ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Α
Τ Ο Μ Ο Σ 1
Β Ι Β Λ Ι Α 1, 2, 3, 4

Αρχαίο κείμενο Ε.Σ.ΣΤΑΜΑΤΗ
Υπό
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ
(Αθήνα, Αύγουστος 2016)

Πρόλογος

Γνώρισα τα Στοιχεία του Ευκλείδη από το μεγαλειώδες έργο τού Ευάγγελου Σταμάτη. Αναζητώντας, από τα [ήδη παλιά] πανεπιστημιακά μου χρόνια, αρχαία ελληνική βιβλιογραφία σε μαθηματικά και φιλοσοφία απορούσα για την αδιάφορη στάση της σύγχρονης Ελληνικής Πολιτείας απέναντι σε τέτοια έργα.

Ο σκοπός αυτής της έκδοσης είναι να παρουσιάσει το αρχαίο σύγγραμμα των Στοιχείων σε ηλεκτρονική μορφή με καλαισθησία και τρόπο ώστε οι αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων να γίνουν όσο το δυνατόν πιο εμφανείς και κατανοητές από τον αναγνώστη. Εξακολουθώ να πιστεύω ότι τα Στοιχεία του Ευκλείδη [έστω και στη μορφή που διασώζονται σήμερα] αποτελούν το τελειότερο επιστημονικό σύγγραμμα και ότι η μελέτη αυτών έχει να προσφέρει πολλά στον οποιονδήποτε ερευνητή.

Ανάγκες καθαρότητας και ευκρίνειας, απαιτούμενες για την έκδοση των Στοιχείων όπως την είχα φανταστεί, με οδήγησαν στη δημιουργία μιας νέας ελληνικής γραμματοσειράς που ονόμασα 'Chalkis'. Για την εμφάνιση γραμμάτων σχήματος στο κείμενο χρησιμοποίησα τη γραμματοσειρά 'Lato', ενώ για τη δημιουργία σχημάτων χρησιμοποίησα την εφαρμογή 'Geogebra'. Την τελική ευθύνη επεξεργασίας και παραγωγής του συγκεκριμένου 'pdf' ανέλαβε το 'xetex'.

Κατά τη μεταφορά των Στοιχείων σε ηλεκτρονική μορφή, εντοπίστηκαν και διορθώθηκαν κάποια λάθη που οφείλονταν κατά κύριο λόγο σε προηγούμενη μεταφορά από οπτική αναγνώριση χαρακτήρων[ocr]. Για παράδειγμα ήταν 'Α'αντί για 'Δ', ήταν 'ἡ κύκλος'αντί για 'ὁ κύκλος'. Ενδέχεται ορισμένα να έχουν διαφύγει αλλά αφενώς πιστεύω ότι η ταυτοποίησή τους είναι εύκολη από κάποιον που ακολουθεί μια απόδειξη και αφετέρου ότι ελάχιστα μειώνεται η κατανόησή της.

Θέλω να πιστεύω ότι με τον τρόπο αυτό, συμβάλλω κατά το ελάχιστο στη διάδοση τής μελέτης των Στοιχείων, τα οποία θεωρώ απαραίτητα για την ανάπτυξη και καλλιέργεια μιας αυστηρά μαθηματικής σκέψης.

Αθήνα, Αύγουστος 2016
Νικόλαος Κεχρής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 1

Ὅροι

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε΄. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι΄. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

ια΄. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ΄. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ιϛ΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κʹ. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

καʹ. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβʹ. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγʹ. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα

αʹ. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

βʹ. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γʹ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δʹ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

εʹ. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι

αʹ. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

βʹ. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

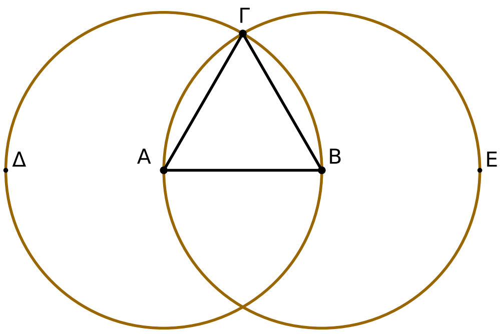
γʹ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δʹ. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

εʹ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ **ΑΒ**. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς **ΑΒ** εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

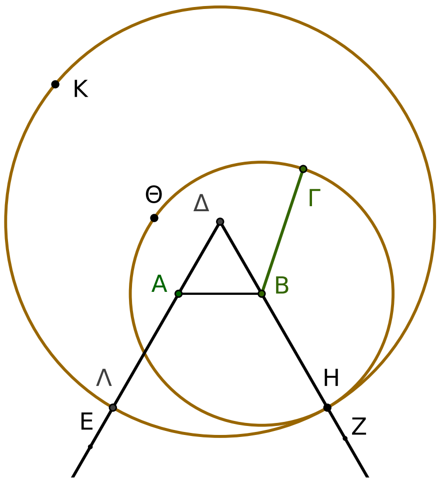
Κέντρῳ μὲν τῷ **Α** διαστήματι δὲ τῷ **ΑΒ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΒΓΔ**, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ **Β** διαστήματι δὲ τῷ **ΒΑ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΑΓΕ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου, καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ **Α**, **Β** σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ **ΓΑ**, **ΓΒ**.

Καὶ ἐπεὶ τὸ **Α** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΔΒ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΑΒ**· πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Β** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΑΕ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΑ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΓΑ** τῇ **ΑΒ** ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΓΑ**, **ΓΒ** τῇ **ΑΒ** ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ **ΓΑ** ἄρα τῇ **ΓΒ** ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ **ΓΑ**, **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ **Α**, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΒΓ**· δεῖ δὴ πρὸς τῷ **Α** σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΒΓ** ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου ἐπί τὸ **Β** σημεῖον εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, καὶ συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ **ΔΑΒ**, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς **ΔΑ**, **ΔΒ** εὐθεῖαι αἱ **ΑΕ**, **ΒΖ**, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Β** διαστήματι δὲ τῷ **ΒΓ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΓΗΘ**, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ **Δ** καὶ διαστήματι τῷ **ΔΗ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΗΚΛ**.

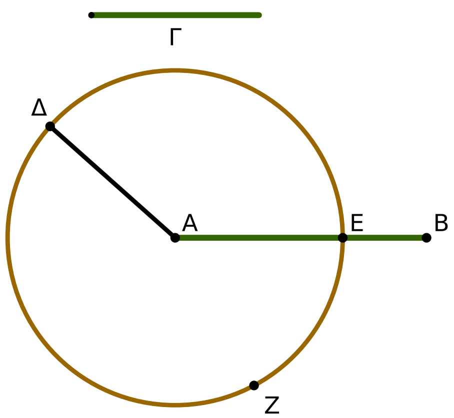
Ἐπεὶ οὖν τὸ **Β** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΗΘ**, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Δ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΗΚΛ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΛ** τῇ **ΔΗ**, ὧν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΔΒ** ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ **ΑΛ** λοιπῇ τῇ **ΒΗ** ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΗ** ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΑΛ**, **ΒΓ** τῇ **ΒΗ** ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ **ΑΛ** ἄρα τῇ **ΒΓ** ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ **Α** τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΒΓ** ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ **ΑΛ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γʹ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ **ΑΒ**, **Γ**, ὧν μείζων ἔστω ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς **ΑΒ** τῇ ἐλάσσονι τῇ **Γ** ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Κείσθω πρὸς τῷ **Α** σημείῳ τῇ **Γ** εὐθείᾳ ἴση ἡ **ΑΔ**· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Α** διαστήματι δὲ τῷ **ΑΔ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΔΕΖ**.

Καὶ ἐπεὶ τὸ **Α** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΔΕΖ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΑΔ**· ἀλλὰ καὶ ἡ **Γ** τῇ **ΑΔ** ἐστιν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΑΕ**, **Γ** τῇ **ΑΔ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **ΑΕ** τῇ **Γ** ἐστιν ἴση.

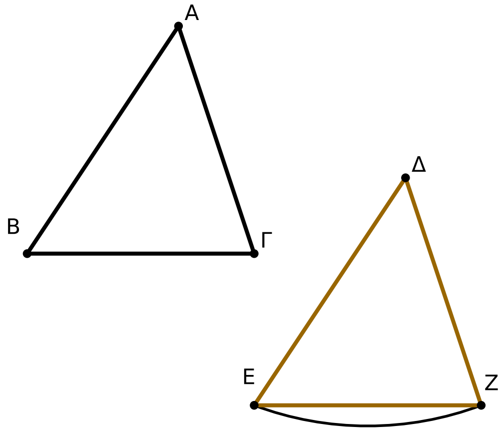
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν **ΑΒ**, **Γ** ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς **ΑΒ** τῇ ἐλάσσονι τῇ **Γ** ἴση ἀφῄρηται ἡ **ΑΕ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς **ΔΕ**, **ΔΖ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ** καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴσην.

λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου ἐπὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν **Α** σημείου ἐπὶ τὸ **Δ** σημεῖον τῆς δὲ **ΑΒ** εὐθείας ἐπὶ τὴν **ΔΕ**, ἐφαρμόσει καὶ τὸ **Β** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Ε** διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν **ΑΒ** τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς **ΑΒ** ἐπὶ τὴν **ΔΕ** ἐφαρμόσει καὶ ἡ **ΑΓ** εὐθεῖα ἐπὶ τὴν **ΔΖ** διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**· ὥστε καὶ τὸ **Γ** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Ζ** σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**.

ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ **Β** ἐπὶ τὸ **Ε** ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ **ΒΓ** ἐπὶ βάσιν τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν **Β** ἐπὶ τὸ **Ε** ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ **Γ** ἐπὶ τὸ **Ζ** ἡ **ΒΓ** βάσις ἐπὶ τὴν **ΕΖ** οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

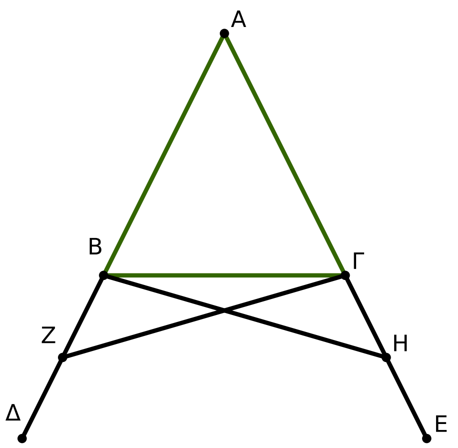
ἐφαρμόσει ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσις ἐπὶ τὴν **ΕΖ** καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ **ΑΒΓ** ἴσην ἔχον τὴν **ΑΒ** πλευρὰν τῇ **ΑΓ** πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς **ΑΒ**, **ΑΓ** εὐθεῖαι αἱ **ΒΔ**, **ΓΕ**· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ **ΓΒΔ** τῇ ὑπὸ **ΒΓΕ**.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς **ΒΔ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Ζ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς **ΑΕ** τῇ ἐλάσσονι τῇ **ΑΖ** ἴση ἡ **ΑΗ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΓ**, **ΗΒ** εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΖ** τῇ **ΑΗ** ἡ δὲ **ΑΒ** τῇ **ΑΓ**, δύο δὴ αἱ **ΖΑ**, **ΑΓ** δυσὶ ταῖς **ΗΑ**, **ΑΒ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ **ΖΑΗ**· βάσις ἄρα ἡ **ΖΓ** βάσει τῇ **ΗΒ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΖΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΗΒ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΓΖ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΗ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΖΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΗΒ**. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ **ΑΖ** ὅλῃ τῇ **ΑΗ** ἐστιν ἴση, ὧν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΓ** ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΒΖ** λοιπῇ τῇ **ΓΗ** ἐστιν ἴση.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΗΒ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΒΖ**, **ΖΓ** δυσὶ ταῖς **ΓΗ**, **ΗΒ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΖΓ** γωνίᾳ τη ὑπὸ **ΓΗΒ** ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ **ΒΓ**· καὶ τὸ **ΒΖΓ** ἄρα τρίγωνον τῷ **ΓΗΒ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·

ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΖΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΗΓΒ** ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΓΖ** τῇ ὑπὸ **ΓΒΗ**. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ **ΑΒΗ** γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΑΓΖ** γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ **ΓΒΗ** τῇ ὑπὸ **ΒΓΖ** ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἐστιν ἴση· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου.

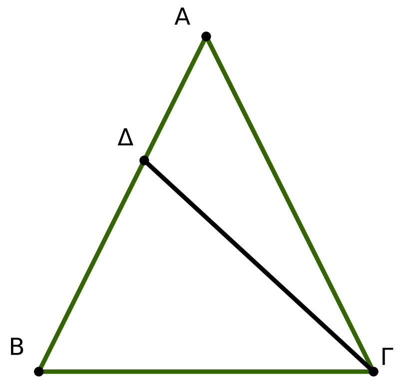
ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΗΓΒ** ἴση· καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν. Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛʹ.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ** γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ **ΑΒ** πλευρᾷ τῇ **ΑΓ** ἐστιν ἴση.

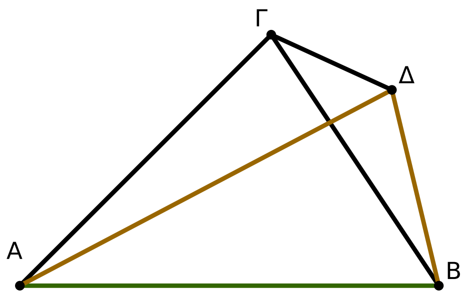
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΓ**, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ **ΑΒ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς **ΑΒ** τῇ ἐλάττονι τῇ **ΑΓ** ἴση ἡ **ΔΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΓ**.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΒ** τῇ **ΑΓ** κοινὴ δὲ ἡ **ΒΓ**, δύο δὴ αἱ **ΔΒ**, **ΒΓ** δύο ταῖς **ΑΓ**, **ΓΒ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΔΓ** βάσει τῇ **ΑΒ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΔΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΓΒ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΓ**· ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς **ΑΒ** δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς **ΑΓ**, **ΓΒ** ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΔ**, **ΔΒ** ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε **Γ** καὶ **Δ** ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν **ΓΑ** τῇ **ΔΑ** τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ **Α**, τὴν δὲ **ΓΒ** τῇ **ΔΒ** τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ **Β**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΓΔ**.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΑΔ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** τῇ ὑπὸ

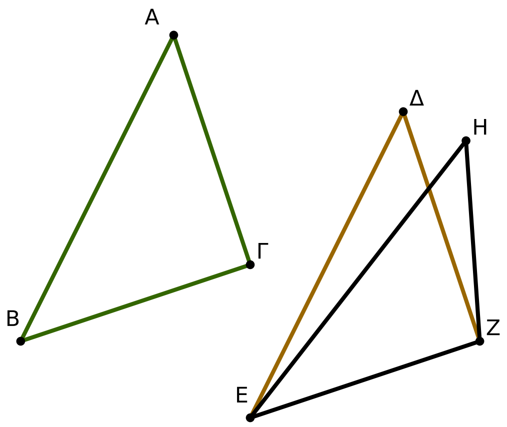
ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ** τῆς ὑπὸ **ΔΓΒ**· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΔΒ** μείζων ἐστί τῆς ὑπὸ **ΔΓΒ**. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΒ** τῇ **ΔΒ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΔΒ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΓΒ**. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς **ΔΕ**, **ΔΖ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστιν ἴση.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου ἐπὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν **Β** σημείου ἐπὶ τὸ **Ε** σημεῖον τῆς δὲ **ΒΓ** εὐθείας ἐπὶ τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσει καὶ τὸ **Γ** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Ζ** διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**·

ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς **ΒΓ** ἐπὶ τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ **ΒΑ**, **ΓΑ** ἐπὶ τὰς **ΕΔ**, **ΔΖ**. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ **ΒΓ** ἐπὶ βάσιν τὴν **ΕΖ** ἐφαρμόσει, αἱ δὲ **ΒΑ**, **ΑΓ** πλευραὶ ἐπὶ τὰς **ΕΔ**, **ΔΖ** οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ **ΕΗ**, **ΗΖ**, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς **ΒΓ** βάσεως ἐπὶ τὴν **ΕΖ** βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** πλευραὶ ἐπὶ τὰς **ΕΔ**, **ΔΖ**. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

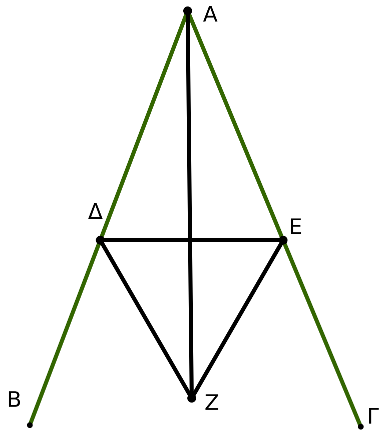
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ**. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Δ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τῇ **ΑΔ** ἴση ἡ **ΑΕ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΕ**, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς **ΔΕ** τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ **ΔΕΖ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΖ**· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς **ΑΖ** εὐθείας.



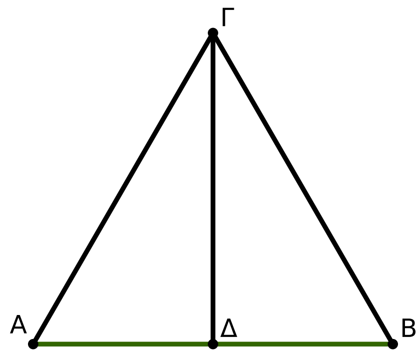
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΑΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΑΖ**, δύο δὴ αἱ **ΔΑ**, **ΑΖ** δυσὶ ταῖς **ΕΑ**, **ΑΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ **ΔΖ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΑΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΑΖ** ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς **ΑΖ** εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιʹ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ τὴν **ΑΒ** εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



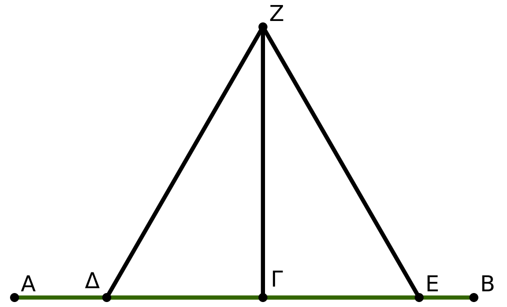
Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ **ΑΒΓ**, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** γωνία δίχα τῇ **ΓΔ** εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒ** εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ **Δ** σημεῖον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΓΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΓ**, **ΓΔ** δύο ταῖς **ΒΓ**, **ΓΔ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ **ΑΔ** βάσει τῇ **ΒΔ** ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ **ΑΒ** δίχα τέτμηται κατὰ τὸ **Δ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια΄.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ** τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ **Γ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **ΑΓ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Δ**, καὶ κείσθω τῇ **ΓΔ** ἴση ἡ **ΓΕ**, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς **ΔΕ** τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ **ΖΔΕ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΓ**· λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΑΒ** ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ **Γ** πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ **ΖΓ**.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΓ** τῇ **ΓΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΓΖ**, δύο δὴ αἱ **ΔΓ**, **ΓΖ** δυσὶ ταῖς **ΕΓ**, **ΓΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ **ΔΖ** βάσει τῇ **ΖΕ** ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΓΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΓΖ** ἴση ἐστίν· καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΔΓΖ**, **ΖΓΕ**.

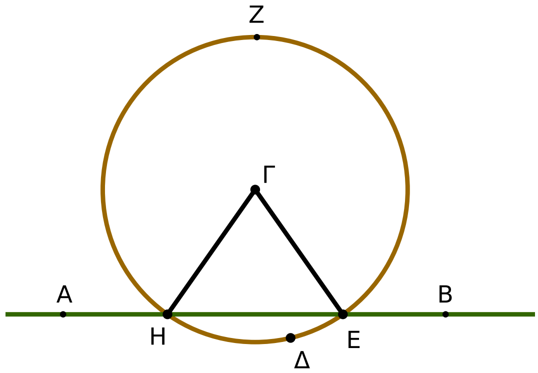
Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΑΒ** ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ **Γ** πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ **ΖΓ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ΄.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ **ΑΒ** τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν **ΑΒ** ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ **Γ**, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς **ΑΒ** εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ **Δ**, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Γ** διαστήματι δὲ τῷ **ΓΔ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΕΖΗ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΕΗ** εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ **Θ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΓΗ**, **ΓΘ**, **ΓΕ** εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν **ΑΒ** ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ **Γ**, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ **ΓΘ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΗΘ** τῇ **ΘΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΘΓ**, δύο δὴ αἱ **ΗΘ**, **ΘΓ** δύο ταῖς **ΕΘ**, **ΘΓ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ **ΓΗ** βάσει τῇ **ΓΕ** ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΘΗ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΘΓ** ἐστιν ἴση. καί εἰσιν ἐφεξῆς.

ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

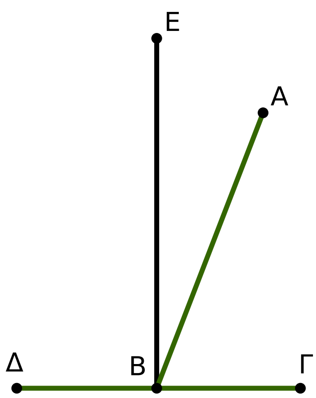
Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν **ΑΒ** ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ **Γ**, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ **ΓΘ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** ἐπ' εὐθεῖαν τὴν **ΓΔ** σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ**· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ** γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΓΒΑ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ**, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου τῇ **ΓΔ** [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΒΕ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΒΕ**, **ΕΒΔ** δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ **ΓΒΕ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΕ** ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΕΒΔ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΒΕ**, **ΕΒΔ** τρισὶ ταῖς ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΕ**, **ΕΒΔ** ἴσαι εἰσίν.



πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ **ΔΒΑ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΔΒΕ**, **ΕΒΑ** ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΔΒΑ**, **ΑΒΓ** τρισὶ ταῖς ὑπὸ **ΔΒΕ**, **ΕΒΑ**, **ΑΒΓ** ἴσαι εἰσίν.

ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΓΒΕ**, **ΕΒΔ** τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ **ΓΒΕ**, **ΕΒΔ** ἄρα ταῖς ὑπὸ **ΔΒΑ**,

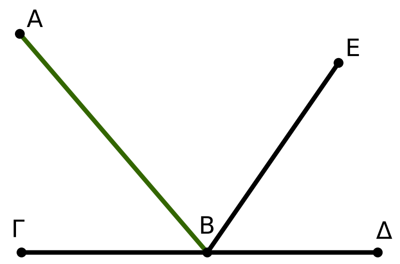
ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ **ΓΒΕ**, **ΕΒΔ** δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΔΒΑ**, **ΑΒΓ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ᾿ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾿ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ **ΑΒ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Β** δύο εὐθεῖαι αἱ **ΒΓ**, **ΒΔ** μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΒΔ** δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ᾿ εὐθείας ἐστὶ τῇ **ΓΒ** ἡ **ΒΔ**.



Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ **ΒΓ** ἐπ᾿ εὐθείας ἡ **ΒΔ**, ἔστω τῇ **ΓΒ** ἐπ᾿ εὐθείας ἡ **ΒΕ**.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ **ΑΒ** ἐπ᾿ εὐθεῖαν τὴν **ΓΒΕ** ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΒΕ** γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΒΔ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΕ** ταῖς ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ** ἴσαι εἰσίν.

