

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Ρομποτική 1

Εργαστηριακή Άσκηση 2

Pendubot

Ομάδα A3-4	Νικόλαος Αδαμόπουλος	03122074
	Λεωνίδας Λαγομιτζής	03121061
	Ηλίας-Στυλιανός Ηλιάδης	03122140
	Ηλίας Πουλόπουλος	03122160
	Ανδρέας Αγγελόπουλος	03122049

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	2
2 Πειραματική Διάταξη	2
3 Θεωρητικό Υπόβαθρο	3
4 Πειραματική Ρύθμιση PD Ελεγκτή	6
5 Αντιστάθμιση Βαρύτητας	8
6 Μη Γραμμικός Ελεγκτής 2 φάσεων	9

1 Εισαγωγή

Στην εργαστηριακή άσκηση, επιδιώξαμε να ελέγχουμε τον ρομποτικό μηχανισμό Pendubot με χρήση γραμμικού PD ελέγχου και χρήση μη γραμμικού ελέγχου.

Αρχικά, επιχειρήσαμε να τοποθετήσουμε μία μεμονωμένη άρθρωση του μηχανισμού αυτού σε γωνία 30° με χρήση γραμμικού PD ελέγχου, δοκιμάζοντας διάφορες τιμές των συντελεστών K_p, K_d . Σε όλα τα πειράματά μας, παρατηρήσαμε ωστόσο σημαντικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

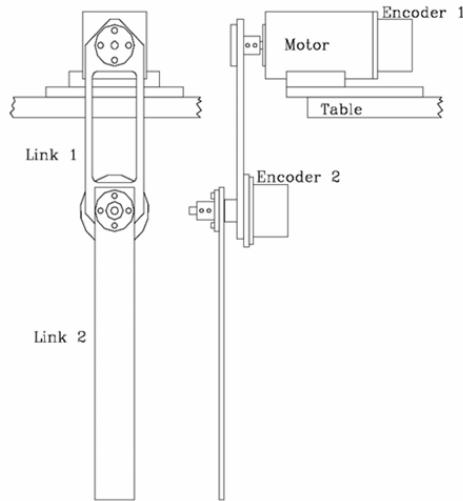
Για να λάβουμε καλύτερα αποτελέσματα, περιορίσαμε την επίδραση της βαρύτητας προσθέτοντας τον όρο αντιστάθμισης g_1 στο καλύτερο μοντέλο μας, οπότε και αποκτήσαμε αρνητικό σφάλμα. Προκειμένου να κατανοήσουμε την επίδραση του όρου g_1 στο Pendubot, μελετήσαμε την ειδική περίπτωση $(K_p, K_d) = (0, 0)$, διαπιστώντας πως ο όρος g_1 αδυνατεί να αντισταθμίσει πλήρως τη βαρύτητα.

Τέλος, εξετάσαμε την λειτουργία ενός πλήρους μη γραμμικού ελεγκτή (δύο φάσεων) για την εξισορρόπηση του αναστροφου εκκρεμούς στην ενδιάμεση θέση ασταθούς ισορροπίας.

2 Πειραματική Διάταξη

Το Pendubot είναι ένας ρομποτικός μηχανισμός τύπου "ανάστροφο εκκρεμές" και έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Ειδικότερα, ο μηχανισμός αποτελείται από δύο κινούμενους συνδέσμους (link-1, link-2) και από δύο στροφικές αρθρώσεις (joint-1, joint-2). Σε κάθε άρθρωση, διαθέτουμε έναν οπτικό κωδικοποιητή (encoder) για την μέτρηση της γωνίας στροφής, ενώ η πρώτη άρθρωση joint-1 ενεργοποιείται από έναν κινητήρα συνεχούς ρεύματος (DC Motor). Η δεύτερη άρθρωση, παρότι ελεύθερη να κινηθεί περιστροφικά, δεν διαθέτει ανεξάρτητο ενεργοποιητή, οπότε συνιστά μία υποοδηγούμενη άρθρωση.

