

**Aufgabe 1** Berechnen Sie jeweils das bestimmte Riemannsche Integral als Grenzwert einer Folge von Zwischensummen.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 e^x dx \qquad \text{b) } \int_0^{\pi} \sin x dx$$

Tipp zu b): Erweitern Sie die Summanden der Zwischensumme  $S_f(Z_n)$  mit  $2 \sin \frac{\pi}{2n}$  und nutzen Sie die Beziehung  $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ .

**Aufgabe 2** Beweisen Sie

- a) den Satz über die Intervalladditivität des Integrales,
- b) den Satz über die Linearität des Integrales,
- c) den Satz über die Monotonie des Integrales,
- d) die Dreiecksungleichung für das Integral,

indem Sie die auftretenden bestimmten Riemannschen Integrale jeweils als Grenzwert einer Folge von Zwischensummen auffassen.

**Aufgabe 3**

- a) Zeigen Sie für  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ , dass  $f$  im Intervall  $[-2, 3]$  integrierbar ist

mit  $\int_{-2}^3 f(x) dx = -1$ , indem Sie zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so angeben, dass für alle Zerlegungen  $Z$  von  $[-2, 3]$  mit  $d(Z) < \delta$  gilt:  $|S_f(Z) + 1| < \epsilon$ .

- b) Zeigen Sie:

$$\text{i) } \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{ii) } \frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \frac{1}{2}(e + 1)$$

- c) Die Funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sei für jedes  $a > 0$  über  $[-a, a]$  integrierbar. Zeigen Sie:

i) Ist  $f$  gerade, so gilt  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

ii) Ist  $f$  ungerade, so gilt  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**Aufgabe 4** Lösen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode:

a)  $\int \sin 17x dx$

b)  $\int \frac{1}{6 - 5x} dx$

c)  $\int \cot x dx$

d)  $\int \frac{2y}{\sqrt{1 - y^4}} dy$

e)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

f)  $\int_2^3 \sqrt{3t - 5} dt$

g)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan \left( \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right) dx$

h)  $\int_1^e \frac{1}{u(1 + \ln u)} du$

i)  $\int_0^{\sqrt{7}} 2 \sqrt[3]{x^5 + x^3} dx$

### Lösungen zu Aufgabe 1

a)  $2 \sinh 1$

b)  $2$

### Lösungen zu Aufgabe 4

a)  $-\frac{1}{17} \cos 17x$

b)  $-\frac{1}{5} \ln(6 - 5x)$

c)  $\ln(\sin x)$

d)  $\arcsin(y^2)$

e)  $2e^{\sqrt{x}}$

f)  $\frac{14}{9}$

g)  $\ln 2$

h)  $\ln 2$

i)  $\frac{45}{4}$