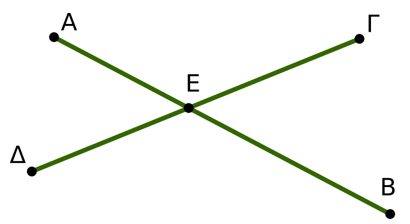
κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ **ΓΒΑ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ** ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ᾿ εὐθείας ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΓΒ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς **ΒΔ**· ἐπ᾿ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ **ΓΒ** τῇ **ΒΔ**.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾿ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΕΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΒ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΓΕΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΕΔ**.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΑΕ** ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν **ΓΔ** ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ **ΓΕΑ**, **ΑΕΔ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΕΑ**, **ΑΕΔ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

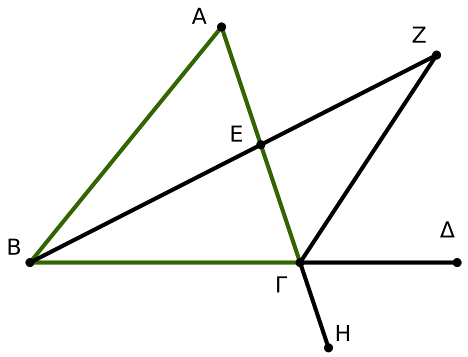
πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ **ΔΕ** ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ **ΑΕΔ**, **ΔΕΒ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΕΔ**, **ΔΕΒ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΓΕΑ**, **ΑΕΔ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΕΑ**, **ΑΕΔ** ταῖς ὑπὸ **ΑΕΔ**, **ΔΕΒ** ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΕΑ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΒΕΔ** ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ **ΓΕΒ**, **ΔΕΑ** ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ **ΒΓ** ἐπὶ τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΒΑΓ** γωνιῶν.



Τετμήσθω ἡ **ΑΓ** δίχα κατὰ τὸ **Ε**, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ **ΒΕ** ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ **Ζ**, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ **ΕΖ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΓ**, καὶ διήχθω ἡ **ΑΓ** ἐπὶ τὸ **Η**.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΕ** τῇ **ΕΓ**, ἡ δὲ **ΒΕ** τῇ **ΕΖ**, δύο δὴ αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ** δυσὶ ταῖς **ΓΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΕΓ** ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ **ΑΒ** βάσει τῇ **ΖΓ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΖΕΓ** τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** τῇ ὑπὸ **ΕΓΖ**. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΕΓΔ** τῆς ὑπὸ **ΕΓΖ**· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** τῆς ὑπὸ **ΒΑΕ**.

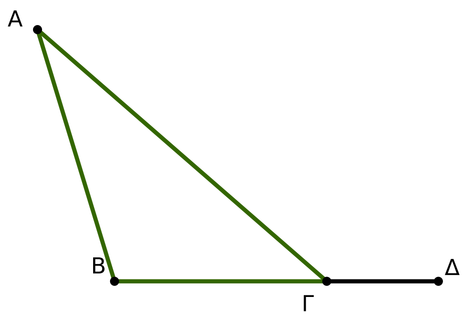
Ὁμοίως δὴ τῆς **ΒΓ** τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΗ**, τουτέστιν ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ**, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ **ΑΒΓ**.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῇ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**· λέγω, ὅτι τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΒΓ** ἐπὶ τὸ **Δ**. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΒΓ** ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ**, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ **ΑΒΓ**. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** μείζονές εἰσιν.

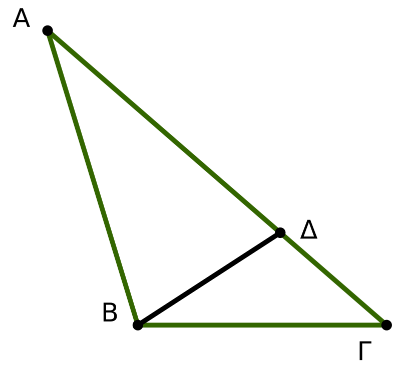
ἀλλ' αἱ ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΓΒ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ **ΓΑΒ**, **ΑΒΓ**.

Παντὸνς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῇ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** μείζονα ἔχον τὴν **ΑΓ** πλευρὰν τῆς **ΑΒ**· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΒΓΑ**·



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΑΒ**, κείσθω τῇ **ΑΒ** ἴση ἡ **ΑΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΔ**. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΒΓΔ** ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΔΒ**, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ **ΔΓΒ**·

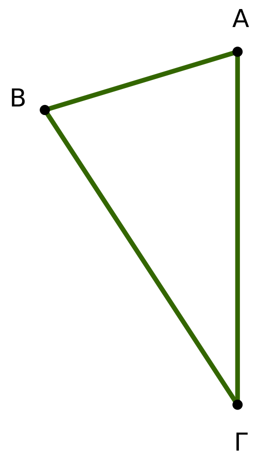
ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΔΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ**, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΔ** ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** τῆς ὑπὸ **ΑΓΒ**· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΑΓΒ**.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίαν τῆς ὑπὸ **ΒΓΑ**· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ **ΑΓ** πλευρᾶς τῆς **ΑΒ** μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΑΒ** ἢ ἐλάσσων·

ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΑΒ**· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ**· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΑΒ**.

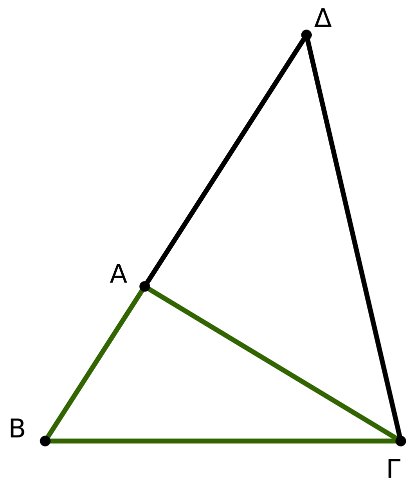
οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΑΒ**· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** τῆς ὑπὸ **ΑΓΒ**· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΑΒ**. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΑΒ**.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**· λέγω, ὅτι τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν **ΒΑ**, **ΑΓ** τῆς **ΒΓ**, αἱ δὲ **ΑΒ**, **ΒΓ** τῆς **ΑΓ**, αἱ δὲ **ΒΓ**, **ΓΑ** τῆς **ΑΒ**.



Διήχθω γὰρ ἡ **ΒΑ** ἐπὶ τὸ **Δ** σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ **ΓΑ** ἴση ἡ **ΑΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΓ**. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΓ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΔ**· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** τῆς ὑπὸ **ΑΔΓ**·

καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ **ΔΓΒ** μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΓΔ** γωνίαν τῆς ὑπὸ **ΒΔΓ**, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ **ΔΒ** ἄρα τῆς **ΒΓ** ἐστι μείζων.

ἴση δὲ ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΓ**· μείζονες ἄρα αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** τῆς **ΒΓ**· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν **ΑΒ**, **ΒΓ** τῆς **ΓΑ** μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ **ΒΓ**, **ΓΑ** τῆς **ΑΒ**.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

καʹ.

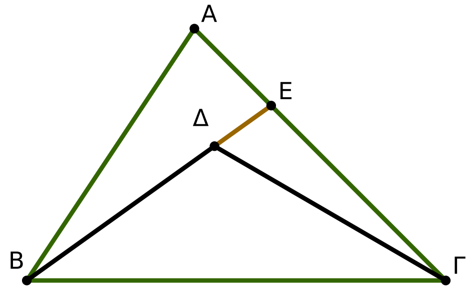
Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς **ΒΓ** ἀπὸ τῶν περάτων τῶν **Β**, **Γ** δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ **ΒΔ**, **ΔΓ**· λέγω, ὅτι αἱ **ΒΔ**, **ΔΓ** τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ **ΒΔΓ** τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ**.

Διήχθω γὰρ ἡ **ΒΔ** ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ **ΑΒΕ** ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ **ΑΒ**, **ΑΕ** τῆς **ΒΕ** μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΕΓ**· αἱ ἄρα **ΒΑ**, **ΑΓ** τῶν **ΒΕ**, **ΕΓ** μείζονές εἰσιν.

πάλιν, ἐπεὶ τοῦ **ΓΕΔ** τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ **ΓΕ**, **ΕΔ** τῆς **ΓΔ** μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΔΒ**· αἱ **ΓΕ**, **ΕΒ** ἄρα τῶν **ΓΔ**, **ΔΒ** μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν **ΒΕ**, **ΕΓ** μείζονες ἐδείχθησαν αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ**· πολλῷ ἄρα αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** τῶν **ΒΔ**, **ΔΓ** μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ **ΓΔΕ** ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΔΓ** μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΓΕΔ**. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ **ΑΒΕ** τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΕΒ** μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ**. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ **ΓΕΒ** μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ **ΒΔΓ**· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΔΓ** μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ**.

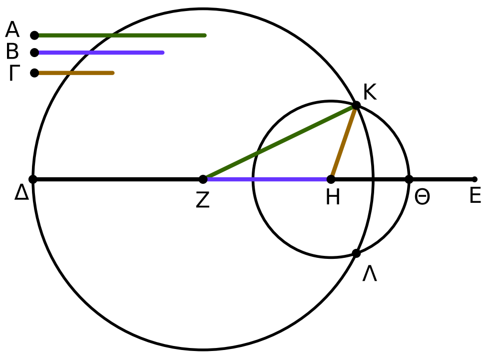


Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ **Α**, **Β**, **Γ**, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν **Α**, **Β** τῆς **Γ**, αἱ δὲ **Α**, **Γ** τῆς **Β**, καὶ ἔτι αἱ **Β**, **Γ** τῆς **Α**· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς **Α**, **Β**, **Γ** τρίγωνον συστήσασθαι.



Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ **ΔΕ** πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ **Δ** ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ **Ε**, καὶ κείσθω τῇ μὲν **Α** ἴση ἡ **ΔΖ**, τῇ δὲ **Β** ἴση ἡ **ΖΗ**, τῇ δὲ **Γ** ἴση ἡ **ΗΘ**· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Ζ**, διαστήματι δὲ τῷ **ΖΔ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΔΚΛ**· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ **Η**, διαστήματι δὲ τῷ **ΗΘ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΚΛΘ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΚΖ**, **ΚΗ**· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς **Α**, **Β**, **Γ** τρίγωνον συνέσταται τὸ **ΚΖΗ**.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΔΚΛ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΔ** τῇ **ΖΚ**· ἀλλὰ ἡ **ΖΔ** τῇ **Α** ἐστιν ἴση. καὶ ἡ **ΚΖ** ἄρα τῇ **Α** ἐστιν ἴση.

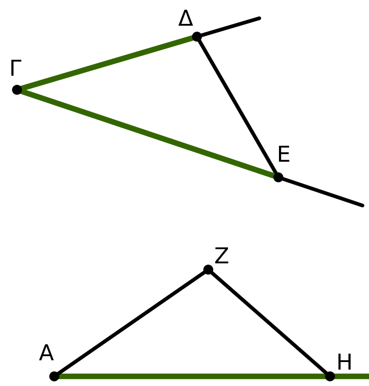
πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Η** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΛΚΘ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΗΘ** τῇ **ΗΚ**· ἀλλὰ ἡ **ΗΘ** τῇ **Γ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ **ΚΗ** ἄρα τῇ **Γ** ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ **ΖΗ** τῇ **Β** ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΚΖ**, **ΖΗ**, **ΗΚ** τρισὶ ταῖς **Α**, **Β**, **Γ** ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν **ΚΖ**, **ΖΗ**, **ΗΚ**, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς **Α**, **Β**, **Γ**, τρίγωνον συνέσταται τὸ **ΚΖΗ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγʹ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ **Α**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ **ΔΓΕ**· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΑΒ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ **ΔΓΕ** ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν **ΓΔ**, **ΓΕ** τυχόντα σημεῖα τὰ **Δ**, **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΕ**· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΓΕ**, τρίγωνον συνεστάτω τὸ **ΑΖΗ**, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν **ΓΔ** τῇ **ΑΖ**, τὴν δὲ **ΓΕ** τῇ **ΑΗ**, καὶ ἔτι τὴν **ΔΕ** τῇ **ΖΗ**.

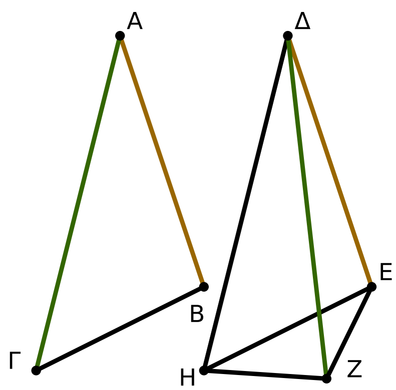
Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ **ΔΓ**, **ΓΕ** δύο ταῖς **ΖΑ**, **ΑΗ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ **ΔΕ** βάσει τῇ **ΖΗ** ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΓΕ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΑΗ** ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΑΒ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ **ΔΓΕ** ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ **ΖΑΗ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς **ΔΕ**, **ΔΖ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**, ἡ δὲ πρὸς τῷ **Α** γωνία τῆς πρὸς τῷ **Δ** γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσεως τῆς **ΕΖ** μείζων ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ** γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ **ΔΕ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Δ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΕΔΗ**, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΓ**, **ΔΖ** ἴση ἡ **ΔΗ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΗ**, **ΖΗ**.

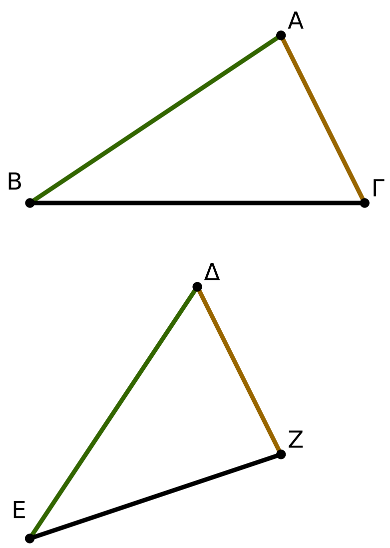
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, ἡ δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΗ**, δύο δὴ αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** δυσὶ ταῖς **ΕΔ**, **ΔΗ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΗ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΗ** ἐστιν ἴση.
πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΖ** τῇ **ΔΗ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΗΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΖΗ**· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΖΗ** τῆς ὑπὸ **ΕΗΖ**· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΕΖΗ** τῆς ὑπὸ **ΕΗΖ**. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ **ΕΖΗ** μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ **ΕΖΗ** γωνίαν τῆς ὑπὸ **ΕΗΖ**, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ **ΕΗ** τῆς **ΕΖ**. ἴση δὲ ἡ **ΕΗ** τῇ **ΒΓ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΒΓ** τῆς **ΕΖ**.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κεʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς **ΔΕ**, **ΔΖ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**· βάσις δὲ ἡ **ΒΓ** βάσεως τῆς **ΕΖ** μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ** μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων·

ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ**· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**·

οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ**· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ **ΒΓ** βάσεως τῆς **ΕΖ**· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ**.

ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΕΔΖ**.

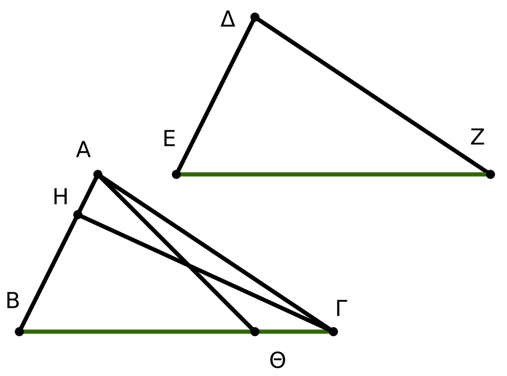
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκάτερᾳ, τὴν δὲ βασίν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΔΕΖ**, **ΕΖΔ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΒΓΑ** τῇ ὑπὸ **ΕΖΔ**· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**· λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ **ΑΒ**, καὶ κείσθω τῇ **ΔΕ** ἴση ἡ **ΒΗ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΗΓ**.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΒΗ** τῇ **ΔΕ**, ἡ δὲ **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**, δύο δὴ αἱ **ΒΗ**, **ΒΓ** δυσὶ ταῖς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΗΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ **ΗΓ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΗΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΗΓΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΔΖΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΓΑ** ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΗ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΒΓΑ** ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**. ἴση ἄρα.

ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΒΓ** τῇ **ΕΖ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δυσὶ ταῖς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**, ἡ δὲ **ΒΓ** τῇ **ΕΖ** καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ **ΒΓ**, καὶ κείσθω τῇ **ΕΖ** ἴση ἡ **ΒΘ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΘ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΒΘ** τῇ **ΕΖ** ἡ δὲ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΘ** δυσὶ ταῖς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκαρέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ **ΑΘ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΘ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΘΑ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΖΔ**. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΕΖΔ** τῇ ὑπὸ **ΒΓΑ** ἐστιν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ **ΑΘΓ** ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΘΑ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΒΓΑ**· ὅπερ ἀδύνατον.

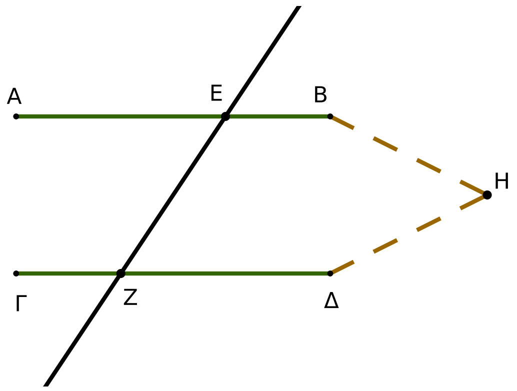
οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** ἴση. δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δύο ταῖς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ λοιπῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζʹ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ **ΕΖ** τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΕΖ**, **ΕΖΔ** ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.



Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** μέρη ἢ ἐπὶ τὰ **Α**, **Γ**. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** μέρη κατὰ τὸ **Η**.

τριγώνου δὴ τοῦ **ΗΕΖ** ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΕΖ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΕΖΗ**· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ **ΑΒ**, **ΔΓ** ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** μέρη.

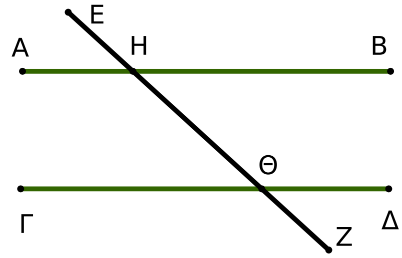
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ **Α**, **Γ**· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κηʹ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ **ΕΖ** τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ**, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΗΘ** ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

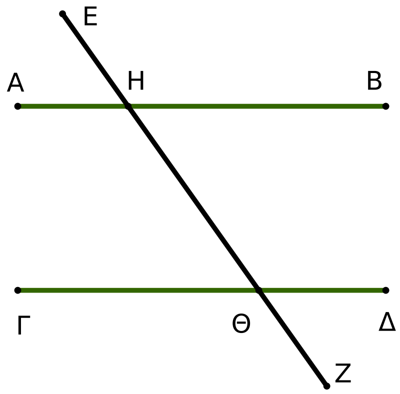
Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** ταῖς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθʹ.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ **ΕΖ**· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΗΘΔ** ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΕΗΒ** τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ**· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** τῶν ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ **ΑΗΘ**, **ΒΗΘ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα **ΑΒ**, **ΓΔ** ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι·

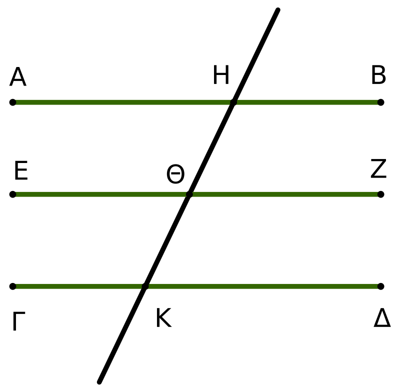
οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ**· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΑΗΘ** τῇ ὑπὸ **ΕΗΒ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΗΒ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΘΔ** ἐστιν ἴση· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΕΗΒ**, **ΒΗΘ** ταῖς ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ **ΕΗΒ**, **ΒΗΘ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΗΘΔ** ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λʹ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τῇ **ΕΖ** παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ** ἔστι παράλληλος.



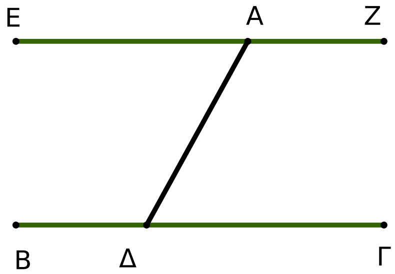
Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ **ΗΚ**. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΑΒ**, **ΕΖ** εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ **ΗΚ**, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΗΚ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΖ**. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΕΖ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ **ΗΚ**, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΗΘΖ** τῇ ὑπὸ **ΗΚΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΚ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΖ** ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΚ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΚΔ** ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ **Α**, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΒΓ**· δεῖ δὴ διὰ τοῦ **Α** σημείου τῇ **ΒΓ** εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



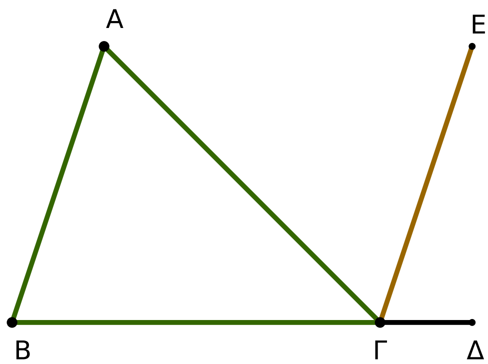
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **ΒΓ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Δ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΔ**· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΔΑ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ ὑπὸ **ΑΔΓ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΔΑΕ**· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ **ΕΑ** εὐθεῖα ἡ **ΑΖ**.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς **ΒΓ**, **ΕΖ** εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ **ΑΔ** τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ **ΕΑΔ**, **ΑΔΓ** ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΕΑΖ** τῇ **ΒΓ**. Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ **Α** τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΒΓ** παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ **ΕΑΖ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ **ΒΓ** ἐπὶ τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ **ΓΑΒ**, **ΑΒΓ**, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ**, **ΓΑΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ **Γ** σημείου τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ παράλληλος ἡ **ΓΕ**. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΕ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ **ΑΓ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΓΕ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΕ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ **ΒΔ**, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΓΔ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΓ** ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΒΓ**.

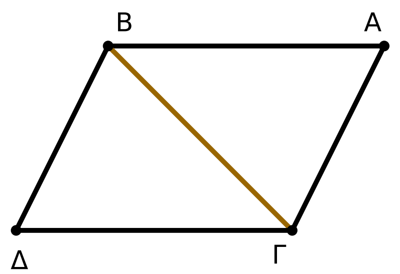
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** τρισὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ**, **ΓΑΒ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΑΓΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΓΒ**, **ΓΒΑ**, **ΓΑΒ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγʹ.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**· λέγω, ὅτι καὶ αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



Ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΓ**. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ **ΒΓ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ** κοινὴ δὲ ἡ **ΒΓ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δύο ταῖς **ΒΓ**, **ΓΔ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΒΔ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΒΓΔ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΒΔ**.

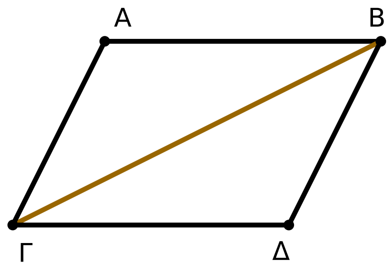
καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς **ΑΓ**, **ΒΔ** εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ **ΒΓ** τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ **ΑΓΔΒ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι τοῦ **ΑΓΔΒ** παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ **ΒΓ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ **ΒΓ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ **ΒΓ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΓΒ**, **ΓΒΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ** τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΒΓΔ**, **ΓΒΔ** ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΒΓ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΑΒ** πλευρὰ τῇ **ΓΔ**, ἡ δὲ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΔΒ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΓΒΔ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ**, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΑΓΔ** ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΓΔΒ** ἴση.

