Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Blatt 0
Ausgabe: 28.03.2006

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie einen Wert b so, dass die Gerade $y = x$ eine Tangente an die Funktion $f(x) = \log_b x$ ist.

$f'(x) = f'(x)$
und $f(a) = a$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$ b) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin 2x}{\sinh^2 x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{3-\sqrt{9-x^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 2x - e^{-x}}{x - \sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+5}{2x^2+3x+1}$ g) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin(x-a)\cot(x-a)$

Aufgabe 3:
Finden Sie jeweils den Wert für a, bei dem die Funktionen $y = f_a(x)$ und $y = \ln x$ an ihrem Schnittpunkt eine gemeinsame Tangente besitzen

a) $f_a(x) = \sqrt{x} + a$ b) $f_a(x) = a\sqrt{x}$

Funktion muss so liegen, dass es zwischen $y = \ln x$ und $f_a(x)$ nur einen Berührpunkt gibt. ~~Dem~~ ausrechnen für a, dann Tangente

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Blatt 1
Ausgabe: 04.04.2006

geometrische Summe / Reihe!

Aufgabe 5:
Berechnen Sie das Riemansche Integral

$$I = \int_{-1}^{3} x^2 dx$$

analog zur Vorlesung als Grenzwert der Zwischensummen mit einer äquidistante Unterteilung des Intervalls $[-1,3]$. Wählen Sie die Punkte ξ_i zunächst alle am linken Rand des zugehörigen Intervalls. Ändert sich der Grenzwert, wenn alle ξ_i am rechten Intervallrand oder in der Intervallmitte liegen?

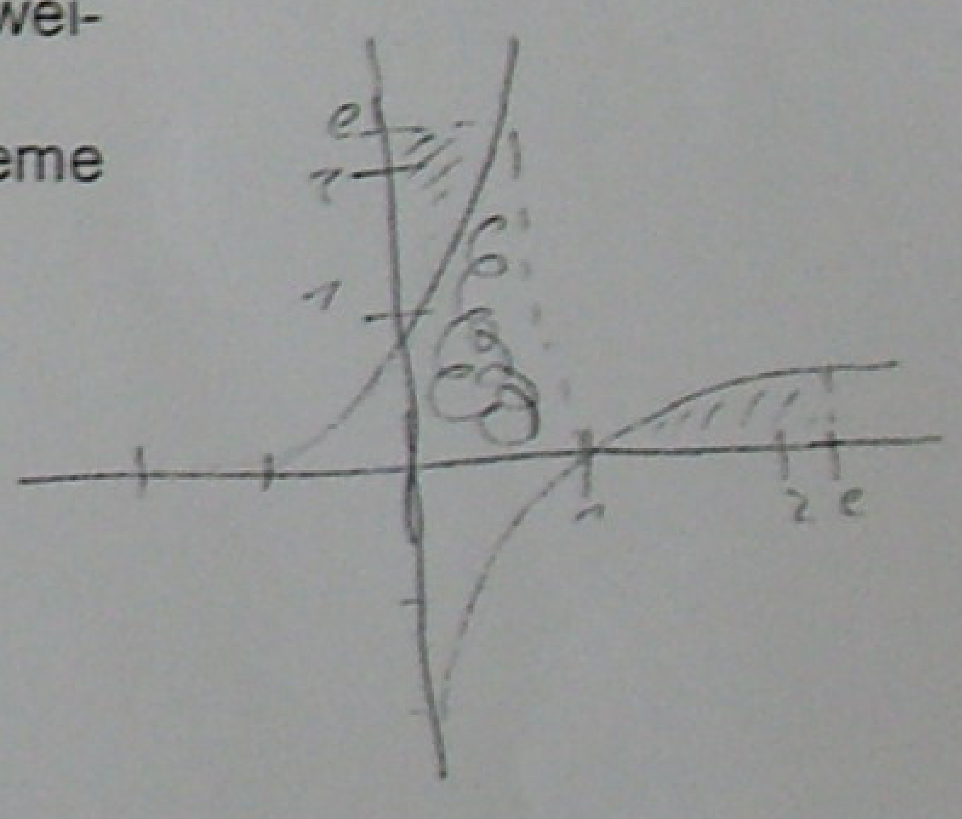
$\frac{28}{3}$

Aufgabe 6:
Berechnen Sie die Fläche unter der Funktion $f: u \mapsto e^u$ für u zwischen 0 und einem beliebigen Wert x als Grenzwert der Zwischensummen.

