Aufgabe 1

a) Formulieren Sie die folgende Aussage mit Quantoren und verneinen Sie sie:

Für alle $z \in W$ gibt es ein $x \in U$ und ein $y \in V$, so dass $z \leq x + y \leq z + 5$.

b) Untersuchen Sie, ob die Relation

$$R = \{(A, B) \in M^2 \mid A \Rightarrow B\} \text{ mit } M = \{A \mid A \text{ ist eine Aussage}\}$$

reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \binom{n+1}{2}^2$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie jeweils auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \ldots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x+1}$

Aufgabe 4 Geben Sie zu der Abbildungsvorschrift $f : x \mapsto \sqrt{\ln \frac{1}{|\cos x|}}$ die größtmögliche Definitionsmenge D_f und die zugehörige Wertemenge W_f an.

Aufgabe 5 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\left|\frac{z - j}{z - 1}\right| = 1$$

für $z \in \mathbf{C}$ und skizzieren Sie diese Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 6

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

und deuten Sie diese Menge geometrisch.

b) Untersuchen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

c) Zeigen Sie: Zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 einer quadratischen Matrix A gehörige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 7 Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der Sinusfunktion an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.