ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Σειρά ασκήσεων 2

Ακαδημαϊκό έτος 2021-2022

7ο εξάμηνο

Νικόλαος Μπέλλος | ΑΜ : el18183

Άσκηση 1

$(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow ((r \land s) \lor t)$
$((p \Rightarrow \neg q) \land (\neg q \Rightarrow p)) \Rightarrow ((r \land s) \lor t)$
$\neg((\neg p \lor \neg q) \land (q \lor p)) \lor ((r \land s) \lor t)$
$(\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(q \lor p)) \lor ((r \land s) \lor t)$
$((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)) \lor ((r \land s) \lor t)$
$((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)) \lor ((r \lor t) \land (s \lor t))$
$(((p \land q) \lor \neg p) \land ((p \land q) \lor \neg q)) \lor ((r \lor t) \land (s \lor t))$
$((\neg p \lor p) \land (q \lor \neg p) \land (\neg q \lor p) \land (\neg q \lor q)) \lor ((r \lor t) \land (s \lor t))$
$((q \lor \neg p) \land (\neg q \lor p)) \lor ((r \lor t) \land (s \lor t))$
$(q \lor \neg p \lor r \lor t) \land (\neg q \lor p \lor r \lor t) \land (q \lor \neg p \lor s \lor t) \land (\neg q \lor p \lor s \lor t)$

CNF form : $\{[q, \neg p, r, t], [\neg q, p, r, t], [q, \neg p, s, t], [\neg q, p, s, t]\}$

Άσκηση 2

Για κάθε ζεύγος πρέπει να βρούμε μία ερμηνεία που να ικανοποιεί τις αντιστοιχες δύο προτάσεις.
Θεωρόντας πεδίο ερμηνείας το Δ^I θα εκφράσουμε για κάθε περίπτωση ένα σύνολο ερμηνιών R^I το οποίο πληρεί το ζητούμενο.
Έστω για όλες τις περιπτώσεις πεδίο ερμηνίας $\Delta^I = \{a, b, c\}$
Τότε :

<u>Ζευγάρι {1,2}</u>
$R^I=\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$
* Λείπει το (a,b) and (b,c) ⇒ ~~(a,c)~~

<u>Ζευγάρι {1,3}</u>
1,3 : $R^I = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$
*Λείπουν τα (b,a), (c,b), (c,a)

<u>Ζευγάρι {2,3}</u>
$R^I = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\}$
*Λείπει το (c,c)

Άσκηση 3

Αρχικά, μετατρέπουμε τις προτάσεις σε CNF μορφή και έπειτα προσθέτουμε στη γνώση μας, την άρνηση της πρότασης που θέλουμε να επαληθεύσουμε :

(οι παρακάτω πράξεις είναι γραμμένες σε LATEX)

1.
$\forall x.\exists y.(A(x) \Rightarrow R(x,y) \wedge C(y))$
$\Rightarrow \forall x.(A(x) \Rightarrow R(x,f(x)) \wedge C(f(x))$
$\Rightarrow \neg A(x) \vee (R(x,f(x)) \wedge C(f(x)))$
$\rightarrow [\neg A(x), R(x,f(x))]$ $(\mathbf{1})$
$\rightarrow [\neg A(x), C(f(x))]$ $(\mathbf{2})$

2.
$\forall x.\exists y.(B(x) \Rightarrow S(y,x) \wedge D(y))$
$\Rightarrow \forall x.(B(x) \Rightarrow S(g(x),x) \wedge D(g(x))$
$\Rightarrow \neg B(x) \vee (S(g(x),x) \wedge D(g(x)))$
$\rightarrow [\neg B(x), S(g(x),x)]$ $(\mathbf{3})$
$\rightarrow [\neg B(x), D(g(x))]$ $(\mathbf{4})$

3.
$\forall x.(D(x) \Rightarrow A(x))$
$\Rightarrow \neg D(x) \vee A(x)$
$\rightarrow [\neg D(x), A(x)]$ $(\mathbf{5})$