Aufgabe 7:
Berechnen Sie das bestimmte Integral von $f: x \mapsto \sin x$ über $[0,\pi]$ als Grenzwert der Zwischensummen einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls. Hinweis: Erweitern Sie die Zwischensumme mit $2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ und verwenden Sie Additionstheoreme der Trigonometrie.

Aufgabe 8:
Zeigen Sie anhand einer Skizze und rein geometrischer Argumente, dass gilt

$$\int_1^e \ln x\,dx + \int_0^1 e^x dx = e.$$



/// = 1
∞ = 1,718
/// + ∞ = e

Aufgabe 9:
a) Zeigen Sie anhand einer Skizze, dass für $x > 0$ folgende Ungleichungen gelten

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x}.$$

b) Verwenden Sie die in a) angegebene Beziehung zur Ableitung des Grenzwertes

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Blatt 2
Ausgabe: 11.04.2006

Aufgabe 10:

Gegeben sind die beiden Funktionen $f_k : x \mapsto \begin{cases} (k+1)x & \text{für } x \in [0,2] \\ 8-2x & \text{für } x \in [2,4] \end{cases}$, $k = 1, 2$.

Geben Sie die Integralfunktionen I_k von f_k an, für die $I_k(0) = 0$ ist. Zeichnen Sie die Graphen von f_k und I_k. Ist I_k jeweils auch eine Stammfunktion von f_k auf $[0,4]$? Begründung!

Aufgabe 11:

Die folgenden bestimmten Integrale sind gegeben:

$$\int_1^4 f(x)dx = 5 \qquad \int_3^4 f(x)dx = 7 \qquad \int_1^8 f(x)dx = 11$$

Berechnen Sie

a) $\int_4^8 f(x)dx$ b) $\int_4^3 f(x)dx$ c) $\int_1^3 f(x)dx$

d) $\int_3^8 f(x)dx$ e) $\int_8^4 f(x)dx$ f) $\int_4^4 f(x)dx$

Aufgabe 12:

Begründen Sie, warum folgende Aussage falsch sein muss: Mit den Zerlegungen $Z_1 = \{0, 1, 3/2, 2\}$ und $Z_2 = \{0, 1/4, 1, 3/2, 2\}$ gilt für die Obersummen $O(Z_1) = 4$ und $O(Z_2) = 5$.

Aufgabe 13:

Mit $v(t)$ wird die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges in Abhängigkeit von der Zeit $t \in [t_1, t_2]$ bei einer eindimensionalen Bewegung bezeichnet (in beliebigen Einheiten). Berechnen Sie den Abstand des Endpunktes von Startpunkt des Fahrzeuges und die Gesamtfahrstrecke für

a) $v(t) = \cos(\pi t)$, $t_1 = -1, t_2 = 1$ **b)** $v(t) = t^2 - 9t + 14$, $t_1 = 0, t_2 = 10$

Aufgabe 14:

Sei f eine stetige Funktion. F ist definiert durch

$$F(x) = \int_0^x \left[t \int_1^t f(u)du \right] dt.$$

Bestimmen Sie a) $F'(x)$ b) $F'(1)$ c) $F''(x)$ d) $F''(1)$

$= t\int_1^t f(u)\,du$ $= 0$ $= f(u)$ $= f(1)$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Blatt 3
Ausgabe: 18.04.2006

Aufgabe 15:

Finden Sie einen positiven Wert k so, dass die Fläche unter der Funktion $f(x) = xe^{(x^2)}$ über dem Intervall $[0, k]$ den Wert 3 hat.

Aufgabe 16:

Berechnen Sie die folgenden Integrale

1) $\int_1^x x\,t\,dt$ 2) $\int x^n dn$? 3) $\int e^x de$? 4) $\int_0^{\frac{2\pi}{v}} \sin(u\,v)\,du, \quad v \neq 0$

Aufgabe 17:

Ein PKW, der sich mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h bewegt, wird mit einer konstanten Beschleunigung über eine Strecke von 70 Metern auf die Geschwindigkeit von 40 km/h abgebremst.

a) Wie groß ist die Beschleunigung des PKW?
b) Wie lange dauert das Abbremsen auf 40 km/h?
c) Nach welcher Strecke und zu welchem Zeitpunkt kommt der PKW zum Stillstand?

