$f_{xx}(x_0;y_0)<0$ => Relatives Maximum
$f_{xx}(x_0;y_0)>0$ => Relatives Minimum

4 Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n hat die implizite Form

$$F(x,y,y',\ldots,y^n)=0$$

oder falls sich diese DGL nach der nächsten Ableitung auflösen lässt, die explizite Form

$$y^{(n)}=f(x,y,y'\ldots y^{(n-1)})$$

homogen:

$$y'+f(x)*y=0$$

inhomogen:

$$y'+f(x)*y=h(x)$$

4.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x)*g(y)$$

löst man durch Trennung der Variablen und Integration auf beiden Seiten, so daß

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx \qquad (g(y)\neq 0)$$

4.2 Spezielle DGL (Substitution)

Differentialgleichung	***Substitution***	***Lösungsweg***
$y' = f(ax+by+c)$	$u = ax+by+c$	$u' = a + b * f(u)$ 1. Trennung der Variablen 2. Rücksubstitution
$y' = f(\frac{y}{x})$ homogene DGL	$u = \frac{y}{x}$	$u' = \frac{f(u)-u}{x}$ 1. Trennung der Variablen 2. Rücksubstitution
$y' + g(x) * y = h(x) * y^n$	$u = y^{(1-n)}$	$u' + (1-n) * g(x) * u$ $= (1-n) * h(x)$ 1. Lineare DGL 2. Rücksubstitution

4.3 Exakte Differentialgleichungen

Problem:

$g(x;y)\,dx + h(x;y)\,dy = 0$ mit $\frac{\delta g}{\delta y} = \frac{\delta h}{\delta x}$

Lösung:

$$\int g(x,y)\,dx + \int [h(x;y) - \int \frac{\delta g}{\delta y}\,dx]\,dy = c = const.$$

4.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

4.4.1 Definition

$y' + f(x) * y = g(x)$ $\quad$ $g(x)$ *ist das Störglied*

4.4.2 Integration der homogenen Differentialgleichung

$y' + f(x) * y = 0$ $\quad$ (homogenes Problem)

Lösung:

$y = C * e^{-\int f(x)dx}$ $\quad$ benötigt Trennung der Variablen

4.4.3 Integration der inhomogenen lineraren Differentialgleichung

$y' + f(x) * y = h(x)$ $\quad$ (inhomogenes Problem)

Lösung:

$y = K(x) * e^{-\int f(x)dx}$ => $K(x)$ benötigt Variation der Konstanten

5 Anhänge

5.1 Standardableitungen

	f(x)	**f'(x)**
Potenzfunktion	x^n	$n*x^{(n-1)}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{(\cos^{2x})}=1+\tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}=-1-\cot^2 x$
Arkusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$\ln a*a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a)*x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}=1-\coth^2 x$
Areafunktionen	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

5.2 Standard Substitutionen

Integraltyp	*Substitution*	*Neues Integral/LSG*	*Beispiel*
$f(ax+b)dx$	$U=ax+b$ $dx=\frac{du}{a}$	$\frac{1}{a}*\int f(u)du$	$\int\sqrt{4x+5}\,dx$ $(u=4x+5)$
$\int f(x)*f'(x)dx$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2}[f(x)]^2+C$	$\int sinx*cosxdx$
$\int[f(x)]^n*f'(x)dx$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}+C$	$\int(\ln x)^2+\frac{1}{x}dx$ $(u=\ln x)$
$\int f[g(x)]*g'(x)dx$	$u=g(x)$ $dx=\frac{du}{g'(x)}$	$f(u)du$	$\int x*e^{x^2}$ $u=x^2$
$\frac{\int f'(x)}{f(x)}$	$u=f(x)$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert+c$	$\int\frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx$ $u=x^2-3x+1$
$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a*\sin u$ $dx=a*\cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2}=a*\cos u$		$\int\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ $x=2*\sin u$
$\int R(x;\sqrt{x^2+a^2})dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a*\sinh u$ $dx=a*\cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2}=a*\cosh u$		$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx$ $x=x*\sinh u$
$\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a*\cosh u$ $dx=a*\sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2}=a*\sinh u$		$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$ $x=5*\cosh u$
$\int R(\sin x;\cos x)dx$ R ist Rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$u=\tan(\frac{x}{2})$ $dx=\frac{2}{1+u^2}du$ $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$		$\frac{\int 1+\cos x}{\sin x}dx$
$\int R(\sinh x;\cosh x)dx$ R ist Rationale Funktion von $\sinh x$ und $\cosh x$	$u=e^x$, $dx=\frac{du}{u}$ $\sinh x=\frac{u^2-1}{2u}$ $\cosh x=\frac{u^2+1}{2u}$		$\int\frac{\sinh x+1}{\cosh x}dx$