Aufgabe 1

a) Durch Drehung der Kurve $y = 6x^2 - 4$ im Intervall $0 \le x \le \sqrt{3}$ um die x-Achse entsteht ein Körper in Form eines Kelchglases. Wie groß ist sein Volumen?

b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der im Intervall $0 \le x \le 2\pi$ durch Drehung der Kurve $y = \sin x$ um die x-Achse entsteht.

c) Der Verlauf der kürzesten Straße zwischen zwei Orten A und B lasse sich durch die Kurve

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 15,$$

beschreiben. Ein Auto, dessen Benzinvorrat noch für 42 km reicht, startet im Ort A. Kann es den Ort B erreichen, ohne nachzutanken?

d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = \cosh x$ im Intervall $-1 \le x \le 1$.

e) Gegeben sei ein spitzer Kreiskegel mit der Höhe h und dem Radius der Bodenfläche r. Leiten Sie jeweils eine Formel für das Volumen und die Mantelfläche des Kegels her.

f) Berechnen Sie die Mantelfläche des Körpers, der im Intervall $0 \le x \le \sqrt[4]{15}$ durch Drehung der Kurve $y = x^3/3$ um die x-Achse entsteht.

g) Die Stromstärke $I(t)$ als Funktion der Zeit t habe die Form eines Dreieckpulses der Periode T und der Amplitude I_0. Berechnen Sie den Effektivwert (d.h. den quadratischen Mittelwert) des Stromes.

h) Die Stromstärke $I(t)$ eines Einweggleichrichters als Funktion der Zeit t habe die Periode $T = 2\pi/\omega$ und werde durch

$$I(t) = \begin{cases} I_0 \sin \omega t & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{\pi}{\omega} < t \le \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

beschrieben. Berechnen Sie den Gleichrichtwert (d.h. den linearen Mittelwert) des Stromes.

i) Gegeben sei ein spitzer Kreiskegel mit der Höhe h und dem Radius der Bodenfläche r. In welcher Höhe liegt sein Schwerpunkt?

j) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1/x$ drehe sich um die x-Achse. Wo liegt der Schwerpunkt des entstehenden Rotationskörpers, der durch $x = 1$ und $x = t > 1$ begrenzt wird? Existiert der Grenzwert $t \to \infty$?

k) Wo liegt der Schwerpunkt eines Viertelkreises (Radius R)?

l) Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin x$ im Intervall $[0, \pi]$ begrenzt wird?

Aufgabe 2 Die folgenden bestimmten Integrale sind nicht in geschlossener Form lösbar. Berechnen Sie jeweils einen Näherungswert, indem Sie den Integranden bis zum 4. Glied in eine Potenzreihe entwickeln und anschließend gliedweise integrieren. Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes den Fehler ab.

$$\text{a)} \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \qquad \text{b)} \int_0^{1/2} \cos(\sqrt{x})\, dx$$

Aufgabe 3

a) Drücken Sie das Volumen f eines spitzen Kreiskegels als Funktion seiner Höhe x_1 und der Länge seiner Seitenlinie x_2 aus.

b) Drücken Sie den Abstand f eines Punktes $P(x_1|x_2|x_3)$ zum Punkt $Q(7|-2|5)$ im dreidimensionalen Raum durch seine Koordinaten x_1, x_2 und x_3 aus.

Aufgabe 4 Bestimmen und skizzieren Sie jeweils die größtmögliche Definitionsmenge D der Funktion f.

$$\text{a)}\ f(x,y) = \sqrt{y - 2x} \qquad \text{b)}\ f(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1^2 - 1)(9 - x_2^2)}$$

$$\text{c)}\ f(a,b) = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{a-b} \qquad \text{d)}\ f(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 1}$$

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $V = \frac{164}{5}\pi\sqrt{3}$

b) $V = \pi^2$

c) ja

d) $S = e - \frac{1}{e}$

e) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $M = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

f) $M = \frac{64}{9}\pi$

g) $m_q = I_0/\sqrt{3}$

h) $m_l = I_0/\pi$

i) $x_s = \frac{1}{4}h$

j) $x_s = \frac{t\ln t}{t-1}$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_s = \infty$

k) $x_s = y_s = \frac{4}{3\pi}R$

l) $x_s = \frac{\pi}{2}$, $y_s = \frac{\pi}{8}$

Lösungen zu Aufgabe 2

$$\text{a) } 0 \le \frac{23}{30} - \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \frac{1}{42}$$

$$\text{b) } 0 \le \frac{2.833.461}{6.451.200} - \int\limits_0^{1/2} \cos(\sqrt{x})\,dx \le \frac{1}{63.866.880}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}\pi(x_2^2 - x_1^2)x_1$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{(7-x_1)^2 + (-2-x_2)^2 + (5-x_3)^2}$

Lösungen zu Aufgabe 4

$$\text{a) } D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, y \ge 2x\right\}$$

$$\text{b) } D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \big(|x_1| \ge 1 \wedge |x_2| \le 3\big) \vee \big(|x_1| \le 1 \wedge |x_2| \ge 3\big)\right\}$$

$$\text{c) } D = \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, a + b \ge 0 \wedge a \ne b\right\}$$

$$\text{d) } D = \left\{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \ge 1\right\}$$