A1

b) $8\int \frac{1}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx$

Hornerschema:

	1	-2	4	-8
$x_0 = 2$		2	0	8
	1	0	4	$\underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+4)$

$$8\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x^2+4)}\,dx = 8\int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B_0x+B_1}{x^2+4}\,dx$$

$$Z(x) = A(x^2+4) + B_0x(x-2) + B_1(x-2) = 1$$

$$Z(2) = 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$Z(0) = 4A - 2B_1 = 1 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{4}$$

$$Z(1) = 5A - B_0 - B_1 = 1 \Rightarrow B_0 = -\frac{1}{8}$$

$$8\int \frac{1}{8}\,\frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

subst. $u = x^2+4$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$= \ln(x-2) - \frac{2}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,du$$

$$= \underline{\underline{\ln(x-2) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4)}}$$

A1

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan u$

$\frac{dx}{du} = 2\frac{1}{1+u^2}\,; \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$

$$2\int \frac{1}{1-\frac{2u}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2}\, du = 2\int \frac{1}{u^2-2u+1}\, du$$

$$= 2\int \frac{1}{(1-u)^2}\, du = 2\left[\frac{1}{1-u}\right]_{u(-\frac{\pi}{2})}^{u(0)} = 2\left[\frac{1}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{1}}$$

A2|

$f_{1x}(x,y) = 2xy - 4x \overset{!}{=} 0$ notw. Bedingungen

$f_{1y}(x,y) = x^2 - 12y - 12 \overset{!}{=} 0$

$f_{1x}(x,y) = 2x(y-2) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$y_1 = 2$

$f_{1y}(x_0,y) = 0^2 - 12y - 12 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y_0 = -1$

$f_{1y}(x,y_1) = x^2 - 12 \cdot 2 - 12 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

↳ es gibt 3 mögliche Extremstellen!

hinreichende Bedg. für Extremwerte:

$f_{1xx}(x,y) = 2y - 4 \quad ; \quad f_{1yy}(x,y) = -12$

$f_{1xy}(x,y) = f_{1yx}(x,y) = 2x$

1) für $S(x_0, y_0) = S(0,-1)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{1xx}(x_0,y_0) & f_{1yx}(x_0,y_0) \\ f_{1xy}(x_0,y_0) & f_{1yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = -6 \cdot (-12) - (2 \cdot 0)^2 = 72 > 0$$

↳ es existiert eine Extremstelle!

$f_{1xx}(x_0,y_0) = -6 < 0$ ↳ Maximum

2) für $S(6,2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{1xx}(x_1,y_1) & f_{1yx}(x_1,y_1) \\ f_{1xy}(x_1,y_1) & f_{1yy}(x_1,y_1) \end{vmatrix} = 0 - (12)^2 = -144 < 0$$

↳ Sattelpkt.

3)

$$\Delta = \ ... \ = 0 - (-12)^2 = -144 < 0$$

↳ Sattelpkt.

A3

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-\underset{=0}{x_0})^n$ ← Potenzreihe

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)!}}\cdot\cancel{(n+1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \longrightarrow \underline{e}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underset{\to 0}{\frac{n}{2}}\cdot\underset{\to 0}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n \quad \text{l'hopital } (0\cdot 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\underset{\to 1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\underset{\to 0}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}\right)^n \longrightarrow 0$$

⤵ notw. Bedg. erfüllt!

WK:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\underset{\to 1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{\to 0}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow 0 < 1$$ ⤵ Reihe ist konvergent!

hinreichende Bedg. erfüllt!

A 4

$$f(x) \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} - 3\,\frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

$$f(x) = e^{\sin(x)} \qquad \Rightarrow f(x_0) = 1$$

$$f'(x) = \cos(x)\, e^{\sin(x)} \qquad \Rightarrow f'(x_0) = 1$$

$$f''(x) = \cos^2(x)\, e^{\sin(x)} - \sin(x)\, e^{\sin(x)} \qquad \Rightarrow f''(x_0) = 1$$

$$f'''(x) = \underline{-2\cos(x)\sin(x)\, e^{\sin(x)}} + \cos^3(x)\, e^{\sin(x)}$$

$$\underline{- \sin(x)\cos(x)\, e^{\sin(x)}} - \cos(x)\, e^{\sin(x)}$$

$$= e^{\sin x}\left[-3\sin(x)\cos(x) + \cos^3(x) - \cos(x)\right] \Rightarrow f'''(x_0) = 0$$

