Aufgabe 1 Untersuchen Sie jeweils die Funktion f auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich auf Stetigkeit. An welchen Unstetigkeitsstellen ist f stetig ergänzbar?

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ c) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{4-2x}$ e) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ f) $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

Aufgabe 2 Wie sind jeweils die Parameter $a, b \in \mathbf{R}$ zu wählen, damit f stetig auf ganz $\mathbf{R}$ ist?

a) $f(x) = \begin{Bmatrix} ax^2+3 & \text{für } x > 1 \\ x+1 & \text{für } x \le 1 \end{Bmatrix}$ b) $f(x) = \begin{Bmatrix} -x-1 & \text{für } x < -1 \\ a\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in [-1,1] \\ \sqrt{x+3} & \text{für } x > 1 \end{Bmatrix}$

c) $f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{a}{x^2+1} & \text{für } x \le 0 \\ \frac{\sin(x/2)}{2x} & \text{für } x > 0 \end{Bmatrix}$ d) $f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x^2-4} - \left(\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}\right) & \text{für } x \in \mathbf{R} \setminus \{-2,2\} \\ 0 & \text{für } x \in \{-2,2\} \end{Bmatrix}$

Aufgabe 3 Geben Sie jeweils zu der angegebenen Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ die größtmögliche Definitionsmenge D_f und die zugehörige Wertemenge W_f an.

a) $f(x) = \frac{2\sin x}{2+\mathrm{e}^{-x}}$ b) $f(x) = \sqrt{\ln(4x - x^2)}$ c) $f(x) = \sqrt{\ln\frac{1}{|\cos x|}}$ d) $f(x) = \operatorname{artanh} x^2$

e) $f(x) = \coth\sqrt{x}$ f) $f(x) = \frac{1}{1-\ln|x|}$ g) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ h) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 4 Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x\uparrow 1} 2^{\frac{1}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\downarrow\frac{\pi}{4}} 3^{\tan 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x \quad (\alpha > 0)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ j) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(1+\tan x)^{\cot x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} \quad (\alpha > 0)$ o) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\ln x$ p) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$

Tipps: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

Aufgabe 5 Wie lautet jeweils zu der angegebenen Gleichung die Lösungsmenge für x?

a) $4\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ b) $\tan x + \tan 2x = 0$ c) $\sin 2x - \cos 2x = 1$

d) $\sin + \sin 2x + \sin 3x = 0$ e) $2\sin x + \cos^2 x = \frac{7}{4}$ f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

g) $4\log_4(\log_3 x^2) = \log_2 4$ h) $\ln x + \ln 2 = \ln(x+1) + \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ i) $(\frac{2}{3})^{\ln x} + (\frac{3}{2})^{\ln x} = \frac{13}{6}$

j) $\mathrm{e}^x + 6\mathrm{e}^{-x} - 5 = 0$ k) $(1+\mathrm{e})\sinh\frac{x}{3} + (1-\mathrm{e})\cosh\frac{x}{3} = \mathrm{e} - 1$ l) $\frac{1}{5-\ln x} + \frac{2}{1+\ln x} - 1 = 0$

Aufgabe 6 Vereinfachen Sie jeweils den angegebenen Ausdruck:

a) $\frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\sqrt{1-x^2}\tan(\arcsin x)$ c) $\frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$ d) $\frac{\cot x_1 \cot x_2 - 1}{\cot x_1 + \cot x_2}$

e) $\operatorname{arsinh}\left(\frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$ f) $\operatorname{arcosh} 1$ g) $\operatorname{artanh}\frac{\mathrm{e}^4-1}{\mathrm{e}^4+1}$ h) $\operatorname{arcoth}\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}$

Aufgabe 7 Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in \mathbf{R}$ mit $\sin\alpha \ne 0$ und alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Aufgabe 8 Skizzieren Sie jeweils den Graphen von f für a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, b) $f(x) = |\sin(x - \frac{\pi}{2})|$, c) $f(x) = \sin|(x - \frac{\pi}{2})|$, d) $f(x) = \sin 2x$, e) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

Lösungen zu Aufgabe 1

a) stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

b) stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, stetig ergänzbar in -3

c) stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

d) stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{2\}$, stetig ergänzbar in 2

e) stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{k\pi/2 \,|\, k \in \mathbf{Z}\}$, stetig ergänzbar in 0

f) stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

Lösungen zu Aufgabe 2

a) $a = -1$ b) $a = b = 1$ c) $a = 1/4$ d) $a = 1/4, \quad b = -1/4$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $D_f = \mathbf{R},\ W_f =]-1, 1[$

b) $D_f = [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}],\ W_f = [0, \sqrt{\ln 4}]$

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbf{Z}\},\ W_f = [0, \infty[$

d) $D_f =]-1, 1[,\ W_f = [0, \infty[$

e) $D_f =]0, \infty[,\ W_f =]1, \infty[$

f) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-\mathrm{e}, 0, \mathrm{e}\},\ W_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

g) $D_f = \mathbf{R},\ W_f =]0, 1]$

h) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\},\ W_f =]0, 1[$

Lösungen zu Aufgabe 4

a) 0 b) 0 c) 1 d) ∞ e) 1 f) $\frac{2}{3}$ g) $\frac{1}{2}$ h) e^a

i) e j) e k) 0 l) 0 m) 0 n) 0 o) 0 p) 1

Lösungen zu Aufgabe 5

a) $\left\{\pm \arcsin \sqrt{\tfrac{1}{5}} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{3}k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{4} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{2}k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$

f) $\mathbf{R}$

g) $\{-3, 3\}$

h) $\{\frac{1}{9}\}$

i) $\{\frac{1}{10}, 10\}$

j) $\{3\}$

k) $\{\ln 2, \ln 3\}$

l) $\{\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3\}$

Lösungen zu Aufgabe 6

a) 1 b) x c) $\tan(x_1 + x_2)$ d) $\cot(x_1 + x_2)$ e) 1 f) 0 g) 2 h) 1