ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

1η ομάδα ασκήσεων

Έτος : 2020 - 2021

6^{o} εξάμηνο

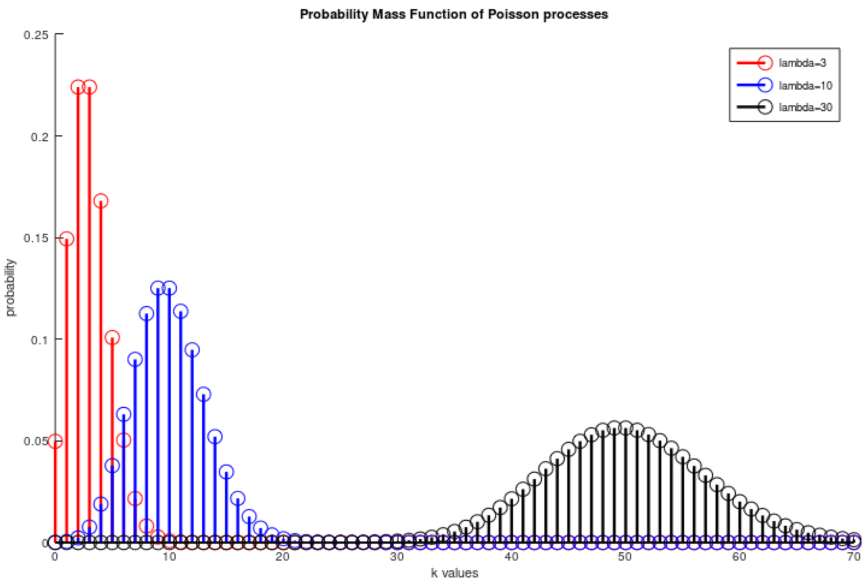
Ονοματεπώνυμο : Νίκος Μπέλλος

ΑΜ : el18183

Κατανομή Poisson

A) <u>Probability Mass Function - PMF</u> (ίδια με Probability Density Function - PDF)

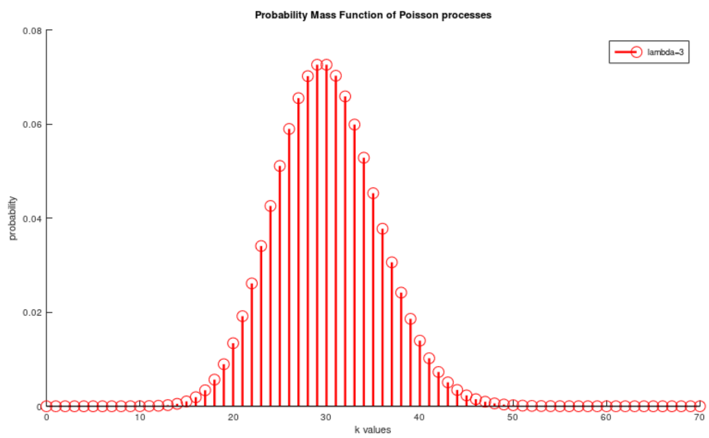
$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$



Όπως είναι το αναμενόμενο από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Poisson η κάθε κατανομή θα παρουσιάζει το μέγιστό της στη τιμή λ. Επίσης, επειδή γύρω από το ολικό μέγιστο υπάρχει συμμετρία όσο μικρότερη η τιμή του λ τόσο μικρότερη και η απόκλιση των υπόλοιπων σημείων από το μέγιστο. Άρα, προκειμένου το ολοκλήρωμα της κατανομής να ισούται με 1 περιμένουμε και μεγαλύτερη μέγιστη τιμή για μικρότερα λ.

