

# Ρομποτική 1

## Εξαμηνιαία Εργασία

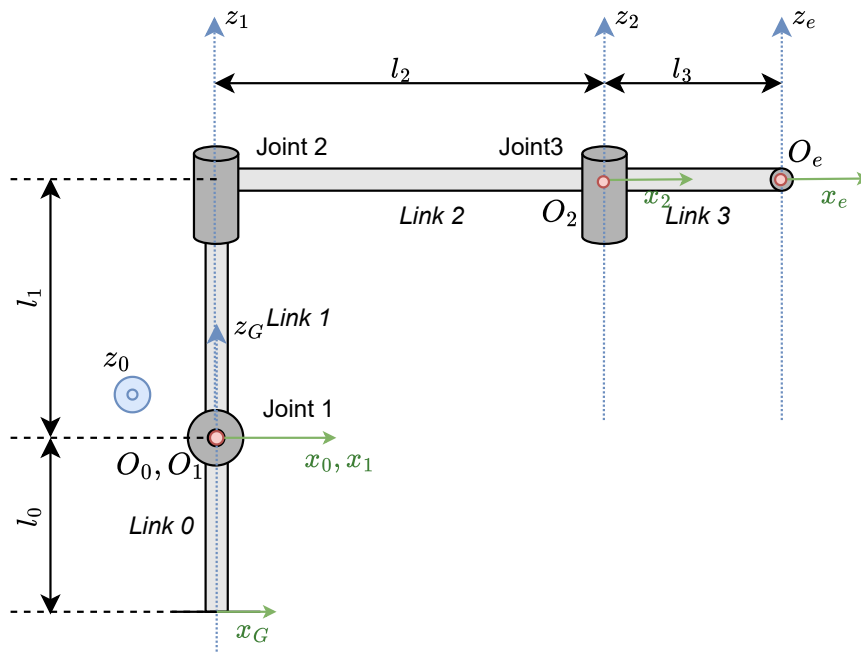
Νικόλαος Αδαμόπουλος - 03122074

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-26

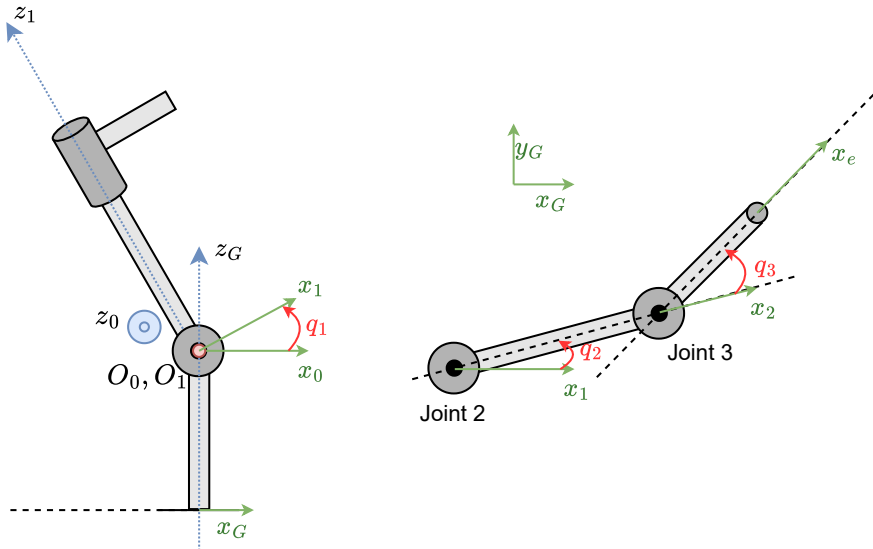
### Θεωρητικό Μέρος

Σημείωση: Οι πράξεις συμβολικής άλγεβρας (π.χ. πολλαπλασιασμοί πινάκων, υπολογισμός οριζουσών και αντίστροφων πινάκων) πραγματοποιήθηκαν με χρήση Python/SymPy σε συνοδευτικό αρχείο κώδικα, το οποίο επισυνάπτεται στην εργασία.

1. Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε την τοποθέτηση των ενδιάμεσων πλαισίων, σύμφωνα με τη μέθοδο DH. Το ένα σχήμα αντιστοιχεί στη διάταξη αρχικοποίησης ενώ τα άλλα δύο αντιστοιχούν σε καταστάσεις με κίνηση των επενεργητών.



Σχήμα 1: Πλαίσια DH για τη διάταξη αρχικοποίησης του ρομποτικού βραχίονα.



Σχήμα 2: Όψη με κίνηση της άρθρωσης 1 (αριστερά) και των 2,3 (δεξιά).

- Ο άξονας  $z_g$  του global frame και ο  $z_0$  της άρθρωσης 1 τέμνονται, άρα το  $O_0$  τοποθετείται στο σημείο τομής, πάνω στην άρθρωση και το  $x_0$  κάθετα στο επίπεδο που σχηματίζουν, παράλληλα στο  $x_g$ .
- Οι άξονες  $z_0, z_1$  τέμνονται επίσης στο ίδιο σημείο, άρα το  $O_1$  ταυτίζεται με το  $O_0$  και το  $x_1$  τοποθετείται κάθετα στο επίπεδο που σχηματίζουν. Στη διάταξη αρχικοποίησης φαίνεται ότι συμπίπτει με το  $x_0$ , όμως κατά τη κίνηση της άρθρωσης σχηματίζουν γωνία  $q_1$ .
- Οι άξονες  $z_1, z_2$  είναι παράλληλοι, άρα δεν ορίζεται μοναδική κοινή κάθετος. Επιλέγουμε την κοινή κάθετο κατά μήκος του συνδεσμού 3 ( $l_3$ ).

Βάση αυτών προκύπτει ο εξής πίνακας παραμέτρων DH:

Πίνακας 1: Πίνακας παραμέτρων DH.

link	$a_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$\theta_i$
0	0	$l_0$	$+90^\circ$	0
1	0	0	$-90^\circ$	$q_1$
2	$l_2$	$l_1$	0	$q_2$
3	$l_3$	0	0	$q_3$

2. Βάση αυτών προκύπτουν οι ενδιάμεσοι μετασχηματισμοί:

$$\begin{aligned}
A_0^g &= \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(0) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \cdot \cos(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) & -\cos(0) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \cdot \sin(0) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_1^0 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(q_1) \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 \cdot \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\cos(q_1) \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 \cdot \sin(q_1) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_2^1 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) \cdot \cos(0) & \sin(q_2) \cdot \sin(0) & l_2 \cdot \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) \cdot \cos(0) & -\cos(q_2) \cdot \sin(0) & l_2 \cdot \sin(q_2) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_e^2 &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) \cdot \cos(0) & \sin(q_3) \cdot \sin(0) & l_3 \cdot \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) \cdot \cos(0) & -\cos(q_3) \cdot \sin(0) & l_3 \cdot \sin(q_3) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0^g &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_2^1 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_e^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός από το global frame στο εργαλείο είναι:

$$A_e^g = A_0^g A_1^0 A_2^1 A_e^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Για την εξαγωγή του διαφορικού κινηματικού μοντέλου θα χρειαστούμε τους ενδιάμεσους μετασχηματισμούς  $A_i^g$  για  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned}
A_1^g &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
A_2^g &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
A_e^g &= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Από αυτά εξαγάγουμε τον άξονα  $b$  κάθε άρθρωσης και τη θέση της αρχής των αξόνων τους  $r$ :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 \\ l_2 s_2 \\ l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Η  $i$ -οστή στήλη του ιακωβιανού πίνακα, για  $i = 1, 2, 3$  υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_i} \\ \mathbf{J}_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \times (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_{i-1}) \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{bmatrix}$$

