Probabilidades y Estadística

Clase 3
Probabilidad I

Nicolás Araya Caro

Universidad Diego Portales
Escuela de Informática y Telecomunicaciones

14 de septiembre de 2023

Table of Contents

1. **Probabilidad** se refiere al estudio de azar y la incertidumbre en cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir; la disciplina de la probabilidad proporciona métodos de cuantificar las oportunidades y probabilidades asociadas con varios sucesos.
2. Un **Experimento** es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre.
3. Es un **Experimento Determinista** si al realizarse bajo las mismas condiciones iniciales, se obtienen los mismos resultados.
4. En cambio, un **Experimento Aleatorio** puede producir resultados diferentes, aún cuando se repita siempre de la misma manera.

Table of Contents

Espacio Muestral

udp Escuela de Informática y Telecomunicaciones

1. El espacio muestral de un experimento denotado por ($\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{EM}$, Ω), es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.
2. En caso de ser un espacio muestral discreto, los elementos se obtienen de hacer conteos, siendo por lo general subconjunto de los números enteros.
3. Si es un espacio muestral continuo, los elementos se obtienen de hacer mediciones, siendo por lo general intervalos en el conjunto de los números reales.

Ejemplo

Si se examinan tres fusibles en secuencia y se anota el resultado de cada examen, entonces un resultado del experimento es cualquier secuencia de letras N y D de longitud 3, por lo tanto:

$$EM = \{NNN, NND, NDN, NDD, DNN, DND, DDN, DDD\}$$

Eventos

- En el estudio de la probabilidad, interesan no sólo los resultados individuales de $\boldsymbol{EM}$ sino también varias recopilaciones de resultados de $\boldsymbol{EM}$.
- Un evento es cualquier recopilación (subconjunto) de resultados contenidos en el espacio muestral $\boldsymbol{EM}$. Un evento es **simple** si consiste en exactamente un resultado y **compuesto** si consiste en más de un resultado.
- Un evento es simplemente un conjunto, así que las relaciones y resultados de la teoría elemental de conjuntos pueden ser utilizados para estudiar eventos.

Ejemplo

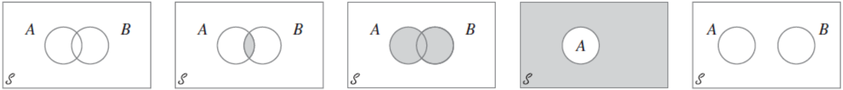
Considérese un experimento en el cual cada uno de tres vehículos que toman una salida de la ruta 68 vira a la izquierda (L) o la derecha (R) al final de la rampa de salida. Los ocho posibles resultados que constituyen el espacio muestral son $EM = \{LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL, RRR\}$. Así pues existen ocho eventos simples, entre los cuales están $E_1 = \{LLL\}$ y $E_5 = \{LRR\}$. Algunos eventos compuestos incluyen:

- $A = \{RLL, LRL, LLR\}$ = el evento en que exactamente uno de los tres vehículos vire a la derecha.
- $B = \{LLL, RLL, LRL, LLR\}$ = el evento en que cuando mucho uno de los vehículos vire a la derecha.
- $C = \{LLL, RRR\}$ = el evento en que los tres vehículos viren en la misma dirección.

Conjuntos

udp Escuela de Informática y Telecomunicaciones

Un evento es simplemente un conjunto, así que las relaciones y resultados de la teoría elemental de conjuntos pueden ser utilizados para estudiar eventos



a) Diagrama de Venn de los eventos A y B b) La región sombreada es $A \cap B$ c) La región sombreada es $A \cup B$ d) La región sombreada es A' e) Eventos mutuamente excluyentes

Figura 2.1 Diagramas de Venn.

1. El **Complemento** de un evento A, denotado por A', es el conjunto de todos los resultados en ***EM*** que no están contenidos en A.
2. La **Unión** de dos ventos A y B, denotados por $A \cup B$ y leídos "A o B", es el evento que consiste en todos los resultados que están en A o en B o en ambos eventos. Es decir, todos los resultados en por lo menos uno de los eventos.
3. La **intersección** de dos eventos A y B, denotada por $A \cap B$ y leída "A y B", es el evento que consiste en todos los resultados que están tanto en A como en B.
4. Que $\varnothing$ denote el evento **nulo** (el evento sin resultados). Cuando $A \cap B = \varnothing$, se dice que A y B son eventos **mutuamente excluyentes** o **disjuntos**.