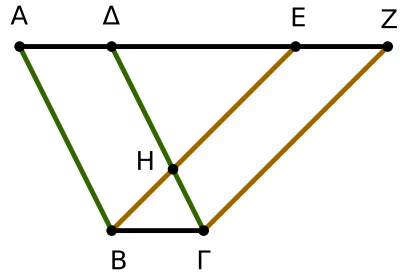
Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΒΓ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δυσὶ ταῖς **ΓΔ**, **ΒΓ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ **ΑΓ** τῇ **ΔΒ** ἴση. καὶ τὸ **ΑΒΓ** [ἄρα] τρίγωνον τῷ **ΒΓΔ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Ἡ ἄρα **ΒΓ** διάμετρος δίχα τέμνει τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ **ΑΒΓΔ**, **ΕΒΓΖ** ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΑΖ**, **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** τῷ **ΕΒΓΖ** παραλληλογράμμῳ.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ**, ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΒΓ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΒΓ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **ΑΔ** τῇ **ΕΖ** ἐστιν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ **ΔΕ**· ὅλη ἄρα ἡ **ΑΕ** ὅλῃ τῇ **ΔΖ** ἐστιν ἴση.

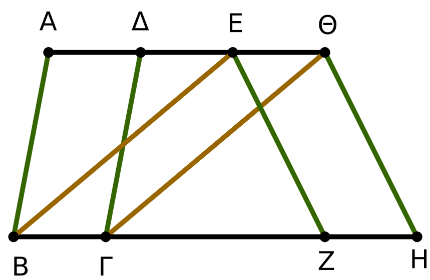
ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΓ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΕΑ**, **ΑΒ** δύο ταῖς **ΖΔ**, **ΔΓ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΖΔΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΑΒ** ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ **ΕΒ** βάσει τῇ **ΖΓ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΕΑΒ** τρίγωνον τῷ **ΔΖΓ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ **ΔΗΕ**·

λοιπὸν ἄρα τὸ **ΑΒΗΔ** τραπέζιον λοιπῷ τῷ **ΕΗΓΖ** τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΗΒΓ** τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ **ΕΒΓΖ** παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν **ΒΓ**, **ΖΗ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΑΘ**, **ΒΗ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΖΗΘ**.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΕ**, **ΓΘ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΖΗ**, ἀλλὰ ἡ **ΖΗ** τῇ **ΕΘ** ἐστιν ἴση, καὶ ἡ **ΒΓ** ἄρα τῇ **ΕΘ** ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ **ΕΒ**, **ΘΓ**· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι [καὶ αἱ **ΕΒ**, **ΘΓ** ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι].

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΕΒΓΘ**. καί ἐστιν ἴσον τῷ **ΑΒΓΔ**· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν **ΒΓ**, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς **ΒΓ**, **ΑΘ**.

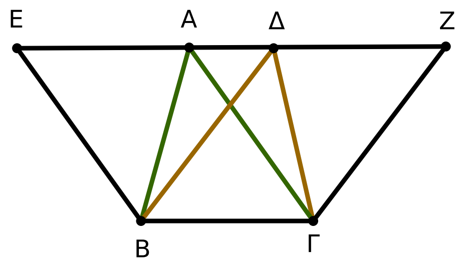
δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΕΖΗΘ** τῷ αὐτῷ τῷ **ΕΒΓΘ** ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΖΗΘ** ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΒΓ** ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΑΔ**, **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΒΓ** τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω ἡ **ΑΔ** ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ **Ε**, **Ζ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Β** τῇ **ΓΑ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΒΕ**, δὶα δὲ τοῦ **Γ** τῇ **ΒΔ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΓΖ**. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν **ΕΒΓΑ**, **ΔΒΓΖ**· καί εἰσιν ἴσα·

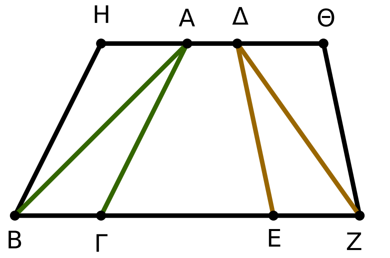
ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΓ**, **ΕΖ**· καί ἐστι τοῦ μὲν **ΕΒΓΑ** παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον· ἡ γὰρ **ΑΒ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ **ΔΒΓΖ** παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ **ΔΒΓ** τρίγωνον· ἡ γὰρ **ΔΓ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.[τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΒΓ** τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΖ**, **ΑΔ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΑΔ** ἐφ᾿ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ **Η**, **Θ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Β** τῇ **ΓΑ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΒΗ**, δὶα δὲ τοῦ **Ζ** τῇ **ΔΕ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΖΘ**.

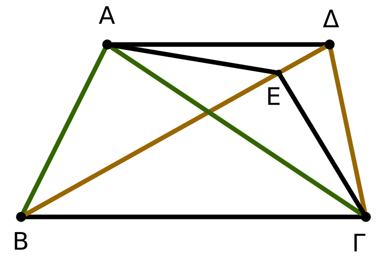
παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν **ΗΒΓΑ**, **ΔΕΖΘ**· καὶ ἴσον τὸ **ΗΒΓΑ** τῷ **ΔΕΖΘ**· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΖ**, **ΗΘ**· καί ἐστι τοῦ μὲν **ΗΒΓΑ** παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον. ἡ γὰρ **ΑΒ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ **ΔΕΖΘ** παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ **ΖΕΔ** τρίγωνον· ἡ γὰρ **ΔΖ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΒΓ** ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς **ΒΓ**· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ **ΑΔ**· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΒΓ**.

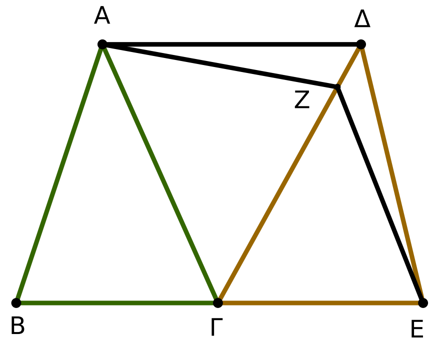
Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ **Α** σημείου τῇ **ΒΓ** εὐθείᾳ παράλληλος ἡ **ΑΕ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΕΓ**. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΕΒΓ** τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ **ΑΒΓ** τῷ **ΔΒΓ** ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ **ΔΒΓ** ἄρα τῷ **ΕΒΓ** ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΒΓ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾿ ἄλλη τις πλὴν τῆς **ΑΔ**· ἡ **ΑΔ** ἄρα τῇ **ΒΓ** ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μʹ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΓΔΕ** ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν **ΒΓ**, **ΓΕ** καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ **ΑΔ**· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΒΕ**.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ **Α** τῇ **ΒΕ** παράλληλος ἡ **ΑΖ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΕ**. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΖΓΕ** τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν **ΒΓ**, **ΓΕ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΕ**, **ΑΖ**.

ἀλλὰ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ **ΔΓΕ** [τριγώνῳ]· καὶ τὸ **ΔΓΕ** ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ **ΖΓΕ** τριγώνῳ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ **ΑΖ** τῇ **ΒΕ**.

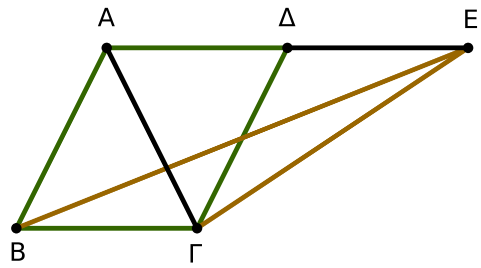
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς **ΑΔ**· ἡ **ΑΔ** ἄρα τῇ **ΒΕ** ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μαʹ.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ **ΑΒΓΔ** τριγώνῳ τῷ **ΕΒΓ** βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς **ΒΓ**, **ΑΕ**· λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τοῦ **ΒΕΓ** τριγώνου.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ **ΑΓ**. ἴσον δή ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΕΒΓ** τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς **ΒΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΓ**, **ΑΕ**.

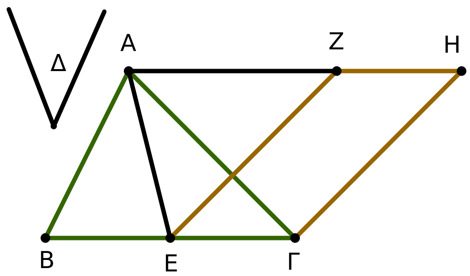
ἀλλὰ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου· ἡ γὰρ **ΑΓ** διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ **ΕΒΓ** τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβʹ.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ **Δ**· δεῖ δὴ τῷ **ΑΒΓ** τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ **Δ** γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Τετμήσθω ἡ **ΒΓ** δίχα κατὰ τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΕ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΕΓ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Ε** τῇ **Δ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΓΕΖ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Α** τῇ **ΕΓ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΗ**, διὰ δὲ τοῦ **Γ** τῇ **ΕΖ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΓΗ**· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΕΓΗ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΕΓ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΑΕΓ** τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν **ΒΕ**, **ΕΓ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΒΓ**, **ΑΗ**· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τοῦ **ΑΕΓ** τριγώνου.

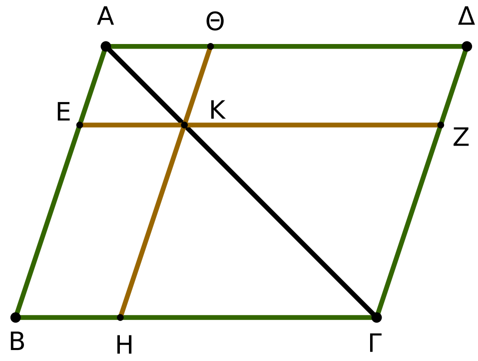
ἔστι δὲ καὶ τὸ **ΖΕΓΗ** παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ **ΑΕΓ** τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΕΓΗ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΑΒΓ** τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ **ΓΕΖ** γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ **Δ**.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ **ΑΒΓ** ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ **ΖΕΓΗ** ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΓΕΖ**, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ **Δ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ **ΑΓ**, περὶ δὲ τὴν **ΑΓ** παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ **ΕΘ**, **ΖΗ**, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ **ΒΚ**, **ΚΔ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΒΚ** παραπλήρωμα τῷ **ΚΔ** παραπληρώματι.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ **ΑΓ**, ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΓΔ** τριγώνῳ.

πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΕΘ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ **ΑΚ**, ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΕΚ** τρίγωνον τῷ **ΑΘΚ** τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΚΖΓ** τρίγωνον τῷ **ΚΗΓ** ἐστιν ἴσον.

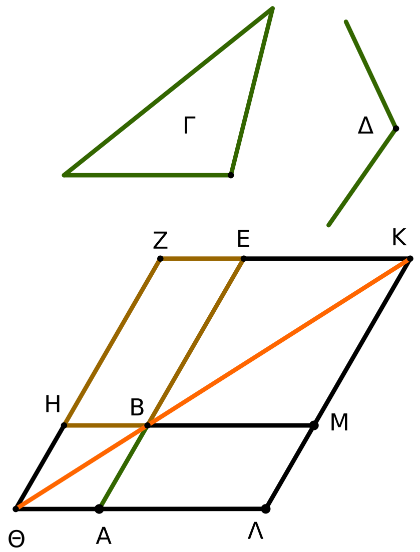
ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν **ΑΕΚ** τρίγωνον τῷ **ΑΘΚ** τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ **ΚΖΓ** τῷ **ΚΗΓ**, τὸ **ΑΕΚ** τρίγωνον μετὰ τοῦ **ΚΗΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΑΘΚ** τριγώνῳ μετὰ τοῦ **ΚΖΓ**· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον ὅλῳ τῷ **ΑΔΓ** ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ **ΒΚ** παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ **ΚΔ** παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ **Γ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ **Δ**· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ **Γ** ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ **Δ** γωνίᾳ.



Συνεστάτω τῷ **Γ** τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΒΕΖΗ** ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΒΗ**, ἥ ἐστιν ἴση τῇ **Δ**· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν **ΒΕ** τῇ **ΑΒ**, καὶ διήχθω ἡ **ΖΗ** ἐπὶ τὸ **Θ**, καὶ διὰ τοῦ **Α** ὁποτέρᾳ τῶν **ΒΗ**, **ΕΖ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΘ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΘΒ**.

καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς **ΑΘ**, **ΕΖ** εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ **ΘΖ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΘΖ**, **ΘΖΕ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι.

αἱ ἄρα ὑπὸ **ΒΘΗ**, **ΗΖΕ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ **ΘΒ**, **ΖΕ** ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται.

ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ **Κ**, καὶ διὰ τοῦ **Κ** σημείου ὁποτέρᾳ τῶν **ΕΑ**, **ΖΘ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΚΛ**, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ **ΘΑ**, **ΗΒ** ἐπὶ τὰ **Λ**, **Μ** σημεῖα.

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΘΛΚΖ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ **ΘΚ**, περὶ δὲ τὴν **ΘΚ** παραλληλόγραμμα μὲν τὰ **ΑΗ**, **ΜΕ**, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ **ΛΒ**, **ΒΖ**· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΛΒ** τῷ **ΒΖ**.

ἀλλὰ τὸ **ΒΖ** τῷ **Γ** τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ **ΛΒ** ἄρα τῷ **Γ** ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΗΒΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΒΜ**, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΗΒΕ** τῇ **Δ** ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΜ** ἄρα τῇ **Δ** γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

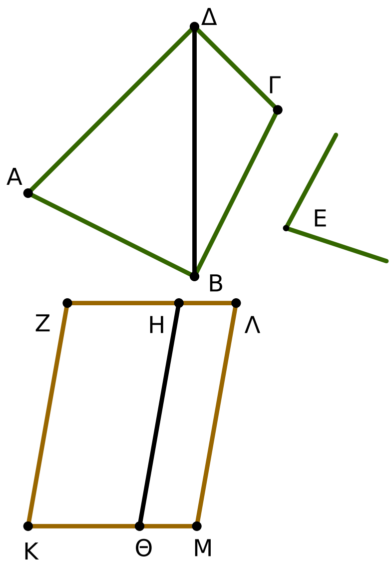
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ **Γ** ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ **ΛΒ** ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΑΒΜ**, ἥ ἐστιν ἴση τῇ **Δ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ **ΑΒΓΔ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ **Ε**· δεῖ δὴ τῷ **ΑΒΓΔ** εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ **Ε**.

Ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΒ**, καὶ συνεστάτω τῷ **ΑΒΔ** τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΖΘ** ἐν τῇ ὑπὸ **ΘΚΖ** γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ **Ε**· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν **ΗΘ** εὐθεῖαν τῷ **ΔΒΓ** τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΗΜ** ἐν τῇ ὑπὸ **ΗΘΜ** γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ **Ε**.



καὶ ἐπεὶ ἡ **Ε** γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΘΚΖ**, **ΗΘΜ** ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ **ΘΚΖ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΗΘΜ** ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΚΘΗ**·

αἱ ἄρα ὑπὸ **ΖΚΘ**, **ΚΘΗ** ταῖς ὑπὸ **ΚΘΗ**, **ΗΘΜ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ **ΖΚΘ**, **ΚΘΗ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΚΘΗ**, **ΗΘΜ** ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ **ΗΘ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Θ** δύο εὐθεῖαι αἱ **ΚΘ**, **ΘΜ** μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ **ΚΘ** τῇ **ΘΜ**·

καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς **ΚΜ**, **ΖΗ** εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ **ΘΗ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΜΘΗ**, **ΘΗΖ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΘΗΛ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΜΘΗ**, **ΘΗΛ** ταῖς ὑπὸ **ΘΗΖ**, **ΘΗΛ** ἴσαι εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ **ΜΘΗ**, **ΘΗΛ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΘΗΖ**, **ΘΗΛ** ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ **ΖΗ** τῇ **ΗΛ**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΖΚ** τῇ **ΘΗ** ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ **ΜΛ**, καὶ ἡ **ΚΖ** ἄρα τῇ **ΜΛ** ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ **ΚΜ**, **ΖΛ**· καὶ αἱ **ΚΜ**, **ΖΛ** ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΚΖΛΜ**.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν **ΑΒΔ** τρίγωνον τῷ **ΖΘ** παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ **ΔΒΓ** τῷ **ΗΜ**, ὅλον ἄρα τὸ **ΑΒΓΔ** εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ **ΚΖΛΜ** παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

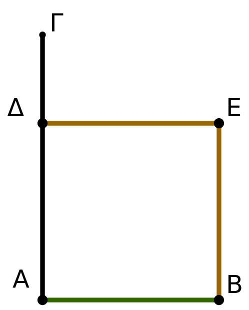
Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **ΑΒΓΔ** ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ **ΚΖΛΜ** ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΚΜ**, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ **Ε**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μϛʹ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ **Α** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΑΓ**, καὶ κείσθω τῇ **ΑΒ** ἴση ἡ **ΑΔ**· καὶ διὰ μὲν τοῦ **Δ** σημείου τῇ **ΑΒ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΔΕ**, διὰ δὲ τοῦ **Β** σημείου τῇ **ΑΔ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΒΕ**. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ**·



ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, ἡ δὲ **ΑΔ** τῇ **ΒΕ**. ἀλλὰ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΔ** ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ **ΒΑ**, **ΑΔ**, **ΔΕ**, **ΕΒ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ** παραλληλόγραμμον.

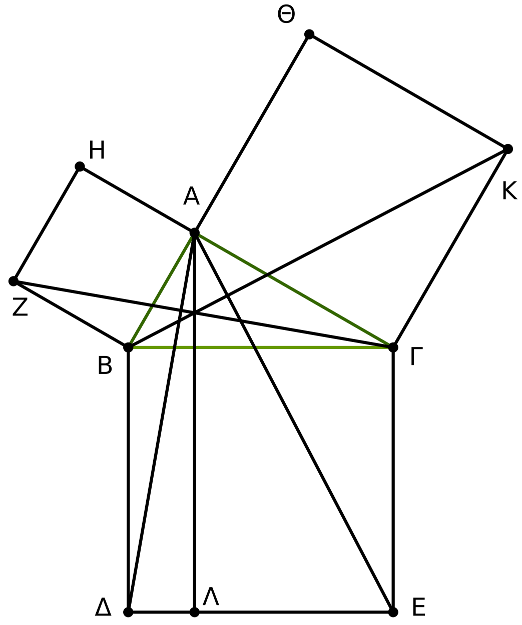
λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς **ΑΒ**, **ΔΕ** εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ **ΑΔ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΑΔΕ** γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΔΕ**. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ **ΑΒΕ**, **ΒΕΔ** γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΑΒ** εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζʹ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ **ΑΒΓ** ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τετραγώνοις.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς **ΒΓ** τετράγωνον τὸ **ΒΔΕΓ**, ἀπὸ δὲ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τὰ **ΗΒ**, **ΘΓ**, καὶ διὰ τοῦ **Α** ὁποτέρᾳ τῶν **ΒΔ**, **ΓΕ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΛ**· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΖΓ**.

καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΒΑΗ** γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ **ΒΑ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΑΗ** μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ **ΓΑ** τῇ **ΑΗ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΔΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΒΑ**· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ**· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΒ**Α ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΖΒΓ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΔΒ** τῇ **ΒΓ**, ἡ δὲ **ΖΒ** τῇ **ΒΑ**, δύο δὴ αἱ **ΔΒ**, **ΒΑ** δύο ταῖς **ΖΒ**, **ΒΓ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΒΑ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΒΓ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΑΔ** βάσει τῇ **ΖΓ** [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον τῷ **ΖΒΓ** τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον·

καί [ἐστι] τοῦ μὲν **ΑΒΔ** τριγώνου διπλάσιον τὸ **ΒΛ** παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν **ΒΔ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς **ΒΔ**, **ΑΛ**· τοῦ δὲ **ΖΒΓ** τριγώνου διπλάσιον τὸ **ΗΒ** τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν **ΖΒ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς **ΖΒ**, **ΗΓ**. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ **ΒΛ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΗΒ** τετραγώνῳ.

ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν **ΑΕ**, **ΒΚ** δειχθήσεται καὶ τὸ **ΓΛ** παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ **ΘΓ** τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ **ΒΔΕΓ** τετράγωνον δυσὶ τοῖς **ΗΒ**, **ΘΓ** τετραγώνοις ἴσον ἐστίν.

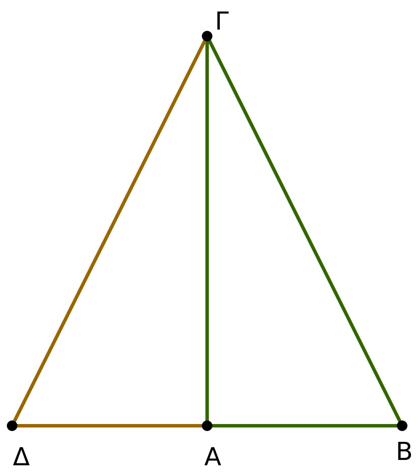
καί ἐστι τὸ μὲν **ΒΔΕΓ** τετράγωνον ἀπὸ τῆς **ΒΓ** ἀναγραφέν, τὰ δὲ **ΗΒ**, **ΘΓ** ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ**. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΒΓ** πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη΄.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς **ΒΓ** πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τῇ **ΑΓ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΑΔ** καὶ κείσθω τῇ **ΒΑ** ἴση ἡ **ΑΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΓ**. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΒ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΑ** τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΔΑ**, **ΑΓ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τετραγώνοις.

ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **ΔΑ**, **ΑΓ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ** γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ**· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΓ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΔΓ** τῇ **ΒΓ** ἐστιν ἴση·

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΑΓ**, δύο δὴ αἱ **ΔΑ**, **ΑΓ** δύο ταῖς **ΒΑ**, **ΑΓ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΔΓ** βάσει τῇ **ΒΓ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΑΓ** [ἐστιν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ**.

Ἐὰν ἀρὰ τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 2

Ὅροι

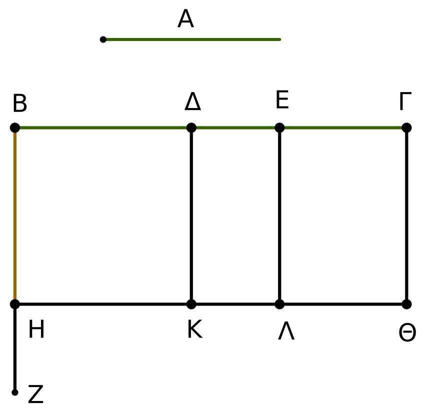
α′. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β′. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

α′.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ **Α**, **ΒΓ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΒΓ**, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ **Δ**, **Ε** σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΒΓ** περιεχομένον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν **Α**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΔΕ** καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΕΓ**.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Β** τῇ **ΒΓ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΒΖ**, καὶ κείσθω τῇ **Α** ἴση ἡ **ΒΗ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Η** τῇ **ΒΓ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΗΘ**, διὰ δὲ τῶν **Δ**, **Ε**, **Γ** τῇ **ΒΗ** παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ **ΔΚ**, **ΕΛ**, **ΓΘ**.

