Aufgabe 1 Geben Sie jeweils für die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ die größtmögliche Definitionsmenge $D_f \subset \mathbf{R}$ an. Bestimmen Sie die Wertemenge W_f der Funktion $f : D_f \to \mathbf{R}$. Untersuchen Sie f auf Surjektivität und Injektivität. Wie lautet, falls f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}? Kann, falls f nicht bijektiv ist, durch die Wahl einer anderen Zielmenge $N \neq \mathbf{R}$ erreicht werden, dass $f : D_f \to N$ doch bijektiv ist, und wie lautet dann die Umkehrfunktion f^{-1}?

a) $x \mapsto f(x) = 3x + 5$ b) $x \mapsto f(x) = x^{2n},\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ c) $x \mapsto f(x) = x^{2n+1},\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

d) $x \mapsto f(x) = \sqrt{3x}$ e) $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ f) $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6,25}$

g) $x \mapsto f(x) = \dfrac{2-x}{3+x}$ h) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ i) $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie jeweils f auf Surjektivität und Injektivität.

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\quad (x,y) \mapsto (x, x+y, y)$

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass für zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to O$ gilt:

a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv b) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

e) $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\Rightarrow g$ injektiv f) $g \circ f$ surjektiv, g injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv

g) f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Aufgabe 4 Geben Sie jeweils die Hintereinanderausführungen $g \circ f$ und $f \circ g$ an, falls diese existieren.

a) $f : [0,1] \to [-1,4],\ f(x) = 5x - 1$ $g : [-1,1] \to [0,1],\ g(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f : \mathbf{R}\backslash\{3\} \to \mathbf{R}\backslash\{0\},\ f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ $g : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}\backslash\{-1\},\ g(x) = \dfrac{7-x}{x}$

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^3$ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\geq 0},\ x \mapsto |x|$

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass das neutrale Element der Addition in $\mathbf{R}$ durch die Axiome (A2) und (A4) eindeutig bestimmt ist. Nehmen Sie hierzu an, es gäbe neben der Null 0 eine weitere Null $0'$ mit $0' \neq 0$, und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.

Aufgabe 6 Beschreiben Sie die folgenen Mengen jeweils in möglichst einfacher Form.

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| = |x-3|\}$ b) $\left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \dfrac{|x-1|}{|x+1|} = 2\right\}$ c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x + 10 > 16\}$

d) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [1+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}]$ e) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbf{N}}]1-\frac{1}{i}, 3+\frac{1}{i}[$ f) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{N}} U_{1-\frac{1}{k}}(2)$

g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |3-2x| < 5\}$ h) $\{x \in \mathbf{R} \mid x(2-x) > 1 + |x|\}$ i) $\{x \in \mathbf{R} \mid \big||x| - |-5|\big| < 1\}$

Aufgabe 7 Geben Sie jeweils $\sup A$, $\max A$, $\inf A$ und $\min A$ an, falls diese existieren.

a) $A = \left\{y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \dfrac{|x|}{1+|x|},\ x \in \mathbf{R}\right\}$ b) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x = \dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N}\right\}$

c) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N}\right\}$ d) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 1\}$

e) $A = \left\{y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = -\dfrac{x}{1+x},\ x > -1\right\}$ f) $A = \left\{y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = x + \frac{1}{x},\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

g) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3) < 0\}$ h) $A = \left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x = \left(-\frac{1}{2}\right)^m - \frac{3}{n},\ m, n \in \mathbf{N}\right\}$

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}$, bijektiv, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$

b) $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \left\{ \begin{array}{lll} \{1\} & \text{für} & n = 0 \\ \mathbf{R}^{\geq 0} & \text{für} & n > 0 \end{array} \right\}$, nicht injektiv, nicht surjektiv

c) $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}$, bijektiv, $f^{-1}(y) = \left\{ \begin{array}{lll} \sqrt[2n+1]{y} & \text{für} & y \geq 0 \\ -\sqrt[2n+1]{-y} & \text{für} & y < 0 \end{array} \right\}$

d) $D_f = \mathbf{R}^{\geq 0}$, $W_f = \mathbf{R}^{\geq 0}$, injektiv, nicht surjektiv,
mit der Zielmenge $N = W_f$ bijektiv, dann $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y^2$

e) $D_f = \mathbf{R}$, $W_f =]0, 1]$, nicht injektiv, nicht surjektiv

f) $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}^{\geq 0}$, nicht injektiv, nicht surjektiv

g) $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-3\}$, $W_f = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$, bijektiv, $f^{-1}(y) = \dfrac{2-3y}{1+y}$

h) $D_f = \mathbf{R}$, $W_f =]-1, 1[$, injektiv, nicht surjektiv,
mit der Zielmenge $N = W_f$ bijektiv, dann $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

i) $D_f = \mathbf{R}\backslash[2, 4]$, $W_f = \mathbf{R}^{\geq 0}$, nicht injektiv, nicht surjektiv

Lösungen zu Aufgabe 2

a) surjektiv, nicht injektiv　　b) injektiv, nicht surjektiv

Lösungen zu Aufgabe 4

a) $g \circ f$ existiert nicht; $f \circ g : [-1, 1] \to [-1, 4],\ x \mapsto 5\sqrt{1-x^2} - 1$

b) $g \circ f : \mathbf{R}\backslash\{3\} \to \mathbf{R}\backslash\{-1\},\ x \mapsto \dfrac{7x-23}{2}$; $f \circ g$ existiert nicht

c) $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\geq 0},\ x \mapsto |x^3|$; $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto |x|^3$

Lösungen zu Aufgabe 6

a) $\{2\}$	b) $\{-3, -\frac{1}{3}\}$	c) $\mathbf{R}\backslash[-2, 3]$	d) $]1, 3[\; = U_1(2)$	e) $[1, 3]$
f) $]1, 3[\; = U_1(2)$	g) $]-1, 4[$	h) $\mathbf{R}$	i) $]-6, -4[\; \cup\;]4, 6[$	

Lösungen zu Aufgabe 7

a) $\sup A = 1$, kein Maximum, $\inf A = \min A = 0$

b) $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 1$, kein Minimum

c) $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = \min A = -\frac{3}{2}$

d) $\sup A = 1$, kein Maximum, $\inf A = -1$, kein Minimum

e) kein Supremum, $\inf A = -1$, kein Minimum

f) $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$, $\inf A = \min A = 2$

g) $\sup A = 3$, kein Maximum, kein Infimum

h) $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$, $\inf A = \min A = -\frac{7}{2}$