Ejemplo

En el experimento en el cual se observa el número de bombas en uso en una sola gasolinería de seis bombas, sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$. Entonces:

- El espacio muestral EM es: $EM = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A' = \{5, 6\}$ o sea, el complemento.
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = EM$ (todo el espacio muestral).
- $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \cap C = \{1, 3\}$
- $(A \cap C)' = \{0, 2, 4, 5, 6\}$

Table of Contents

Propiedades Básicas

Dados un experimento y un espacio muestral ***EM***, el objetivo de la probabilidad es asignar a cada evento A un número P(A), llamado la probabilidad del evento A, el cual dará una medida precisa de la oportunidad de que A ocurra.

- Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$.
- P(***EM***) $= 1$.
- Si A_1, A_2, A_3... es un conjunto de eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} = P(A_i)$
- $P(\varnothing) = 0$ donde $\varnothing$ es el evento nulo (el evento que no contiene resultados en absoluto). Esto a su vez implica que la propiedad contenida en el axioma anterior es válida para un conjunto finito de eventos.

Ejemplo

Considere lanzar una moneda al aire. Cuando cae, o será cara (el resultado C) o sello (el resultado S). El espacio muestral de este evento es por consiguiente $EM = \{C, S\}$. Los axiomas especifican $P(EM) = 1$, por lo que la asignación de probabilidad se completará determinando P(C) y P(S).

Más Axiomas

udp Escuela de Informática y Telecomunicaciones

- Para cualquier evento A, P(A) + P(A') = 1, a partir de la cual P(A) = 1 – P(A').
- Para cualquier evento A, $P(A) \leq 1$.
- Para dos eventos cualesquiera A y B (y que **no** son mutuamente excluyentes). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Para tres eventos cualesquiera A, B y C: $P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)+P(A\cap B\cap C)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)]$
- Para dos eventos cualesquiera A y B mutuamente excluyentes. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Resultados equiprobables

En muchos experimentos compuestos de N resultados, es razonable asignar probabilidades iguales a los N eventos simples. Éstos incluyen ejemplos tan obvios como lanzar al aire una moneda o un dado imparcial una o dos veces (o cualquier número fijo de veces) o seleccionar una o varias cartas de un mazo bien barajado de 52 cartas. Con $p = P(E_i)$ por cada i, Es decir, si existen N resultados igualmente probables, la probabilidad de cada uno es 1/N.

$$p = \frac{1}{N}$$

Cuando dos dados se lanzan por separado, existen $N = 36$ resultados. Si ambos dados son imparciales, los 36 resultados son igualmente probables, por lo tanto $P(E_i) = \frac{1}{36}$. Entonces el evento $A = \{\text{suma de dos números} = 7\}$ consta de seis resultados (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) y (6, 1), por lo tanto:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Table of Contents

Conteo

Cuando los diversos resultados de un experimento son igualmente probables (la misma probabilidad es asignada a cada evento simple), la tarea de calcular probabilidades se reduce a contar. Sea N el número de resultados en un espacio muestral y N(A) el número de resultados contenidos en un evento A.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Sin embargo, muchos experimentos en los cuales el esfuerzo implicado al elaborar la lista es prohibitivo porque N es bastante grande. Explotando algunas reglas de conteo generales, es posible calcular probabilidades de la forma sin una lista de resultados. Estas reglas también son útiles en muchos problemas que implican resultados que no son igualmente probables.

La regla de producto

La primera regla de conteo se aplica a cualquier situación en la cual un conjunto (evento) se compone de pares de objetos ordenados y se desea contar el número de pares. Por par ordenado, se quiere decir que, si O_1 y O_2 son objetos, entonces el par (O_1, O_2) es diferente del par (O_2, O_1).