?

Aufgabe 18:

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+......+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ indem Sie ihn als Riemannsche Summe einer Funktion im Intervall $[0,1]$ interpretieren.

Aufgabe 19:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittel

1) $\int e^{\sin x} \cos x\,dx$ 2) $\int (x-1)^3 \ln(\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2})dx$ 3) $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$? 4) $\int \frac{6t^7}{t^4+1}dt$ 2

5) $\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1}du$ 6) $\int \frac{dx'}{x'(\ln x')^3} = \int \frac{1}{y(\ln y)^3}dy$ 7) $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ 8) $\int \frac{e^x}{e^x+a}dx$

9) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx$ $\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}$ 10) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ 11) $\int \frac{1}{\ln(x^x)}dx$ 12) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2+4}}$

13) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}dx$ 14) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ 15) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ 16) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cosh x}dx$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

Prof. Dr. [illegible]

[illegible]@fh-muenster.de
www.[illegible]fh-muenster.de

Blatt 5
Ausgabe: [illegible]

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

[illegible]

Aufgabe 20:
Ein Punkt bewegt sich in der xy-Ebene auf einer Kurve $y = f(x)$, deren Steigung in jedem Punkt (x, y) durch $-\sin(x)$ gegeben ist. Berechnen Sie die Gleichung der Kurve, die durch $(0, 2)$ geht. Zeichnen Sie die Kurve.

Aufgabe 21:
Eine Kurve erfüllt die Bedingung $y''(x) = 6x$. Sie besitzt bei $x = 1$ die Tangente $y = 5 - 3x$.

Aufgabe 22:
Zeigen Sie, dass für zwei stetige Funktionen f und g gilt:

$$\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$$

Aufgabe 23:
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx$ $\int \frac{x^2 - [illegible]}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$ $\int x\sqrt{x^2 + 8x + 25}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\int \frac{1}{\sqrt{[illegible]}}\,dx$ $\int \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 11}\,dx$ $\int \sqrt{-x^2 - 6x}\,dx$ $\int \frac{[illegible]}{1 - x^2}\,dx$

Aufgabe 24:
Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $p(x)$ mit der Ordnung n gilt:

$$\int p(x)e^x\,dx = \left(p(x) - p'(x) + p''(x) - \ldots \pm p^{(n)}(x)\right)e^x + C$$

Wenden Sie dies auf $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ an.

Aufgabe 25:
Geben Sie Funktionen an, die folgende Bedingungen erfüllen:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 0$ b) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sin^2 t} - \sin t$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

c) $f''(x) = x + \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Blatt 5
Ausgabe: 02.05.2006

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Zur einfacheren Ergebniskontrolle wurden - sofern verfügbar - die Nummern der Aufgaben aus dem Buch "Leupold: Analysis für Ingenieure" angegeben.

Aufgabe 26:
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

[illegible]) $\int x^2 \sin x\,dx$ [illegible]) $\int x \sin^2 x\,dx$ [illegible]) $\int x \sin\left(x^2\right) dx$

[illegible]) $\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx$ 2x [illegible]) $\int x^2 \cosh \frac{x}{a}\,dx$ [illegible]) $\int \arctan x\,dx$

[illegible]) $\int x \arctan x\,dx$ [illegible]) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ [illegible]) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

Aufgabe 27:
Die beiden Kurven

[illegible]) $y^2 = x(5-x)^2$ [illegible]) $y^2 = x^2(x+3)$

enthalten Schleifen. Skizzieren Sie die Kurven **ohne** Verwendung eines Taschenrechners und berechnen Sie die durch die Schleifen eingeschlossenen Flächen.

Aufgabe 28:
Berechnen Sie die folgenden Integrale

[illegible]) $\int \frac{2x+1}{x^2-10x+25}\,dx$ [illegible]) $\int \frac{x+2}{(x-1)(1-x)}\,dx$ [illegible]) $\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$

430) $\int \frac{x-1}{x^2+2x-1}\,dx$ 431) $\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}\,dx$ [illegible]) $\int \frac{11x+16}{x^2-2x-8}\,dx$

433) $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$ 434) $\int \frac{5x^2-24x+21}{x^3-7x^2+8x+16}\,dx$ 435) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$!

