Wireless Communication Systems #HW2

108064512 劉星佐

模擬：(a)(b)要求產生一個 uniform 分布，我們可以利用隨機數產生一個介於$(-\pi, \pi)$的序列再帶入都普勒頻移的公式。統計時將每個離散點的差取至 hz/樣本點，則可以逼近理論的 cdf 曲線。至於 pdf 比較難求，若直接把 pdf 微分，pdf 在分布兩端會出現問題，因為 matlab 中無限大並不存在。所以我用另外一個方法來逼近 pdf，將 pdf 的縱軸單位視作機率分之一，區間的積分等價於機率值。所以，一樣把區間取至非常小的值，可以逼近出 pdf。

(a) Simulation

$$v = 20\left(\frac{km}{hr}\right);\ f_c = 2 \times 10^9 (Hz);\ \theta \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$$

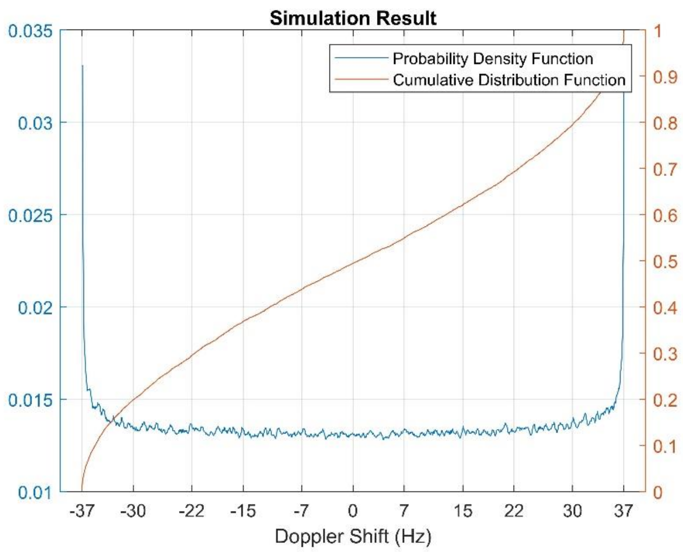

Fig.1

(b) Simulation

$$v = 20\left(\frac{km}{hr}\right);\ f_c = 26 \times 10^9 (Hz);\ \theta \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$$

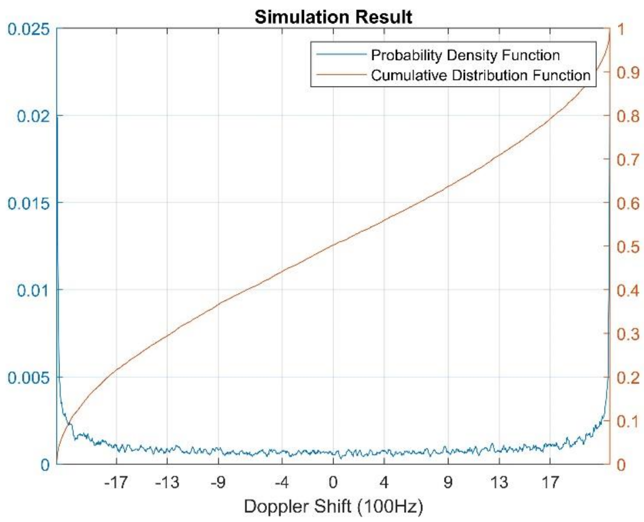

Fig.2

(c) Simulation

$$v \sim \mathcal{U}(20,90);\ f_c = 2 \times 10^9(\mathrm{Hz});\ \theta \sim \mathcal{U}(-\pi,\pi)$$

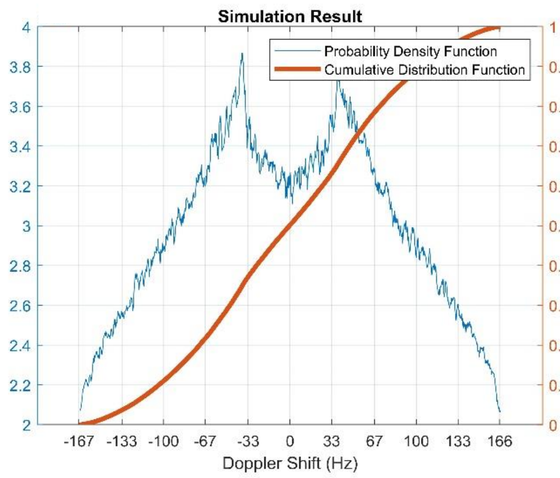

Fig.3

(d) Derive the cdf and the pdf of the observed Doppler shift for fixed v and f_c. Compare the simulation results with the theoretical results.

