Aufgabe 1 Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur 2. Ordnung.

a) $f(x,y) = x - y$ b) $f(x,y) = x^3y - y^3x$ c) $f(x,y) = xe^{-y} + y\sin x$ d) $f(x,y,z) = xyz$

e) $f(x,y) = x^y$ f) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$ g) $f(x,y,z) = \sinh(x+y+z)$ h) $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$

Aufgabe 2 Berechnen Sie:

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$

b) $ug_u(u,v) + vg_v(u,v), \quad g(u,v) = \ln(\sqrt{u} + \sqrt{v})$

c) $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y,z) + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x,y,z) + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(x,y,z), \quad \phi(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Aufgabe 3 Wie lautet jeweils die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $\mathbf{a}$ an den Graphen der Funktion f?

a) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x}, \quad \mathbf{a} = (0,1,1)$

b) $f(x,y) = (3x+xy)^2, \quad \mathbf{a} = (1,0,?)$

c) $f(x,y) = 3\sqrt{\dfrac{x^2}{y}} + 2\cos\big(\pi(x+2y)\big), \quad \mathbf{a} = (2,1,?)$

Aufgabe 4 Berechnen Sie jeweils das totale Differential $df_{\mathbf{a}}$ von f im Punkt $\mathbf{a}$:

a) $f(x,y,z) = y\cos z + \dfrac{\ln(1+x^2)}{y}, \quad \mathbf{a} = (1,2,0)$

b) $f(x,y) = \arcsin(xy) + \sqrt{1-x^2y^2}, \quad \mathbf{a} = (\sqrt{3}, \frac{1}{2})$

c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^2 + x_2)\sin x_2 + x_3x_4 + \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x_4), \quad \mathbf{a} = (-1, \frac{\pi}{2}, -2, 1)$

Aufgabe 5 Es sei $f(x,y) = x^2/2 + xy$ und $\mathbf{a} = (1;2)$, $\mathbf{b} = (1,1;1,9)$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis zur 3. Ordnung.

b) In welchen Punkten ist f total differenzierbar?

c) Berechnen Sie das totale Differential $df_{\mathbf{a}}$ von f im Punkt $\mathbf{a}$.

d) Berechnen Sie $f(\mathbf{a})$ und $f(\mathbf{b})$ sowie deren Differenz $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$.

e) Berechnen Sie den Wert $df_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ des totalen Differentials aus c) für den Zuwachs $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (0,1;-0,1)$.

f) Vergleichen Sie die Zahl aus e) mit der Differenz aus d).

g) Vergleichen Sie $f(\mathbf{b})$ mit $f(\mathbf{a}) + df_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

Aufgabe 6 Zeigen Sie für $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mit $f(x,y) = 5x^3 - 18\sqrt{y}$, dass f in $(x_0,y_0) = (1,9)$ partiell nach y differenzierbar ist mit der partiellen Ableitung $f_y(1,9) = -3$, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle y mit $|y - y_0| < \delta$ gilt: $\left|\dfrac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} + 3\right| < \epsilon$.