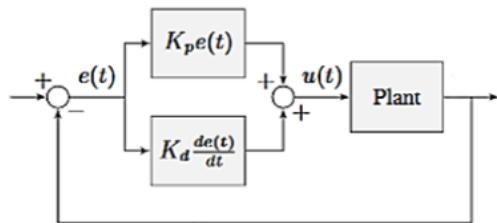
Η πειραματική διάταξη αναπαριστάται στο Σχήμα 1 του εργαστηριακού οδηγού, το οποίο επισυνάπτουμε ακολούθως:

Σχήμα 1: Κινηματική Δομή ρομποτικού μηχανισμού *Pendubot*

3 Θεωρητικό Υπόβαθρο

PD Έλεγχος

Ο PD (Proportional-Derivative) έλεγχος είναι ένας γραμμικός τρόπος ελέγχου. Η συνάρτηση του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de}{dt}$ και έχει συνάρτηση μεταφοράς $G_{PD}(s) = K_p + K_d s$ και φαίνεται σχηματικά σε εικόνα της παρουσίασης της εργαστηριακής άσκησης την οποία επισυνάπτουμε ακολούθως:



Σχήμα 2: Block διάγραμμα ελεγκτή PD

Χαρακτηριστικά Απόκρισης

- **Σφάλμα Μόνιμης Κατάστασης**

Στα πειράματά μας, θα εργαστούμε με τη βηματική είσοδο $u(t) = 1$, $t \geq 0$ και $u(t) = 0$, $t < 0$. Αν το σφάλμα παίρνει τελική τιμή, δηλαδή αν υπάρχει το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t))$, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης δίνεται από τον τύπο $e_{ss} = 1/(1+K_P)$, όπου $K_P = \lim_{s \rightarrow 0} (G(s))$ και $G(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοιχτού βρόγχου σε μετασχηματισμό Laplace.

- **Υπερύψωση**

Η υπερύψωση (overshoot) εκφράζει σε ποσοστό το κατά πόσο η μέγιστη τιμή της απόκρισης ξεπερνά την τιμή μόνιμης κατάστασης. Έτσι, αν θεωρήσουμε απόκριση e , η υπερύψωση ορίζεται ως

$$M_p = \frac{e_{max} - e_{ss}}{e_{ss}} 100\%$$

όπου e_{ss} η τιμή τελικής κατάστασης.

- **Χρόνος Ανύψωσης**

Ο χρόνος ανύψωσης (rise time) ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε προκειμένου η απόκριση να μεταβεί από το 10% της τελικής τιμής στο 90% της τελικής τιμής.

Αντιστάθμιση Βαρύτητας

Σύμφωνα με παράρτημα του εργαστηριακού οδηγού, οι εξισώσεις κίνησης του Pendubot είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= d_{11} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + d_{12} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_{11} \dot{q}_1 + \varphi_1 \\ 0 &= d_{21} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + d_{22} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_{21} \dot{q}_1 + \varphi_2\end{aligned}$$

Όπου, $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$, το διάνυσμα των γωνιών των συνδέσμων 1 και 2 αντίστοιχα, $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \end{bmatrix}^T$, το διάνυσμα της ροπής που εφαρμόζεται στους δύο συνδέσμους, $D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & ; & d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ η μήτρα αδράνειας του ρομπότ, $C(q) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ; & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ οι όροι Coriolis και φυγόκεντρου δυνάμεως και $g(q) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T$ το διάνυσμα της βαρύτητας. Οι εξισώσεις κίνησης προέκυψαν με βάση το Δυναμικό Μοντέλο Lagrange Ρομποτικού Χειριστή, σύμφωνα με το οποίο: $\tau = D(q) \frac{d^2 q}{dt^2} + C(\dot{q}, q) \dot{q} + g(q)$. Θεωρώντας τοπικό νόμο ελέγχου ($\dot{q} = 0$): $u = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + g(q)$ και μελετώντας την ευστάθεια κατά Lyapunov παίρνουμε:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (e^T K_p e + (\dot{e})^T D(q) \dot{e})$$