B) <u>Mean value - Variance</u>

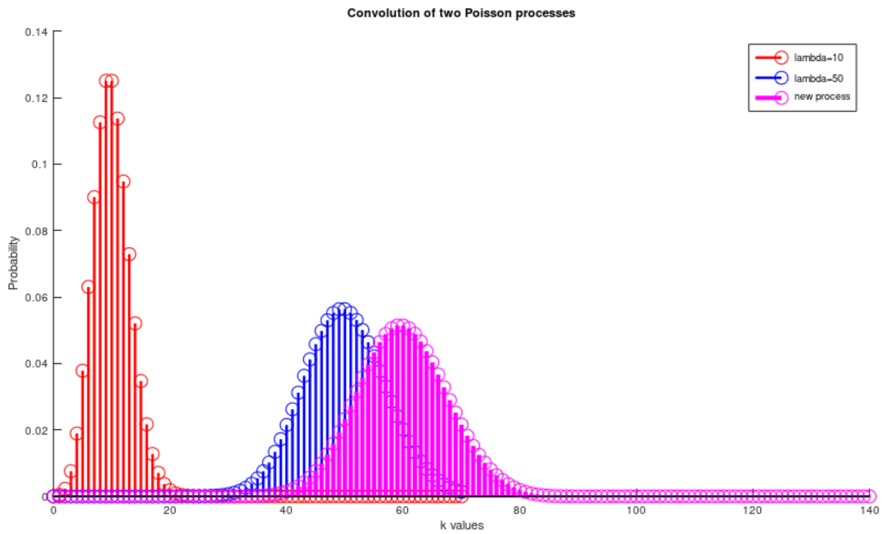
```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```



MEAN VALUE : $E[X]$	**VARIANCE :** $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

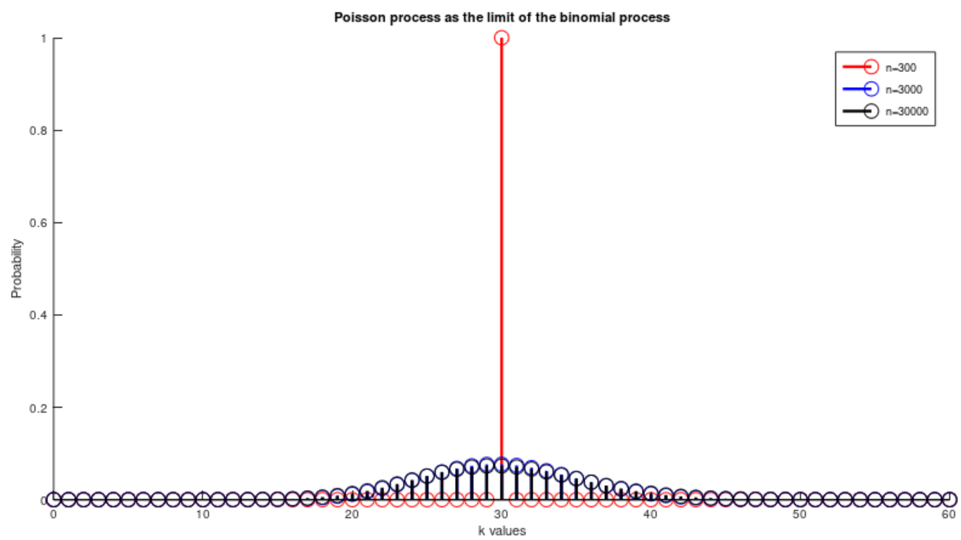
Λόγω συμμετρίας είναι αναμενόμενο η μέση τιμή να ισούται με το ολικό μέγιστο της κατανομής το οποίο όπως αναφέρθηκε και παραπάνω συμπίπτει με τη τιμή λ. Παρατηρούμε ακόμη ότι το variance / διακύμανση κατανομής ισούται και αυτό με τη τιμή λ.

Γ) Convolution of distributions



Από τις ιδιότητες της συνέλιξης προκύπτει ότι από την συνέλιξη δύο κατανομών Poisson το αποτέλεσμα είναι το άθροισμα τους και άρα η μέση τιμή της νέας κατανομής θα είναι το άθροισμα των μέσων τιμών. Δηλαδή, στη προκειμένη περίπτωση αν οι κατανομές έχουν mean-value$_{10}$ = 10 και mean-value$_{50}$ = 50 η νέα κατανομή θα έχει mean-value = 10+50 = 60. Η προϋπόθεση για να ισχύει αυτό είναι οι δύο κατανομές να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

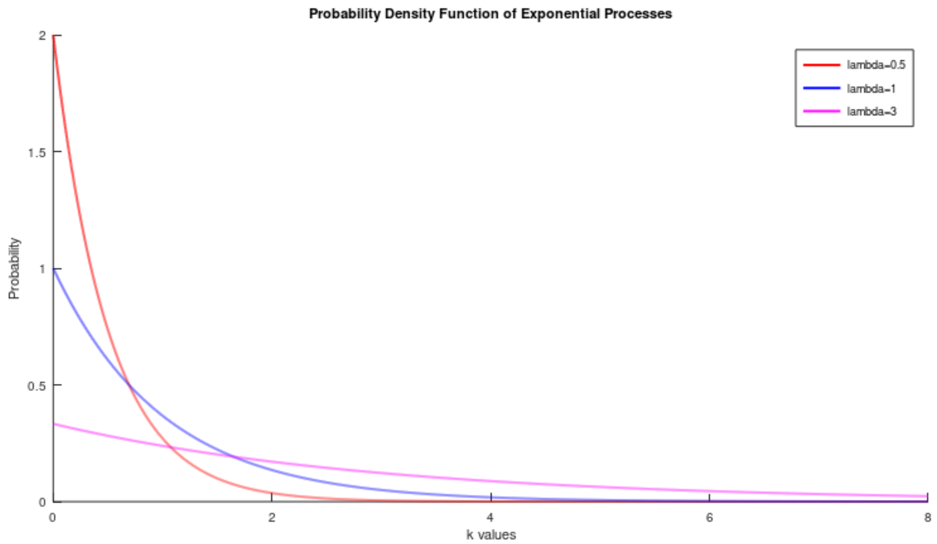
Δ) Poisson process as the limit of the binomial process



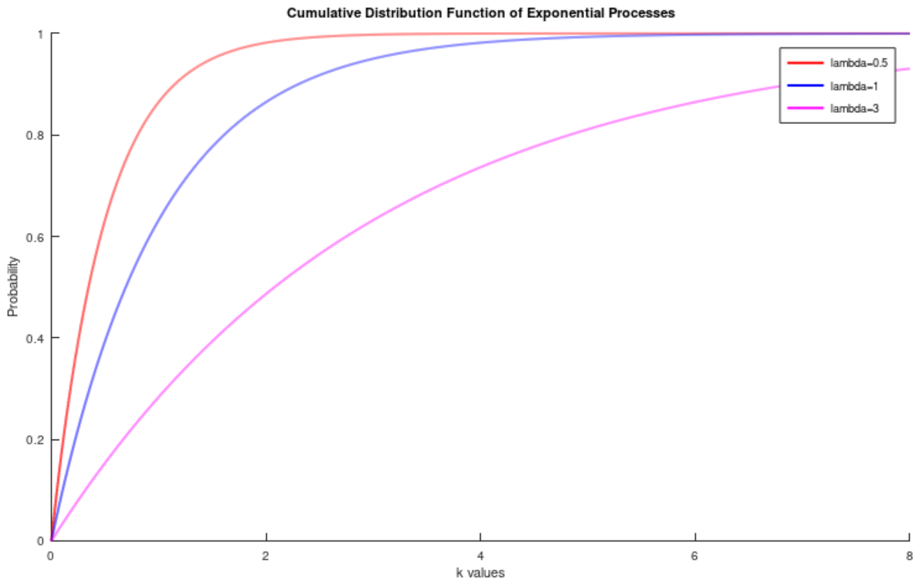
Μία διωνυμική κατανομή εξαρτάται από δύο παραμέτρους, τις n και p. Όσο μεγαλύτερο είναι το n τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά της κατανομής και το p $\in$ (0,1) το οποίο καθορίζει σε ποιό σημείο της διασποράς θα υπάρχει η μέση τιμή. Επομένως για ένα πολύ μεγάλο n υπάρχει ένα πολύ μικρό p ωστε το γινόμενο np (που είναι η μέση τιμή) να ισούται με λ και άρα να προσεγγίζει μια κατανομή Poisson.

Εκθετική κατανομή

A) Probability Density Function - PDF



B) Cumulative Distribution Function - CDF



C) Memory Loss

