Aufgabe 1 Beweisen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbf{N}_0$ ist $x \mapsto x^{2n}$ eine gerade und $x \mapsto x^{2n+1}$ eine ungerade Funktion auf $\mathbf{R}$.

b) Ist f eine beliebige Funktion auf $\mathbf{R}$, so ist durch $g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ eine gerade Funktion g und durch $u(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ eine ungerade Funktion u auf $\mathbf{R}$ gegeben.

c) Jede beliebige Funktion f auf $\mathbf{R}$ lässt sich eindeutig als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion auf $\mathbf{R}$ schreiben.

d) Das Produkt zwei gerader Funktionen ist gerade, das Produkt zweier ungerader Funktionen ist gerade, das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.

e) Ist eine Funktion f auf $D \subset \mathbf{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend), so ist sie injektiv.

f) Ist eine Funktion f auf $D \subset \mathbf{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend) und schränkt man ihre Zielmenge auf $f(D)$ ein, so ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} weist dieselbe Monotonieeigenschaft wie f auf.

g) Sind f und g periodische Funktionen auf $\mathbf{R}$, so sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$), $|f|$, λf ($\lambda \in \mathbf{R}$) und f^q (falls $g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$, $q > 0$) periodische Funktionen auf $\mathbf{R}$.

h) Es existieren Funktionen f und g auf $\mathbf{R}$ mit $f \cdot g = f \circ g$. (Hinweis: $f \cdot g$ und $f \circ g$ bezeichnen im Allgemeinen vollkommen verschiedene Funktionen!)

i) Es existiert keine Funktion f auf $\mathbf{R}$ mit $f^{-1} = 1/f$. (Hinweis: f^{-1} und $1/f$ bezeichnen im Allgemeinen vollkommen verschiedene Funktionen!)

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie für $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x^2+6}$ und $c = \frac{2}{3}$, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ ist, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x_0 \in \mathbf{R}$ so angeben, dass für alle $x > x_0$ gilt: $|f(x) - c| < \epsilon$.

b) Zeigen Sie für $f(x) = \frac{2x^2-18}{x+3}$, $x_0 = -3$ und $c = -12$, dass $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ ist, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - c| < \epsilon$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+5}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^3-1} - x$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7+13x^2-6x^3}{3x^3-5x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4x}{x+1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^3-3}\right)^2$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{18x^2+7x}{2x^2-1}}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-\frac{1}{2}x}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ l) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{6x+2}{7x^2-3}\right)\left(\frac{4}{3}x - 5\frac{1}{x^2}\right)$ n) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-3)^2}$ o) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(2x-1)(4x+7)}{1+x^2}}$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie jeweils, ob die Funktion f für $x \to \infty$ gegen eine Gerade g als Asymptote konvergiert. Wie lautet gegebenenfalls g?

a) $f(x) = \dfrac{4-3x^2}{5x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{5x^2-3x-2}{3x^2-5x+9}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4-6}{7x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+x+13}{7-4x}$ e) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-2} - \dfrac{5x}{x+1}$ f) $f(x) = 3x+1$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $\frac{1}{2}$	b) 0	c) -2	d) 0	e) ∞	f) 0	g) 3	h) -2
i) ± 1	j) 1	k) $\frac{1}{2}$	l) 0	m) $\frac{8}{7}$	n) 1	o) 2	

Lösungen zu Aufgabe 4

a) $g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{25}$	b) $g(x) = \frac{5}{3}$	c) keine Gerade als Asymptote
d) keine Gerade als Asymptote	e) $g(x) = 3x + 1$	f) $g(x) = 3x + 1$