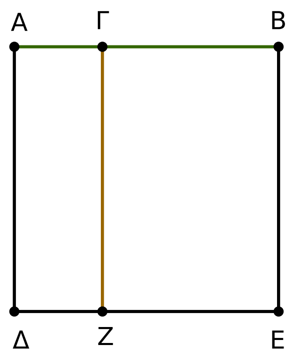
Ἴσον δή ἐστι τὸ **ΒΘ** τοῖς **ΒΚ**, **ΔΛ**, **ΕΘ**. καί ἐστι τὸ μὲν **ΒΘ** τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΒΓ**· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν **ΗΒ**, **ΒΓ**, ἴση δὲ ἡ **ΒΗ** τῇ **Α**· τὸ δὲ **ΒΚ** τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΒΔ**· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν **ΗΒ**, **ΒΔ**, ἴση δὲ ἡ **ΒΗ** τῇ **Α**. τὸ δὲ **ΔΛ** τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΔΕ**· ἴση γὰρ ἡ **ΔΚ**, τουτέστιν ἡ **ΒΗ**, τῇ **Α**. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ **ΕΘ** τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **ΕΓ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **Α**, **ΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ **Α**, **ΒΔ** καὶ τῷ ὑπὸ **Α**, **ΔΕ** καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ **Α**, **ΕΓ**.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ **ΒΑ**, **ΑΓ** περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΔΕΒ**, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ **Γ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΔ**, **ΒΕ** παράλληλος ἡ **ΓΖ**.

Ἴσον δή ἐστὶ τὸ **ΑΕ** τοῖς **ΑΖ**, **ΓΕ**. καί ἐστι τὸ μὲν **ΑΕ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον, τὸ δὲ **ΑΖ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν **ΔΑ**, **ΑΓ**, ἴση δὲ ἡ **ΑΔ** τῇ **ΑΒ**· τὸ δὲ **ΓΕ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**· ἴση γὰρ ἡ **ΒΕ** τῇ **ΑΒ**. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετραγώνῳ.

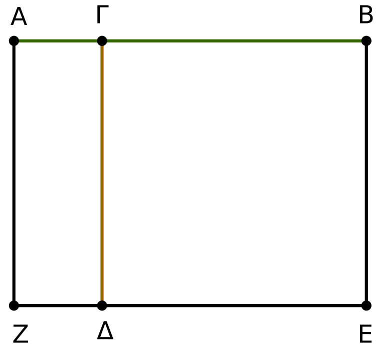
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ**· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον τὸ **ΓΔΕΒ**, καὶ διήχθω ἡ **ΕΔ** ἐπὶ τὸ **Ζ**, καὶ διὰ τοῦ **Α** ὁποτέρᾳ τῶν **ΓΔ**, **ΒΕ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΖ**.



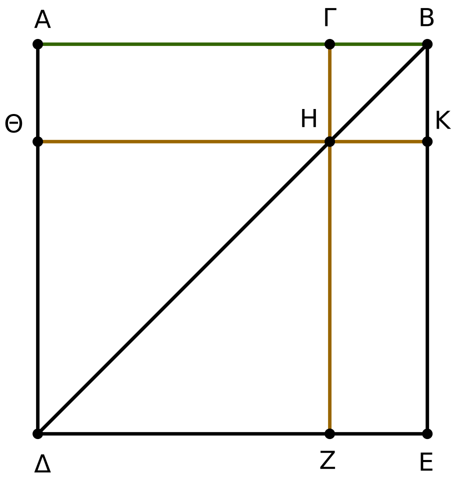
ἴσον δή ἐστι τὸ **ΑΕ** τοῖς **ΑΔ**, **ΓΕ**· καί ἐστι τὸ μὲν **ΑΕ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΕ**, ἴση δὲ ἡ **ΒΕ** τῇ **ΒΓ**· τὸ δὲ **ΑΔ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**· ἴση γὰρ ἡ **ΔΓ** τῇ **ΓΒ**· τὸ δὲ **ΔΒ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον·

τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ**. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΔΕΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΔ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Γ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΔ**, **ΕΒ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΓΖ**, διὰ δὲ τοῦ **Η** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΔΕ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΘΚ**.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΓΖ** τῇ **ΑΔ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ **ΒΔ**, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΗΒ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΑΔΒ**.

ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ **ΑΔΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ** ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΑ** τῇ **ΑΔ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΗΒ** ἄρα γωνιά τῇ ὑπὸ **ΗΒΓ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΓ** πλευρᾷ τῇ **ΓΗ** ἐστιν ἴση·

ἀλλ᾽ ἡ μὲν **ΓΒ** τῇ **ΗΚ** ἐστιν ἴση. ἡ δὲ **ΓΗ** τῇ **ΚΒ**· καὶ ἡ **ΗΚ** ἄρα τῇ **ΚΒ** ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΓΗ** τῇ **ΒΚ** [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ **ΓΒ**], αἱ ἄρα ὑπὸ **ΚΒΓ**, **ΗΓΒ** γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΚΒΓ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΗ**· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ **ΓΗΚ**, **ΗΚΒ** ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΓΗΚΒ**· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΓΒ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΘΖ** τετράγωνόν ἐστιν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΘΗ**, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα **ΘΖ**, **ΚΓ** τετράγωνα ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** εἰσιν.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τῷ **ΗΕ**, καί ἐστι τὸ **ΑΗ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**· ἴση γὰρ ἡ **ΗΓ** τῇ **ΓΒ**· καὶ τὸ **ΗΕ** ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ **ΑΓ**, **ΓΒ**· τὰ ἄρα **ΑΗ**, **ΗΕ** ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**.

ἔστι δὲ καὶ τὰ **ΘΖ**, **ΓΚ** τετράγωνα ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ **ΘΖ**, **ΓΚ**, **ΑΗ**, **ΗΕ** ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

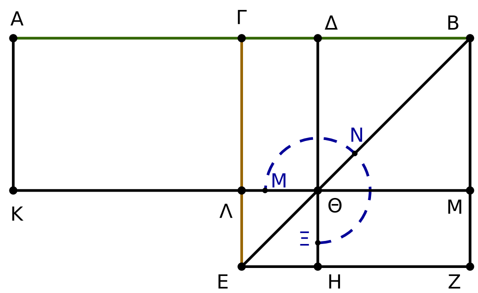
ἀλλὰ τὰ **ΘΖ**, **ΓΚ**, **ΑΗ**, **ΗΕ** ὅλον ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ**, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ **Γ**, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον τὸ **ΓΕΖΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΕ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Δ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΓΕ**, **ΒΖ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΔΗ**, διὰ δὲ τοῦ **Θ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΕΖ** παράλληλος πάλιν ἤχθω ἡ **ΚΜ**, καὶ πάλιν διὰ τοῦ **Α** ὁποτέρᾳ τῶν **ΓΛ**, **ΒΜ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΚ**. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΓΘ** παραπλήρωμα τῷ **ΘΖ** παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΔΜ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΓΜ** ὅλῳ τῷ **ΔΖ** ἴσον ἐστίν.

ἀλλὰ τὸ **ΓΜ** τῷ **ΑΛ** ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ** ἐστιν ἴση· καὶ τὸ **ΑΛ** ἄρα τῷ **ΔΖ** ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΘ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΘ** τῷ **ΜΝΞ** γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ **ΑΘ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ **ΔΘ** τῇ ΔΒ· καὶ ὁ **ΜΝΞ** ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ **ΑΔ**, **ΔΒ**. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΛΗ**, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**· ὁ ἄρα **ΜΝΞ** γνώμων καὶ τὸ **ΛΗ** ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τετραγώνῳ.

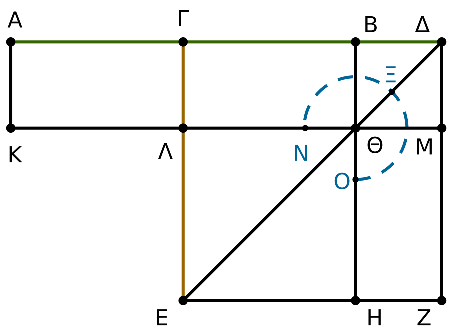
ἀλλὰ ὁ **ΜΝΞ** γνώμων καὶ τὸ **ΛΗ** ὅλον ἐστὶ τὸ **ΓΕΖΒ** τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΓΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ **ΒΔ**· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιεχόμενον ὀρθοχώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τετράγωνον τὸ **ΓΕΖΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΕ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Β** σημείου ὁποτέρᾳ τῶν **ΕΓ**, **ΔΖ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΒΗ**, διὰ δὲ τοῦ **Θ** σημείου ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΕΖ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΚΜ**, καὶ ἔτι διὰ τοῦ **Α** ὁποτέρᾳ τῶν **ΓΛ**, **ΔΜ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΚ**.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ **ΑΛ** τῷ **ΓΘ**. ἀλλὰ τὸ **ΓΘ** τῷ **ΘΖ** ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ **ΑΛ** ἄρα τῷ **ΘΖ** ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΜ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΜ** τῷ **ΝΞΟ** γνώμονί ἐστιν ἴσον.

ἀλλὰ τὸ **ΑΜ** ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ**· ἴση γάρ ἐστιν ἡ **ΔΜ** τῇ **ΔΒ**· καὶ ὁ **ΝΞΟ** ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΛΗ**, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετραγώνῳ·

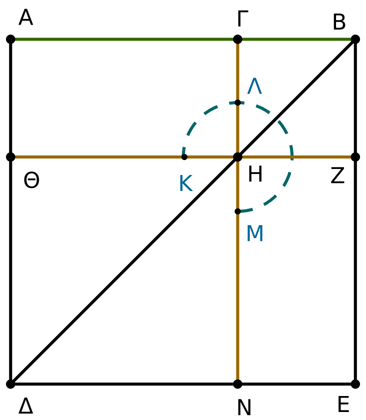
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιεχόμενον ὀρθοχώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ **ΝΞΟ** γνώμονι καὶ τῷ **ΛΗ**. ἀλλὰ ὁ **ΝΞΟ** γνώμων καὶ τὸ **ΛΗ** ὅλον ἐστὶ τὸ **ΓΕΖΔ** τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΓΔ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιεχόμενον ὀρθοχώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΔΕΒ**· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τῷ **ΗΕ**, κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΖ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΖ** ὅλῳ τῷ **ΓΕ** ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα **ΑΖ**, **ΓΕ** διπλάσιά ἐστι τοῦ **ΑΖ**.

ἀλλὰ τὰ **ΑΖ**, **ΓΕ** ὁ **ΚΛΜ** ἐστι γνώμων καὶ τὸ **ΓΖ** τετράγωνον· ὁ **ΚΛΜ** ἄρα γνώμων καὶ τὸ **ΓΖ** διπλάσιά ἐστι τοῦ **ΑΖ**. ἔστι δὲ τοῦ **ΑΖ** διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**· ἴση γὰρ ἡ **ΒΖ** τῇ **ΒΓ**· ὁ ἄρα **ΚΛΜ** γνώμων καὶ τὸ **ΓΖ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**.

κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΔΗ**, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράγωνον· ὁ ἄρα **ΚΛΜ** γνώμων καὶ τὰ **ΒΗ**, **ΗΔ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνῳ.

ἀλλὰ ὁ **ΚΛΜ** γνώμων καὶ τὰ **ΒΗ**, **ΗΔ** τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ **ΑΔΕΒ** καὶ τὸ **ΓΖ**, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δὶς ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνου.

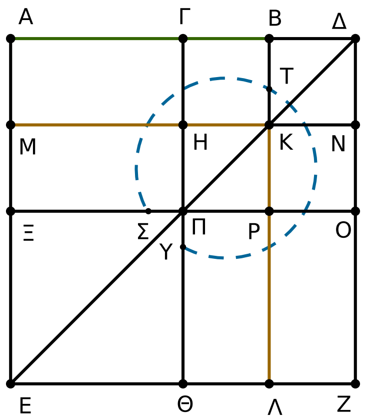
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**, **ΒΓ** ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας [τῇ **ΑΒ** εὐθεῖα] ἡ **ΒΔ**, καὶ κείσθω τῇ **ΓΒ** ἴση ἡ **ΒΔ**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΑΔ** τετράγωνον τὸ **ΑΕΖΔ**, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΒ** τῇ **ΒΔ**, ἀλλὰ ἡ μὲν **ΓΒ** τῇ **ΗΚ** ἐστιν ἴση, ἡ δὲ **ΒΔ** τῇ **ΚΝ**, καὶ ἡ **ΗΚ** ἄρα τῇ **ΚΝ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΠΡ** τῇ **ΡΟ** ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΔ**, ἡ δὲ **ΗΚ** τῇ **ΚΝ**, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν **ΓΚ** τῷ **ΚΔ**, τὸ δὲ **ΗΡ** τῷ **ΡΝ**.

ἀλλὰ τὸ **ΓΚ** τῷ **ΡΝ** ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ **ΓΟ** παραλληλογράμμου· καὶ τὸ **ΚΔ** ἄρα τῷ **ΗΡ** ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ **ΔΚ**, **ΓΚ**, **ΗΡ**, **ΡΝ** ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ **ΓΚ**.

πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΒ** τῇ **ΒΔ**, ἀλλὰ ἡ μὲν **ΒΔ** τῇ **ΒΚ**, τουτέστι τῇ **ΓΗ** ἴση, ἡ δὲ **ΓΒ** τῇ **ΗΚ**, τουτέστι τῇ **ΗΠ**, ἐστιν **ἴση**, καὶ ἡ **ΓΗ** ἄρα τῇ **ΗΠ** ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΓΗ** τῇ **ΗΠ**, ἡ δὲ **ΠΡ** τῇ **ΡΟ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν **ΑΗ** τῷ **ΜΠ**, τὸ δὲ **ΠΛ** τῷ **ΡΖ**.

ἀλλὰ τὸ **ΜΠ** τῷ **ΠΛ** ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ **ΜΛ** παραλληλογράμμου· καὶ τὸ **ΑΗ** ἄρα τῷ **ΡΖ** ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ **ΑΗ**, **ΜΠ**, **ΠΛ**, **ΡΖ** ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ **ΑΗ** ἐστι τετραπλάσια.

ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ **ΓΚ**, **ΚΔ**, **ΗΡ**, **ΡΝ** τοῦ **ΓΚ** τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν **ΣΤΥ** γνώμονα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ **ΑΚ**. καὶ ἐπεὶ τὸ **ΑΚ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΔ** ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΒΚ τῇ **ΒΔ**· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΔ** τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ **ΑΚ**.

ἐδείχθη δὲ τοῦ **ΑΚ** τετραπλάσιος καὶ ὁ **ΣΤΥ** γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΔ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΣΤΥ** γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΞΘ**, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΔ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ **ΣΤΥ** γνώμονι καὶ τῷ **ΞΘ**.

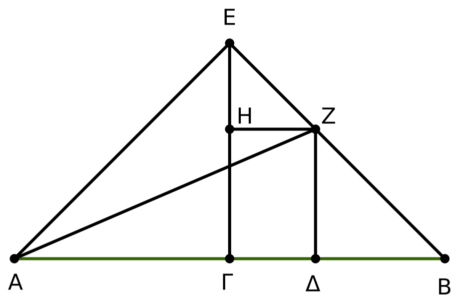
ἀλλὰ ὁ **ΣΤΥ** γνώμων καὶ τὸ **ΞΘ** ὅλον ἐστὶ τὸ **ΑΕΖΔ** τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς **ΑΔ**· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΔ** μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΑΔ** τετραγώνῳ· ἴση δὲ ἡ **ΒΔ** τῇ **ΒΓ**. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΑΓ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΔ**, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** καὶ **ΒΓ** ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσου ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ **Γ**, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΓΕ**, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΑ**, **ΕΒ**, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Δ** τῇ **ΕΓ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΔΖ**, διὰ δὲ τοῦ **Ζ** τῇ **ΑΒ** ἡ **ΖΗ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΖ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΕ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΕΓ**. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ **Γ**, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΕΑΓ**, **ΑΕΓ** μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καί εἰσιν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΓΕΑ**, **ΓΑΕ**.

δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΓΕΒ**, **ΕΒΓ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ** ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΕΗΖ**· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΕΓΒ**·

λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΖΗ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΖΗ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΕΗ** τῇ **ΗΖ** ἐστιν ἴση.

πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ **Β** γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΖΔΒ**· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ **ΕΓΒ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΖΔ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Β** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΖΒ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΖΔ** πλευρᾷ τῇ **ΔΒ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΕ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ **ΑΓ** τῷ ἀπὸ **ΓΕ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΕ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ **ΑΓ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΕ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ** τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΑ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΗ** τῇ **ΗΖ**, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΗΖ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΖ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΗΖ** τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΖ** τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΗΖ**. ἴση δὲ ἡ **ΗΖ** τῇ **ΓΔ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΖ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**.

ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΖ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΖ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** τετράγωνον· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΕΖ** γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΖ** τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ**.

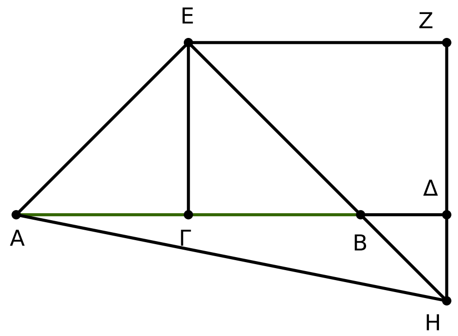
τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΖ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Δ** γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΖ** διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ **ΔΖ** τῇ **ΔΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Γ**, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ **ΒΔ**· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΓΕ**, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΑ**, **ΕΒ**· καὶ διὰ μὲν τοῦ **Ε** τῇ **ΑΔ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΕΖ**, διὰ δὲ τοῦ **Δ** τῇ **ΓΕ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΖΔ**.

καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς **ΕΓ**, **ΖΔ** εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ **ΕΖ**, αἱ ὑπὸ **ΓΕΖ**, **ΕΖΔ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΖΕΒ**, **ΕΖΔ** δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα **ΕΒ**, **ΖΔ** ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** μέρη συμπεσοῦνται.

ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ **Η**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΗ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΕ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΕΓ**· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ **Γ**· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστιν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΕΑΓ**, **ΑΕΓ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΓΕΒ**, **ΕΒΓ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ**. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΕΒΓ**, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΒΗ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΔΗ** ὀρθή· ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ **ΔΓΕ**· ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΗ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΔΗΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΒΗ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΔ** πλευρᾷ τῇ **ΗΔ** ἐστιν ἴση.

πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ **ΕΗΖ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ **Ζ**· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ **Γ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΕΗ** ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΗΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΕΗ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΗΖ** πλευρᾷ τῇ **ΕΖ** ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** τῇ **ΓΑ**], ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΓ** τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΕΓ**, **ΓΑ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΕΓ**, **ΓΑ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΑ** τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνου.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΗ** τῇ **ΕΖ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΗ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΕ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΗΖ**, **ΖΕ** διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΖ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΗΖ**, **ΖΕ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΗ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΗ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΖ**. ἴση δὲ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΓΔ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΗ** τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΑ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΗ** τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.

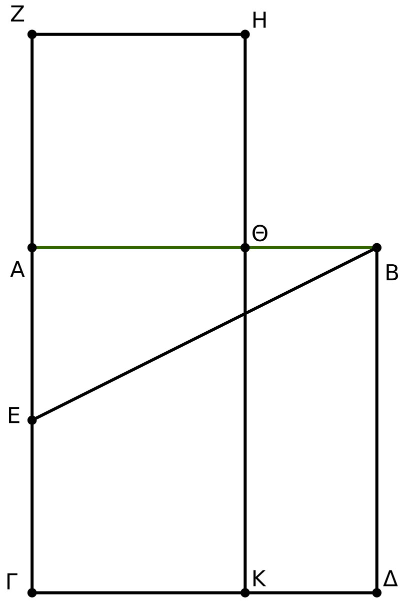
τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΗ** τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΗ** τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΗ** διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ**. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΗ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ** [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ **ΔΗ** τῇ **ΔΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΔ** τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ τὴν **ΑΒ** τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΒΔΓ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΑΓ** δίχα κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΕ**, καὶ διήχθω ἡ **ΓΑ** ἐπὶ τὸ **Ζ**, καὶ κείσθω τῇ **ΒΕ** ἴση ἡ **ΕΖ**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΑΖ** τετράγωνον τὸ **ΖΘ**, καὶ διήχθω ἡ **ΗΘ** ἐπὶ τὸ **Κ**· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒ** τέτμηται κατὰ τὸ **Θ**, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΘ** τετραγώνῳ[1].

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** τέτμηται δίχα κατὰ τὸ **Ε**, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ **ΖΑ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΕΒ**.

ἀλλὰ τῷ ἀπὸ **ΕΒ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΕ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Α** γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΕ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετραγώνῳ.

καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΑ** τὸ **ΖΚ**· ἴση γὰρ ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΗ**· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τὸ **ΑΔ**· τὸ ἄρα **ΖΚ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΑΔ**. κοινὸν ἀρῃρήσθω τὸ **ΑΚ**· λοιπὸν ἄρα τὸ **ΖΘ** τῷ **ΘΔ** ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν **ΘΔ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ**· ἴση γὰρ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΒΔ**· τὸ δὲ **ΖΘ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΘ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΘΑ** τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ** τέτμηται κατὰ τὸ **Θ** ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΘ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς **ΘΑ** τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

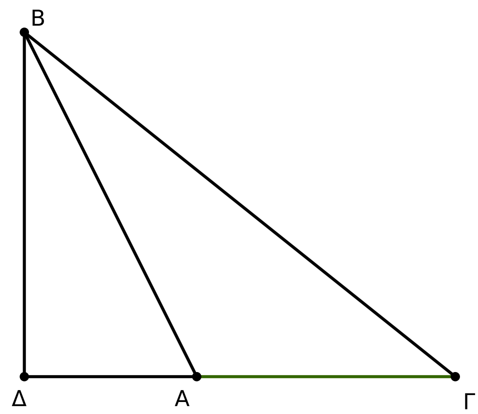
---

[1] Γεωμετρική κατασκευή της χρυσής τομής : $\varphi = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Theta}} = \frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta B}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ιβ′.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου ἐπὶ τὴν **ΓΑ** ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ **ΒΔ**. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΓΔ** τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Α** σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΔ**, **ΔΒ** ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ**, **ΔΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ].

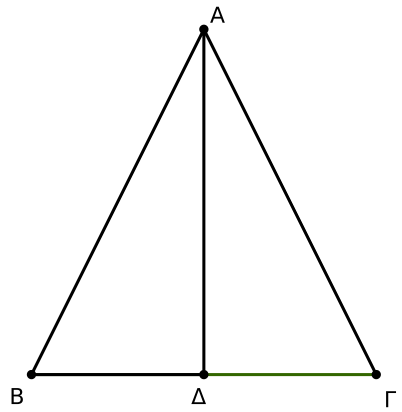
ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **ΓΔ**, **ΔΒ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ προς τῷ **Δ** γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΒ** τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΒ** τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΑ**, **ΑΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ´.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ **Β** γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου ἐπὶ τὴν **ΒΓ** κάθετος ἡ **ΑΔ**· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΑ** τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ **ΓΒ** τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ **Δ**, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΓ** τετραγώνῳ.

κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΑ** τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ**, **ΔΑ** τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** τετραγώνιος.

ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **ΒΔ**, **ΔΑ** ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Δ** γωνίᾳ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΑ** ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς **ΑΓ** καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ**· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΑ** τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν **ΓΒ**, **ΒΔ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

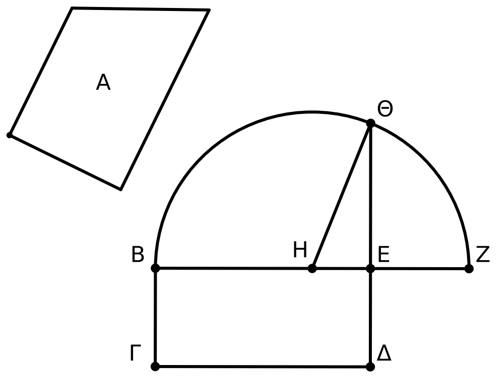
Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ **Α**· δεῖ δὴ τῷ **Α** εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γὰρ τῷ **Α** ἐυθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ **ΒΔ**·



εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΕΔ**, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ **Α** εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ **ΒΔ**·

εἰ δὲ οὔ, μία τῶν **ΒΕ**, **ΕΔ** μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ **ΒΕ**, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ **Ζ**, καὶ κείσθω τῇ **ΕΔ** ἴση ἡ **ΕΖ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΒΖ** δίχα κατὰ τὸ **Η**, καὶ κέντρῳ τῷ **Η**, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **ΗΒ**, **ΗΖ** ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ **ΒΘΖ**, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ **ΔΕ** ἐπὶ τὸ **Θ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΗΘ**.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ **ΒΖ** τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ **Η**, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ **Ε**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΗΖ** τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ **ΗΖ** τῇ **ΗΘ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΗΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΗΘ**.

τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΗΘ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΘΕ**, **ΕΗ** τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ** μετὰ τοῦ ἀπὸ **ΗΕ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΘΕ**, **ΕΗ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΕ** τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ** περιεχόμενον ὄρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΘ** τετραγώνῳ.

ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ** τὸ **ΒΔ** ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΔ**· τὸ ἄρα **ΒΔ** παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΘΕ** τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ **ΒΔ** τῷ **Α** εὐθυγράμμῳ. καὶ τὸ **Α** ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΘ** ἀναγραφησομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **Α** ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΘ** ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 3

Ὅροι

α′. Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β′. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

γ′. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ′. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν. ε′. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ᾽ ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ′. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ′. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η′. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ′. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ᾽ ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι′. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν περιφερείας.

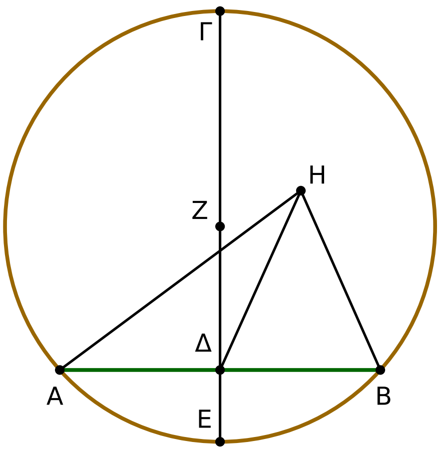
ια′. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

α′.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**· δεῖ δὴ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Δ** σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΔΓ** καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ **Ε**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΓΕ** δίχα κατὰ τὸ **Ζ**· λέγω, ὅτι τὸ **Ζ** κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** [κύκλου].



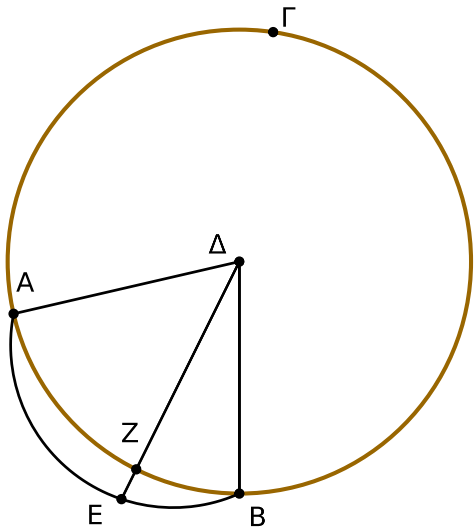
Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ **Η**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΗΑ**, **ΗΔ**, **ΗΒ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΔΗ**, δύο δὴ αἱ **ΑΔ**, **ΔΗ** δύο ταῖς **ΗΔ**, **ΔΒ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ **ΗΑ** βάσει τῇ **ΗΒ** ἐστιν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΔΗ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΗΔΒ** ἴση ἐστίν.

ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΗΔΒ**. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΔΒ** ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΔΒ** τῇ ὑπὸ **ΗΔΒ**, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ **Η** κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι πλὴν τοῦ **Ζ**.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. — ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ **Α**, **Β**· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ **Α** ἐπὶ τὸ **Β** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ **ΑΕΒ**, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, καὶ ἔστω τὸ **Δ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΔΑ**, **ΔΒ**, καὶ διήχθω ἡ **ΔΖΕ**.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΔΒ**, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΑΕ** τῇ ὑπὸ **ΔΒΕ**· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΔΑΕ** μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ **ΑΕΒ**, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΕΒ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΔΑΕ**.

ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΔΑΕ** τῇ ὑπὸ **ΔΒΕ**· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΕΒ** τῆς ὑπὸ **ΔΒΕ**. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ **ΔΒ** τῆς **ΔΕ**. ἴση δὲ ἡ **ΔΒ** τῇ **ΔΖ**. μείζων ἄρα ἡ **ΔΖ** τῆς **ΔΕ** ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

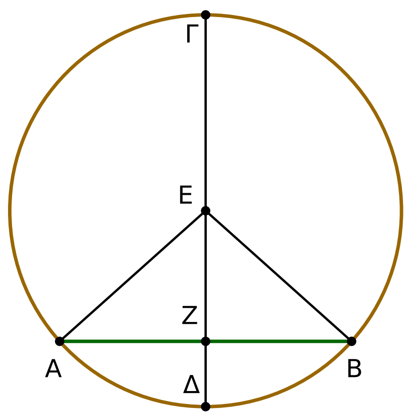
οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ **Α** ἐπὶ τὸ **Β** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΓΔ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΒ** δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ **Ζ** σημεῖον· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, καὶ ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΑ**, **ΕΒ**. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΖΕ**, δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσίν]· καὶ βάσις ἡ **ΕΑ** βάσει τῇ **ΕΒ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΖΕ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΖΕ** ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ **ΑΖΕ**, **ΒΖΕ** ὀρθή ἐστιν. ἡ **ΓΔ** ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν **ΑΒ** μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Ἀλλὰ δὴ ἡ **ΓΔ** τὴν **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**.

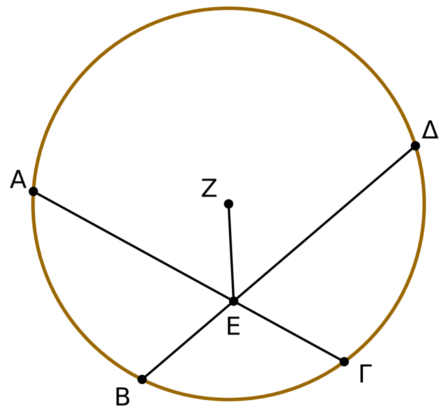
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΑ** τῇ **ΕΒ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΑΖ** τῇ ὑπὸ **ΕΒΖ**. ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΑΖΕ** ὀρθῇ τῇ ὑπὸ **ΒΖΕ** ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι **ΕΑΖ**, **ΕΖΒ** τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΕΖ** ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δʹ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ δὶα τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε** μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν **ΑΕ** τῇ **ΕΓ**, τὴν δὲ **ΒΕ** τῇ **ΕΔ**· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΕ**.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΖΕ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΓ** δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΕΑ**·

πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ **ΖΕ** εὐθεῖάν τινα τὴν **ΒΔ** δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΕΒ**.

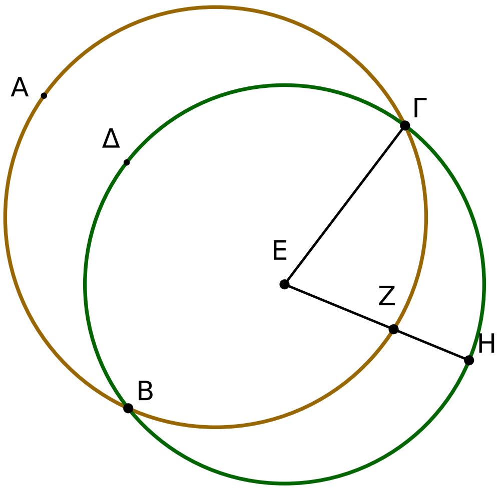
ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΕΑ** ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΕΑ** τῇ ὑπὸ **ΖΕΒ** ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ δὶα τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε´.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΓΔΗ** τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ **Β**, **Γ** σημεῖα. λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



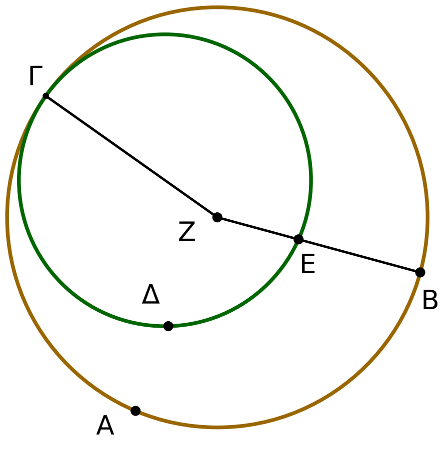
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΕΓ**, καὶ διήχθω ἡ **ΕΖΗ**, ὡς ἔτυχεν. καὶ ἐπεὶ τὸ **Ε** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** τῇ **ΕΖ**.

πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Ε** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΔΗ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** τῇ **ΕΗ**· ἐδείχθη δὲ ἡ **ΕΓ** καὶ τῇ **ΕΖ** ἴση· καὶ ἡ **ΕΖ** ἄρα τῇ **ΕΗ** ἐστιν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ **Ε** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν **ΑΒΓ**, **ΓΔΗ** κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ´.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Δύο γὰρ κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΓΔΕ** ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον· λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΓ**, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ **ΖΕΒ**. Ἐπεὶ οὖν τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ**.

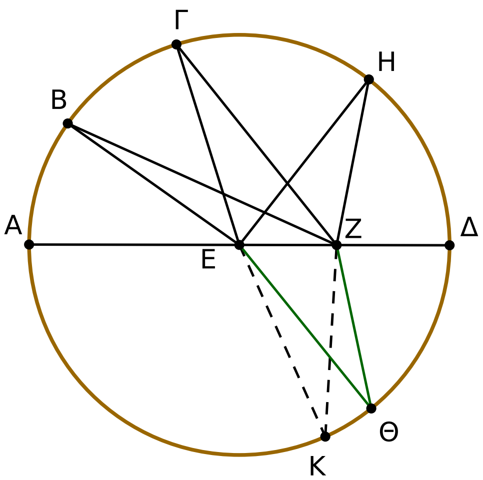
πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΓΔΕ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΕ**. ἐδείχθη δὲ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ** ἴση· καὶ ἡ **ΖΕ** ἄρα τῇ **ΖΒ** ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν **ΑΒΓ**, **ΓΔΕ** κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς δὶα τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ **ΑΔ**, καὶ ἐπὶ τῆς **ΑΔ** εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ **Ζ**, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΗ**· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ **ΖΑ**, ἐλαχίστη δὲ ἡ **ΖΔ**, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν **ΖΒ** τῆς **ΖΓ** μείζων, ἡ δὲ **ΖΓ** τῆς **ΖΗ**.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΕ**, **ΓΕ**, **ΗΕ**. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα **ΕΒ**, **ΕΖ** τῆς **ΒΖ** μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ **ΑΕ** τῇ **ΒΕ** [αἱ ἄρα **ΒΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσὶ τῇ **ΑΖ**]· μείζων ἄρα ἡ **ΑΖ** τῆς **ΒΖ**.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΓΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΖΕ**, δύο δὴ αἱ **ΒΕ**, **ΕΖ** δυσὶ ταῖς **ΓΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΕΖ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΓΕΖ** μείζων· βάσις ἄρα ἡ **ΒΖ** βάσεως τῆς **ΓΖ** μείζων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΓΖ** τῆς **ΖΗ** μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ **ΗΖ**, **ΖΕ** τῆς **ΕΗ** μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ **ΕΗ** τῇ **ΕΔ**, αἱ ἄρα **ΗΖ**, **ΖΕ** τῆς **ΕΔ** μείζονές εἰσιν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ **ΕΖ**· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΗΖ** λοιπῆς τῆς **ΖΔ** μείζων ἐστίν. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ **ΖΑ**, ἐλαχίστη δὲ ἡ **ΖΔ**, μείζων δὲ ἡ μὲν **ΖΒ** τῆς **ΖΓ**, ἡ δὲ **ΖΓ** τῆς **ΖΗ**.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς **ΖΔ** ἐλαχίστης.

συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ **ΕΖ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Ε** τῇ ὑπὸ **ΗΕΖ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΖΕΘ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΘ**. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ

ΗΕ τῇ **ΕΘ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΕΖ**, δύο δὴ αἱ **ΗΕ**, **ΕΖ** δυσὶ ταῖς **ΘΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΘΕΖ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΖΗ** βάσει τῇ **ΖΘ** ἴση ἐστίν.

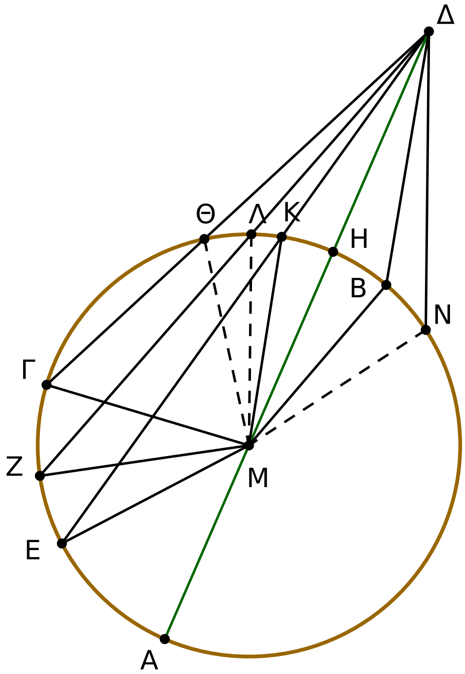
λέγω δή, ὅτι τῇ **ΖΗ** ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ **ΖΚ**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΖΚ** τῇ **ΖΗ** ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ **ΖΘ** τῇ **ΖΗ** [ἴση ἐστίν], καὶ ἡ **ΖΚ** ἄρα τῇ **ΖΘ** ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ **ΗΖ**· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς δὶα τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ τοῦ **ΑΒΓ** εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ **Δ**, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ **ΔΑ**, **ΔΕ**, **ΔΖ**, **ΔΓ**, ἔστω δὲ ἡ **ΔΑ** διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν **ΑΕΖΓ** κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΔΑ**, μείζων δὲ ἡ μὲν **ΔΕ** τῆς **ΔΖ** ἡ δὲ **ΔΖ** τῆς **ΔΓ**, τῶν δὲ πρὸς τὴν **ΘΛΚΗ** κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ **ΔΗ** ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς **ΑΗ**, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς **ΔΗ** ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν **ΔΚ** τῆς **ΔΛ**, ἡ δὲ **ΔΛ** τῆς **ΔΘ**.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου καὶ ἔστω τὸ **Μ**· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΜΕ**, **ΜΖ**, **ΜΓ**, **ΜΚ**, **ΜΛ**, **ΜΘ**.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΜ** τῇ **ΕΜ**, κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΜΔ**· ἡ ἄρα **ΑΔ** ἴση ἐστὶ ταῖς **ΕΜ**, **ΜΔ**. ἀλλ' αἱ **ΕΜ**, **ΜΔ** τῆς **ΕΔ** μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ **ΑΔ** ἄρα τῆς **ΕΔ** μείζων ἐστίν.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΜΕ** τῇ **ΜΖ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΜΔ**, αἱ **ΕΜ**, **ΜΔ** ἄρα ταῖς **ΖΜ**, **ΜΔ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΜΔ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΖΜΔ** μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ **ΕΔ** βάσεως τῆς **ΖΔ** μείζων ἐστίν·

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΖΔ** τῆς **ΓΔ** μείζων ἐστίν· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ **ΔΑ**, μείζων δὲ ἡ μὲν **ΔΕ** τῆς **ΔΖ**, ἡ δὲ **ΔΖ** τῆς **ΔΓ**. Καὶ ἐπεὶ αἱ **ΜΚ**, **ΚΔ** τῆς **ΜΔ** μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ **ΜΗ** τῇ **ΜΚ**, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΚΔ** λοιπῆς τῆς **ΗΔ** μείζων ἐστίν· ὥστε ἡ **ΗΔ** τῆς **ΚΔ** ἐλάττων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΜΛΔ** ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς **ΜΔ** δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ **ΜΚ**, **ΚΔ**, αἱ ἄρα **ΜΚ**, **ΚΔ** τῶν **ΜΛ**, **ΛΔ** ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ ἡ **ΜΚ** τῇ **ΜΛ**· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΔΚ** λοιπῆς τῆς **ΔΛ** ἐλάττων ἐστίν.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΔΛ** τῆς **ΔΘ** ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ **ΔΗ**, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν **ΔΚ** τῆς **ΔΛ** ἡ δὲ **ΔΛ** τῆς **ΔΘ**.

Λέγω, ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς **ΔΗ** ἐλαχίστης· συνεστάτω πρὸς τῇ **ΜΔ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Μ** τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΜΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΒ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΜΚ** τῇ **ΜΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΜΔ**, δύο δὴ αἱ **ΚΜ**, **ΜΔ** δύο ταῖς **ΒΜ**, **ΜΔ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΚΜΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΜΔ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΔΚ** βάσει τῇ **ΔΒ** ἴση ἐστίν.

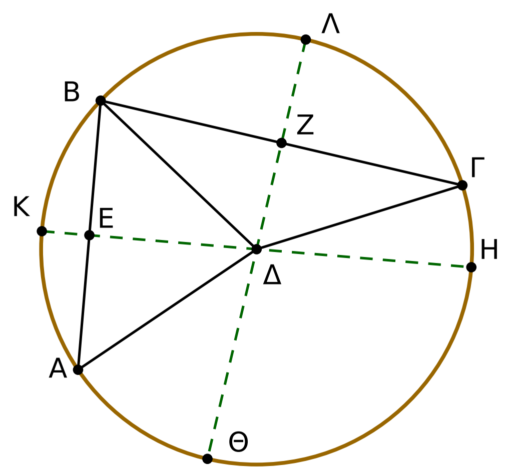
λέγω [δή], ὅτι τῇ **ΔΚ** εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ **ΔΝ**. ἐπεὶ οὖν ἡ **ΔΚ** τῇ **ΔΝ** ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ **ΔΚ** τῇ **ΔΒ** ἐστιν ἴση, καὶ ἡ **ΔΒ** ἄρα τῇ **ΔΝ** ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς **ΔΗ** ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον [ἐστιν] ἴση· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς **ΔΗ** ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπο δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** πρὸς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ **ΔΑ**, **ΔΒ**, **ΔΓ**· λέγω, ὅτι τὸ **Δ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ **Ε**, **Ζ** σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΕΔ**, **ΖΔ** διήχθωσαν ἐπὶ τὰ **Η**, **Κ**, **Θ**, **Λ** σημεῖα.

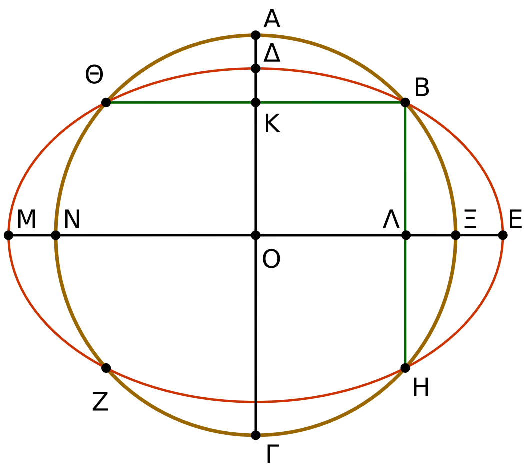
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΕΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΕ**, **ΕΔ** δύο ταῖς **ΒΕ**, **ΕΔ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΔΑ** βάσει τῇ **ΔΒ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΕΔ** ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΕΔ**, **ΒΕΔ** γωνιῶν· ἡ **ΗΚ** ἄρα τὴν **ΑΒ** τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς **ΗΚ** ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς **ΘΛ** ἐστι τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ **ΗΚ**, **ΘΛ** εὐθεῖαι ἢ τὸ **Δ** σημεῖον· τὸ **Δ** ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιʹ.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ **ΑΒΓ** κύκλον τὸν **ΔΕΖ** τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ **Β**, **Η**, **Ζ**, **Θ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΒΘ**, **ΒΗ** δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ **Κ**, **Λ** σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν **Κ**, **Λ** ταῖς **ΒΘ**, **ΒΗ** πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ **ΚΓ**, **ΛΜ** διήχθωσαν ἐπὶ τὰ **Α**, **Ε** σημεῖα.



Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ **ΑΒΓ** εὐθεῖά τις ἡ **ΑΓ** εὐθεῖάν τινα τὴν **ΒΘ** δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς **ΑΓ** ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.

πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ **ΑΒΓ** εὐθεῖά τις ἡ **ΝΞ** εὐθεῖάν τινα τὴν **ΒΗ** δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς **ΝΞ** ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς **ΑΓ**, καὶ κατ᾿ οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ **ΑΓ**, **ΝΞ** εὐθεῖαι ἢ κατὰ τὸ **Ο**· τὸ **Ο** ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ **ΔΕΖ** κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ **Ο**·

δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τῶν **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ **Ο**· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

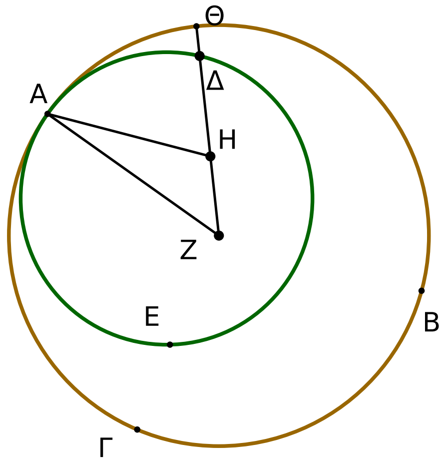
ιαʹ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΑΔΕ** ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ **Α** σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν **ΑΒΓ** κύκλου κέντρον τὸ **Ζ**, τοῦ δὲ **ΑΔΕ** τὸ **Η**·

λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ **Η** ἐπὶ τὸ **Ζ** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ **Α** πεσεῖται. Μὴ γάρ, ἀλλ᾿ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ **ΖΗΘ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΖ**, **ΑΗ**.

Ἐπεὶ οὖν αἱ **ΑΗ**, **ΗΖ** τῆς **ΖΑ**, τουτέστι τῆς **ΖΘ**, μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ **ΖΗ**· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΑΗ** λοιπῆς τῆς **ΗΘ** μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ **ΑΗ** τῇ **ΗΔ**· καὶ ἡ **ΗΔ** ἄρα τῆς **ΗΘ** μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὸ **Η** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται· κατὰ τὸ **Α** ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.