Subst: $u = \tan x$
1. a $u = \tan \frac{x}{2}$
2. $t = u-1$

Aufgabe 29:
Integrieren Sie folgende Funktionen

[illegible]$(x) = \frac{3x-2}{x^4-x^3}$ [illegible]$(x) = \frac{x^2-5}{(x-1)(x^2-2x+2)}$ [illegible]$(x) = \frac{(4e^x+5)e^x}{e^{2x}+e^x-2}$

Aufgabe 30:
Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen.

[illegible]) $f(x) = \int_1^x \sin^5 u\,du$ b) $f(x) = \int_1^{e^x} t \ln t\,dt$ c) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \sin\left(t^2\right) dt$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass eine Stammfunktion des Integranden bekannt ist.

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Blatt 5
Ausgabe: 09.05.2006

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Aufgabe31:
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

1) $\cancel{\int_{-\infty}^{2} e^{\frac{x}{3}} dx}$ 2) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ 3) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ 4) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ 6) $\int_{0}^{1} \ln x dx$ 7) $\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}}$ 8) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$

$y = x^2$?

Aufgabe 32:
Gesucht sind die Cauchyschen Hauptwerte, falls sie existieren

1) $\int_{-4}^{2} \frac{1}{x} dx$ 2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ 3) $\cancel{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sin x}}$

Aufgabe 33:
Aus einer integrierbaren Funktion $f(t)$ kann, wenn das uneigentliche Integral existiert, eine neue Funktion $F(s)$ berechnet werden mittels

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Fallunterscheidung
für s

Bestimmen Sie, für welche reellen s das uneigentliche Integral existiert und geben Sie die zugehörige Funktion $F(s)$ an

a) $f(t) = 1$ b) $f(t) = t$ c) $f(t) = t^2$

d) $f(t) = e^{2t}$ e) $f(t) = \cos(t)$ f) $f(t) = \sin(\omega\ t)$

[redacted]

Wie lang ist die Kurve $x = \frac{1}{3}(y-3)\sqrt{y}$ im Intervall $y \in [0,1]$?

Aufgabe 35:
Wie lang ist die Kurve $y^2 = x^3$ zwischen den Schnittpunkten mit der Geraden $x = 4/3$?

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Blatt 7
Ausgabe: 18.05.2006

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Aufgabe 36:

Berechnen Sie die folgenden Integrale über komplexwertige Funktionen

1) $\int (x+2j)\,dx$ 2) $\int (x+2j)^2\,dx$ 3) $\int_0^{2\pi} \sinh(jx)\,dx$ 4) $\int \frac{dx}{x+1+j}$

Zeigen Sie, dass für jedes komplexe $\alpha \neq 0$ gilt

$$5)\ \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$$

Aufgabe 37: (Eine Wasseruhr)

Ein Wassertank wurde durch Rotation der Kurve $y = kx^4,\ k > 0$ um die y-Achse erzeugt.

a) Berechnen Sie das Volumen des Wassers $V(y)$ in Abhängigkeit von der Wassertiefe y.

b) Nehmen Sie an, dass das Wasser durch ein kleines Loch am Boden des Tanks ausläuft. Zeigen Sie mit Hilfe des Gesetzes von Torricelli, $\frac{dV}{dt} = -c\sqrt{y}$, das einen Zusammenhang zwischen Ausflussgeschwindigkeit und Wasserhöhe angibt, dass die Wasseroberfläche mit einer konstanten Rate absinkt.

~~Aufgabe 38:~~

Berechnen Sie die ~~Oberfläche~~ und das ~~Volumen~~ des Körpers, der durch Rotation von $y = \sqrt{x}(3-x)/3,\ x \in [0,3]$ um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 39:

Der Körper, der durch Rotation der Kurve $(y-b)^2 + x^2 = a^2,\ 0 < a < b$ um die x-Achse entsteht, wird Kreisring oder auch Torus genannt. Berechnen Sie seine Oberfläche und ~~sein Volumen~~.