Παρατηρούμε ότι $V(q, \dot{q}) = 0$, όταν $e = 0 \dot{e} = 0$. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση Lyapunov παίρνουμε

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = e^T K_p \dot{e} + (\dot{e})^T D(q) \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{2} (\dot{e})^T (\dot{D})(\dot{e})$$

Δεδομένου ότι $e = q_d - q$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -e^T K_p \dot{q} + (\dot{q})^T D(q) \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{2} (\dot{q})^T (\dot{D})(\dot{q})$$

Επειδή η μήτρα $\dot{D} - 2C$ είναι αντισυμμετρική και ισχύει $w^T(\dot{D} - 2C)w = 0$, $\forall w \in \mathbb{R}^n$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V}(q, \dot{q}) &= -e^T K_p \dot{q} + (\dot{q})^T (\tau - C\dot{q} - g(q)) + \frac{1}{2} (\dot{q})^T (\dot{D})(\dot{q}) \\ \dot{V}(q, \dot{q}) &= -e^T K_p \dot{q} + (\dot{q})^T (\tau - g(q)) \\ \dot{V}(q, \dot{q}) &= -e^T K_p \dot{q} + (\dot{q})^T (K_p e + K_d \dot{e} + g(q) - g(q)) \\ \dot{V}(q, \dot{q}) &= -e^T K_p \dot{q} + (\dot{q})^T (K_p e + K_d \dot{e}) \\ \dot{V}(q, \dot{q}) &= (\dot{q})^T K_d \dot{e} \\ \dot{V}(q, \dot{q}) &= -(\dot{q})^T K_d \dot{q} \leq 0\end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε $\dot{V}(q, \dot{q}) = 0$ όταν $|\dot{q}| = 0$, οπότε και για $\dot{q} = 0$ έχουμε ευστάθεια Lyapunov. Άρα λοιπόν, αν θεωρήσουμε τοπικό νόμο ελέγχου $u = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + g(q)$, αναμένουμε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Μη Γραμμικός Ελεγκτής Δύο Φάσεων

Στον μη γραμμικό ελεγκτή δύο φάσεων πρέπει να ελέγχουμε την φάση της ταλάντωσης και την φάση της εξισορρόπησης του link-2 σε όρθια θέση, οπότε χρειαζόμαστε δύο ελεγκτές.

4 Πειραματική Ρύθμιση PD Ελεγκτή

Στο πρώτο μέρος του πειράματος πραγματοποιήσαμε **σάρωση παραμέτρων** (grid search) του PD ελεγκτή σε διακριτό, μη ομοιόμορφο πλέγμα τιμών: επιλέξαμε 4 διακριτές τιμές για τον K_p και, για καθεμία, ένα διαφορετικό σύνολο 3 τιμών για τον K_d (σύνολο 12 συνδυασμοί), επί των οποίων εφαρμόσαμε βηματική εντολή θέσης στην άρθρωση q_1 (από τη φυσική θέση σε $\theta_d = 30^\circ$).

Για κάθε δοκιμή καταγράψαμε:

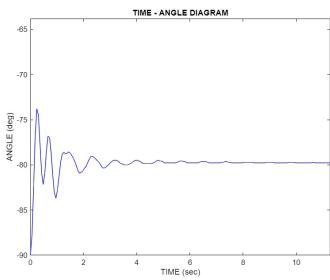
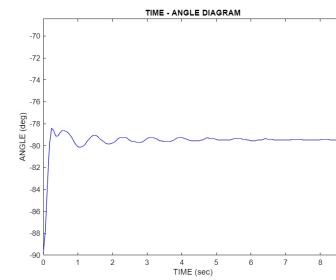
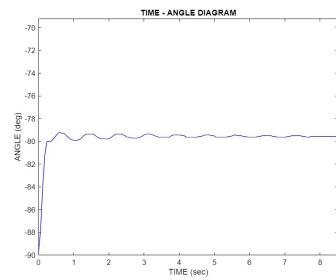
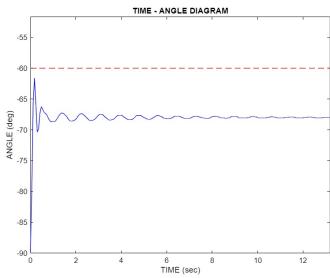
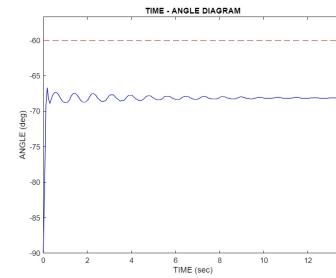
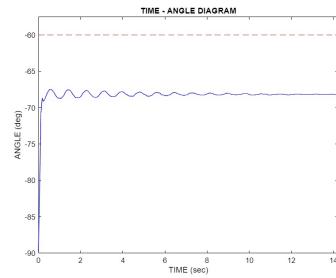
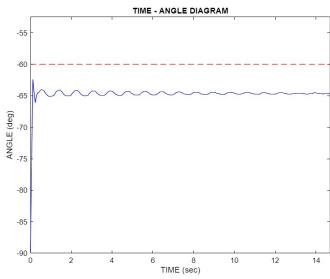
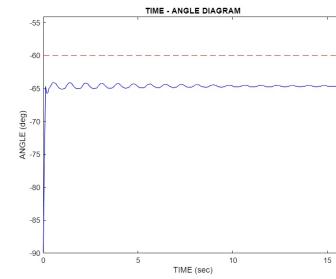
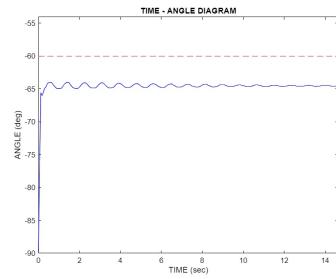
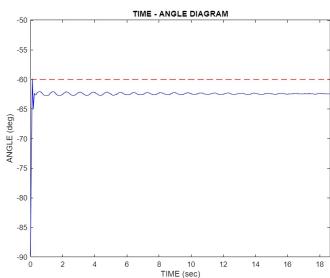
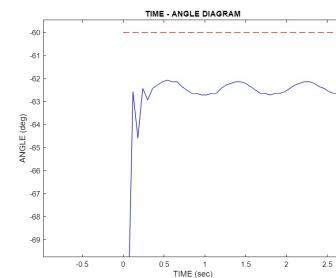
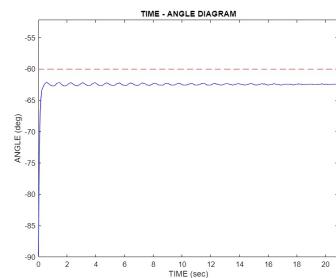
- το **σφάλμα μόνιμης κατάστασης** e_{ss} ,
- τον **χρόνο ανύψωσης** t_r (10%–90%),
- το **ποσοστό υπερύψωσης** M_p .

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται ενδεικτικά στον παρακάτω πίνακα, όπου οι τιμές θα συμπληρωθούν μετρητικά:

Πίνακας 1: Πειραματικά αποτελέσματα ρύθμισης PD για διάφορα ζεύγη (K_p, K_d)

Δοκιμή	K_p	K_d	e_{ss} (deg)	t_r (s)	M_p (rad)
1		0	19.34	0.18	0.1
2	1	0.15	19.2	0.24	0.014
3		0.23	19.48	0.48	0.005
4		0.25	8.04	0.12	0.11
5	5	0.4	8.33	0.18	0.031
6		0.48	7.68	0.48	0.0062
7		0.55	4.73	0.12	0.038
8	10	0.65	4.58	0.36	0.014
9		0.7	4.73	0.3	0.0088
10		0.8	2.64	0.12	0.043
11	20	0.95	2.136	0.42	0.0038
12		1.3	2.28	0.42	0.0038

Για καθεμία από τις παραπάνω δοκιμές, παραθέτουμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα, τα οποία συλλέχθηκαν κατά την εκτέλεση.