Για  $i = 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{L_1} = \mathbf{b}_0 \times (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 c_1 - l_2 s_1 c_2 - l_3 s_1 c_{23} \\ 0 \\ -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{A_1} = \mathbf{b}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{L_2} &= \begin{bmatrix} -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})c_1 \\ l_2 c_2 + l_3 c_{23} \\ -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})s_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{A_2} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{L_3} &= \begin{bmatrix} -l_3 s_{23}c_1 \\ l_3 c_{23} \\ -l_3 s_1 s_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{A_3} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \left[ \begin{array}{c|c|c} -l_1 c_1 - l_2 s_1 c_2 - l_3 s_1 c_{23} & -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})c_1 & -l_3 s_{23}c_1 \\ 0 & l_2 c_2 + l_3 c_{23} & l_3 c_{23} \\ -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} & -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})s_1 & -l_3 s_1 s_{23} \\ \hline 0 & -s_1 & -s_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_L \\ \mathbf{J}_A \end{bmatrix}$$

Και η ευθεία διαφορική κινηματική του βραχίονα είναι:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

4. Η αντίστροφη διαφορική κινηματική προκύπτει από τον αντίστροφο πίνακα  $\mathbf{J}_L^{-1}(\mathbf{q})$ . Ο πίνακας αυτός ορίζεται για ορίζουσα του  $|\mathbf{J}_L|$  διάφορη του 0. Σε περίπτωση που η ορίζουσα είναι 0 έχουμε τις λεγόμενες ιδιόμορφες διατάξεις. Μελετώντας την ορίζουσα βρίσκουμε:

$$|\mathbf{J}_L| = l_2 l_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) s_3 = 0 \Rightarrow \sin q_3 = 0 \xrightarrow{0 \leq q_3 < \pi} q_3 = 0$$

Για  $q_3 \neq 0$  το αντίστροφο διαφορικό μοντέλο είναι:

$$\dot{q} = J_L^{-1}(q) \dot{p} = \frac{1}{l_2 l_3 (l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3)) \sin q_3} \text{adj}(J_L(q)) \dot{p}$$

με

$$\text{adj}(J_L(q)) = \begin{bmatrix} -l_2 l_3 s_1 s_3 & 0 \\ l_3 c_{23}(-l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23}) & l_3(l_2 c_2 + l_3 c_{23})s_{23} \\ -(l_2 c_2 + l_3 c_{23})(-l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23}) & -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ l_2 l_3 c_1 s_3 & \\ l_3 c_{23}(l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23}) & \\ -(l_2 c_2 + l_3 c_{23})(l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23}) & \end{bmatrix}$$

5. Το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής συνίσταται στην επίλυση των εξής τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & +l_2 c_1 c_2 & +l_3 c_1 c_{23} \\ & l_2 s_2 & +l_3 s_{23} \\ l_0 & +l_1 c_1 & +l_2 s_1 c_2 & +l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε την επίλυση συνδυάζοντας τη πρώτη και τη τρίτη εξίσωση και μετά το αποτέλεσμα τους με τη δεύτερη. Ορίζουμε:

$$R \triangleq l_2 c_2 + l_3 c_{23}$$

Και έτσι προκύπτει:

$$\begin{cases} p_x & = -l_1 s_1 + c_1 R \\ p_z - l_0 & = l_1 c_1 + s_1 R \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} R & = l_2 c_2 + l_3 c_{23} \\ p_y & = l_2 s_2 + l_3 s_{23} \end{cases} \quad (2)$$

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι να λύσουμε το πρώτο σύστημα ως προς  $q_1$ , με λύση ανεξάρτητη του  $R$ , να υπολογίσουμε το  $R$  και να λύσουμε το δεύτερο σύστημα ως ένα τυπικό 2R Planar ρομποτικό βραχίονα.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} (\cdot s_1) \Rightarrow p_x s_1 = -l_1 s_1^2 + s_1 c_1 R \\ (\cdot c_1) \Rightarrow (p_z - l_0) c_1 = l_1 c_1^2 + s_1 c_1 R \end{cases} \\ & \xrightarrow{(-)} l_1 = -p_x s_1 + (p_z - l_0) c_1 \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τη μορφή  $A \cos \theta + B \sin \theta = C$  και λύνεται ορίζοντας  $r = \sqrt{A^2 + B^2}$  και  $\phi = \text{atan2}(B, A)$ . Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\begin{aligned} r & \triangleq \sqrt{p_x^2 + (p_z - l_0)^2} \\ \phi & \triangleq \text{atan2}(-p_x, p_z - l_0) \\ l_1 & = r \cos(q_1 - \phi) \end{aligned}$$

