Probabilidades y Estadística

Clase 7
Variable Aleatoria Continua III

Nicolás Araya Caro

Universidad Diego Portales
Escuela de Informática y Telecomunicaciones

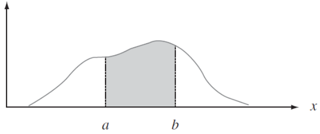
14 de septiembre de 2023

Contenidos

Variable aleatoria continua

Sea X una variable aleatoria continua. Entonces, una **distribución de probabilidad** o **función de densidad de probabilidad** (fdp) de X es una función f(x) tal que para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



$P(a \leq X \leq b)$ = el área debajo de la curva de densidad entre a y b.

Para que f(x) sea una función de densidad de probabilidad legítima, debe satisfacer las dos siguientes condiciones:

- $f(x) \geq 0$ con todas las x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ = área bajo la curva f (x) = 1

Ejemplo

Considérese la línea de referencia que conecta el vástago de la válvula de un neumático con su punto central y sea X el ángulo medido en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la ubicación de una imperfección. Una posible función de densidad de probabilidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360}, & \text{si } 0 \leq x < 360 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$$

La probabilidad de que el ángulo esté entre 90° y 180° es:

$$P(90 \leq X \leq 180) = \int_{90}^{180} \frac{1}{360} dx = \frac{x}{360}\Big|_{90}^{180} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Contenidos

Distribución Uniforme

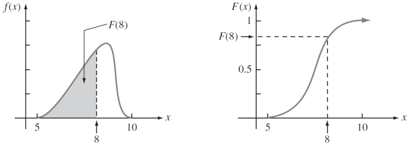
Las distribuciones continuas más simple en Estadística es la Distribución Uniforme Continua. Esta se caracteriza por una función de densidad que es plana, y por esto la probabilidad es uniforme en un intervalo cerrado [A,B]. La función de densidad de la v.a.c. es:

$$f(x; A, B) = \frac{1}{B - A}; \quad A \leq x \leq B$$

Distribución Acumulada F(x)

La función de distribución acumulativa F(x) de una variable aleatoria continua X se define para todo número x como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

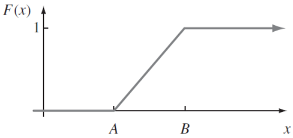


4.5 Una función de densidad de probabilidad y función de distribución acumulativa asociada.

Con cada x, F(x) es el área bajo la curva de densidad a la izquierda de x. Donde F(x) se incrementa con regularidad a medida que x se incrementa.

Distribución acumulada completa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A \\ \dfrac{x-A}{B-A}, & \text{si } A \leq x < B \\ 1, & \text{si } x \geq B \end{cases}$$



Función de distribución acumulativa de una distribución uniforme.

La importancia de la función de distribución acumulativa en este caso, lo mismo que para variables aleatorias discretas, es que las probabilidades de varios intervalos pueden ser calculadas con una fórmula o una tabla de F(x).

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(x) y función de distribución acumulativa F(x). Entonces con cualquier número a,

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

y para dos números cualesquiera a y b con a $<$ b:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Valores esperados

El valor esperado o valor medio de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad f(x) es:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Valores esperado con Función

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(x) y h(X) es cualquier función de X, entonces:

$$E[h(X)] = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)dx$$

Varianza

La varianza de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad f(x) y valor medio μ:

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx = E[(X-\mu)^2]$$

La desviación estándar (DE) de X es $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Nota

Forma abreviada:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$