Aufgabe 1

a) An welchen Stellen $x \in \mathbf{R}$ ist die Funktion f mit $f(x) = |\sin(x + \pi/2)|$ stetig, aber nicht differenzierbar?

b) Untersuchen Sie die Funktion f mit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x < -2 \\ 2e^{-x} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 2|x-1| & \text{für } x \geq 0 \end{array} \right\}$$

auf Differenzierbarkeit an den Stellen $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

c) Existiert für die Funktion f mit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt[3]{|x|} & \text{für } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{für } x \geq 0 \end{array} \right\}$$

die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$?

d) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - ax + 9 & \text{für } x < 3 \\ \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & \text{für } x \geq 3 \end{array} \right\}$$

$a \in \mathbf{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 3$ differenzierbar ist.

e) Es sei

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{b}{x} & \text{für } x \leq 2, x \neq 0 \\ 7 & \text{für } x = 0 \\ ax - 2a + 1 & \text{für } x > 2 \end{array} \right\}.$$

i) Ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

ii) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbf{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist.

f) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} b + (x-a)^2 & \text{für } x < 1 \\ \ln x & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$a, b \in \mathbf{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist.

g) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2\sin x & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$a, b \in \mathbf{R}$ so, dass f auf $\mathbf{R}$ differenzierbar ist.

h) Es sei f eine reellwertige Funktion mit Definitionsmenge $D_f \subset \mathbf{R}$. Eine Stelle $x_0 \in D_f$ heißt Knickstelle von f, wenn f dort nicht differenzierbar ist, aber die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung von f existieren. Ermitteln Sie jeweils die Knickstellen von f, berechnen Sie dort die einseitigen Ableitungen und fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an:

i) $f(x) = \frac{1}{2}x + |x|$ ii) $f(x) = |x^2 - 1|$

i) Zeigen Sie für $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = |x^3|$, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0) = 0$, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 0 \right| < \epsilon$.

Lösungen zu Aufgabe 1

a) an den Stellen $x_k = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$

b) nicht differenzierbar in $x_0 = -2$ und $x_2 = 1$, differenzierbar in $x_1 = 0$

c) nein

d) $a = \frac{9}{2}$

e) i) nein

   ii) $a = -\frac{1}{2}, b = 2$

f) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$

g) nicht möglich

h) i) Knickstelle $x_0 = 0,\ f_l'(x_0) = -\frac{1}{2},\ f_r'(x_0) = \frac{3}{2}$

   ii) Knickstellen $x_{1/2} = \pm 1,\ f_l'(x_{1/2}) = -2,\ f_r'(x_{1/2}) = 2$

i) $\delta = \sqrt{\epsilon}$