Fachhochschule Münster University of Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Lineare DGl 2. Ordnung

Sommersemester 2004

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die lineare, homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (a_1, a_0 reell)

$$y''+a_1 y'+a_0 y = 0$$

führt mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = ce^{\lambda x}$ auf die charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

mit den Nullstellen λ_1, λ_2

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\ .$$

Sie besitzt die allgemeine Lösung:

Fall 1	
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell $\frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$	$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
Fall 2	
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ konjugiert-komplex $\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0$ $\alpha = -\frac{a_0}{2},\ \beta = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$	$y(x) = b_1 e^{\lambda_1 x} + b_2 e^{\lambda_2 x}$ $= c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
Fall 3	
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reell $\frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0$ $\lambda = -\frac{a_0}{2}$	$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Lösungsansätze für die partikuläre Lösung der inhomogenen DGl

Für die lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (a_1, a_0 reell)

$$y''+a_1y'+a_0y = h(x)$$

können folgende Lösungsansätze für die partikuläre Lösung verwendet werden. Dabei sind $p_n(x)$, $q_n(x)$, $r_n(x)$ und $s_n(x)$ jeweils Polynome vom Grade $n \geq 0$. Die Lösungsansätze für $y_p(x)$ enthalten als freie Parameter die Polynomkoeffizienten, die durch Einsetzen in die Differenzialgleichung bestimmt werden müssen.

Funktion $h(x)$	**Lösungsansatz für** $y_p(x)$
$h(x) = p_n(x)$	$y_p(x) = \begin{cases} q_n(x), & a_0 \neq 0 \\ xq_n(x), & a_0 = 0, a_1 \neq 0 \\ x^2q_n(x), & a_0 = 0, a_1 = 0 \end{cases}$

Funktion $h(x)$	**Lösungsansatz für** $y_p(x)$
$h(x) = e^{bx}p_n(x)$	**a)** b ist nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. $b \neq \lambda_1$ und $b \neq \lambda_2$ $y_p(x) = e^{bx}q_n(x)$
	b) einfache Resonanz b ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $b = \lambda_1$ oder $b = \lambda_2$ $y_p(x) = e^{bx}xq_n(x)$
	c) doppelte Resonanz b ist doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. $b = \lambda_1 = \lambda_2$ $y_p(x) = e^{bx}x^2q_n(x)$

Funktion $h(x)$	**Lösungsansatz für** $y_p(x)$
$h(x)=e^{bx}\left(p_n(x)\cos(cx)+q_n(x)\sin(cx)\right)$	**a)** $b+jc$ ist nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. $b+jc\neq\lambda_1$ und $b+jc\neq\lambda_2$ $y_p(x)=e^{bx}\left(r_n(x)\cos(cx)+s_n(x)\sin(cx)\right)$
	b) einfache Resonanz $b+jc$ ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. $\lambda_1\neq\lambda_2$ und $b+jc=\lambda_1$ oder $b+jc=\lambda_2$ $y_p(x)=e^{bx}x\left(r_n(x)\cos(cx)+s_n(x)\sin(cx)\right)$