Για  $l_1 \leq r$  προκύπτει το πρώτο ζεύγος λύσεων:

$$q_1 - \phi = \pm \arccos\left(\frac{l_1}{r}\right)$$

$$q_1 = \text{atan2}(-p_x, p_z - l_0) \pm \arccos\left(\frac{l_1}{\sqrt{p_x^2 + (p_z - l_0)^2}}\right)$$

Λύνουμε ως προς  $R$ :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} (\cdot c_1) \Rightarrow p_x c_1 = -l_1 s_1 c_1 + c_1^2 R \\ (\cdot s_1) \Rightarrow (p_z - l_0) s_1 = l_1 s_1 c_1 + s_1^2 R \end{cases} \\ & \xrightarrow{(+)} R = p_x c_1 + (p_z - l_0) s_1 \end{aligned}$$

Με επιλυμένο το  $q_1$ , το  $R$  επιλύεται επίσης. Για το δεύτερο σύστημα, η επίλυσή του γίνεται άμεσα όπως παρουσιάζεται στις διαφάνειες και έχουμε:

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{R^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \\ s_3 &= \pm \sqrt{1 - c_3^2} \\ q_3 &= \text{atan2}(s_3, c_3) \\ q_2 &= \text{atan2}(p_y, R) - \text{atan2}(l_3 s_3, l_2 + l_3 c_3) \end{aligned}$$

Προκύπτουν έτσι 4 λύσεις, για τα δύο ζεύγη εναλλακτικών προσήμων

---

## Κινηματική Προσομοίωση

- Παραμετροποίηση τροχιάς

Για να παραμετροποιήσουμε τη τροχιά του εργαλείου από το σημείο  $A$  στο  $B$  θα χρησιμοποιήσουμε τη βαθμωτή συνάρτηση  $s(\tau) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με είσοδο τον κανονικοποιημένο χρόνο  $\tau = t/T \in [0, 1]$  για μια περίοδο, ή  $\tau = (t \bmod T)/T$  γενικά. Επιλέγουμε πολυώνυμο 5ου βαθμού 6 παραμέτρων για να καλύψουμε τις 6 απαιτήσεις συνέχειας (τρεις περιορισμοί τροχιάς και τρεις ταχύτητας):

$$\begin{aligned}P(\tau = 0) = A &\Rightarrow s(0) = 0 \\P(\tau = 0.5) = B &\Rightarrow s(0.5) = 1 \\P(\tau = 1) = A &\Rightarrow s(1) = 0 \\V(\tau = 0) = V(\tau = 0.5) = V(\tau = 1) &= 0 \\&\Rightarrow \dot{s}(0) = \dot{s}(0.5) = \dot{s}(1) = 0\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι το παρακάτω (η λύση του συστήματος γίνεται προγραμματιστικά στο συνοδευτικό αρχείο):