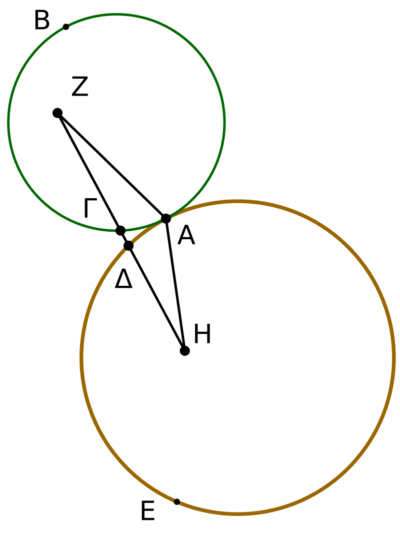


Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, [καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα], ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐκβαλλομένη] ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβʹ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΑΔΕ** ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ **Α** σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν **ΑΒΓ** κέντρον τὸ **Ζ**, τοῦ δὲ **ΑΔΕ** τὸ **Η**· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὸ **Η** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ **Α** ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ **ΖΓΔΗ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΖ**, **ΑΗ**. Ἐπεὶ οὖν τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΑ** τῇ **ΖΓ**. πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Η** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΔΕ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΗΑ** τῇ **ΗΔ**.

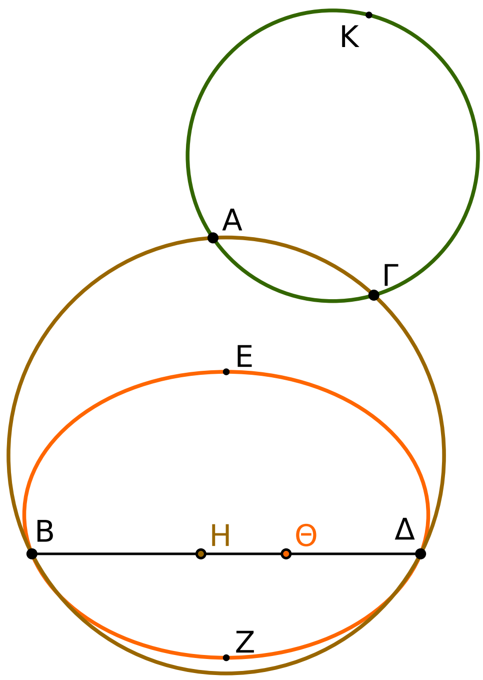
ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΖΑ** τῇ **ΖΓ** ἴση· αἱ ἄρα **ΖΑ**, **ΑΗ** ταῖς **ΖΓ**, **ΗΔ** ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ **ΖΗ** τῶν **ΖΑ**, **ΑΗ** μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὸ **Η** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ **Α** ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι᾽ αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη [εὐθεῖα] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγʹ.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ᾿ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλου τοῦ **ΕΒΖΔ** ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ **Δ**, **Β**. Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν **ΑΒΓΔ** κύκλου κέντρον τὸ **Η**, τοῦ δὲ **ΕΒΖΔ** τὸ **Θ**.



Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ **Η** ἐπὶ τὸ **Θ** ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὰ **Β**, **Δ** πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ **ΒΗΘΔ**. καὶ ἐπεὶ τὸ **Η** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΗ** τῇ **ΗΔ**· μείζων ἄρα ἡ **ΒΗ** τῆς **ΘΔ**· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ **ΒΘ** τῆς **ΘΔ**.

πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Θ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΕΒΖΔ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΘ** τῇ **ΘΔ**· ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ **ΑΓΚ** κύκλου τοῦ **ΑΒΓΔ** ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ **Α**, **Γ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΓ**.

Ἔπεὶ οὖν κύκλων τῶν **ΑΒΓΔ**, **ΑΓΚ** εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ **Α**, **Γ**, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· ἀλλὰ τοῦ μὲν **ΑΒΓΔ** ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ **ΑΓΚ** ἐκτός· ὅπερ ἄτοπον·

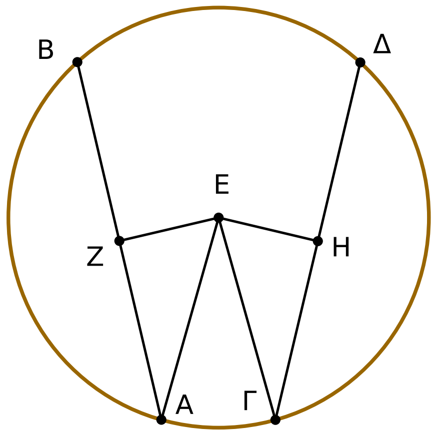
οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ [καθ᾿] ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**· λέγω, ὅτι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντον τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου καὶ ἔστω τὸ **Ε**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ε** ἐπὶ τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** κάθετοι ἤχθωσαν αἱ **ΕΖ**, **ΕΗ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΕ**, **ΕΓ**.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις δὶα τοῦ κέντρου ἡ **ΕΖ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**· διπλῆ ἄρα ἡ **ΑΒ** τῆς **ΑΖ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΓΔ** τῆς **ΓΗ** ἐστι διπλῆ· καί ἐστιν ἴση ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΗ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΓ**, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΓ**. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΖ**, **ΕΖ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Ζ** γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΕΓ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΓ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Η** γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΖ**, **ΖΕ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΓΗ**, **ΗΕ**, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΗ**· ἴση γάρ ἐστιν ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΗ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΗ**.

ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾿ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα **ΑΒ**, **ΓΔ** ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἀλλὰ δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΗ**. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν **ΑΒ** τῆς **ΑΖ**, ἡ δὲ **ΓΔ** τῆς **ΓΗ**· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΓΕ**, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΕ**· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΕ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΖ**, **ΖΑ**, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΓΕ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΓ**. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΕΖ**, **ΖΑ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΓ**· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** ἐστιν ἴσον· ἴση γὰρ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΗ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΗ**· ἴση ἄρα ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΗ**· καί ἐστι τῆς μὲν **ΑΖ** διπλῆ ἡ **ΑΒ**, τῆς δὲ

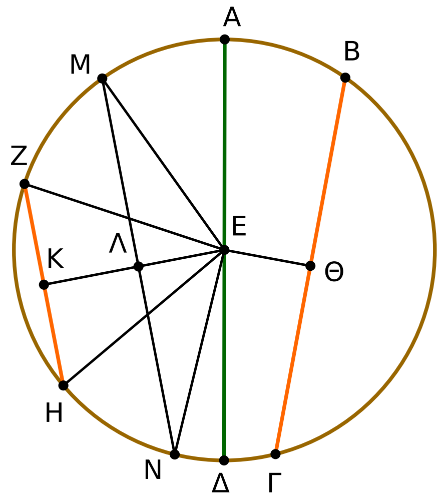
ΓΗ διπλῆ ἡ **ΓΔ**· ἴση ἄρα ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ **ΑΔ**, κέντρον δὲ τὸ **Ε**, καὶ ἔγγιον μὲν τῆς **ΑΔ** διαμέτρου ἔστω ἡ **ΒΓ**, ἀπώτερον δὲ ἡ **ΖΗ**· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ **ΑΔ**, μείζων δὲ ἡ **ΒΓ** τῆς **ΖΗ**.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ **Ε** κέντρου ἐπὶ τὰς **ΒΓ**, **ΖΗ** κάθετοι αἱ **ΕΘ**, **ΕΚ**. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ **ΒΓ**, ἀπώτερον δὲ ἡ **ΖΗ**, μείζων ἄρα ἡ **ΕΚ** τῆς **ΕΘ**. κείσθω τῇ **ΕΘ** ἴση ἡ **ΕΛ**, καὶ διὰ τοῦ **Λ** τῇ **ΕΚ** πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ **ΛΜ** διήχθω ἐπὶ τὸ **Ν**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΜΕ**, **ΕΝ**, **ΖΕ**, **ΕΗ**.

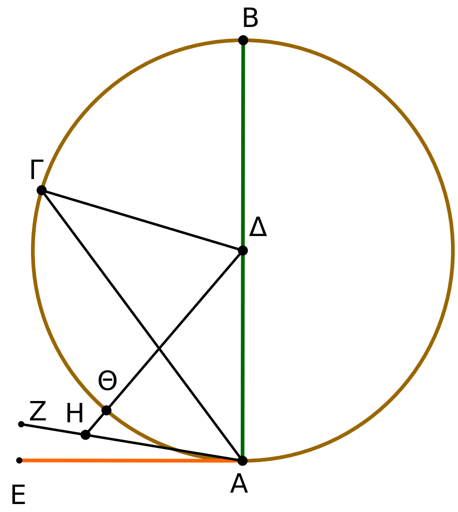
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΘ** τῇ **ΕΛ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ **ΒΓ** τῇ **ΜΝ**. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΕ** τῇ **ΕΜ**, ἡ δὲ **ΕΔ** τῇ **ΕΝ**, ἡ ἄρα **ΑΔ** ταῖς **ΜΕ**, **ΕΝ** ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ αἱ μὲν **ΜΕ**, **ΕΝ** τῆς **ΜΝ** μείζονές εἰσιν [καὶ ἡ **ΑΔ** τῆς **ΜΝ** μείζων ἐστίν], ἴση δὲ ἡ **ΜΝ** τῇ **ΒΓ**· ἡ ΑΔ ἄρα τῆς **ΒΓ** μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΜΕ**, **ΕΝ** δύο ταῖς **ΖΕ**, **ΕΗ** ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΜΕΝ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΖΕΗ** μείζων [ἐστίν], βάσις ἄρα ἡ **ΜΝ** βάσεως τῆς **ΖΗ** μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ **ΜΝ** τῇ **ΒΓ** ἐδείχθη ἴση [καὶ ἡ **ΒΓ** τῆς **ΖΗ** μείζων ἐστίν]. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ **ΑΔ** διάμετρος, μείζων δὲ ἡ **ΒΓ** τῆς **ΖΗ**.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ΄.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ** περὶ κέντρον τὸ **Δ** καὶ διάμετρον τὴν **ΑΒ**· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ **Α** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ **ΓΑ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΓ**.



Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΔΓ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΑΓΔ**. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ**· τριγώνου δὴ τοῦ **ΑΓΔ** αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΔΑΓ**, **ΑΓΔ** δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τῇ **ΒΑ** πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ **ΑΕ**· λέγω δή, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε **ΑΕ** εὐθείας καὶ τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ **ΖΑ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου ἐπὶ τὴν **ΖΑ** κάθετος ἡ **ΔΗ**. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΗΔ**, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ **ΔΑΗ**, μείζων ἄρα ἡ **ΑΔ** τῆς **ΔΗ**. ἴση δὲ ἡ **ΔΑ** τῇ **ΔΘ**· μείζων ἄρα ἡ **ΔΘ** τῆς **ΔΗ**, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς **ΒΑ** εὐθείας καὶ τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΕ** εὐθείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς **ΒΑ** εὐθείας καὶ τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας καὶ τὴς **ΑΕ** εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε **ΓΘΑ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΕ** εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς **ΒΑ** εὐθείας καὶ τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΕ** εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς **ΒΑ** εὐθείας καὶ τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς **ΓΘΑ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΕ** εὐθείας.

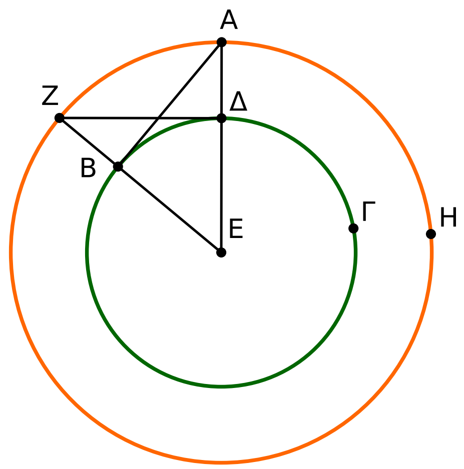
Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ **Α**, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΒΓΔ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τοῦ **ΒΓΔ** κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΕ**, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Ε** διαστήματι δὲ τῷ **ΕΑ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΑΖΗ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** τῇ **ΕΑ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΔΖ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΖ**, **ΑΒ**· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τοῦ **ΒΓΔ** κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ **ΑΒ**.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ **Ε** κέντρον ἐστὶ τῶν **ΒΓΔ**, **ΑΖΗ** κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν **ΕΑ** τῇ **ΕΖ**, ἡ δὲ **ΕΔ** τῇ **ΕΒ**· δύο δὴ αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ** δύο ταῖς **ΖΕ**, **ΕΔ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ **Ε**· βάσις ἄρα ἡ **ΔΖ** βάσει τῇ **ΑΒ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον τῷ **ΕΒΑ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΔΖ** τῇ ὑπὸ **ΕΒΑ**. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΕΔΖ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΒΑ**. καί ἐστιν ἡ **ΕΒ** ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ **ΑΒ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΒΓΔ** κύκλου.

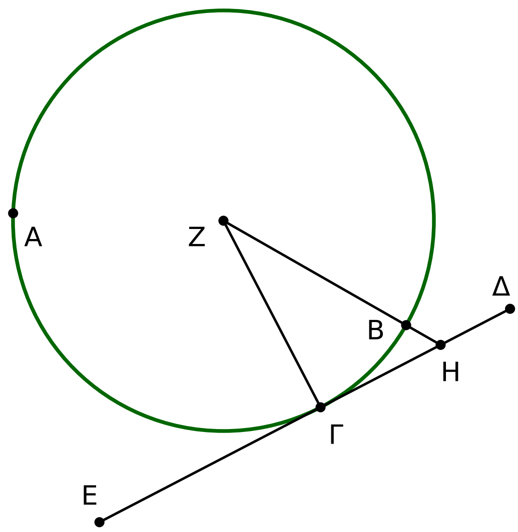
Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ **Α** τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ **ΒΓΔ** ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ **ΑΒ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιη΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ **ΔΕ** κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου τὸ **Ζ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὸ **Γ** ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΓ**· λέγω, ὅτι ἡ **ΖΓ** κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὴν **ΔΕ** κάθετος ἡ **ΖΗ**.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ **ΖΗΓ** γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΓΗ**· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ **ΖΓ** τῆς **ΖΗ**· ἴση δὲ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΖΒ** τῆς **ΖΗ** ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ **ΖΗ** κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς **ΖΓ**· ἡ **ΖΓ** ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**.

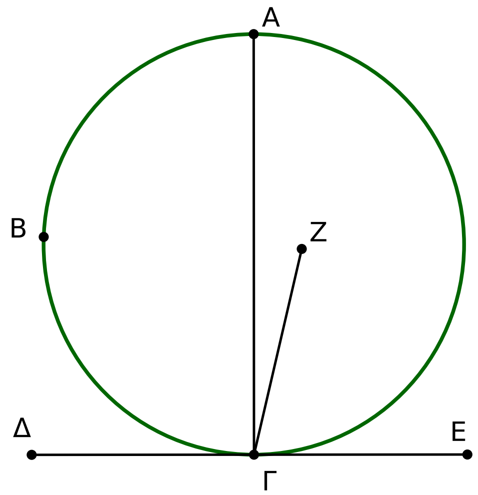
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ **ΔΕ** κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **ΔΕ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΓΑ**· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς **ΑΓ** ἐστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ **Z**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΓZ**. Ἐπεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ **ΑΒΓ** ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ **ΔΕ**, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ **ZΓ**, ἡ **ZΓ** ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΔΕ**· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ZΓΕ**. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ZΓΕ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΕ** ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ **Z** κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.

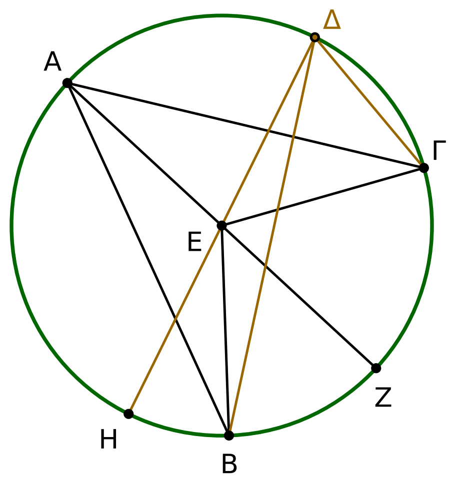


ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς **ΑΓ**.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.



Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ **ΒΕΓ**, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ**, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν **ΒΓ**· λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΕΓ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ**.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ **ΑΕ** διήχθω ἐπὶ τὸ **Z**. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΑ** τῇ **ΕΒ**, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΑΒ** τῇ ὑπὸ **ΕΒΑ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΕΑΒ**, **ΕΒΑ** γωνίαι τῆς ὑπὸ **ΕΑΒ** διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΕZ** ταῖς ὑπὸ **ΕΑΒ**, **ΕΒΑ**· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΕZ** ἄρα τῆς ὑπὸ **ΕΑΒ** ἐστι διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ZΕΓ** τῆς ὑπὸ **ΕΑΓ** ἐστι διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΕΓ** ὅλης τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ** ἐστι διπλῆ.

Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΔΓ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ **ΔΕ** ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ **Η**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΗΕΓ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΔΓ**, ὧν ἡ ὑπὸ **ΗΕΒ** διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ **ΕΔΒ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΕΓ** διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ **ΒΔΓ**.

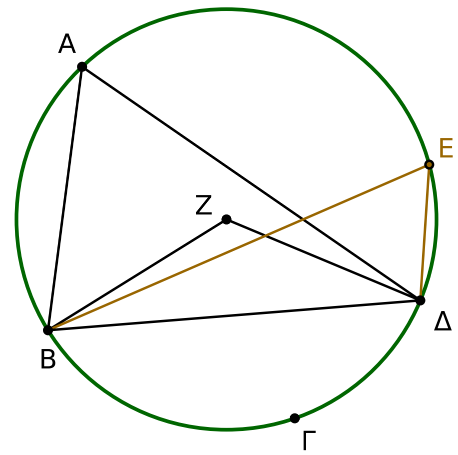
Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα′.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ **ΒΑΕΔ** γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΒΕΔ**· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΒΕΔ** γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΖ**, **ΖΔ**.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΔ** γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΑΔ** πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν **ΒΓΔ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΒΖΔ** γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΒΑΔ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ **ΒΖΔ** καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστι διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** τῇ ὑπὸ **ΒΕΔ**.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

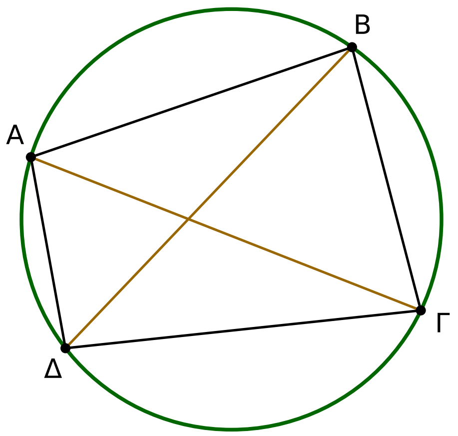
κβ′.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ **ΑΒΓΔ**· λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**. Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ **ΑΒΓ** ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΓΑΒ**, **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ **ΓΑΒ** τῇ ὑπὸ **ΒΔΓ**· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ **ΒΑΔΓ**· ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΔΒ**· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ **ΑΔΓΒ**· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ** ταῖς ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΓΒ** ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΑΓ**, **ΑΓΒ**ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΔΓ** ἴσαι εἰσίν.



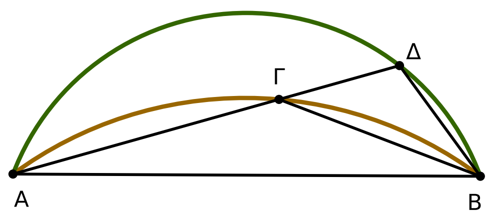
ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΑΓ**, **ΑΓΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΔΓ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΔΓΒ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγʹ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς **ΑΒ** δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ **ΑΓΒ**, **ΑΔΒ**, καὶ διήχθω ἡ **ΑΓΔ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΓΒ**, **ΔΒ**.



Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΑΓΒ** τμῆμα τῷ **ΑΔΒ** τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΔΒ** ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

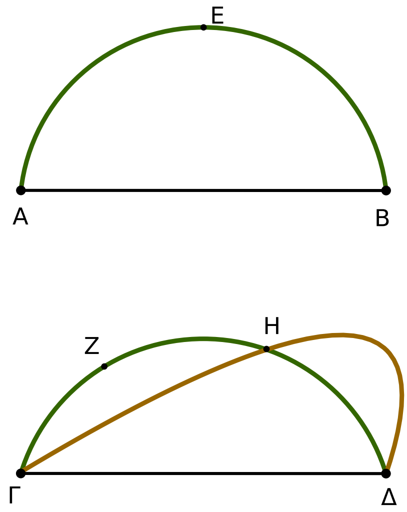
Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδʹ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ **ΑΕΒ**, **ΓΖΔ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΕΒ** τμῆμα τῷ **ΓΖΔ** τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ **ΑΕΒ** τμήματος ἐπὶ τὸ **ΓΖΔ** καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν **Α** σημείου ἐπὶ τὸ **Γ** τῆς δὲ **ΑΒ** εὐθείας ἐπὶ τὴν **ΓΔ**, ἐφαρμόσει καὶ τὸ **Β** σημεῖον ἐπὶ τὸ **Δ** σημεῖον διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**· τῆς δὲ **ΑΒ** ἐπὶ τὴν **ΓΔ** ἐφαρμοσάσης ἐφαρμόσει καὶ τὸ **ΑΕΒ** τμῆμα ἐπὶ τὸ **ΓΖΔ**.



εἰ γὰρ ἡ **ΑΒ** εὐθεῖα ἐπὶ τὴν **ΓΔ** ἐφαρμόσει, τὸ δὲ **ΑΕΒ** τμῆμα ἐπὶ τὸ **ΓΖΔ** μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ παραλλάξει, ὡς τὸ **ΓΗΔ**, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς **ΑΒ** εὐθείας ἐπὶ τὴν **ΓΔ** οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ **ΑΕΒ** τμῆμα ἐπὶ τὸ **ΓΖΔ**· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

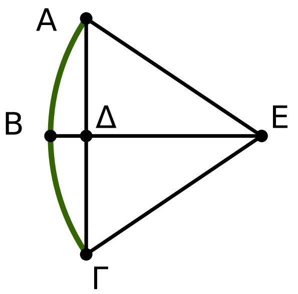
Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

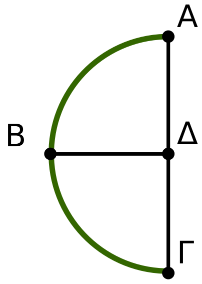
κεʹ.

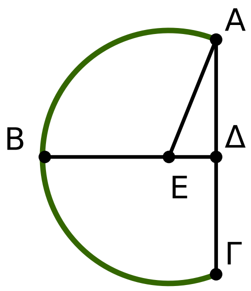
Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ **ΑΒΓ**· δεῖ δὴ τοῦ **ΑΒΓ** τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ **ΑΓ** δίχα κατὰ τὸ **Δ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου τῇ **ΑΓ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΔΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΒ**· ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ **ΒΑΔ** ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων.







Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΒΑ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ**, καὶ διήχθω ἡ **ΔΒ** ἐπὶ τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΕΓ**.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ**, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ **ΕΒ** εὐθεῖα τῇ **ΕΑ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΓ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΔΕ**, δύο δὴ αἱ **ΑΔ**, **ΔΕ** δύο ταῖς **ΓΔ**, **ΔΕ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΔΕ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΓΔΕ** ἐστιν ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ **ΑΕ** βάσει τῇ **ΓΕ** ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ **ΑΕ** τῇ **ΒΕ** ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ **ΒΕ** ἄρα τῇ **ΓΕ** ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΕΓ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ε** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΕΓ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὡς τὸ **ΑΒΓ** τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου διὰ τὸ τὸ **Ε** κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

Ὁμοίως [δὲ] κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** γωνία ἴση τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ**, τῆς **ΑΔ** ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν **ΒΔ**, **ΔΓ** αἱ τρεῖς αἱ **ΔΑ**, **ΔΒ**, **ΔΓ** ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ **Δ** κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ **ΑΒΓ** ἡμικύκλιον.