$\cancel{f^{IV}(x)}$

NR:

$$\big(\underset{u}{\sin(x)}\,\underset{v}{\cos(x)}\big)' = \underset{u'\,v}{\cos^2(x)} - \underset{v\,u'}{\sin^2(x)}$$

$$\big(\underset{\substack{u \cdot v \\ \cos(x)\cdot\cos^2(x)}}{\cos^3(x)}\big)' = -\underset{u'}{\sin(x)}\,\underset{v}{\cos^2(x)} - \underset{u}{\cos^2(x)}\,\underset{v'}{2\sin x}$$

$$= -3\sin(x)\cos^2(x)$$

$$f^{IV}(x) = e^{\sin x}\left(-3\cos^2(x) + 3\sin^2(x) - 3\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\right)$$

$$+ e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\left[-3\sin(x)\cos(x) + \cos^3(x) - \cos(x)\right]$$

$$= \left[-6\sin(x)\cos^2(x) + \cos^4(x) \cancel{+} - 4\cos^2(x) + 3\sin^2(x)\right.$$

$$\left. + \sin(x)\right] e^{\sin x} \qquad \Rightarrow f^{IV}(x_0) = -3$$

A6

$$y'' - (2+a)y' + 2ay = e^{2x}$$

Lsg. d. homg. Dgl.:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (2+a)\lambda + 2a = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2+a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2+a}{2}\right)^2 - 2a} =$$

$$= 1 + \frac{a}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a - 2a}$$

$$= 1 + \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 + \frac{a}{2} + 1 - \frac{a}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{a}{2} - 1 + \frac{a}{2} = a$$

da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{ax}$$

~~Lsg~~ partikuläre Lsg.

$$h(x) = e^{\overset{b}{2x}} \cdot 1 \rightarrow \text{polynom 1. Grades}$$

da $\lambda_1 = b = 2$: (einfache Resonanz)

$$y_p = e^{2x} \, x \, c$$

$$y_p' = c e^{2x} + 2cx e^{2x} \quad ; \quad y_p'' = 4c e^{2x} + 4cx e^{2x}$$

einsetzen und Koeffizientenvgl.

$$\cancel{e^{2x}}(4c + 4cx - (2+a)(c + 2cx) + 2acx) = \cancel{e^{2x}}$$

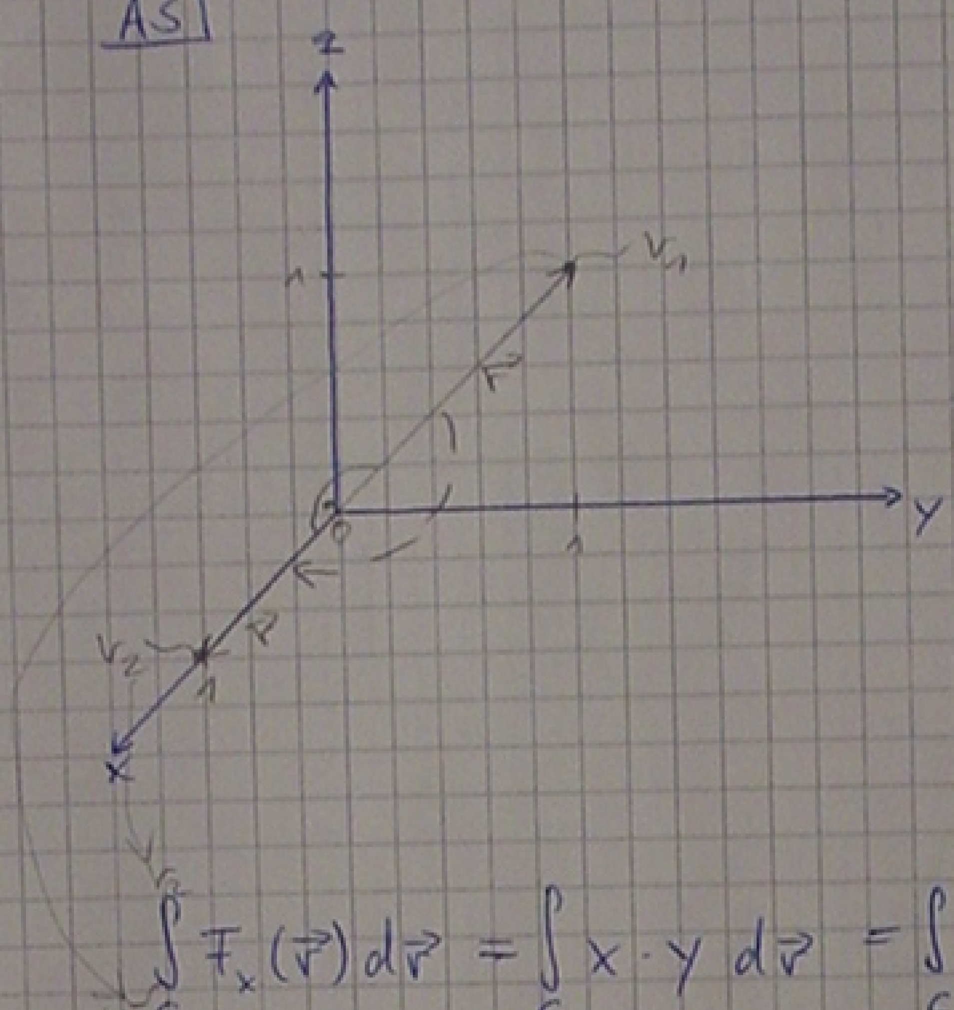
x^0: $4c - 2c - ca = 1 \curvearrowright c = \frac{1}{2-a}$; x^1: $0 \cdot x = 0$

