Fachhochschule Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. G. Bauer

Aufgabe 1

a) Es sei $f(x, y) = x^2/2 + xy$ und $\mathbf{a} = (1, 2)$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $\mathbf{a}$ in den Richtungen $(2, 3)$, $(-1, -3)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(-2, -3)$, $(-3, -1)$ und $(-1, 3)$. Welchen Wert hat die größtmögliche Richtungsableitung von f im Punkt $\mathbf{a}$ und in welcher Richtung $\mathbf{n}$ wird sie angenommen?

b) Berechnen Sie für $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, $\mathbf{a} = (2, 1)$ und $\mathbf{n} = (1, 3)$ die Richtungsableitung von f im Punkt $\mathbf{a}$ in Richtung $\mathbf{n}$.

c) Berechnen Sie für $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ und $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$ die Richtungsableitung von f im Punkt $\mathbf{a}$ in die Richtung, die vom Punkt $\mathbf{a}$ zum Punkt $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ zeigt.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie jeweils die Funktion f auf lokale Extremwerte in R^2.

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ b) $f(x, y) = 4x^2(2 + y^2) + (2 - y^2)^2$

c) $f(x, y) = 8x^3 - 6x^2y - 3y^2 + 18y - 17$ d) $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie jeweils, ob es sich bei dem Vektorfeld $\mathbf{f}$ um ein Zentralfeld, ein sphärisches Feld, ein zylindrisches Feld oder ein Gradientenfeld handelt.

a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ b) $\mathbf{f}(w, x, y, z) = \left(w^2x^3z^2, wx^4z^2, wx^3yz^2, wx^3z^3\right)$

c) $\mathbf{f}(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$ d) $\mathbf{f}(x, y, z) = \left(x^3, x^2y, 0\right)$

e) $\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0\right)$ f) $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$

Aufgabe 4 Skizzieren Sie jeweils das ebene Vektorfeld $\mathbf{f}$, indem Sie an ausgewählten Punkten (x, y) den Vektor $\mathbf{f}(x, y)$ einzeichnen.

a) $\mathbf{f}(x, y) = (1, x)$ b) $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$ c) $\mathbf{f}(x, y) = (-y, x)$

Aufgabe 5 Zeigen Sie jeweils, dass das angegebene y als Funktion von x die allgemeine Lösung der angegebenen Differentialgleichung ist.

a) $y = Ce^{-4x}$, $y' + 4y = 0$ b) $y = Ae^x + Be^{-x}$, $y'' - y = 0$

c) $y = C \sinh x + D \cosh x$, $y'' - y = 0$ d) $y = \dfrac{Cx}{1 + x}$, $x(1 + x)y' - y = 0$

e) $y = A \sin x + B \cos x$, $y'' + y = 0$ f) $y = -\ln(-\sin x + C)$, $y' = e^y \cos x$

Tipp: Weisen Sie jeweils nach, dass jedes Anfangswertproblem der Differentialgleichung genau eine Lösung hat (Existenz- und Eindeutigkeitssatz!) und dass sich diese Lösung aus y ergibt, indem man geeignete Werte für die Integrationskonstanten wählt.

Aufgabe 6 Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Führen Sie dazu eine Trennung der Variablen und eventuell zuvor eine geeignete Substitution durch.

a) $2x^2y' = y^2$ b) $y' = (y + 2)^2$ c) $y'(1 + x^3) = 3x^2y$

d) $y' = 1 - y^2$ e) $y^2y' = x^5$ f) $y' = (x + y + 1)^2$

g) $xy' = y + 4x$ h) $y' \tan x - y = 1$ i) $(3x - 2y)y' = 6x - 4y + 1$