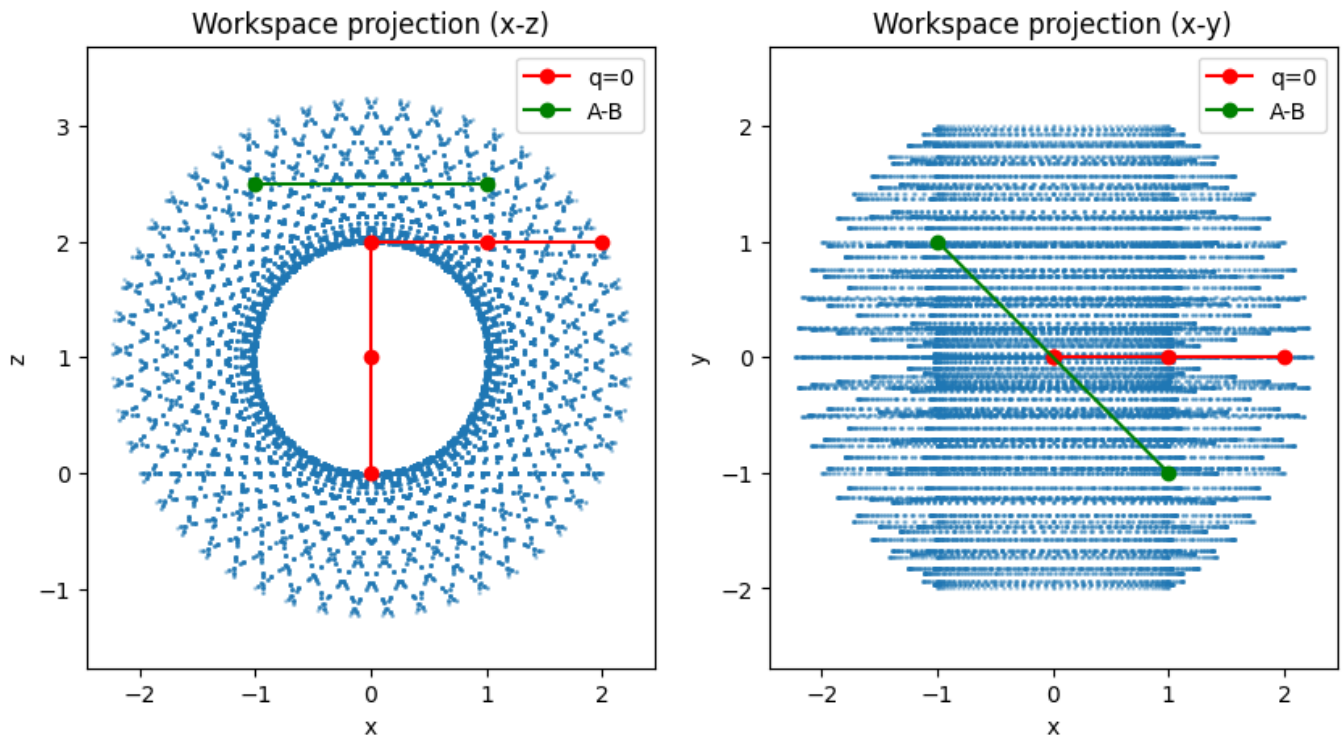
$$\begin{aligned}s(\tau) &= 16\tau^2(\tau - 1)^2 \\ \dot{s}(\tau) &= 32\tau(2\tau^2 - 3\tau + 1)\end{aligned}$$

Βάση αυτών, η τροχιά και η ταχύτητα θα είναι:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= A + s(\tau)(B - A) \\ \mathbf{V}(t) &= \frac{1}{T}\dot{s}(\tau)(B - A)\end{aligned}$$

- Επιλογή Σταθερών

Χάριν απλότητας επιλέγουμε  $l_i = 1, i = 1, 2, 3$ . Με τη βοήθεια του προγράμματος προσομοίωσης προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα της περιοχής που είναι προσβάσιμη από τον βραχίονα, από την οποία εμείς επιλέγουμε τα σημεία  $A = [-1, 1, 2.5], B = [1, -1, 2.5]$ :



Σχήμα 3: Περιοχή εργασίας του ρομποτικού βραχίονα και επιλογή των σημείων  $A$  και  $B$ .

- Προσομοίωση

Για τη προσομοίωση χρησιμοποιούμε Python. Χρησιμοποιούμε τις βοηθητικές συναρτήσεις που ορίσαμε για το θεωρητικό μέρος (`theoretical_calculations.py`) για να εξάγουμε τις συμβολικές μορφές των πινάκων της κινηματικής. Στη συνέχεια στο αρχείο `kinematic_simulation.py` εκτελούμε τη προσομοίωση και φτιάχνουμε τα διαγράμματα των αποτελεσμάτων.