Aufgabe 40:

Das Integral $\int_0^2 e^{-x} \sin x\,dx$ soll mit Hilfe des Trapezverfahrens bzw. des Simpsonverfahrens numerisch integriert werden. Geben Sie in beiden Fällen die Zahl der Funktionswerte an, die berechnet werden müssen, damit der absolute Fehler $\leq 10^{-4}$ wird.

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

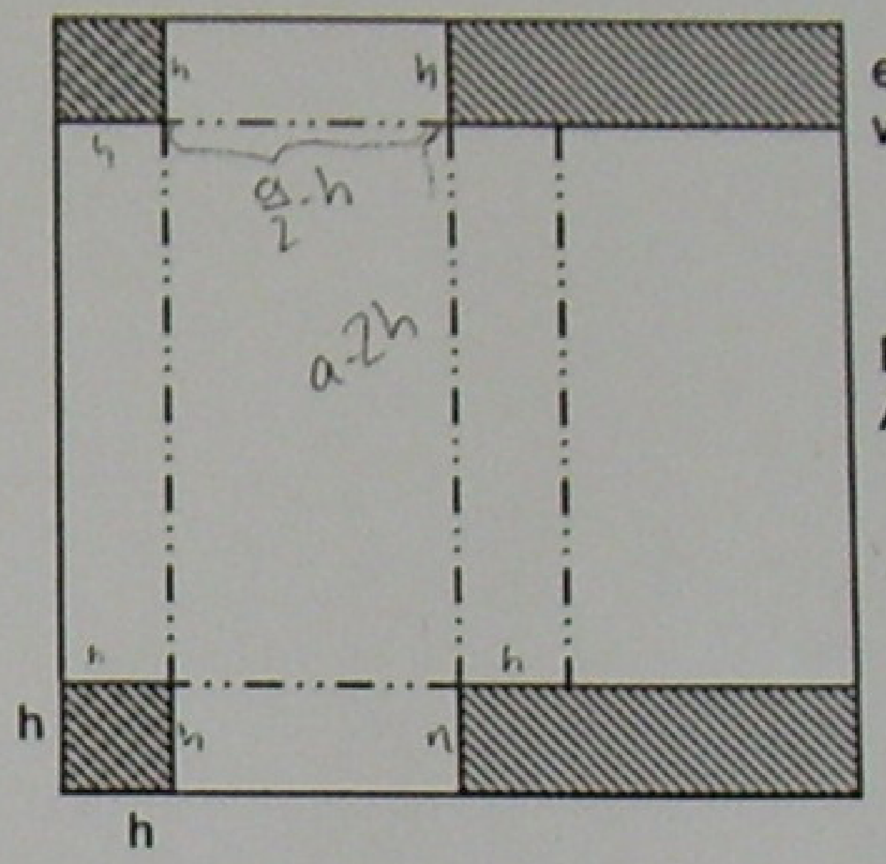
effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Blatt 8
Ausgabe: 23.05.2006

Aufgabe 41:
Aus einem quadratischen Stück Pappe wird nach Ausschneiden der schraffierten Bereiche eine quaderförmige Schachtel mit Deckel hergestellt.
Für welche Höhe h wird das Volumen maximal?



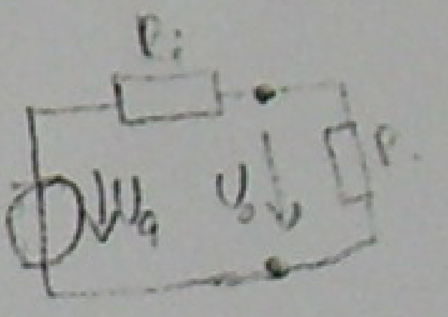
Aufgabe 42:

a) Eine reelle Zahl z ist in zwei positive Summanden zu zerlegen, so dass deren Produkt am größten wird.

b) Eine reelle Zahl z ist in zwei positive Summanden zu zerlegen, so dass die Summe ihrer Quadrate minimal wird.

c) Eine reelle Zahl z ist in zwei positive Faktoren zu zerlegen, so dass deren Summe am kleinsten wird.

Aufgabe 43:
An eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Ohmschen Widerstand R angeschlossen. Bestimmen Sie den Widerstand R, bei dem die Leistung am Verbraucher maximal ist.



