Aufgabe 1 Stellen Sie jeweils das kartesische Produkt der Mengen M_1 und M_2 grafisch dar und geben Sie ein Beispiel für eine Relation auf $M_1 \times M_2$ an.

a) $M_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

b) $M_1 = \{1, 2, 4\}, \quad M_2 = \{0, 5, 6\}$

c) $M_1 = \big\{x \in \mathbf{R} \mid 2k \leq x \leq 2k{+}1,\ k \in \{0, 1, 2, 3\}\big\}, \quad M_2 = \big\{x \in \mathbf{R} \mid 2k{-}1 \leq x \leq 2k,\ k \in \{1, 2, 3, 4\}\big\}$

d) $M_1 = \{w, f\}, \quad M_2 = M_1$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie jeweils, ob die Relation R reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. Ist R eine Äquivalenzrelation?

a) $R = \{(g_1, g_2) \in M^2 \mid g_1 \text{ ist senkrecht zu } g_2\}$ mit $M = \{g \mid g \text{ ist eine Gerade}\}$

b) $R = \{(g_1, g_2) \in M^2 \mid g_1 \text{ ist parallel zu } g_2\}$ mit M wie in a)

c) $R = \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 \text{ ist Mutter von } m_2\}$ mit $M = \{m \mid m \text{ ist ein Mensch}\}$

d) $R = \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 \text{ ist verheiratet mit } m_2\}$ mit M wie in c)

e) $R = \{(A, B) \in M^2 \mid A \Rightarrow B\}$ mit $M = \{A \mid A \text{ ist eine Aussage}\}$

f) $R = \{(A, B) \in M^2 \mid A \Leftrightarrow B\}$ mit M wie in e)

g) $R = \{(A, B) \in M^2 \mid A \wedge B\}$ mit M wie in e)

h) $R = \{(A, B) \in M^2 \mid A \vee B\}$ mit M wie in e)

i) $R = \{(U, V) \in M^2 \mid U \subset V\}$ mit einer Grundmenge G und $M = \{U \mid U \subset G\}$

j) $R = \{(U, V) \in M^2 \mid U = V\}$ mit M wie in i)

k) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y \in \mathbf{Z}\}$

l) $R = \{(x, y) \in (\mathbf{R}\backslash\{0\})^2 \mid x/y \in \mathbf{Z}\}$

m) $R = \{(x, y) \in M^2 \mid f(x) = f(y)\}$ mit einer Abbildung f und ihrer Definitionsmenge $D_f = M$

Aufgabe 3 Der Graph einer Abbildung $f : M \to N$ ist die Relation $\{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$ auf $M \times N$ und wird mit $\operatorname{graph}(f)$ bezeichnet. Umgekehrt ist eine Relation R auf $M \times N$ dann und nur dann der Graph einer Abbildung von M nach N, wenn zu jedem $x \in M$ genau eine $y \in N$ existiert mit xRy. Stellen Sie jeweils die Relation R grafisch dar und untersuchen Sie, ob R Graph einer Funktion ist. Wie lautet gegebenenfalls diese Funktion?

a) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$ b) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$

c) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\geq 0} \mid x^3 = y^2\}$ d) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\}$

e) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1/x\}$ f) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \times \mathbf{R} \mid y = 1/x\}$

Aufgabe 4 Es sei f eine Abbildung von M nach N. Zeigen Sie, dass für alle $U_1, U_2 \subset M$ und alle $V_1, V_2 \subset N$ gilt:

a) $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2)$ b) $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$

c) $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$ d) $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in a) im allgemeinen nicht die Gleichheit gilt.

Lösungen zu Aufgabe 2

a) nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv

b) Äquivalenzrelation

c) nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht transitiv

d) nicht reflexiv, symmetrisch, transitiv

e) reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv

f) Äquivalenzrelation

g) nicht reflexiv, symmetrisch, transitiv

h) nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv

i) reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv

j) Äquivalenzrelation

k) Äquivalenzrelation

l) reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv

m) Äquivalenzrelation

Lösungen zu Aufgabe 3

a) R=graph(f) mit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

b) kein Graph

c) kein Graph

d) kein Graph

e) kein Graph

f) R=graph(f) mit $f : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1/x$