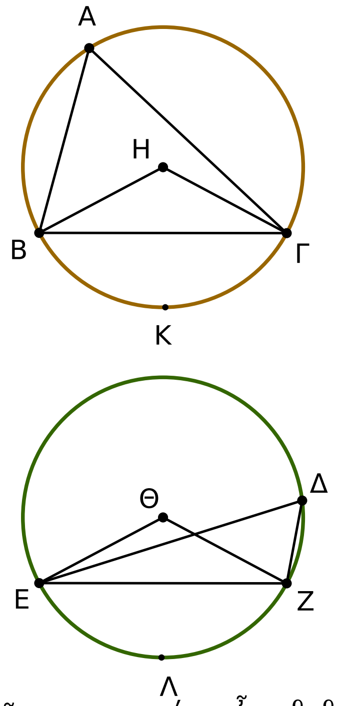
Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ **ΒΑΔ**, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ **ΒΑ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ ὑπὸ **ΑΒΔ** γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ **ΑΒΓ** τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς **ΔΒ**, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ **ΑΒΓ** τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κϛʹ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ**· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΚΓ** περιφέρεια τῇ **ΕΛΖ** περιφερείᾳ.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΓ**, **ΕΖ**. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ **ΒΗ**, **ΗΓ** δύο ταῖς **ΕΘ**, **ΘΖ** ἴσαι· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Η** γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ **Θ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ **Α** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Δ**, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΑΓ** τμῆμα τῷ **ΕΔΖ** τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ**]· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ **ΒΑΓ** τμῆμα τῷ **ΕΔΖ**. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ **ΑΒΓ** κύκλος ὅλῳ τῷ **ΔΕΖ** κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΒΚΓ** περιφέρεια τῇ **ΕΛΖ** περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.

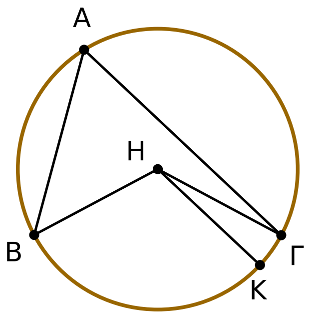
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείας ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

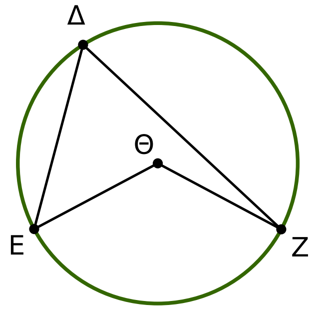
κζʹ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ** πρὸς μὲν τοῖς **Η**, **Θ** κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ**· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ** ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΒΗΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ **ΒΗΓ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΒΗ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Η** τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΗΚ**·





αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ **ΒΚ** περιφέρεια τῇ **ΕΖ** περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΒΓ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ **ΒΚ** ἄρα τῇ **ΒΓ** ἐστιν ἴση ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΘΖ**· ἴση ἄρα. καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ **ΒΗΓ** ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ **Α**, τῆς δὲ ὑπὸ **ΕΘΖ** ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ **Δ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ **Α** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Δ**.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

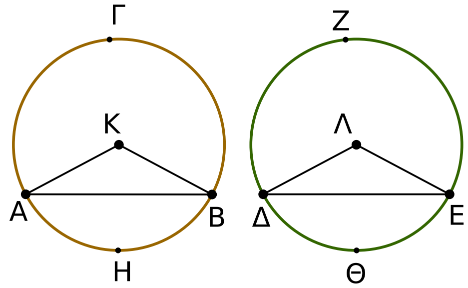
κη΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΔΕ** τὰς μὲν **ΑΓΒ**, **ΑΖΕ** περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ **ΑΗΒ**, **ΔΘΕ** ἐλάττονας·

λέγω, ὅτι ἡ μὲν **ΑΓΒ** μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ **ΔΖΕ** μείζονι περιφερείᾳ ἡ δὲ **ΑΗΒ** ἐλάττων περιφέρεια τῇ **ΔΘΕ**.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ **Κ**, **Λ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΚ**, **ΚΒ**, **ΔΛ**, **ΛΕ**. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ **ΑΚ**, **ΚΒ** δυσὶ ταῖς **ΔΛ**, **ΛΕ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΑΒ** βάσει τῇ **ΔΕ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΚΒ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΛΕ** ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ **ΑΗΒ** περιφέρεια τῇ **ΔΘΕ**. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ **ΑΒΓ** κύκλος ὅλῳ τῷ **ΔΕΖ** κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ **ΑΓΒ** περιφέρεια λοιπῇ τῇ **ΔΖΕ** περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

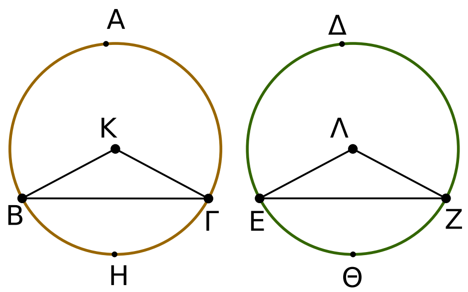


Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ′.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΓ**, **ΕΖ** εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**.



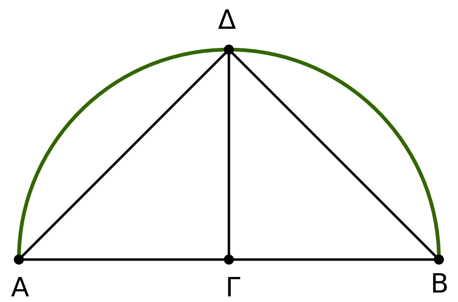
Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ **Κ**, **Λ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΚ**, **ΚΓ**, **ΕΛ**, **ΛΖ**. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΗΓ** περιφέρεια τῇ **ΕΘΖ** περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΚΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΛΖ**. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ **ΒΚ**, **ΚΓ** δυσὶ ταῖς **ΕΛ**, **ΛΖ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴση ἐστίν·

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λʹ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

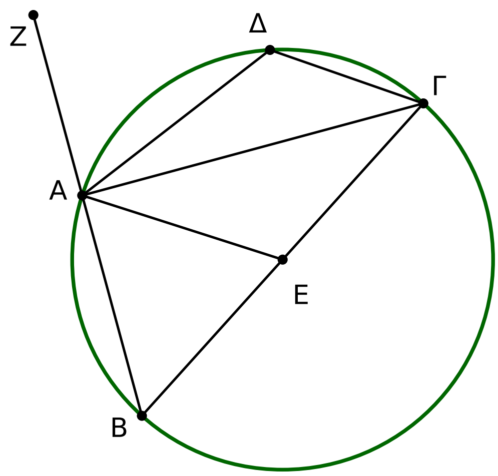
Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ **ΑΔΒ**· δεῖ δὴ τὴν **ΑΔΒ** περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. Ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Γ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΓΔ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΔΒ**.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΓΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΓ**, **ΓΔ** δυσὶ ταῖς **ΒΓ**, **ΓΔ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ **ΑΔ** βάσει τῇ **ΔΒ** ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· κάι ἐστιν ἑκατέρα τῶν **ΑΔ**, **ΔΒ** περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ **ΑΔ** περιφέρεια τῇ **ΔΒ** περιφερείᾳ. Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λαʹ.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔπι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.



Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ **ΒΓ**, κέντρον δὲ τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΔΓ**· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ **ΒΑΓ** ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ **ΑΒΓ** μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ **ΑΔΓ** ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ** μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΕ**, καὶ διήχθω ἡ **ΒΑ** ἐπὶ τὸ **Ζ**. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΕΑ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ**. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΕ** τῇ **ΕΑ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** τῇ ὑπὸ

ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** ἴση ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΑΓ** ἐκτὸς τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΑΓ**· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ **ΒΑΓ** ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** ὀρθή ἐστιν.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ **ΑΒΓ** τρίγωνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΑΓ** δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ**, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία· καί ἐστιν ἐν τῷ **ΑΒΓ** μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ**, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν [αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΔΓ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἰσίν], καί ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ** γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστιν· καί ἐστιν ἐν τῷ **ΑΔΓ** ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς **ΑΒΓ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΓ** εὐθείας μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς **ΑΔ**[**Γ**] περιφερείας καὶ τῆς **ΑΓ** εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς **ΑΒΓ** περιφερείας καὶ τῆς **ΑΓ** εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΑΖ** εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς **ΓΑ** εὐθείας καὶ τῆς **ΑΔ**[**Γ**] περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

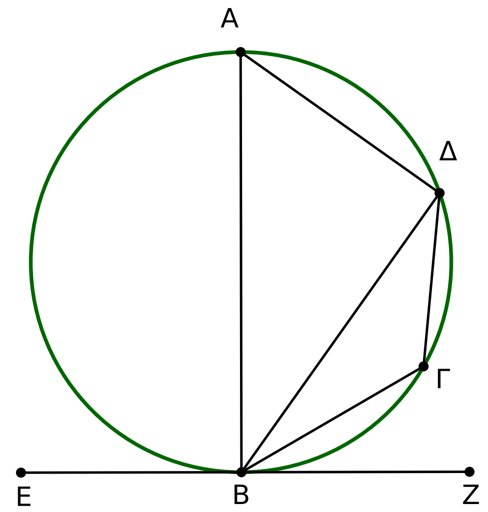
Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι [τμήματι] μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔπι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος [γωνία] μείζων [ἐστὶν] ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος [γωνία] ἐλάττων ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ′.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓΔ** ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ **ΕΖ** κατὰ τὸ **Β** σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ **ΒΔ**. λέγω, ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ **ΒΔ** μετὰ τῆς **ΕΖ** ἐφαπτομένης, ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ **ΖΒΔ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ **ΒΑΔ** τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ **ΕΒΔ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ **ΔΓΒ** τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Β** τῇ **ΕΖ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΒΑ**, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **ΒΔ** περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ **Γ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΔΓ**, **ΓΒ**.



Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ **ΑΒΓΔ** ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ **ΕΖ** κατὰ τὸ **Β**, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΒΑ**, ἐπὶ τῆς **ΒΑ** ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου.

ἡ **ΒΑ** ἄρα διάμετός ἐστι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΔΒ** γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστιν. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΑΒΔ** μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΖ** ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΖ** ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΑΒΔ**. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΒΖ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ**.

καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ**, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΔΒΖ**, **ΔΒΕ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι·

αἱ ἄρα ὑπὸ **ΔΒΖ**, **ΔΒΕ** ταῖς ὑπὸ **ΒΑΔ**, **ΒΓΔ** ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** τῇ ὑπὸ **ΔΒΖ** ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΒΕ** τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ **ΔΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΓΒ** γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

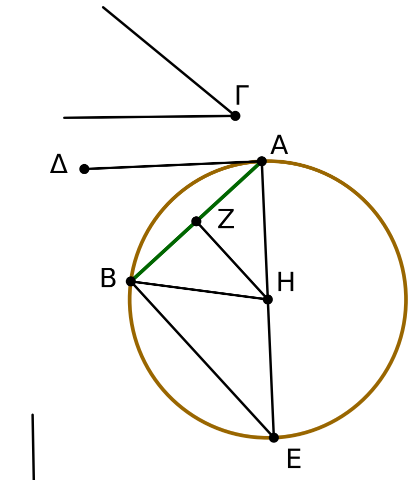
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγʹ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

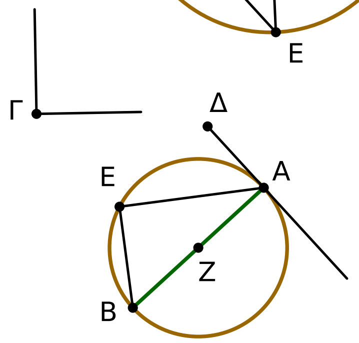
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ **Γ**· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς **ΑΒ** γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ**. Ἡ δὴ πρὸς τῷ **Γ** [γωνία] ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ **Α** σημείῳ τῇ πρὸς τῷ **Γ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**.

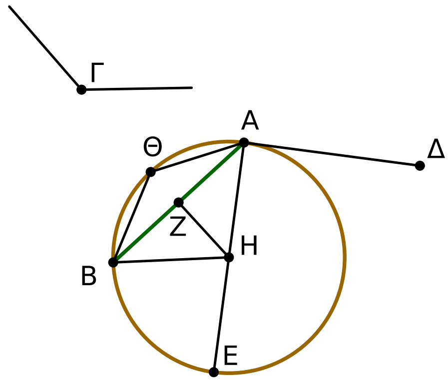
ἤχθω τῇ **ΔΑ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΑΕ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΑΒ** δίχα κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΖΗ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΗΒ**.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΖΗ**, δύο δὴ αἱ **ΑΖ**, **ΖΗ** δύο ταῖς **ΒΖ**, **ΖΗ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΖΗ** [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ **ΒΖΗ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΑΗ** βάσει τῇ **ΒΗ** ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ **Η** διαστήματι δὲ τῷ **ΗΑ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Β**. γεγράφθω καὶ ἔστω ὁ **ΑΒΕ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΕΒ**.

ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς **ΑΕ** διαμέτρου ἀπὸ τοῦ **Α** τῇ **ΑΕ** πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ **ΑΔ**, ἡ **ΑΔ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΕ** κύκλου· ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ **ΑΒΕ** ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ **ΑΔ**, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **Α** ἁφῆς εἰς τὸν **ΑΒΕ** κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΔΑΒ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΑΕΒ**. ἀλλ' ἡ ὑπὸ **ΔΑΒ** τῇ πρὸς τῷ **Γ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ **Γ** ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ **ΑΕΒ**. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς **ΑΒ** τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ **ΑΕΒ** δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΑΕΒ** ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ **Γ**.





Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ **Γ**· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ** ὀρθῇ [γωνίᾳ]. συνεστάτω [πάλιν] τῇ πρὸς τῷ **Γ** ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ **ΑΒ** δίχα κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ κέντρῳ τῷ **Ζ**, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν **ΖΑ**, **ΖΒ**, κύκλος γεγράφθω ὁ **ΑΕΒ**.

Ἐφάπτεται ἄρα ἡ **ΑΔ** εὐθεῖα τοῦ **ΑΒΕ** κύκλου διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ **Α** γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** γωνία τῇ ἐν τῷ **ΑΕΒ** τμήματι· ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** τῇ πρὸς τῷ **Γ** ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ **ΑΕΒ** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Γ**.

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς **ΑΒ** τμῆμα κύκλου τὸ **ΑΕΒ** δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ**.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ **Γ** ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ **Α** σημείῳ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ**, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ **ΑΔ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΑΕ**, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ **ΑΒ** δίχα κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΖΗ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΗΒ**.

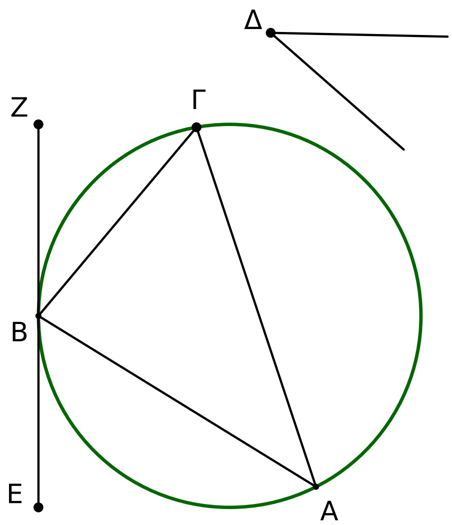
Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΖ** τῇ **ΖΒ**, καὶ κοινὴ ἡ **ΖΗ**, δύο δὴ αἱ **ΑΖ**, **ΖΗ** δύο ταῖς **ΒΖ**, **ΖΗ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΖΗ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΖΗ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΑΗ** βάσει τῇ **ΒΗ** ἴση ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ **Η** διαστήματι δὲ τῷ **ΗΑ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Β**. ἐρχέσθω ὡς ὁ **ΑΕΒ**.

καὶ ἐπεὶ τῇ **ΑΕ** διαμέτρῳ ἀπ᾽ ἄκρας πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ **ΑΔ**, ἡ **ΑΔ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΕΒ** κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **Α** ἐπαφῆς διῆκται ἡ **ΑΒ**· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΒΑΔ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ **ΑΘΒ** συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** γωνία τῇ πρὸς τῷ **Γ** ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ **ΑΘΒ** ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Γ**.

Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς **ΑΒ** γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ **ΑΘΒ** δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Γ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λδ΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ **Δ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ **Δ**.

Ἤχθω τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτομένη ἡ **ΕΖ** κατὰ τὸ **Β** σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΖΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Β** τῇ πρὸς τῷ **Δ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΖΒΓ**.

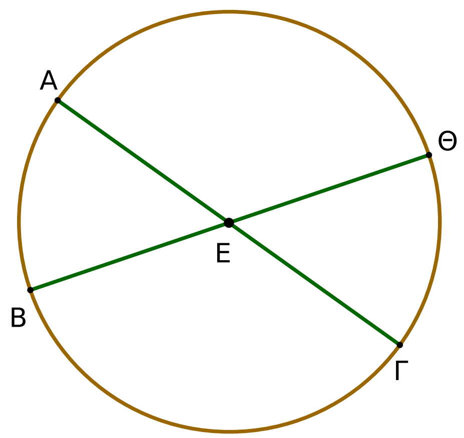
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ **ΑΒΓ** ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ **ΕΖ**, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **Β** ἐπαφῆς διῆκται ἡ **ΒΓ**, ἡ ὑπὸ **ΖΒΓ** ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ **ΒΑΓ** ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ **ΖΒΓ** τῇ πρὸς τῷ **Δ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ **ΒΑΓ** ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Δ** [γωνίᾳ].

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λε΄.

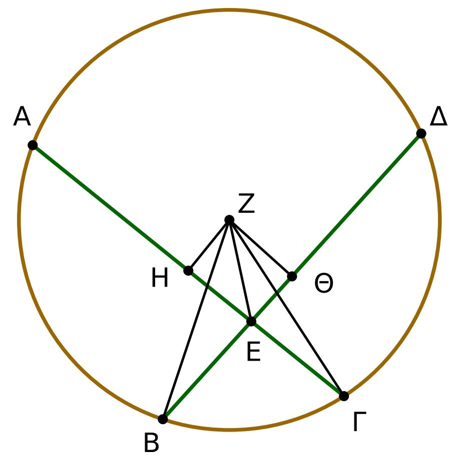
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν γὰρ κύκλῳ τῷ **ΑΒΓΔ** δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Εἰ μὲν οὖν αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν ὥστε τὸ **Ε** κέντρον εἶναι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, φανερόν, ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ**, **ΔΕ**, **ΕΒ** καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ **ΑΓ**, **ΔΒ** διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓΔ**, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὰς **ΑΓ**, **ΔΒ** εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ **ΖΗ**, **ΖΘ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΕ**.



Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΗΖ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΓ** πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ **ΑΗ** τῇ **ΗΓ**. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ **Η**, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ **Ε**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΗ** τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΗΓ**· [κοινὸν] προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΖ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν **ΗΕ**, **ΗΖ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΓΗ**, **ΗΖ**. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν **ΕΗ**, **ΗΖ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΕ**, τοὶς δὲ ἀπὸ τῶν **ΓΗ**, **ΗΖ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΓ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΓ**. ἴση δὲ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΖ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΒ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** ἰσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΒ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΕ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΕ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΕ**, **ΕΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΒ** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι δύο τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛʹ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾿ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

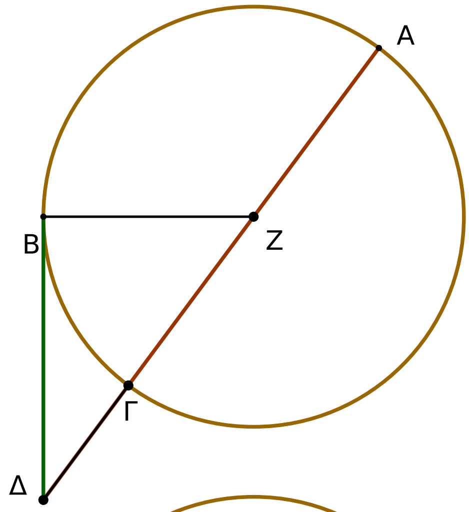
Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** πρὸς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ **ΔΓ**[**Α**], **ΔΒ**· καὶ ἡ μὲν **ΔΓΑ** τεμνέτω τὸν **ΑΒΓ** κύκλον, ἡ δὲ **ΒΔ** ἐφαπτέσθω· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ** τετραγώνῳ.

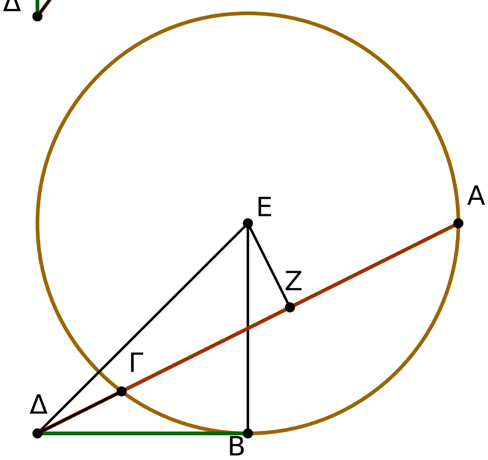
Ἡ ἄρα [**Δ**]**ΓΑ** ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ **Ζ** κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΒ**· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΒΔ**.

καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** δίχα τέτμηται κατὰ τὸ **Ζ**, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ **ΓΔ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΔ**. ἴση δὲ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΒ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τὴς **ΖΔ**.

τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΖΔ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΖΒ**, **ΒΔ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΒ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΒ**, **ΒΔ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΒ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ** ἐφαπτομένης.

Ἀλλὰ δὴ ἡ **ΔΓΑ** μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ **Ε**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ε** ἐπὶ τὴν **ΑΓ** κάθετος ἤχθω ἡ **ΕΖ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΒ**, **ΕΓ**, **ΕΔ**·





ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΕΒΔ**. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ **ΕΖ** εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν **ΑΓ** πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ **ΑΖ** ἄρα τῇ **ΖΓ** ἐστιν ἴση.

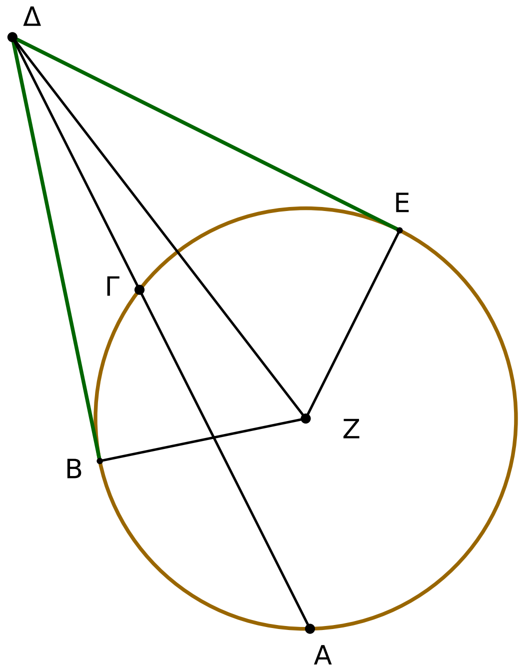
καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** τέτμηται δίχα κατὰ τὸ **Ζ** σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ **ΓΔ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΔ**. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΕ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΕ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΔ**, **ΖΕ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΓΖ**, **ΖΕ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΓ**· ὀρθὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ ὑπὸ **ΕΖΓ** [γωνία]· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΔΖ**, **ΖΕ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΔ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΔ**. ἴση δὲ ἡ **ΕΓ** τῇ **ΕΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΒ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἄπὸ τῆς **ΕΔ**. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΕΔ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΕΒ**, **ΒΔ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΕΒΔ** γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΒ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΕΒ**, **ΒΔ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΒ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζʹ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ **Δ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Δ** πρὸς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ **ΔΓΑ**, **ΔΒ**, καὶ ἡ μὲν **ΔΓΑ** τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ **ΔΒ** προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**. λέγω, ὅτι ἡ **ΔΒ** ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.