Proposición:

- Si el primer elemento u objeto de un par ordenado puede ser seleccionado de n_1 maneras y por cada una de estas n_1 maneras el segundo elemento del par puede ser seleccionado de n_2 maneras, entonces el número de pares es $n_1 n_2$

Ejemplo

Una familia se acaba de cambiar a una nueva ciudad y requiere los servicios tanto de un obstetra como de un pediatra. Existen dos clínicas médicas fácilmente accesibles y cada una tiene dos obstetras y tres pediatras. La familia obtendrá los máximos beneficios del seguro de salud si se une a la clínica y selecciona ambos doctores de la clínica. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Respuesta

Denote los obstetras por O_1, O_2, O_3 y O_4 y los pediatras por $P_1, ..., P_6$. Entonces se desea el número de pares (O_i, P_j) para los cuales O_i y P_j están asociados con la misma clínica. Como existen cuatro obstetras, $n_1 = 4$, y por cada uno existen tres opciones de pediatras, por lo tanto $n_2 = 3$. Aplicando la regla de producto se obtienen $N = n_1 n_2 = 12$ posibles opciones.

En muchos problemas de conteo y probabilidad, se puede utilizar una configuración conocida como **diagrama de árbol** para representar pictóricamente todas las posibilidades. Partiendo de un punto localizado en el lado izquierdo del diagrama, por cada posible primer elemento de un par emana un segmento de línea recta hacia la derecha. Cada una de estas líneas se conoce como rama de primera generación. Ahora para cualquier rama de primera generación se construye otro segmento de línea que emana de la punta de la rama por cada posible opción de un segundo elemento del par.

Diagrama

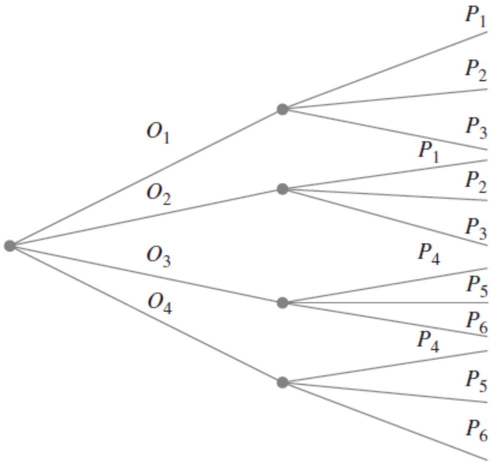


Figura 2.7 Diagrama de árbol para el ejemplo 2.18.

Regla del producto general

Si se lanza al aire un dado de seis lados cinco veces en sucesión en lugar de sólo dos veces, entonces cada posible resultado es un conjunto ordenado de cinco números tal como (1, 3, 1, 2, 4) o (6, 5, 2, 2, 2). Un conjunto ordenado de k objetos recibirá el nombre de **k-tupla** (por tanto un par es un 2-tupla y un triple es un 3-tupla). Cada resultado del experimento del lanzamiento al aire de el dado es entonces un 5-tupla.

Regla:

Supóngase que un conjunto se compone de conjuntos ordenados de k elementos (k-tuplas) y que existen n_1 posibles opciones para el primer elemento por cada opción del primer elemento, existen n_2 posibles opciones del segundo elemento; . . . ; por cada posible opción de los primeros k - 1 elementos, existen n_k opciones del elemento k-ésimo. Existen entonces $n_1 n_2 n_k$ posibles k-tuplas.

Ejemplo médicos

udp Escuela de Informática y Telecomunicaciones

Siguiendo con el ejemplo de los médicos, Si cada clínica tiene dos especialistas en medicina interna y dos médicos generales, existen $n_1 n_2 n_3 n_4 = (4)(3)(3)(2) = 72$ formas de seleccionar un doctor de cada tipo de tal suerte que todos los doctores practiquen en la misma clínica.

Permutación

Un subconjunto ordenado se llama **permutación**. El número de permutaciones de tamaño k que se puede formar con los n individuos u objetos en un grupo será denotado por $P_{k,n}$.

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo

Existen diez ayudantes de profesor disponibles para calificar exámenes en un curso de cálculo en la UDP. El primer examen se compone de cuatro preguntas y la profesora desea seleccionar un asistente diferente para calificar cada pregunta (sólo un asistente por pregunta). ¿De cuántas maneras se pueden elegir los asistentes para calificar? En este caso n = tamaño del grupo = 10 y k = tamaño del subconjunto = 4. El número de permutaciones es:

$$P_{4,10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{(10)(9)(8)(7)\cancel{(6!)}}{\cancel{6!}} = 5040$$

Es decir, la profesora podría aplicar 5040 exámenes diferentes de cuatro preguntas sin utilizar la misma asignación de calificadores a preguntas.

