Aufgabe 1 Zeigen Sie jeweils, dass die Menge M abzählbar ist, indem Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbf{N} \to M$ angeben.

a) $M = \mathbf{N}$ b) $M = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ c) $M = \mathbf{Z}$ d) $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$

Tipp zu d): Nutzen Sie, dass sich jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt einer Zweierpotenz und einer ungeraden Zahl darstellen lässt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie:

a) $n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad (n \in \mathbf{N})$

b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad (n \in \mathbf{N})$

c) $\sum_{l=0}^{n} 2^l = 2^{n+1} - 1 \quad (n \in \mathbf{N})$

d) $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1} \quad (k \in \mathbf{N})$

e) $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} \quad (k, n \in \mathbf{N})$

f) $2^n \leq n! \quad (n \in \mathbf{N},\ n \geq 4)$

g) $\sum_{k=1}^{m} = (-1)^k\, k^2 = (-1)^m \binom{m+1}{2} \quad (m \in \mathbf{N})$

h) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \binom{n+1}{2}^2 \quad (n \in \mathbf{N})$

i) $\prod_{m=0}^{n} (1 + x^{2^m}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}, x \neq 1)$

j) $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad (k, n \in \mathbf{N}, k \leq n)$

Aufgabe 3 Nachfolgend sind jeweils die ersten Glieder einer Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ angegeben. Geben Sie jeweils eine explizite Bildungsvorschrift für alle Glieder der Folge an. Geben Sie bei c), d), g), h) und l) auch eine rekursive Bildungsvorschrift an. Untersuchen Sie jeweils, ob die Folge monoton, beschränkt oder alternierend ist. Geben Sie jeweils $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ und $\min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ an, falls diese existieren.

a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{25}, \frac{9}{36}, \ldots$

b) $-1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{4}, -3, \frac{1}{8}, -4, \frac{1}{16}, \ldots$

c) $\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \ldots$

d) $0{,}2\,;\ 0{,}04\,;\ 0{,}008\,;\ \ldots$

e) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$

f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

g) $0{,}2\,;\ 0{,}22\,;\ 0{,}222\,;\ \ldots$

h) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

i) $\frac{2}{3}, 1, \frac{8}{7}, \frac{11}{9}, \frac{14}{11}, \frac{17}{13}, \ldots$

j) $2, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \ldots$

k) $1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \ldots$

l) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots$

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$

b) $f(n) = 2n$

c) $f(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{array} \right\}$

d) $f = g^{-1}$, mit $g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $a_n = \frac{2n-1}{(n+1)^2}$, streng monoton fallend ab $n = 2$, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{1}{3}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 0$, kein Minimum

b) $a_n = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{n+1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{für } n \text{ gerade} \end{array} \right\}$,
nicht monoton, nach oben beschränkt, nach unten unbeschränkt, alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{1}{2}$, kein Infimum

c) $a_n = 5^{(1-\frac{1}{2^n})}$ oder $a_1 = \sqrt{5}, a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$, streng monoton wachsend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 5$, kein Maximum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \sqrt{5}$

d) $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ oder $a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$, streng monoton fallend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{1}{5}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 0$, kein Minimum

e) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$,
streng monoton wachsend, nach oben unbeschränkt, nach unten beschränkt, nicht alternierend,
kein Supremum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{1}{2}$

f) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, nicht monoton, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 1$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 0$

g) $a_n = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ oder $a_1 = 0{,}2\,, a_{n+1} = a_n + 2\frac{1}{10^{n+1}}$,
streng monoton wachsend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{2}{9}$, kein Maximum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 0{,}2$

h) $a_n = \frac{1}{n!}$ oder $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, streng monoton fallend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 1$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 0$, kein Minimum

i) $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$, streng monoton wachsend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{3}{2}$, kein Maximum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{2}{3}$

j) $a_n = \sqrt{3n+1}$,
streng monoton wachsend, nach oben unbeschränkt, nach unten beschränkt, nicht alternierend,
kein Supremum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 2$

k) $a_n = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{für } n \text{ durch 3 teilbar} \\ 1 & \text{für } n \text{ nicht durch 3 teilbar} \end{array} \right\}$, nicht monoton, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = 1$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = -1$

l) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$ oder $a_1 = -\frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$, nicht monoton, beschränkt, alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \frac{1}{6}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = -\frac{1}{2}$