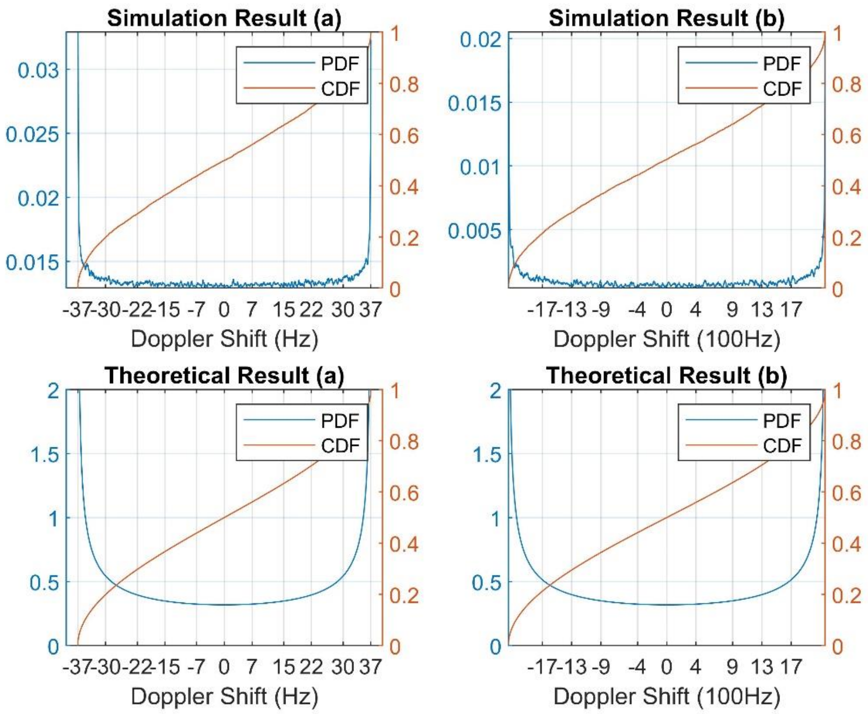

Fig.4

計算(a)(b)的機率分布。以下為推導過程：

$$\mathrm{Prob}(f_{DS} \leq F) = \mathrm{Prob}\left(\frac{v}{c} f_c \cos(\theta) \leq F\right) = \mathrm{Prob}\left(\theta \leq \cos^{-1}\left(\frac{c}{vf_c} F\right)\right)$$

$$\mathrm{Prob}\left(\theta \leq \cos^{-1}\left(\frac{c}{vf_c} F\right)\right) = 2 * \int_{\cos^{-1}\left(\frac{c}{vf_c}F\right)}^{\pi} \frac{1}{2\pi} d\tau$$

$$\text{set } \frac{v}{c} f_c = f_m \text{ and}$$

$$\frac{F}{f_m} = \gamma \ \ (\gamma \text{ is the normalized doppler frequency}, -1 < \gamma < 1)$$

$$\mathrm{Prob}(\theta \leq \cos^{-1}(\gamma)) = \frac{1}{\pi}\tau \Big|_{\tau = \cos^{-1}(\gamma)}^{\pi} = 1 - \frac{\cos^{-1}(\gamma)}{\pi}$$

$$p_\gamma(\gamma) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathrm{Prob}(\theta \leq \cos^{-1}(\gamma)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(\sqrt{1-\gamma^2})} & \text{with} -1 < \gamma < 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$P(\gamma < \Gamma) = \int_{-1}^{\gamma} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \begin{cases} 1 - \dfrac{\cos^{-1}(\gamma)}{\pi} & \text{with} -1 < \gamma < 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

求得 pdf 和 cdf 後，需要再次驗證結果是否合理。

$$\lim_{\gamma\to\infty} P(\gamma < \Gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} 1 - \frac{\cos^{-1}(\gamma)}{\pi} = 1$$

$$\lim_{\gamma\to-\infty} P(\gamma < \Gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} 1 - \frac{\cos^{-1}(\gamma)}{\pi} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\gamma(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(\sqrt{1-\gamma^2})} = 1$$

在確定$p_\gamma(\gamma)$和$P(\gamma < \Gamma)$符合 pdf 和 cdf 的特性後，可利用 Matlab 代入計算公式，不過要記得座標變換，因為推導的公式是正規化的結果。愈大的f_m雖然會造成分佈有更大的標準差 ($\because F = f_m \cdot \gamma$)，不過分佈波形大致相同 (U-Shape)，大部分的頻率都會出現在$f_c \pm f_m$附近。

至於 **Fig.4** 的模擬結果。可以觀察到 cdf 的理論值和實際值相同，但 pdf 略有不同。這是因為 cdf 的理論值中，接近正負 1 處的函數微分值應該會是趨近於無限大，這是問題的癥結，Matlab 無法模擬出真正的 pdf，只能用差分方程來大略繪出波形。