Aufgabe 44:
Zur Bestimmung einer Messgröße X werden n Messungen durchgeführt. Die Messergebnisse werden mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet. Berechnen Sie den Wert $\overline{x}$, der die Summe der Fehlerquadrate $s(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - x_k)^2$ minimiert.

$s'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - x_k) = 0$ $\quad \sum 2x - \sum 2x_k = 0$ $\quad n2x - \sum 2x_k = 0$ $\quad \frac{\sum 2x_k}{2n} = \overline{x}$

Aufgabe 45i: (für Informatiker)
Schreiben Sie ein Unterprogramm, das mittels Simpsonformel eine numerische Integration durchführt. Ein möglicher Prototyp könnte sein:

```
float simpson( float (*f)(float), float a, float b, int n);
```

Testen Sie die Routine anhand von Funktionen, von denen Sie wissen, dass die Simpsonintegration exakt ist.

Aufgabe 45e: (für Elektrotechniker)
Aus einem leitfähigen Material wir ein Rotationskörper gefertigt. Er wird anschließend and den beiden kreisförmigen Randflächen elektrisch kontaktiert.

a) Geben Sie an, wie der elektrische Widerstand des Rotationskörpers aus der Berandungskurve, die durch die Funktion f(x) beschrieben wird, zu berechnen ist. Die Leitfähigkeit soll dabei entlang der Rotationsachse noch ortsabhängig sein.

b) Testen Sie das Ergebnis aus a) durch die Berechung des Widerstandes eines Drahtes mit konstanter Leitfähigkeit.

c) Geben die den elektrischen Widerstand eines Konus mit konstanter Leitfähigkeit an.

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Blatt 9
Ausgabe: 30.05.2006

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

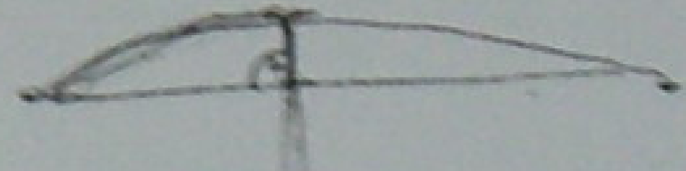
~~Aufgabe 46:~~

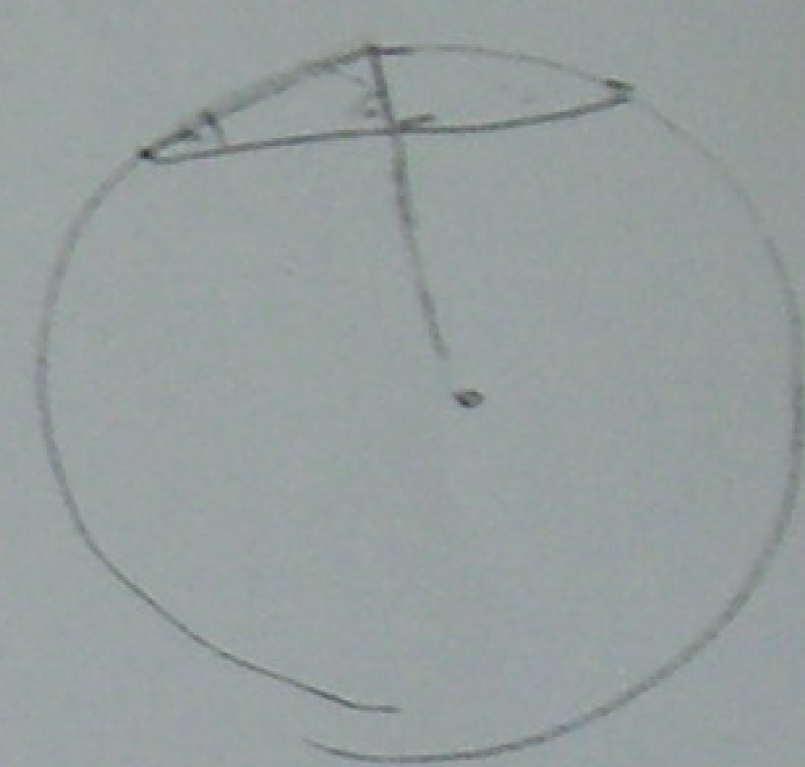
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert durch Potenzreihenentwicklung