4.
$\forall x.\forall y.(S(x,y) \Rightarrow T(y,x))$
$\Rightarrow \neg S(x,y) \vee T(y,x)$
$\rightarrow [\neg S(x,y), T(y,x)]$ $(\mathbf{6})$

5.
$\forall x.\forall y.\forall z.(T(x,y) \wedge R(y,z) \wedge C(z) => Q(x))$
$\neg(T(x,y) \wedge R(y,z) \wedge C(z)) \vee Q(x)$
$\neg T(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg C(z) \vee Q(x)$
$\rightarrow [\neg T(x,y), \neg R(y,z), \neg C(z), Q(x)]$ $(\mathbf{7})$

6.
$\neg \forall x.(B(x) \Rightarrow Q(x))$
$\Rightarrow \exists x.\neg(B(x) \Rightarrow Q(x))$
$\Rightarrow \neg\neg B(h(x)) \wedge \neg Q(h(x))$
$\rightarrow [B(h(x))]$ $(\mathbf{8})$
$\rightarrow [\neg Q(h(x))]$ $(\mathbf{9})$

Για να καταλήξουμε σε συμπέρασμα εφαρμόζουμε το αλγόριθμο της ανάλυσης

$(4),(8) \overset{h(x)/x}{\rightarrow} [D(g(x))]$ $(\mathbf{10})$
$(5),(10) \overset{g(x)/x}{\rightarrow} [A(x)]$ $(\mathbf{11})$
$(2),(11) \overset{x/x}{\rightarrow} [C(f(x))]$ $(\mathbf{12})$
$(1),(11) \overset{x/x}{\rightarrow} [R(x,f(x))]$ $(\mathbf{13})$
$(7),(9),(12),(13) \rightarrow [\neg T(x,y)]$ $(\mathbf{14})$
$(6),(14) \overset{x/y,y/x}{\rightarrow} [\neg S(x,y)]$ $(\mathbf{15})$
$(3),(15) \overset{g(x)/x,x/y}{\rightarrow} [\neg B(x)]$ $(\mathbf{16})$
$(8),(16) \overset{h(x)/x}{\rightarrow} [\,]$

Καταλήγουμε σε αντίφαση, άρα η πρόταση είναι λογική συνέπεια της γνώσης μας.

Άσκηση 4

1. $\forall x.\exists y.$Ανήκει(Χώρα(x),Ήπειρος(y))
2. $\exists x.$ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(x)),300m)
3. $\forall x.\forall c.\forall y.\forall z.$(¬(Ανήκει(Χώρα(x),Ήπειρος(c)) ∧ Ανήκει(Χώρα(x),Ήπειρος(y)) ∧ Ανήκει(Χώρα(x),Ήπειρος(z))))
4. $\forall x.\exists y.$(Ανήκει(Χώρα(y),Ήπειρος(Αμερική)) ∧ Ανήκει(Χώρα(x),Ήπειρος(Ευρώπη)) ∧ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(y), πληθυσμός(Χώρα(y)))
5. $\exists x.\exists y.\nexists z.$(ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(x)),1b) ∧ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(y)),1b) ∧ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(z)),1b))
6. $\nexists x.$(ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(x)), Χώρα(Κίνα)) ∨ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(Χώρα(x)), Χώρα(Ινδία)))

Άσκηση 5

1.

$\forall x.(p(x) \Rightarrow q(a)) \rightarrow \forall x.(\neg p(x) \vee q(a))$

$\forall x.(p(x)) \Rightarrow q(a)) \rightarrow \exists x.(\neg p(x) \vee q(a))$

Για q(a) = False και για κάθε x , p(x)=False, τότε ικανοποιείται και η δεύτερη καθώς δεν υπάρχει x’ για το οποίο ισχύει p(x’)=True, οπότε δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί μόνο την 1η πρόταση και όχι την 2η πρόταση.

2.

$\exists x.(p(x) \Rightarrow q(a)) \rightarrow \exists x.(\neg p(x) \vee q(a))$

$\exists x.p(x)) \Rightarrow q(a) \rightarrow \forall x.(\neg p(x) \vee q(a))$

(Προκύπτουν οι ίδιες προτάσεις, αλλά ανάποδα).

