Восстановление циклически смазанных изображений с вырожденным смазом

Ковалев Никита Евгеньевич
научный руководитель -
доц., к.ф.-м.н., Козак Анатолий Всеволодович

Южный федеральный университет
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Ростов-на-Дону, 2018

Цели работы

1) Изучить методы устранения равномерного горизонтального смаза циклической панорамы
2) Разработать методы восстановления изображений с большим вырожденным смазом, сведением к минимальному смазу
3) Разработать метод восстановления изображенийс вырожденным смазом с помощью вариации собственных значений
4) Для всех разработанных алгоритмов написать программы и провести численные эксперименты

Вспомогательные утверждения

Матрица горизонтального циклического смаза (далее - *матрица смаза*) на k пикселей

$$C(n,k)=\frac{1}{k}\begin{pmatrix} \overbrace{1 & \dots & 1}^{k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ \underbrace{1 & \dots & 1}_{k-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Утверждение.

Матрица смаза всегда представима в виде FDF^{-1}, где D - диагональная.

Метод предобработки в случае большого числа смаза

Подход

Главная идея метода - разбить задачу вырожденного смаза на несколько подзадач с невырожденным смазом. Пусть n - ширина изображения в пикселах, k - число смаза и $d = \text{НОД}(n, k)$. Тогда, если $d > 1$, разобьем изображение на d частей, взяв из d подряд идущих колонок ровно одну в каждую часть.

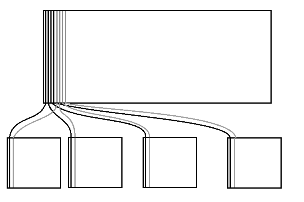

Рис. 1: Разбиение изображения на несколько подизображений

Обоснование метода и причина смаза результата

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k} = \frac{\frac{x_1+\ldots+x_d}{d} + \frac{x_{d+1}+\ldots+x_{2d}}{d} + \ldots}{p}, p = \frac{k}{d} \qquad (1)$$

$$\frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1}}{k} = \frac{\frac{x_2+\ldots+x_{d+1}}{d} + \frac{x_{d+2}+\ldots+x_{2d+1}}{d} + \ldots}{p} \qquad (2)$$

Восстанавливаем каждое подизображение с числом смаза p. Получим, что пиксели восстановленного изображения (собранного из восстановленных кусков по тому же принципу разбиения) имеют вид:

$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_d}{d}$ - первый пиксель, полученный из пикселя (1).

$\frac{x_2+x_3+\ldots+x_{d+1}}{d}$ - первый пиксель, полученный из пикселя (2).

Иллюстрация работы метода на 8-битном изображении

Пример 1

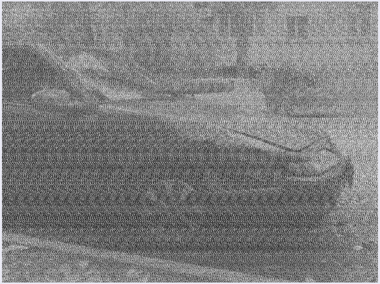

Рис. 2: Улучшение при $d = 2$, $k = 242$

Рис. 3: Улучшение при $d = 8$, $k = 248$

Иллюстрация работы метода на 16-битном изображении

Пример 2

Рис. 4: Смаз при $k = 592$

Рис. 5: Улучшенное фото

Метод минимизации погрешности

Описание проблемы

Матрица C в общем случае может быть необратима. Тогда для восстановления необходимо построить приближение $\tilde{C}$ таким образом, что $C\tilde{C}$ приближает единичную матрицу там, где это возможно.

Особенность задачи — наличие погрешности (округления и вычислений), возникающей по причине оцифровке изображений и вследствие плохой обусловленности матрицы смаза.

Учитывая все вышесказанное, а также свойство матрицы C о представлении в диагональном виде, предлагается строить матрицу $\tilde{C}$, используя ее разложение и проебразуя собственные числа, лежащие на диагонали получившейся матрицы.

Идея метода

О преобразованиях

Будем применять к собственным числам линейные преобразования:

1) Необратимость будем устранять заменой нулевых собственных чисел на некоторые числа с фиксированным модулем (модуль, так как собственные числа являются комплексными);
2) Погрешность вычислений минизируем тем же способом - к ненулевым собственным числам, которые сильно малы по модулю, прибавим случайное комплексное число с тем же фиксированным модулем;
3) Кроме того, оставшиеся достаточно малые собственные числа домножим так, чтобы по модулю они были равны фиксированному числу.

Особенности работы с собственными числами

Поправка по умножению

Пусть поправка по умножению $\delta_i, i = \overline{0, n-1}$, $C = FDF^{-1}$, $\tilde{C} = F\tilde{D}F^{-1}$, $\tilde{E} = D\tilde{D}$. Тогда $E = diag(\frac{d_0}{d_0\delta_0}, \frac{d_1}{d_1\delta_1}, \dots) = diag(\delta_0^{-1}, \delta_1^{-1}, \dots)$, где d - вектор собственных чисел матрицы C.
Восстановление: $(XC)\tilde{C} = XFDF^{-1}F\tilde{D}F^{-1} = XFD\tilde{D}F^{-1} = XF\tilde{E}F^{-1}$.
Пусть $R = F\tilde{E}F^{-1}$, тогда $R_{ij} = \frac{1}{n}\Sigma_{k=0}^{n-1}\delta_k^{-1}\xi^{(j-i)k}$, где $\xi = e^{\frac{2\pi}{n}}$.

Поправка по сложению

$\tilde{D} = diag(\frac{1}{d_0 + \sigma_0}, \frac{1}{d_1 + \sigma_1}, \dots, \frac{1}{d_{n-1} + \sigma_{n-1}})$, где σ - вектор значений поправки по сложению. Тогда, положив $\gamma_i = d_i + \sigma_i$, $\tilde{C} = F\tilde{D}F^{-1}$, получим, что $\tilde{C}_{ij} = \frac{1}{n}\Sigma_{k=0}^{n-1}\gamma_k^{-1}\xi^{(j-i)k}$.

Пояснение о числах на разных диагоналях

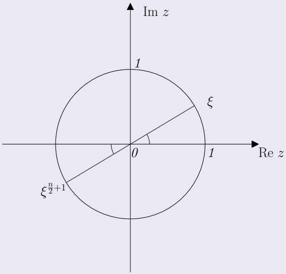

Рис. 6: Значения на первой диагонали после главной

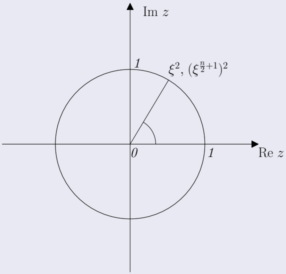

Рис. 7: Значения на второй диагонали после главной

Иллюстрация восстановления цветного изображения

Пример 3

Рис. 8: Смазанное изображение

Рис. 9: Восстановление с поправкой

Иллюстрация восстановления с поправкой по сложению

Пример 4

Рис. 10: Восстановление с применением поправки по сложению

Полученные результаты

Итогом работы стали два разработанных метода.
Первый направлен на уменьшение числа смаза и использует разбиение вырожденно смазанного изображения на несколько подизображений, смазанных невырожденно, их восстановления и склейки обратно. Он позволяет значительно уменьшить смаз и получить в случае достаточно малого d результат, который даже не нужно восстанавливать далее.
Второй метод является общим и подходит для любого смаза. Он основан на уменьшении погрешности при восстановлении ценой потери математической точности. Преобразуя линейно собственные числа матрицы смаза, оказывается возможным провести восстановление с практчески полным отображением деталей исходного изображения.