Probabilidades y Estadística

Clase 4
Probabilidad II

Nicolás Araya Caro

Universidad Diego Portales
Escuela de Informática y Telecomunicaciones

14 de septiembre de 2023

Table of Contents

Probabilidad condicional

Para dos eventos cualesquiera A y B con $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido está definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

En otras palabras, **calculamos la probabilidad de una consecuencia basándose en una causa.**

Ejemplo I

Supóngase que de todos los individuos que compran cierta cámara digital, 60 % incluye una tarjeta de memoria opcional en su compra, 40 % incluyen una batería extra y 30 % incluyen tanto una tarjeta como una batería. Considere seleccionar al azar un comprador y sea A = {tarjeta de memoria adquirida} y B = {batería adquirida}. Entonces $P(A) = 0{,}60$, $P(B) = 0{,}40$ y P(ambas adquiridas) $= P(A \cap B) = 0{,}30$. Dado que el individuo seleccionado adquirió una batería extra, la probabilidad de que una tarjeta opcional también sea adquirida es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}30}{0{,}40} = 0{,}75$$

Es decir, de todos los que adquieren una batería extra, 75 % adquirieron una tarjeta de memoria opcional.

Regla Multiplicativa

La definición de probabilidad condicional da el siguiente resultado, obtenido multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por P(B).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Con esta regla, es posible calcular muchas intersecciones de probabilidades de eventos, naciendo la **Ley de prob total**.

Table of Contents

Probabilidad total

Si los eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ constituyen una partición del EM tal que $P(A_i) \neq 0$ para i=1,2,...,k, entonces para cualquier evento A del EM se tiene:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i) \quad (1)$$

Este resultado se denomina Ley de probabilidad total.

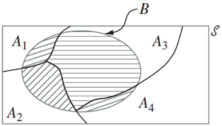

Figura 2.11 División de B entre A_i' mutuamente excluyentes y exhaustivas.

Table of Contents

Teorema de Bayes

Si los eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ constituyen una partición del EM donde $P(A_i) \neq 0$ para i=1,2,...,k, entonces para cualquier evento A en el EM tal que $P(B) \neq 0$:

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)} \quad r = 1, 2, ..., k.$$

En palabras simples, el teorema de Bayes consiste en: **dadas las consecuencias, podemos obtener la probabilidad de la causa.**

Ejemplo I

udp Escuela de Informática y Telecomunicaciones

En cierta planta de montaje, tres máquinas, M1, M2 y M3, montan 30 %, 45 % y 25 % de los productos, respectivamente. Se sabe de la experiencia pasada que 2 %, 3 % y 2 % de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tiene defectos. Ahora, supongamos que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado, ¿cuál es la probabilidad de que este producto esté defectuoso?

Ejemplo I

udp Escuela de Informática y Telecomunicaciones

sean los eventos:

- D: el producto está defectuoso
- M1: el producto está ensamblado por la máquina 1.
- M2: el producto está ensamblado por la máquina 2.
- M3: el producto está ensamblado por la máquina 3.

Entonces:

$$P(D) = P(M1)P(D|M1) + P(M2)P(D|M2) + P(M3)P(D|M3) =$$
$$(0,3)(0,02) + (0,45)(0,03) + (0,25)(0,02) = 0,025$$

Ejemplo II

Ahora, supongamos que se seleccionó un producto de forma aleatoria y es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que fuera hecho por la máquina M3?

$$P(M3|D) = \frac{P(M3)P(D|M3)}{P(M1)P(D|M1)+P(M2)P(D|M2)+P(M3)P(D|M3)} = \frac{(0{,}25)(0{,}02)}{0{,}025} = \frac{10}{49}$$

Table of Contents

Independencia

Los eventos A y B son independientes si $P(A|B) = P(A)$ y son dependientes de lo contrario. Explicación:

$$P(B|A) = \ P(A)$$