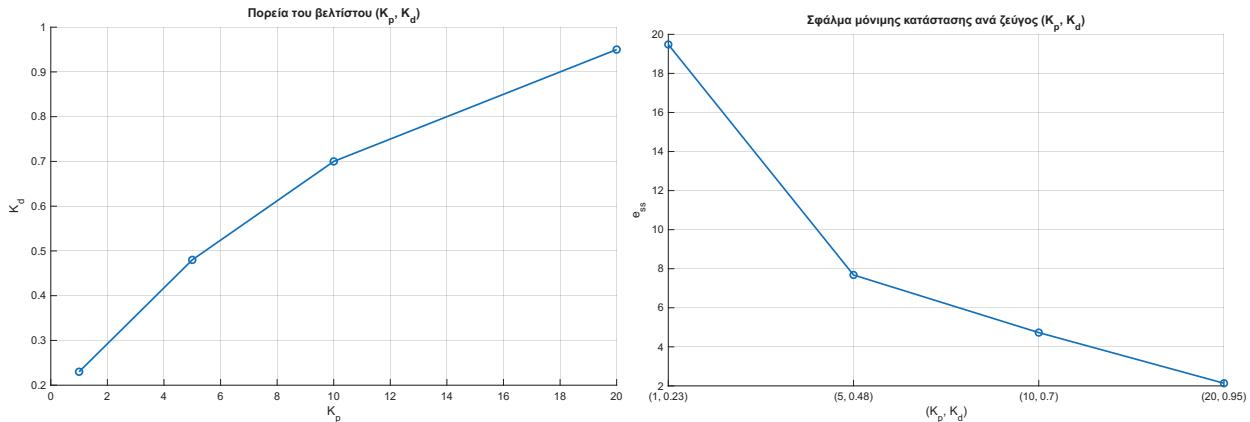
1. $K_p = 1, K_d = 0.00$ 2. $K_p = 1, K_d = 0.15$ 3. $K_p = 1, K_d = 0.23$ 4. $K_p = 5, K_d = 0.25$ 5. $K_p = 5, K_d = 0.40$ 6. $K_p = 5, K_d = 0.48$ 7. $K_p = 10, K_d = 0.55$ 8. $K_p = 10, K_d = 0.65$ 9. $K_p = 10, K_d = 0.70$ 10. $K_p = 20, K_d = 0.80$ 11. $K_p = 20, K_d = 0.95$ 12. $K_p = 20, K_d = 1.30$

Σχήμα 3: Πλέγμα δοκιμών PD: κάθε σειρά αντιστοιχεί σε σταθερό K_p (1, 5, 10, 20) και κάθε στήλη σε διαφορετικό K_d .

Παρατηρούμε ότι η αύξηση του K_p βελτιώνει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, (βλέπουμε και στις μετρήσεις ότι μειώνεται από 19.34 deg σε 2.28 deg), όμως δεν καταφέρνει να το μηδενίσει. Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς δεν υπάρχει κάποια αντιστάθμιση της βαρύτητας, όπως θα δούμε στο επόμενο κομμάτι.

Παράλληλα η αύξηση του όρου διαφόρισης K_d προκαλεί αφενός ελαφρά αύξηση του χρόνου ανύψωσης, αφετέρου ρίχνει σημαντικά το ποσοστό υπερύψωσης. Εξομαλύνει έτσι τη ταλαντωτική συμπεριφορά του συστήματος, μειώνοντας από 10 μέχρι 20 φορές το ποσοστό υπερύψωσης, ενώ ο χρόνος ανύψωσης αυξάνεται μόλις 2 με 3 φορές (από την ήδη χαμηλή τιμή του).

Η πορεία του βέλτιστου ζεύγους είναι η εξής:



Σχήμα 4: Βέλτιστο ζεύγος K_d και αντίστοιχο e_{ss} ανά K_p .

Βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται ο αναλογικός όρος K_p μειώνεται η απαιτούμενη αύξηση του K_d για να αντιμετωπιστούν οι ταλαντώσεις του, ενώ μειώνεται και η μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης. Και οι δύο αυτές παρατηρήσεις μας οδηγούν ότι υπάρχει ιδανικό ζεύγος παραμέτρων είναι το (20, 0.95), αφού πέραν αυτού αύξηση είτε του K_p είτε του K_d δεν μας προσφέρει κάτι παραπάνω. Στο ζεύγος αυτό θα βασιστούμε για τη βελτίωση με χρήση αντιστάθμισης.

5 Αντιστάθμιση Βαρύτητας

Στην προηγούμενη ενότητα παρατηρήσαμε ότι ο γραμμικός ελεγκτής PD, παρότι κατάφερε να σταθεροποιήσει το σύστημα, παρουσίασε σημαντικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης e_{ss} , ακόμα και για τις βέλτιστες τιμές κερδών. Αυτό οδήγησε στην ανάγκη εισαγωγής της αντιστάθμισης βαρύτητας.

Η αντιστάθμιση βαρύτητας (gravity compensation) είναι η τεχνική κατά την οποία προσθέτουμε στον νόμο ελέγχου έναν υπολογισμένο όρο, ο οποίος ισούται με τη ροπή που ασκεί η βαρύτητα στους συνδέσμους του ρομπότ στην τρέχουσα θέση τους. Είναι απαραίτητη, γιατί ένας απλός ελεγκτής PD παράγει ροπή μόνο όταν υπάρχει σφάλμα θέσης. Επειδή η βαρύτητα ασκεί συνεχή δύναμη στο Pendubot (προσπαθώντας να το κατεβάσει), ο ελεγκτής PD αναγκάζεται να διατηρεί ένα μόνιμο σφάλμα ώστε να παράγει την απαιτούμενη ροπή συγκράτησης.

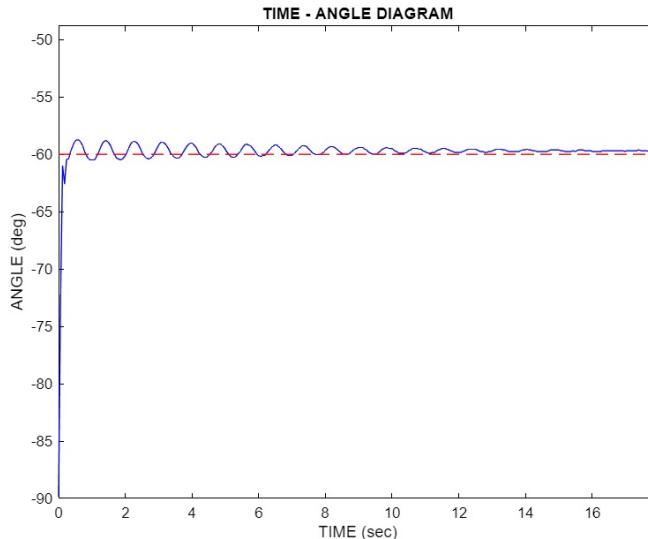
Εισάγοντας τον όρο αντιστάθμισης $g(q)$ που υπολογίσαμε στη θεωρητική ανάλυση, παίρνουμε τον νέο νόμο ελέγχου

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + g(q).$$

Για τα βέλτιστα κέρδη K_p, K_d που βρήκαμε στο προηγούμενο κομμάτι, δηλαδή $(K_p, K_d) = (20, 0.95)$, παίρνουμε τις τιμές

$$e_{ss} = -0.67^\circ, \quad t_r = 0.42 \text{ s}, \quad M_p = 0.0139 \text{ rad},$$

και το παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 5: Απόκριση του Pendubot με PD έλεγχο και αντιστάθμιση βαρύτητας για $K_p = 20, K_d = 0.95$.

Φαίνεται λοιπόν πως πετύχαμε σημαντική βελτίωση στο σφάλμα μόνιμης κατάστασης, ενώ ο χρόνος ανύψωσης και το overshoot έμειναν πρακτικά αμετάβλητα. Να σημειωθεί πως το ρομπότ σταθεροποιήθηκε σε θέση ελαφρώς ψηλότερη από την επιθυμητή και αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε λόγω σφάλματος στον υπολογισμό των σταθερών φ_1, φ_2 είτε λόγω της στατικής τριβής του μηχανισμού.

