Пусть $x_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{pmatrix}$ — однородные координаты точек на кадре. P_i — однородные координаты точек на сцене. Условия того, что точки прямоугольника спроецируются в заданные точки на кадре запишутся в виде.

$$x_i \times MP_i = 0. \tag{1}$$

Введем систему координат, в которой плоскость будет описываться уравнением $z = 0$ и прямоугольник будет квадратом с вершинами в точках $\widehat{P}_i = \{(0,0,0,1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,1)\}$.

$$P_i = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \widehat{P}_i,$$

где R— ортогональная матрица, $t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$.

Обозначим $L_i = [x_i]_\times M, A_i = L_i[1:3,1:3], b_i = L_i[:,4]$. Тогда условия (1) примут вид

$$\begin{cases} A_1 t = -b \\ A_2(r_1 + t) = -b \\ A_3(r_2 + t) = -b \\ A_3(r_1 + r_2 + t) = -b, \end{cases}$$

где r_1, r_2— первый и второй столцы R.

Данная система является линейной неоднородной системой с 9 неизвестными, а ранг матрицы системы равен 8, так как $\det[x_i]_\times = 0$). Поэтому решением данной системы является однопараметрическое семейство. Будем выражать все неизвестные через t_z. Решение можно записать в виде $s = s_1 + t_z s_2$, где s_1 — решение системы при $t_z = 0$, s_2 — решение однородной системы при $t_z = 1$.

Подставив решения для r_1 и r_2 в условие ортогональности этих векторов, получив квадратное уравнение относительно t_z. Среди решений нужно взять только положительные t_z, так как плоскость находится перед камерой.

Направление нормали совпадает с третьим столбцом R, $r_3 = \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1\|\|r_2\|}$. Оставшийся неизвестным параметр уравнения плоскости находится из условия принадлежности точки t плоскости. $\varrho = -(r_3, t)$.