Στην αρχή του προγράμματος ορίζουμε τις σταθερές που στους υπολογισμούς θεωρούνται δεδομένες, δηλαδή οι σταθερές χρόνου, τα μήκη των συνδέσμων και τα σημεία  $A, B$ . Στο αρχείο υπάρχει επίσης συνάρτηση για την οπτικοποίηση των ορίων του χώρου εργασίας, όπως είδαμε παραπάνω καθώς και μια συνάρτηση για τη δημιουργία ενός αρχείου gif της κίνησης του βραχίονα, το οποίο περιλαμβάνεται στα έγγραφα προς υποβολή.

Ο βρόγχος ελέγχου αποτελείται από τα εξής βήματα:

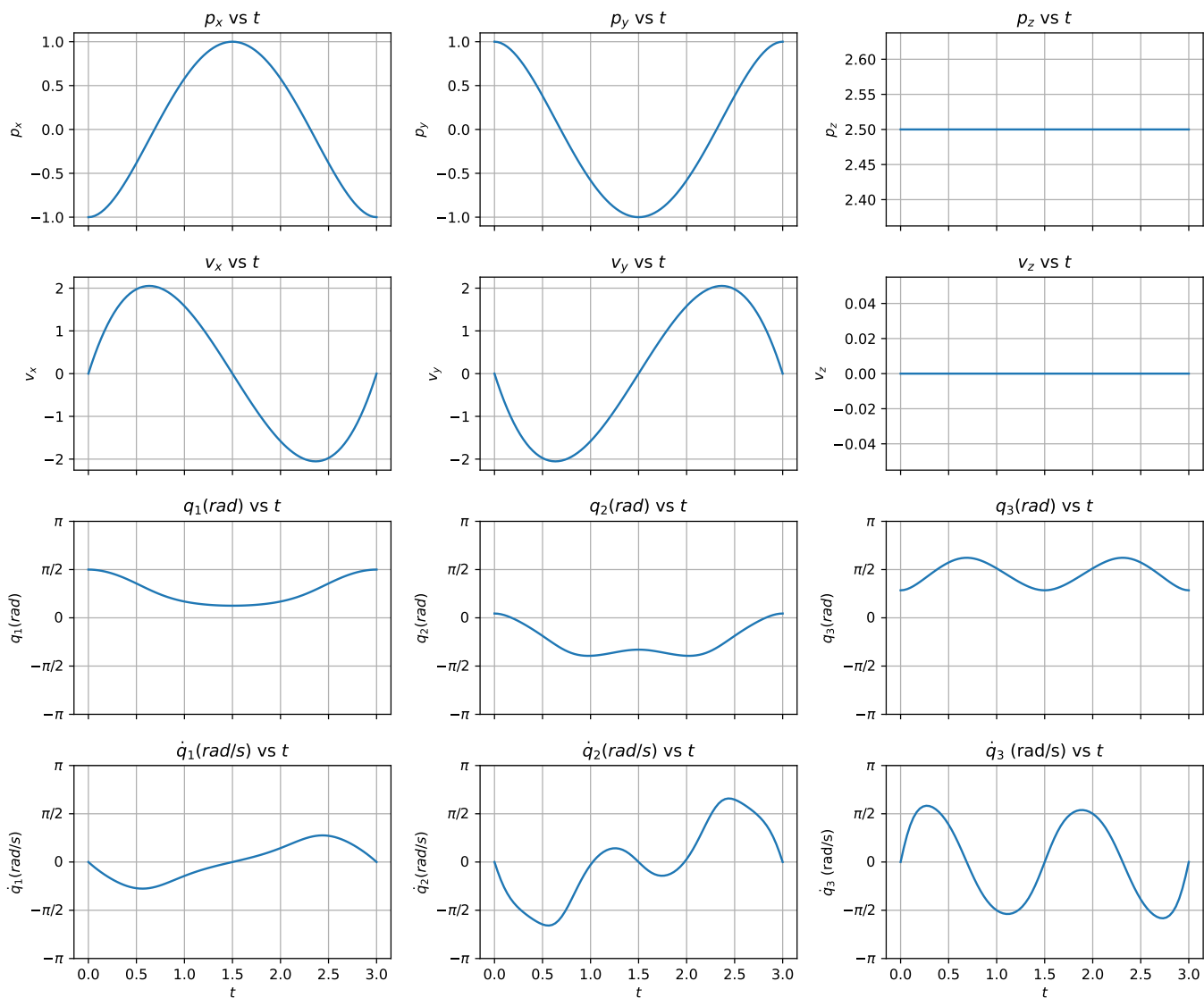
- Υπολογισμός κανονικοποιημένου χρόνου  $\tau$
- Υπολογισμός θέσης και ταχύτητας  $P_k, V_k$
- Εφαρμογή αντίστροφης κινηματικής για προσδιορισμό των  $q1_{sol}, q2_{sol}, q3_{sol}$
- Υπολογισμός αντίστροφης ιακωβιανής για προσδιορισμό των αντίστοιχων παραγώγων