Βλέπουμε ότι για να ικανοποιηθεί η πρώτη αρκεί q(a) = False και για ένα μόνο x_0 να ισχύει $p(x_0)$ = False. Τότε όμως, έστω x_0' για το οποίο ισχύει $p(x_0')$ = True και η 2η πρόταση δεν ικανοποιείται. Επομένως υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί μόνο την 1η πρόταση και όχι την 2η πρόταση.

Άσκηση 6

1.

Σταθερές : {a, b}

Κατηγορήματα : {r(x,y)}

UP : {a, b}

BP : {r(a,a), r(a,b), r(b,b), r(b,a)}

2.

Σταθερές : {0}

Κατηγορήματα : {q(x), p(x)}

Συναρτήσεις : {f(x)}

UP : {0, f(0), $f^2(0)$, ...}

BP : {q(0), q(f(0)), q($f^2(0)$), ..., p(0), p(f(0)), ... }

Άσκηση 7

Ερώτημα 1 : cousin(A, F)

$cousin(y_0, z_0) \leftarrow gp(y_0, x_0), gp(z_0, x_0)$
$\stackrel{y/A,z/F}{\rightarrow} gp(A, x_0), gp(F, x_0)\ (\mathbf{1})$
$gp(x_0, z_0) \leftarrow parent(x_0, y_0), parent(y_0, z_0)$
$(1) \stackrel{x_0/A,z_0/x_0}{\rightarrow} parent(A, y_0), parent(y_0, x_0)\ (\mathbf{2})$
$(1) \stackrel{x_0/F,z_0/x_0}{\rightarrow} parent(F, z_0), parent(z_0, x_0)\ (\mathbf{3})$
$parent(x_0, y_0) \leftarrow father(x_0, y_0)$
$parent(x_0, y_0) \leftarrow mother(x_0, y_0)$
$(2) \stackrel{y_0/B}{\rightarrow} parent(B, x_0)\ (\mathbf{4})$
$(3) \stackrel{z_0/E}{\rightarrow} parent(E, x_0)\ (\mathbf{5})$
$mother(B, D) \leftarrow .$
$(4), (5) \stackrel{x_0/D}{\rightarrow} .$

Ερώτημα 2 : sibling(A, G)

$sibling(y_0, z_0) \leftarrow parent(y_0, x_0), parent(z_0, x_0).$
$\stackrel{y_0/A,z_0/G}{\rightarrow} parent(A, x_0), parent(G, x_0)\ (\mathbf{1})$
$parent(x_0, y_0) \leftarrow father(x_0, y_0)$
$parent(x_0, y_0) \leftarrow mother(x_0, y_0)$
$mother(A, B) \leftarrow .$
$father(A, C) \leftarrow .$
$father(G, E) \leftarrow .$
$(1) \stackrel{x_0/B}{\rightarrow} false$
$(1) \stackrel{x_0/C}{\rightarrow} false$
$(1) \stackrel{x_0/E}{\rightarrow} false$

Άρα ο αλγόριθμος θα επιστρέψει **False**

Άσκηση 8

$add(s(0), v, s(s(0))).$
$add(x_0, s(y_0), s(z_0)) \leftarrow add(x, y, z).\ (\mathbf{1})$
$\stackrel{x/s(0),s(y_0)/v,z/s(0)}{\rightarrow} add(s(0), v, s(0))\ (\mathbf{2})$
$add(x, 0, x) \leftarrow .$
$(2) \stackrel{v/0}{\rightarrow} .$

Άρα ο αλγόριθμος θα επιστρέψει **v = 0.**

Άσκηση 9

IN = {a}
CN = {A, B, C}
RN = {r, s}

Δεν υπάρχει μοντέλο της γνώσης γιατί αν συνδυάσουμε τις παρακάτω προτάσεις εκείνες καταλήγουν σε αντίφαση λόγω του (A⊓C)
$B \sqsubseteq \exists s.(A \sqcap C)$
$A(a)$
$\neg C(a)$