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}.$$ 3 Stellen im Bruch abschreiben

Aufgabe 47:

Die Deutsche Bundesbahn plant eine neue Zugstrecke zwischen A-Stadt und B-Dorf. Die Entfernung zwischen den Orten beträgt exakt 100 km. Beim Bau der Strecke wird aus Versehen 1 m Gleis zuviel verwendet. Die tatsächliche Trasse läuft jetzt zwischen A-Stadt und B-Dorf entlang eines Kreisbogens. Berechnen Sie in niedrigster Ordnung den Abstand, den dieser Kreisbogen von der geplanten direkten Bahnstrecke hat. Gehen Sie bei Ihren Berechnungen davon aus, dass die Erde eine Scheibe ohne Berge ist (z.B. Münsterland).





~~Aufgabe 48:~~

Die Funktion $f(x)=\sin^2 x$ ist an der Stelle $x_0=0$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Es sind die ersten vier Glieder anzugeben. ⇒ 1. 8 Ableitungen

die ≠0 sind

~~Aufgabe 49:~~

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihen Vorzahl/Quotientenkriterium

Konvergenzradius

a) $\frac{z-j}{2}+\frac{(z-j)^2}{2^2}+\frac{(z-j)^3}{2^3}+\frac{(z-j)^4}{2^4}+\ldots$

b) $(z+2j)+\frac{(z+2j)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(z+2j)^3}{\sqrt{3}}+\frac{(z+2j)^4}{\sqrt{4}}$

c) $\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\frac{z^3}{12}+\frac{z^4}{20}+\frac{z^5}{30}+\frac{z^6}{42}+\ldots$

d) $z-1+\frac{(z-1)^2}{2^3}+\frac{(z-1)^3}{3^4}+\frac{(z-1)^4}{4^5}+\ldots$

Aufgabe 50: wie 48

Geben Sie die Taylorpolynome $p_k(x)$ der Ordnungen $k=0,\ldots,4$ für die Taylorentwicklung um den Punkt $x=x_0$ der folgenden Funktionen an

a) $f(x)=e^x,\ x_0=1$

b) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=-1$

c) $f(x)=\ln x,\ x_0=1$

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Blatt 10
Ausgabe: 06.06.2006

Aufgabe 51:

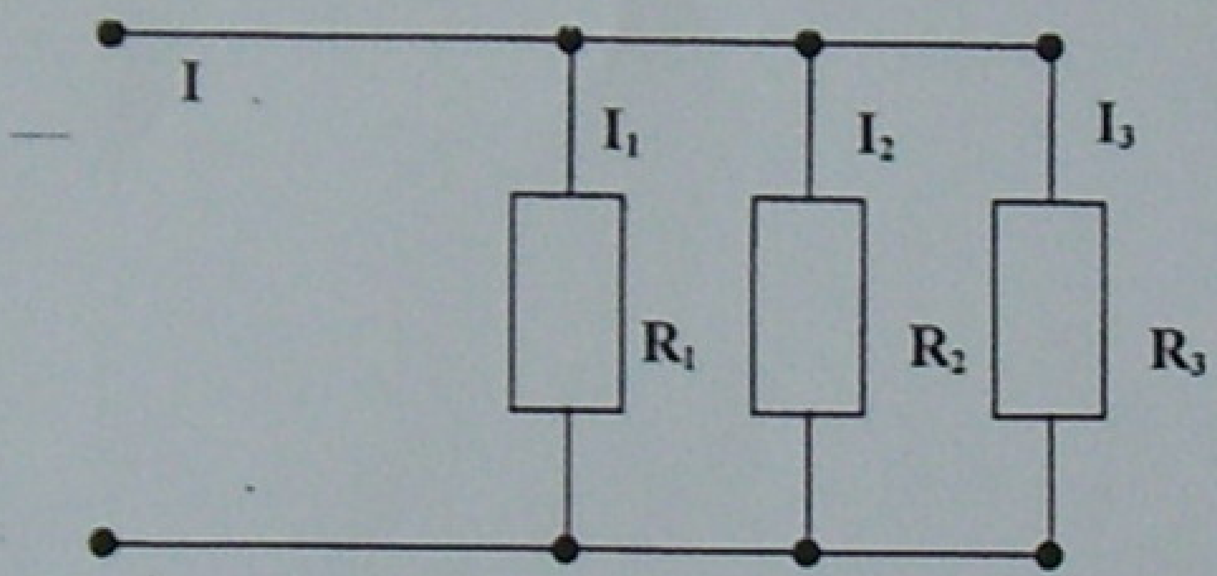
Zeigen Sie, dass für die nachfolgendenden Funktionen gilt $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ **b)** $f(x,y) = e^x \cos(y)$ **c)** $f(x,y) = e^{x-y^2}$

