

Aufgabe 1 Lösen Sie mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x \sinh x \, dx & \text{b) } \int \sin^2 \alpha \, d\alpha & \text{c) } \int u^2 e^u \, du \\ \text{d) } \int \sin(\ln x) \, dx & \text{e) } \int \sin^3 x \cos x \, dx & \text{f) } \int_1^e \ln t \, dt \\ \text{g) } \int_0^\pi y \cos y \, dy & \text{h) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} \, dx & \text{i) } \int_{-\pi}^\pi e^x \sin x \, dx \end{array}$$

Aufgabe 2 Lösen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{1}{x^2 - x} \, dx & \text{b) } \int \frac{u}{u + 4} \, du \\ \text{c) } \int \frac{1}{x^2 + 3x - 10} \, dx & \text{d) } \int \frac{1}{t^3 + 3t^2 - 4} \, dt \\ \text{e) } \int \frac{y^2}{(y^2 - 4)(y - 2)^2} \, dy & \text{f) } \int \frac{2x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 11x^2 + 3x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} \, dx \end{array}$$

Aufgabe 3 Lösen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

$$\text{a) } \int \frac{1}{x} \ln x \, dx \quad \text{b) } \int \frac{u}{u^2 + 4u + 3} \, du \quad \text{c) } \int (1 + e^{2x})^2 e^{2x} \, dx$$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_1^\infty \frac{1}{x^4} \, dx & \text{b) } \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx & \text{c) } \int_0^\infty e^{-ax} \, dx \\ \text{d) } \int_0^\infty \frac{2t}{t^2 + 1} \, dt & \text{e) } \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{u^2 + 2u + 2} \, du & \text{f) } \int_1^\infty \frac{\ln(2 + \cos^2(x))}{x} \, dx \\ \text{g) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(-x)^\alpha} \, dx & \text{h) } \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh y} \, dy & \text{i) } \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3} \, dx \end{array}$$

Aufgabe 5 Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & \text{b) } \int_0^2 \frac{1}{\alpha^2 - 4\alpha + 3} \, d\alpha & \text{c) } \int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u-1}} \, du \\ \text{d) } \int_0^1 x \ln x \, dx & \text{e) } \int_0^{1/e} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx & \text{f) } \int_1^2 \frac{1}{t \ln t} \, dt \\ \text{g) } \int_1^e \frac{1}{y \sqrt{\ln y}} \, dy & \text{h) } \int_0^\pi \cot x \, dx & \text{i) } \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx \end{array}$$

Lösungen zu Aufgabe 1 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $x \cosh x - \sinh x + c$

b) $-\frac{1}{2} \sin \alpha \cos x + \frac{1}{2} \alpha + c$

c) $(2 - 2u + u^2) e^u + c$

d) $-\frac{1}{2} \cos(\ln(x)) x + \frac{1}{2} \sin(\ln(x)) x + c$

e) $\frac{1}{4} (\sin x)^4 + c$

f) 1

g) -2

h) $-\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$

i) $\sinh \pi$

Lösungen zu Aufgabe 2 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $-\ln x + \ln(x-1) + c$

b) $u - 4 \ln(u+4) + c$

c) $-\frac{1}{7} \ln(x+5) + \frac{1}{7} \ln(x-2) + c$

d) $-\frac{1}{9} \ln(t+2) + \frac{1}{3} \frac{1}{t+2} + \frac{1}{9} \ln(t-1) + c$

e) $-\frac{1}{16} \ln(y+2) + \frac{1}{16} \ln(y-2) - \frac{3}{4} \frac{1}{y-2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(y-2)^2} + c$

f) $x^2 - 3x - \ln x + 2 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c$

Lösungen zu Aufgabe 3 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$

b) $\frac{3}{2} \ln(u+3) - \frac{1}{2} \ln(u+1) + c$

c) $\frac{1}{6} (1 + e^{2x})^3 + c$

Lösungen zu Aufgabe 4

a) $\frac{1}{3}$

b) ∞

c) $\begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } a > 0 \\ \infty & \text{für } a \leq 0 \end{cases}$

d) ∞

e) π

f) ∞

g) $\begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \\ \infty & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$

h) π

i) $\frac{1}{2}$

Lösungen zu Aufgabe 5

a) $\frac{1}{2} \pi$

b) konvergiert nicht

c) $\frac{8}{3}$

d) $-\frac{1}{4}$

e) 1

f) ∞

g) 2

h) konvergiert nicht

i) $\begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{für } \alpha < 1 \\ \infty & \text{für } \alpha \geq 1 \end{cases}$