Aufgabe 1 Es sei $w, z \in \mathbf{C}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\alpha} + \mathrm{e}^{-j\alpha})$ b) $\sin\alpha = \frac{1}{2j}(\mathrm{e}^{j\alpha} - \mathrm{e}^{-j\alpha})$ c) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

d) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ e) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

f) $|\mathrm{e}^{j\alpha}| = 1$ g) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ h) $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2j}(z - \overline{z})$ i) $\overline{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$

j) $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-j\varphi}$ k) $z\overline{z} = r^2$ l) $\frac{z}{\overline{z}} = \mathrm{e}^{2j\varphi}$ m) $z^n = r\mathrm{e}^{jn\varphi}$

n) $|\overline{z}| = |z|$ o) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ p) $|wz| = |w||z|$ q) $\overline{wz} = \overline{w}\ \overline{z}$

Aufgabe 2 Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in ihrer kartesischen Darstellung an und zeichnen Sie sie in die komplexe Ebene ein.

a) $\frac{3+4j}{1-2j}$ b) $\frac{j(2+j)}{(1+j)(2-j)}$ c) $2j\frac{(1+j)^2}{3-j}$ d) $4\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}}$ e) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{25\pi}{4}}$

f) $j\mathrm{e}^{j\frac{11\pi}{4}}$ g) $3\mathrm{e}^{j4\pi} + 2\mathrm{e}^{j7\pi}$ h) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}$ i) $(1-j)^9$ j) e^{j}

Aufgabe 3 Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in ihrer exponentiellen Darstellung an und zeichnen Sie sie in die komplexe Ebene ein.

a) $1 + j\sqrt{3}$ b) -5 c) $-5 - j5$ d) $(1 - j\sqrt{3})^3$ e) $(1+j)^5$

f) $(\sqrt{3} + j^3)(1-j)$ g) $\dfrac{2 - j\frac{6}{\sqrt{3}}}{2 + j\frac{6}{\sqrt{3}}}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{7+j7}$ i) $3 + j4$ j) j^j

Aufgabe 4 Wie lautet jeweils zu der angegebenen Gleichung die Lösungsmenge für $z \in \mathbf{C}$?

a) $\frac{z-1}{z-2} = \frac{1+j}{2-j}$ b) $\frac{1}{z+1} = 3 - j$ c) $\frac{z}{z-1} = 1 - 3j$

d) $\frac{1}{z-j} - \frac{1}{z-1} = 1 + j$ e) $\frac{2}{z} + z = j$ f) $2j - \frac{6j}{z} - jz = 2z + 1 + \frac{12}{z}$

g) $z(\overline{z} - 1) = 9 + 3j$ h) $|z\overline{z} - 5| + \left|\frac{z}{\overline{z}} - \frac{3+4j}{5}\right| = 0$ i) $z^3 = 125$

j) $z^4 = -16$ k) $z^3 = 32(1+j)^2$ l) $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

m) $z^4 - 2z^2 - 3 = 0$ n) $|z| = \mathrm{Re}\, z + 1$ o) $\mathrm{Im}\frac{z-j}{z-1} = 0$

p) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 2$ q) $\left|\frac{z-j}{z-1}\right| = 1$ r) $(1+z)^5 = (1-z)^5$

Aufgabe 5 Skizzieren Sie jeweils in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die die angegebene Ungleichung erfüllen.

a) $0 < \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 2$ b) $|z-2| < |2z-1|$ c) $|z + 1 - 3j| \geq 2|z+1|$

d) $|z-3| < |z+j|$

Lösungen zu Aufgabe 2

a) $-1+2j$	b) $-\frac{1}{10}+j\frac{7}{10}$	c) $-\frac{6}{5}-j\frac{2}{5}$	d) $2\sqrt{3}+j2$	e) $1+j$
f) $-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}$	g) 1	h) $1-j$	i) $16-j16$	j) $\cos 1+j\sin 1$

Lösungen zu Aufgabe 3

a) $2\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}$	b) $5\mathrm{e}^{j\pi}$	c) $5\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{5\pi}{4}}$	d) $8\mathrm{e}^{-j\pi}$	e) $4\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{5\pi}{4}}$
f) $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\frac{5\pi}{12}}$	g) $\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}}$	h) $\frac{1}{7}\mathrm{e}^{j\frac{7\pi}{4}}$	i) $5\mathrm{e}^{j\arctan\frac{4}{3}}$	j) $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

Lösungen zu Aufgabe 4

a) $\left\{\frac{6}{5}-\frac{3}{5}j\right\}$	b) $\left\{-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}j\right\}$
c) $\left\{1+\frac{1}{3}j\right\}$	d) $\{0, 1+j\}$
e) $\{2j, -j\}$	f) $\{3j, -2j\}$
g) $\{-3j, 1-3j\}$	h) $\{2+j, -2-j\}$
i) $\left\{5\mathrm{e}^{k\frac{2\pi}{3}j} \,\middle|\, k=0,1,2\right\}$	j) $\left\{2\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4})j} \,\middle|\, k=0,1,2,3\right\}$
k) $\left\{4\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3})j} \,\middle|\, k=0,1,2\right\}$	l) $\{1, -2j, 2j\}$
m) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, j, -j\}$	n) $\{x+jy \mid y^2=2x+1,\ x,y\in\mathbf{R}\}$
o) $\{x+jy \mid y=1-x,\ x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}\}$	p) $\left\{-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{j\varphi} \,\middle|\, \varphi\in[0,2\pi)\right\}$
q) $\{x+jy \mid y=x,\ x\in\mathbf{R}\}$	r) $\left\{\frac{j\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \,\middle|\, \varphi=k\frac{2\pi}{5},\ k=0,1,2,3,4\right\}$