Un subconjunto no ordenado se llama **combinación**. Una forma de denotar el número de combinaciones es $C_{k,n}$, pero en su lugar se utiliza una notación que es bastante común en libros de probabilidad: $\binom{n}{k}$, que significa "de n se eligen k".

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{k,n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{1} = n$

Ejemplo

El almacén de la FIC recibió 25 impresoras, de las cuales 10 son impresoras láser y 15 son modelos de inyección de tinta. Si 6 de estas 25 se seleccionan al azar para que las revise un técnico particular, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de las seleccionadas sean impresoras láser (de modo que las otras 3 sean de inyección de tinta)?

Respuesta

- Sea $D_3 = \{$exactamente 3 de las 6 son de inyección de tinta$\}$.
- Suponiendo que cualquier conjunto particular de 6 impresoras es tan probable de ser elegido como cualquier otro conjunto de 6, se tienen resultados igualmente probables, por lo tanto $P(D_3) = N(D_3)/N$, donde N es el número de formas de elegir 6 impresoras de entre las 25 y $N(D_3)$ es el número de formas de elegir 3 impresoras láser y 3 de inyección de tinta.

Entonces:

$$P(D_3) = \frac{N(D_3)}{N} = \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} = 0{,}308$$

Table of Contents

Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que:

1. Salga 6 en todos
2. Los puntos obtenidos sumen 7

Respuesta 1

Al lanzar 3 dados, queremos saber la probabilidad que el primer dado sea 6, el segundo **Y** el tercero tambien. Sabemos que la probabilidad de obtener un 6 en un dado es $\frac{1}{6}$ entonces:

$$P(A) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0,005 = 0,5\,\%$$

con P(A) como la probabilidad que salga 6 en los tres dados.

Respuesta 2

Definimos el evento A como obtener la suma de 7 lanzando 3 dados:
A$=\{(124),(133),(214),(223),(232),(241),(313),(322),(331),(412),(421)\}$.
Lanzando los 3 dados existen $6\cdot 6\cdot 6 = 216$ combinaciones posibles. Por lo tanto, la probabilidad de obtener una suma de 7 es:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{11}{216}$$

Ejemplo II

Lanzamos un dado hasta observar por segunda vez un 6. Hallar la probabilidad de que tal cosa suceda antes del quinto lanzamiento.

Ejemplo II

Observar un 6 por segunda vez (antes del 5to intento) puede ocurrir al 2do, 3ro **O** 4to lanzamiento:

- P(ocurra en 2do) $= \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; (6 y 6)
- P(ocurra en 3ro) $= 2 * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} = \frac{5}{108}$; 6X6, X66 (dos 6 y otro número cualquiera)
- P(ocurra en 4to) $= 3 * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{25}{432}$; 6XX6, X6X6, XX66 (dos 6 y los otros dos números cualesquiera).

Finalmente, $P(A) = \frac{1}{36} + \frac{5}{108} + \frac{25}{432} = 0,132$, con A como probabilidad de observar un 6 por segunda vez antes del 5to lanzamiento

Ejemplo III

En una asignatura se ha decidido aprobar a aquellos que superen una de las dos solemnes. Con este criterio aprobó el 80 %, sabiendo que la primera solemne la superó el 60 % y la segunda el 50 % ¿Cuál hubiese sido el porcentaje de aprobados, si se hubiese exigido superar ambas solemnes?

Sea A el evento aprobar la primera solemne y B el evento de aprobar la segunda. Los datos del problema nos dicen que:

- $P(A \cup B) = 0,8$
- $P(A) = 0,6$
- $P(B) = 0,5$

entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = 0,3$$

Ejemplo IV

¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de siete u once cuando se lanza un par de dados? Como 7 u 11 no pueden ocurrir al mismo tiempo cuando se lanzan los dados (mutuamente exluyentes) entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Ejercicio

Una caja en un almacén contiene cuatro focos de 40 W, cinco de 60 W y seis de 75 W. Suponga que se eligen al azar tres focos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los focos seleccionados sean de 75 W?
- ¿Cuál es la probabilidad de que los tres focos seleccionados sean de los mismos watts?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un foco de cada tipo?
- Suponga ahora que los focos tienen que ser seleccionados uno por uno hasta encontrar uno de 75 W. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario examinar por lo menos seis focos?