Για τον υπολογισμό της αντίστροφης κινηματικής πρέπει να επιλέξουμε μια από τις 4 λύσεις που προκύπτουν. Στα αποτελέσματα παρακάτω δείχνουμε ενδεικτικά τις λύσεις για διπλό elbow-up, ενώ στα αρχεία υποβολής υπάρχουν τα αντίστοιχα `animation` και για τα 4 `configuration`.

- Αποτελέσματα

Παρακάτω βλέπουμε τα διαγράμματα για τα ζητούμενα μεγέθη, ως συνάρτηση του χρόνου:



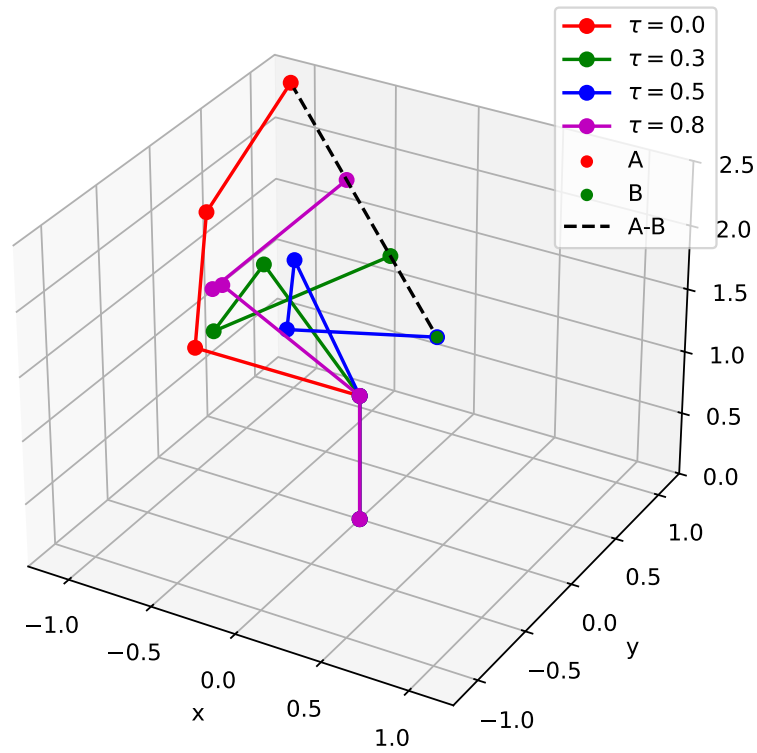


Σχήμα 4: Διαγράμματα μεγεθών  $P$ ,  $V$ ,  $q$ ,  $\dot{q}$ .

Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο της ομαλότητας και της συνέχειας πληρείτε, αφού οι παράγωγοι  $V$ ,  $\dot{q}$  έχουν αρχική, ενδιάμεση και τελική τιμή 0. Επιπλέον βλέπουμε ότι το  $q_3$  κινείται πάνω από το 0, άρα δεν κινδυνεύουμε από ιδιομορφία.

Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε 4 στιγμιότυπα από τη κίνηση του βραχίονα στην ίδια εικόνα:

Robot configurations at  $\tau = 0, 0.3, 0.5, 0.8$



Σχήμα 5: Τέσσερα στιγμιότυπα από την κίνηση του βραχίονα.