Το παραπάνω σφάλμα επαληθεύεται θεωρώντας ως είσοδο ελέγχου μόνο τον όρο αντιστάθμισης, δηλαδή $u = g_1$. Το Pendubot παραμένει αρχικά στη φυσική του θέση και, τοποθετώντας κατόπιν χειροκίνητα τον σύνδεσμο σε μία γωνία θ , η θεωρητική προσδοκία είναι η διατήρηση της θέσης αυτής λόγω του όρου αντιστάθμισης βαρύτητας. Ωστόσο, επειδή ο όρος g_1 δεν περιγράφει το μοντέλο με απόλυτη ακρίβεια, παρατηρήθηκε μικρή απόκλιση της γωνίας, με το σύστημα να ισορροπεί τελικά σε μία νέα θέση $\theta' > \theta$. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι καθώς αυξανόταν η τιμή της αρχικής γωνίας θ , το Pendubot αδυνατούσε να ισορροπήσει, οδηγώντας το σύστημα σε αστάθεια.

6 Μη Γραμμικός Ελεγκτής 2 φάσεων

Στο τελευταίο μέρος του πειράματος μελετήθηκε η λειτουργία ενός **μη-γραμμικού ελεγκτή δύο φάσεων** για την εξισορρόπηση του αναστροφου εκκρεμούς στη μεσαία θέση ασταθούς ισορροπίας (*middle balancing position*). Η πειραματική διάταξη που έχουμε (το σύστημα είναι υπο-οδηγούμενο) επιτρέπει την έμμεση επιρροή της κίνησης του δεύτερου συνδέσμου μέσω των επιταχύνσεων που επιβάλλονται στον πρώτο. Ο συγκε-

κριμένος ελεγκτής αποτελείται από δύο φάσεις ελέγχου, τη φάση της ταλάντωσης και τη φάση της εξισορρόπησης.

Στη φάση ταλάντωσης, στόχος του ελεγκτή είναι το εκκρεμές να προσεγγίσει την επιθυμητή θέση ισορροπίας μέσω της αύξησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος. Η δυναμική εξίσωση του συστήματος έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = Ax + bu + d(x)$$

όπου x το διάνυσμα κατάστασης, u η ροπή στο πρώτο σύνδεσμο και $d(x)$ οι μη γραμμικοί όροι. Στη φάση αυτή πραγματοποιούνται ελεγχόμενες ταλαντώσεις στην πρώτη άρθρωση, μεταφέροντας ενέργεια στη δεύτερη άρθρωση. Η πρώτη φάση ολοκληρώνεται όταν το σύστημα πλησιάσει τη μεσαία θέση ισορροπίας.

Έπειτα, ενεργοποιείται η **φάση εξισορρόπησης**, όπου ο ελεγκτής βασίζεται στη μη-γραμμική συνάρτηση Lyapunov που έχει τη μορφή:

$$V_i(x, t) = \ln(1 + x^T Px)$$

Επιλέγεται η λογαριθμική συνάρτηση Lyapunov για να εξασφαλιστεί θετική τιμή και καλύτερη προσέγγιση, καθώς παρέχει ανοχή σε μη γραμμικές μεταβολές.

Κατά την διεξαγωγή του πειράματος η επιθυμητή μεσαία θέση επιτεύχθηκε με επιτυχία σε μικρό χρονικό διάστημα και με λιγοστές αλλαγές επιτάχυνσης από τον μη γραμμικό ελεγκτή δύο φάσεων. Επιπλέον, για μικρές μεταβολές της θέσης μετά την ισορροπία, η φάση εξισορρόπησης, δηλαδή ο δεύτερος ελεγκτής, εξασφαλίζει την επαναφορά στην επιθυμητή θέση. Επομένως, διαπιστώνεται επιτυχής λειτουργία του ελεγκτή και στα δύο στάδια.