```
 P(X > 3)=
p1 = 0.3012
p2 = 0.1353
p3 = 0.4493
 P(X > 5 | X > 2)=
pf = 0.3012
```

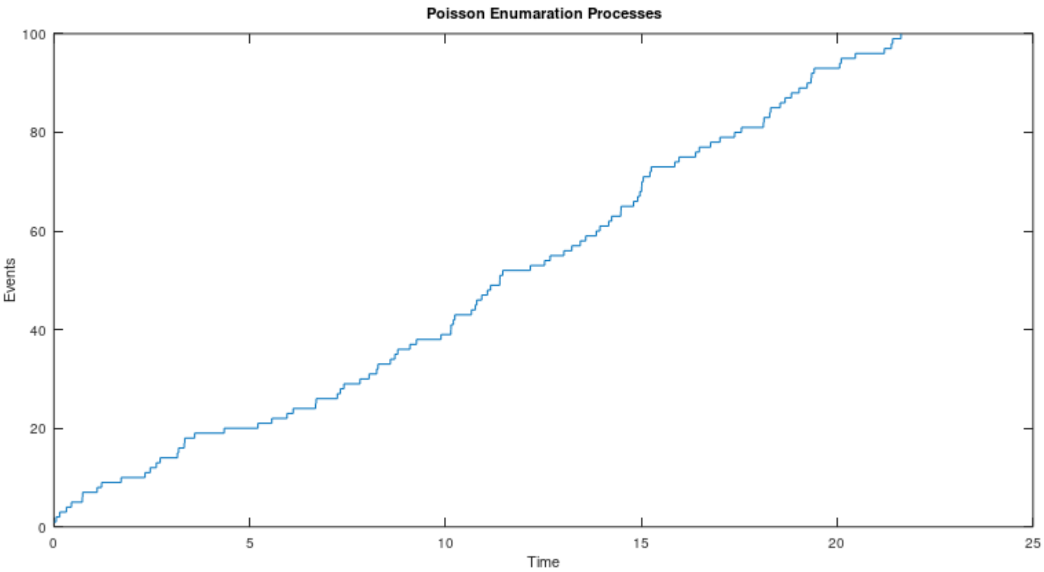
Περιμένουμε να βρούμε ίδιες τιμές για τις δύο πιθανότητες, όπως και προκύπτει από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Αυτό συμβαίνει διότι ο χρόνος που έχει περάσει δεν επηρεάζει ένα γεγονός που θα πραγματοποιηθεί σε μελλοντικό χρόνο, δηλαδή δεν επιφέρει φθορά.

Με μαθηματικά, η απώλεια μνήμης στην εκθετική κατανομή μπορεί να εκφραστεί και από τις παρακάτω σχέσεις :

1. P[τ> t] = 1 – F(t) , F(t)= expcdf()
2. P[τ> t+s| τ>s] = P[τ> t]

Διαδικασία καταμέτρησης Poisson

A) <u>Διαδικασία καταμέτρησης</u>
Όταν αναφερόμαστε σε δύο διαδοχικά και ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα τα οποία ακολουθούν την κατανομή poisson, περιμένουμε ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσά τους να ακολουθεί μία εκθετική κατανομή. Στο παρακάτω κώδικα επαληθεύουμε αυτή τη παραδοχή παράγοντας 100 διαδοχικά γεγονότα και παρουσιάζοντας τη πορεία των γεγονότων μέσω της συνάρτησης stairs (Μπορούμε να πούμε ότι αυτή η αναπαράσταση παρομοιάζει μία στοχαστική ανέλιξη).



B) <u>Μέσος αριθμός γεγονότων</u>
Σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT = t1 - t2 ο αριθμός των γεγονότων περιμένουμε να ακολουθεί μια κατανομή poisson η οποία έχει την αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας που αναφέρθηκε και στο πρώτο ερώτημα. Όσο αυξάνονται τα γεγονότα αναμένουμε η μέση τιμή να προσεγγίζει τη τιμή του λ (σε αυτή τη περίπτωση το 5). Αυτό, διότι κάθε κατανομή poisson παρουσιάζει μέση τιμή ίση με λ.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις τιμές ΔT = {200, 300, 500, 1000, 10000}

```
Events mean value for Dt=200 :
mean_value = 5.0995
Events mean value for Dt=300 :
mean_value = 5.0035
Events mean value for Dt=500 :
mean_value = 5.1655
Events mean value for Dt=1000 :
mean_value = 5.1774
Events mean value for Dt=10000 :
mean_value = 5.0325
```

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όσο αυξάνεται το χρονικό διάστημα τόσο πιο ακριβής είναι η τιμή της μέσης τιμής γεγονότων δηλαδή η τιμή mean value προσεγγίζει όλο και περισσότερο τη τιμή λ=5.

*Οι κώδικες για τα 3 μέρη βρίσκονται στα αρχεία lab1_1.m, lab1_2.m και lab1_3.m αντίστοιχα. Έχω παραλείψει να τα προσθέσω στο pdf της αναφοράς για λόγους οπτικού αποτελέσματος.