A6) ...

allg. Lsg. d. Dgl.

$$y = y_h + y_p = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{ax}}_{y_h} + \underbrace{e^{2x} \frac{x}{2-a}}_{y_p}$$

A5)



$$\int_C F_x(\vec r)\, d\vec r = \int_C x \cdot y \, d\vec r = \int_C \underset{u'}{\sin t} \cdot \underset{v'}{\cos t}\, dt$$

$$= -\underset{u \cdot v}{\cos^2 t} - \int \sin t \cos t \, dt \quad \Big| + \int \sin t \cos t \, dt$$

$$2 \int \sin t \cos t \, dt = -\cos^2 t$$

$$\int_C F_x(\vec r)\, d\vec r = -\frac{1}{2} \cos^2 t + C$$

$$\left[-\frac{1}{2} \cos^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_C F_y(\vec r)\, d\vec r = \int_C x^2 z \, d\vec r = \int \underset{u}{\sin^2 t} \, \underset{v'}{\cos t} \, dt$$

$$= \sin^3 t - \int 2 \sin^2 t \cos t \, dt \quad \Big| + 2 \int \sin^2 t \ldots$$

$$\Rightarrow \int_C F_y(\vec r)\, d\vec r = \frac{1}{3} \sin t + C$$

$$\left[\frac{1}{3} \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\int_C F_z(\vec r)\, d\vec r = \int \cos^2 t \, dt = \sin t \cos t + \int \underset{1 - \cos^2 t}{\sin^2 t} \, dt$$

$$\Rightarrow \int_C F_z(\vec r)\, d\vec r = \frac{1}{2} (\sin t \cos t + 1) + C$$

$$= \left[\frac{1}{2} (\sin t \cos t + 1) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_C F(\vec r)\, d\vec r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$ Potentialfeld?

Prof. Dr. H. Effinger

Fachhochschule Münster
FB Elektrotechnik
14.07.2000

Klausur Mathematik 2

Zugelassene Hilfsmittel:	**eine** Formelsammlung
Nicht zugelassen:	Taschenrechner, Vorlesungsskript, Lehrbücher, Aufgabensammlungen, Mitschrift der Übungen

Aufgabe 1: (14 Punkte)
Berechnen Sie die beiden Integrale durch Rückführung auf Grundintegrale

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1-\sin x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{8}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - 6y^2 - 2x^2 - 12y - 6$$

Aufgabe 3: (9 Punkte)
a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$x + \frac{2x^2}{2^2} + \frac{2\cdot 3x^3}{3^3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4x^4}{4^4} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x^5}{5^5} + \dots$$

b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\sin(1/n)\right)^n$

Aufgabe 4: (8 Punkte)
Die Funktion

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Geben Sie die Glieder bis einschließlich $n = 4$ an.

Aufgabe 5: (12 Punkte)

a) Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ für $\bar{F}(\bar{r}) = (xy,\ \ x^2z,\ \ yz)$ und den Weg $\bar{r}(t) = (\sin t,\ \ \cos t,\ \ \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Ist $\bar{F}(\bar{r})$ ein Potentialfeld? Begründung!

b) Geben Sie für des Vektorfeld $\bar{F}(\bar{r}) = (x\cos(x^2+y^2)+y^2,\ \ y\cos(x^2+y^2)+2xy)$ ein Potential an. Bestimmen Sie das Linienintegral für eine Kurve von $P_1 = (0, \sqrt{\pi})$ nach $P_2 = (\sqrt{\pi/2}, 0)$.

Aufgabe 6: (14 Punkte)
Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung $y'' - (2+\alpha)y' + 2\alpha y = e^{2x}$ für beliebige reelle α an. Achten Sie auf Resonanzen!