Aufgabe 52:

Der Strom I teilt sich in der folgenden Schaltung in die drei Teilströme I_1, I_2, I_3 auf.

Zeigen Sie, dass bei festem Gesamtstrom I die Teilströme sich so einstellen, dass die Gesamtleistung der Schaltung minimal wir.



$I = I_1 + I_2 + I_3$

$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$ $I_1 = \frac{U}{R_1}$

$I_2 = \frac{U}{R_2}$

$R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}}$ $I_3 = \frac{U}{R_3}$

Aufgabe 53:

Bestimmen Sie alle relativen Minima und Maxima sowie die Sattelpunkte der Funktionen

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 y - 6y^2 - 3x^2$

c) $f(x,y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2} y^2$

Aufgabe 54:

Zeigen Sie, dass für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(u)$ das orts- und zeitabhängige elektrische Potential $\varphi(x,t) = f(k\,x - \omega\,t)$ die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}$$

erfüllt. Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit *c* und den Konstanten *k* und ω an. Welche physikalische Bedeutung haben diese Größen?

$f \cdot \lambda = c$

$\frac{2 \cdot \pi}{k}$ = Wellenlänge = ω

Aufgabe 55:

Untersuchen Sie die Extrema der Funktion $f(x) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Erklären Sie das Ergebnis!

Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Übungen zur Mathematik 2

SS 2006

Fachbereich Elektrotechnik
und Informatik

Prof. Dr. Hans Effinger

effinger@fh-muenster.de
www.et.fh-muenster.de

Blatt 11
Ausgabe: 20.06.2006

Aufgabe 56:

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = -y^2$. $= f(x,y)$

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld und die Isoklinen der Differentialgleichung. Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen den Verlauf der Lösungen der Differentialgleichungen mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, bzw. $y(0) = 0$.

b) Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichung für die drei Anfangswerte. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit **a)**.

Aufgabe 57:

Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen

a) $y' = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{y^2 - 9}$ (713)

b) $xy' - ay' - y + b = 0$ (712)

c) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = 0$ (715)

d) $y' - xy + x\sqrt{y} = 0$ (714)

Aufgabe 58:

Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen

a) $y' = \sin(x - y)$ b) $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ c) $y^2 - x^2 + xyy' = 0$ d) $y' = \dfrac{1}{x + y + 1}$

Aufgabe 59:

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme

a) $y'y^2 + x^2 - 1 = 0$ $\quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1$ (719)

b) $y'(1 + 11x^2) - \dfrac{1}{y} = 0$ $\quad x_0 = \sqrt{11}, \quad y_0 = 16$ (723)

Aufgabe 60:

Suchen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ $\quad c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + x + 2$

b) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

c) $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x}$ $\quad c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + (x - \frac{3}{2}) e^{3x}$

d) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ $\quad c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + x e^{2x}$

e) $y'' - 3y' + 2y = \underbrace{2x + 1}_{h_1} + \underbrace{e^{2x}}_{h_2}$ $\quad c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + x + 2 + x e^{2x}$

f) $y'' - 3y' = 2x + 1$ $\quad c_1 + c_2 e^{3x} - (\frac{1}{3}x + \frac{5}{9})x$

g) $y'' - 3y' + 2y = \cos(2x)$

~~h) $y'' - 3y' + 2y = x\cos(2x) - 2\sin(2x)$~~

i) $y'' + 4y = \cos(2x)$ $\quad c_1 \cos(2x) + \sin(2x)(\frac{x}{4} - c_2)$

$\rightarrow c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{20}(3\sin(2x) + \cos 2x)$