Aufgabe 1 Gegeben sei eine auf ganz $\mathbf{R}$ stetige Funktion f und die Relation

$$R = \left\{ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \int_a^b f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

a) Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation ist.

b) Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbf{R}$ die Menge $[a]_R := \{b \in \mathbf{R} \mid aRb\}$.

Aufgabe 2

a) Es sei $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie: durch

$$<f,g>= \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad \text{für } f,g \in C[a,b]$$

ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $C[a,b]$ erklärt.

b) Zeigen Sie für alle $m,n \in \mathbf{N}$:

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \pi\delta_{mn}$ ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \pi\delta_{mn}$ iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$

c) Zeigen Sie: die Funktionen $f_n \in C[0,2\pi]$ mit

i) $f_n(x) = \sin nx$ ii) $f_n(x) = \cos nx$

($n \in \mathbf{N}$) bilden bezüglich des Skalarproduktes aus a) ein Orthogonalsystem.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbf{N}_0$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\; dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

b) Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a,b]$ stetig und es gelte $f \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^n\,dx \right)^{1/n} = \operatorname{Max} f([a,b]).$$

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die

i) von den Koordinatenachsen, der Geraden $x = 3$ und der Parabel $y = x^2 + 1$,

ii) von der x-Achse, den Geraden $x = -1$ und $x = 4$ und der Kurve $y = e^x + 2$,

iii) von den Kurven $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$,

iv) von der x-Achse, den Geraden $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = 2\pi$ und der Kurve $y = \sin x$,

v) von den Kurven $y = \dfrac{8}{3\pi^3}(x + \frac{\pi}{2})^2(x - \frac{\pi}{2})$ und $y = \cos x$

begrenzt wird.

b) Berechnen Sie jeweils für $d = 0$, $d = 1$ und $d = 2$ den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - d.$$

(Tipp: Beginnen Sie mit dem Fall $d = 0$. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Differenzfunktion $f = f_1 - f_2$ an. Welche Auswirkung hat es anschaulich, wenn man von $d = 0$ zu $d = 1$ bzw. $d = 2$ übergeht?)

Lösungen zu Aufgabe 1

a) R ist Äquivalenzrelation

b) $[a]_R = \begin{cases} \{2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\} & \text{für } a = 0 \\ \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\} & \text{für } a = \pi \\ \{a + 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-a + 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\} & \text{für } a \in [0, 2\pi[\setminus \{0, \pi\} \end{cases}$

Für $a \notin [0, 2\pi[$ ergibt sich $[a]_R$ aus der Eigenschaft $[a + 2\pi k]_R = [a]_R$ $(k \in \mathbf{Z})$

Lösungen zu Aufgabe 4

a) i) 12

ii) $e^4 - \frac{1}{e} + 10$

iii) $\frac{1}{3}$

iv) 3

v) $3 + \frac{5}{72}\pi$

b) $\begin{cases} \frac{27}{8} & \text{für } d = 0 \\ \frac{9}{4} & \text{für } d = 1 \\ \frac{27}{8} & \text{für } d = 2 \end{cases}$