Ἤχθω γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** ἐφαπτομένη ἡ **ΔΕ**, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, καὶ ἔστω τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΕ**, **ΖΒ**, **ΖΔ**. ἡ ἄρα ὑπὸ **ΖΕΔ** ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΔΕ** ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου, τέμνει δὲ ἡ **ΔΓΑ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΕ**. ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΔ**, **ΔΓ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**· ἴση ἄρα ἡ **ΔΕ** τῇ **ΔΒ**. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ **ΖΕ** τῇ **ΖΒ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΔΕ**, **ΕΖ** δύο ταῖς **ΔΒ**, **ΒΖ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ **ΖΔ**· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΕΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΒΖ** ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΔΕΖ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΒΖ**. καί ἐστιν ἡ **ΖΒ** ἐκβαλλομένη διάμετρος· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ **ΔΒ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς **ΑΓ** τυγχάνῃ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 4

Ὅροι

α΄. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

β΄. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

γ΄. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ΄. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφε σθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ε΄. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

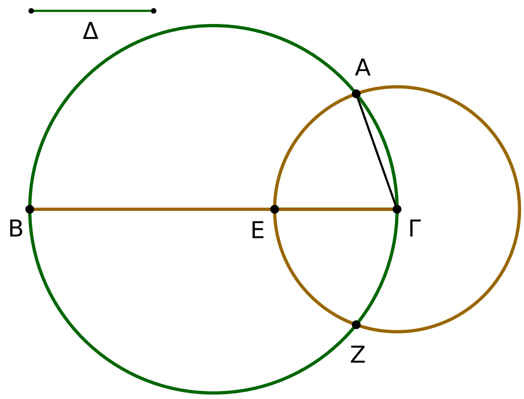
ϛ΄. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

ζ΄. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

α΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ **Δ**. δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον τῇ **Δ** εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



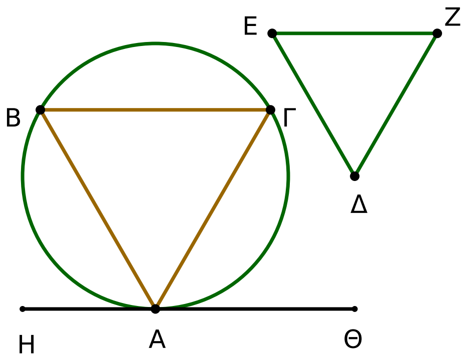
Ἤχθω τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου διάμετρος ἡ **ΒΓ**. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **Δ**, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον τῇ **Δ** εὐθείᾳ ἴση ἡ **ΒΓ**. εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῆς **Δ**, κείσθω τῇ **Δ** ἴση ἡ **ΓΕ**, καὶ κέντρῳ τῷ **Γ** διαστήματι δὲ τῷ **ΓΕ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΕΑΖ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΓΑ**. Ἐπεὶ οὖν το **Γ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΕΑΖ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΑ** τῇ **ΓΕ**. ἀλλὰ τῇ **Δ** ἡ **ΓΕ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ **Δ** ἄρα τῇ **ΓΑ** ἐστιν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν **ΑΒΓ** τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **Δ** ἴση ἐνήρμοσται ἡ **ΓΑ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, τὸ δὲ δοθὲν τριγωνον τὸ **ΔΕΖ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.



Ἤχθω τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου ἐφαπτομένη ἡ **ΗΘ** κατὰ τὸ **Α**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΘ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΘΑΓ**, πρὸς δὲ τῇ **ΑΗ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** [γωνίᾳ] ἴση ἡ ὑπὸ **ΗΑΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΓ**.

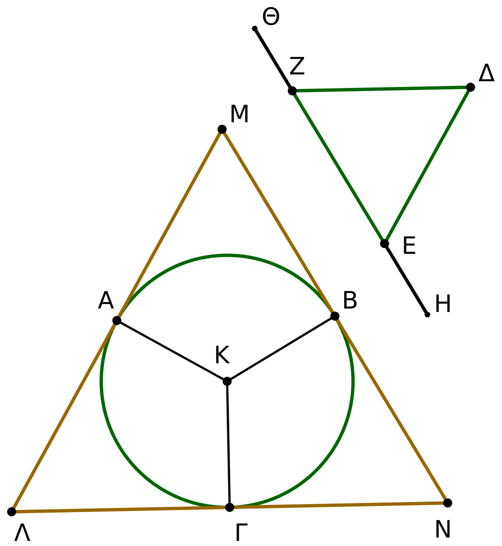
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ **ΑΒΓ** ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ **ΑΘ**, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **Α** ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ **ΑΓ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΘΑΓ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**. ἀλλ' ἡ ὑπὸ **ΘΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστιν ἴση [ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον]. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γʹ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΔΕΖ**· δεῖ δὴ περὶ τὸν **ΑΒΓ** κύκλον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.



Ἐκβεβλήσθω ἡ **ΕΖ** ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ **Η**, **Θ** σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου κέντρον τὸ **Κ**, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ **ΚΒ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΚΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Κ** τῇ μὲν ὑπὸ **ΔΕΗ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΚΑ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΔΖΘ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΚΓ**, καὶ διὰ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου αἱ **ΛΑΜ**, **ΜΒΝ**, **ΝΓΛ**.

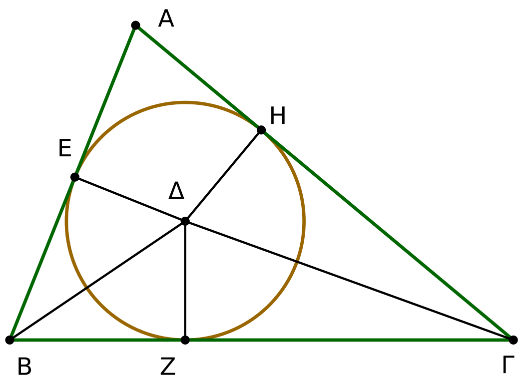
Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου αἱ **ΛΜ**, **ΜΝ**, **ΝΛ** κατὰ τὰ **Α**, **Β**, **Γ** σημεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ **Κ** κέντρου ἐπὶ τὰ **Α**, **Β**, **Γ** σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ **ΚΑ**, **ΚΒ**, **ΚΓ**, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ **ΑΜΒΚ** τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ **ΑΜΒΚ**, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ **ΚΑΜ**, **ΚΒΜ** γωνίαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΑΚΒ**, **ΑΜΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ **ΔΕΗ**, **ΔΕΖ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΚΒ**, **ΑΜΒ** ταῖς ὑπὸ **ΔΕΗ**, **ΔΕΖ** ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ **ΑΚΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΗ** ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΜΒ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ **ΛΝΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΜΛΝ** [λοιπῇ] τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΛΜΝ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ· καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν **ΑΒΓ** κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δʹ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**· δεῖ δὴ εἰς τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** γωνίαι δίχα ταῖς **ΒΔ**, **ΓΔ** εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ **Δ** σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ **Δ** ἐπὶ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΑ** εὐθείας κάθετοι αἱ **ΔΕ**, **ΔΖ**, **ΔΗ**.

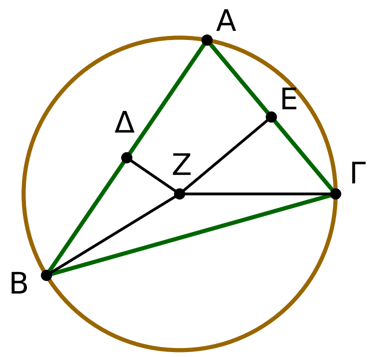
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΒΔ**, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΒΕΔ** ὀρθῇ τῇ ὑπὸ **ΒΖΔ** ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΕΒΔ**, **ΖΒΔ** τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΒΔ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ **ΔΕ** τῇ **ΔΖ**.

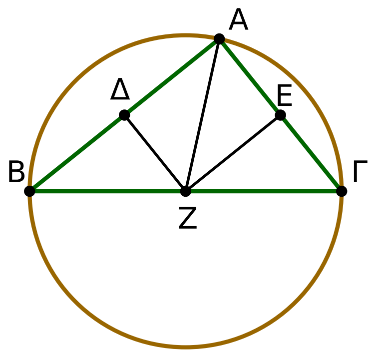
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΔΗ** τῇ **ΔΖ** ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΔΕ**, **ΔΖ**, **ΔΗ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Δ** καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΑ** εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς **Ε**, **Ζ**, **Η** σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ **Δ** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η** γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΑ** εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον. ἐγγεγράφθω ὡς ὁ **ΖΗΕ**.

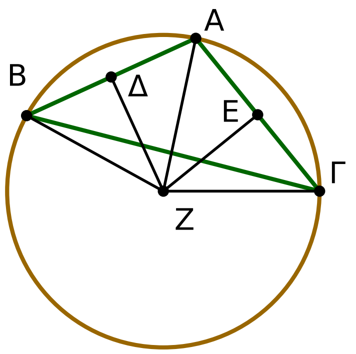
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** κύκλος ἐγγέγραπται ὁ **ΕΖΗ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ε΄.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.







Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**· δεῖ δὲ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΑΓ** εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ **Δ**, **Ε** σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν **Δ**, **Ε** σημείων ταῖς **ΑΒ**, **ΑΓ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ **ΔΖ**, **ΕΖ**· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς **ΒΓ** εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς **ΒΓ**.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΑ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΒ**, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΔΖ**, βάσις ἄρα ἡ **ΑΖ** βάσει τῇ **ΖΒ** ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΓΖ** τῇ **ΑΖ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **ΖΒ** τῇ **ΖΓ** ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ζ** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ **ΑΒΓ**.

Ἀλλὰ δὴ αἱ **ΔΖ**, **ΕΖ** συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς **ΒΓ** εὐθείας κατὰ τὸ **Ζ**, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΖ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ **Ζ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

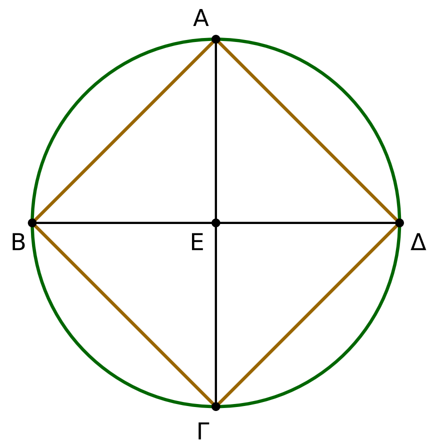
Ἀλλὰ δὴ αἱ **ΔΖ**, **ΕΖ** συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου κατὰ τὸ **Ζ** πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καί ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΖ**, **ΒΖ**, **ΓΖ**. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΒ**, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΔΖ**, βάσις ἄρα ἡ **ΑΖ** βάσει τῇ **ΒΖ** ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΓΖ** τῇ **ΑΖ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ **ΒΖ** τῇ **ΖΓ** ἐστιν ἴση· ὁ ἄρα [πάλιν] κέντρῳ τῷ **Ζ** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ϛʹ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.



Ἤχθωσαν τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ**.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΕ** τῇ **ΕΔ**· κέντρον γὰρ τὸ **Ε**· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΕΑ**, βάσις ἄρα ἡ **ΑΒ** βάσει τῇ **ΑΔ** ἴση ἐστίν.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν **ΒΓ**, **ΓΔ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΑΔ** ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον.

ἐπεὶ γὰρ ἡ **ΒΔ** εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΑΔ**· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** γωνία.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ**, **ΓΔΑ** ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον.

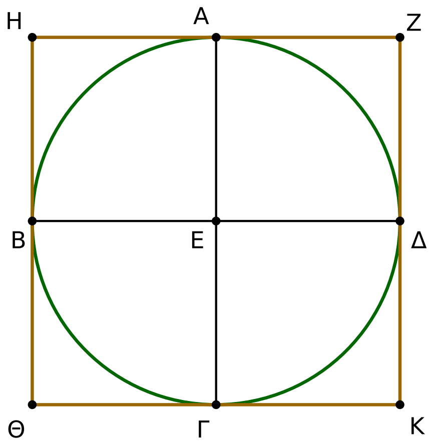
Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ **ΑΒΓΔ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ζʹ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**· δεῖ δὴ περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**, καὶ διὰ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου αἱ **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΚ**, **ΚΖ**. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ **ΖΗ** τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ **Ε** κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ **Α** ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ **ΕΑ**, αἱ ἄρα πρὸς τῷ **Α** γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς **Β**, **Γ**, **Δ** σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν.



καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ** γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΒΗ**, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΗΘ** τῇ **ΑΓ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΖΚ** ἐστι παράλληλος. ὥστε καὶ ἡ **ΗΘ** τῇ **ΖΚ** ἐστι παράλληλος.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν **ΗΖ**, **ΘΚ** τῇ **ΒΕΔ** ἐστι παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ **ΗΚ**, **ΗΓ**, **ΑΚ**, **ΖΒ**, **ΒΚ**· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν **ΗΖ** τῇ **ΘΚ**, ἡ δὲ **ΗΘ** τῇ **ΖΚ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν **ΑΓ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΗΘ**, **ΖΚ**, ἡ δὲ **ΒΔ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΗΖ**, **ΘΚ** ἐστιν ἴση [καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΗΘ**, **ΖΚ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΗΖ**, **ΘΚ** ἐστιν ἴση], ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΗΘΚ** τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον.

ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΗΒΕΑ**, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ**, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΗΒ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς **Θ**, **Κ**, **Ζ** γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΗΘΚ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον.

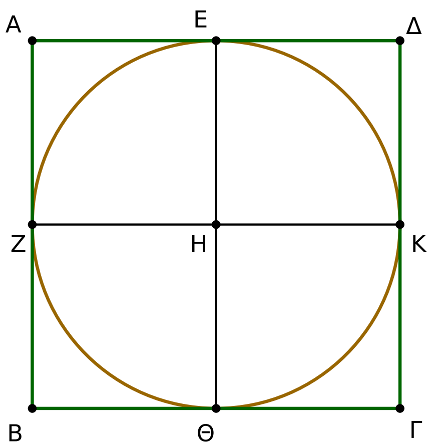
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

η΄.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ **ΑΒΓΔ**. δεῖ δὴ εἰς τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν **ΑΔ**, **ΑΒ** δίχα κατὰ τὰ **Ε**, **Ζ** σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ **Ε** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** παράλληλος ἤχθω ὁ **ΕΘ**, διὰ δὲ τοῦ **Ζ** ὁποτέρᾳ τῶν **ΑΔ**, **ΒΓ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΖΚ**·



παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν **ΑΚ**, **ΚΒ**, **ΑΘ**, **ΘΔ**, **ΑΗ**, **ΗΓ**, **ΒΗ**, **ΗΔ**, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι [εἰσίν].

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΑΒ**, καί ἐστι τῆς μὲν **ΑΔ** ἡμίσεια ἡ **ΑΕ**, τῆς δὲ **ΑΒ** ἡμίσεια ἡ **ΑΖ**, ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΑΕ** τῇ **ΑΖ**· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΖΗ** τῇ **ΗΕ**.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΖΗ**, **ΗΕ** ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ **ΗΕ**, **ΗΖ**, **ΗΘ**, **ΗΚ** ἴσαι ἀλλήλαις [εἰσίν].

ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ **Η** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Θ**, **Κ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς **Ε**, **Ζ**, **Θ**, **Κ** γωνίας·

εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ**, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ **Η** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Θ**, **Κ** κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον.

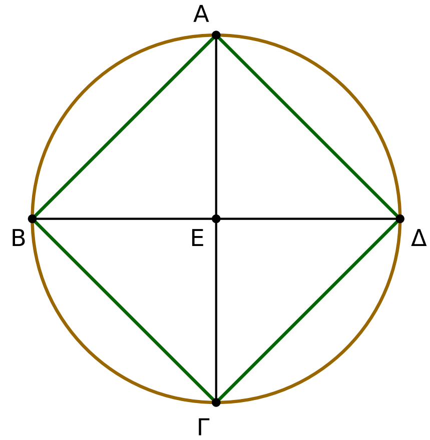
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

θʹ.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ **ΑΒΓΔ**· δεῖ δὴ περὶ τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε**.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΒ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΑΓ**, δύο δὴ αἱ **ΔΑ**, **ΑΓ** δυσὶ ταῖς **ΒΑ**, **ΑΓ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΔΓ** βάσει τῇ **ΒΓ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΑΓ** ἴση ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΔΑΒ** γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς **ΑΓ**.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ**, **ΓΔΑ** δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΔΒ** εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΔΑΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ **ΔΑΒ** ἡμίσεια ἡ ὑπὸ **ΕΑΒ**, τῆς δὲ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἡμίσεια ἡ ὑπὸ **ΕΒΑ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΑΒ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΕΒΑ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΕΑ** τῇ **ΕΒ** ἐστιν ἴση.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν **ΕΑ**, **ΕΒ** [εὐθειῶν] ἑκατέρᾳ τῶν **ΕΓ**, **ΕΔ** ἴση ἐστίν. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ **ΕΑ**, **ΕΒ**, **ΕΓ**, **ΕΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ε** καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ **ΑΒΓΔ**.

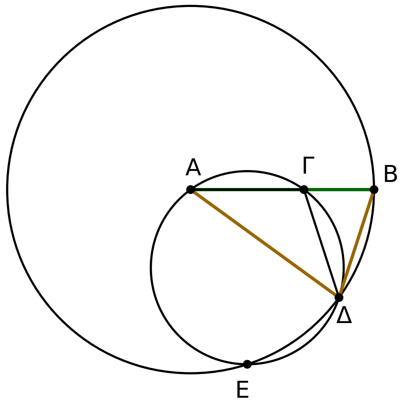
Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιʹ.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΑ** τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ **Α** καὶ διαστήματι τῷ **ΑΒ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΒΔΕ**, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν **ΒΔΕ** κύκλον τῇ **ΑΓ** εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ **ΒΔΕ** κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ **ΒΔ**· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΔΓ**, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ **ΑΓΔ** τρίγωνον κύκλος ὁ **ΑΓΔ**.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**, ἴση δὲ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΒΔ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**.



καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ **ΑΓΔ** εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ **Β**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Β** πρὸς τὸν **ΑΓΔ** κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ **ΒΑ**, **ΒΔ**, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**, ἡ **ΒΔ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΓΔ** κύκλου.

ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ **ΒΔ**, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ **Δ** ἐπαφῆς διῆκται ἡ **ΔΓ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΒΔΓ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΑΓ**.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΔΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΑΓ**, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΓΔΑ**· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΔΑ** ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΓΔΑ**, **ΔΑΓ**. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ **ΓΔΑ**, **ΔΑΓ** ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ**· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΔΑ** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ**.

ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΒΔΑ** τῇ ὑπὸ **ΓΒΔ** ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΑΔ** τῇ **ΑΒ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΒΑ** τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἐστιν ἴση.

αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ **ΒΔΑ**, **ΔΒΑ**, **ΒΓΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΔΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΓΔ**, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΔ** πλευρᾷ τῇ **ΔΓ**. ἀλλὰ ἡ **ΒΔ** τῇ **ΓΑ** ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ **ΓΑ** ἄρα τῇ **ΓΔ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΔΑ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΑΓ** ἐστιν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΔΑ**, **ΔΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΔΑΓ** εἰσι διπλασίους.

ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** ταῖς ὑπὸ **ΓΔΑ**, **ΔΑΓ**· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἄρα τῆς ὑπὸ **ΓΑΔ** ἐστι διπλῆ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΒΔΑ**, **ΔΒΑ**· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ **ΒΔΑ**, **ΔΒΑ** τῆς ὑπὸ **ΔΑΒ** ἐστι διπλῆ.

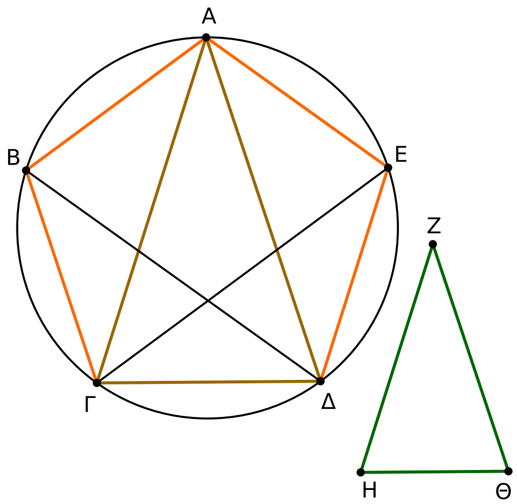
Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ **ΑΒΔ** ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ **ΔΒ** βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιαʹ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ **ΖΗΘ** διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς **Η**, **Θ** γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ **Ζ**, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον τῷ **ΖΗΘ** τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ **ΑΓΔ**, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ **Ζ** γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ **ΓΑΔ**, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς **Η**, **Θ** ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ**· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ** τῆς ὑπὸ **ΓΑΔ** ἐστι διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ** δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΓΕ**, **ΔΒ** εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΑ**.



Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ** γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΓΑΔ**, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν **ΓΕ**, **ΔΒ** εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΔΑΓ**, **ΑΓΕ**, **ΕΓΔ**, **ΓΔΒ**, **ΒΔΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον.

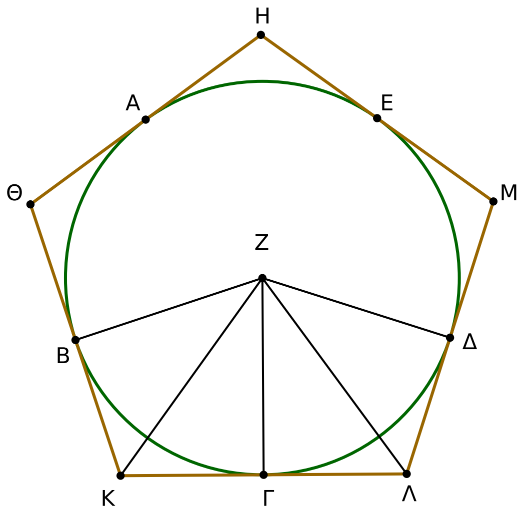
λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ **ΑΒ** περιφέρεια τῇ **ΔΕ** περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΒΓΔ**· ὅλη ἄρα ἡ **ΑΒΓΔ** περιφέρια ὅλῃ τῇ **ΕΔΓΒ** περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς **ΑΒΓΔ** περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ**, ἐπὶ δὲ τῆς **ΕΔΓΒ** περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ**· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΕΔ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΔ**, **ΓΔΕ** γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΒΑΕ**, **ΑΕΔ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβʹ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὲ περὶ τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.



Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** περιφερείας· καὶ διὰ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε** ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ **ΗΘ**, **ΘΚ**, **ΚΛ**, **ΛΜ**, **ΜΗ**, καὶ εἰλήφθω τοῦ **ΑΒΓΔΕ** κύκλου κέντρον τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΒ**, **ΖΚ**, **ΖΓ**, **ΖΛ**, **ΖΔ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν **ΚΛ** εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ **ΑΒΓΔΕ** κατὰ τὸ **Γ**, ἀπὸ δὲ τοῦ **Ζ** κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ **Γ** ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ **ΖΓ**, ἡ **ΖΓ** ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν **ΚΛ**· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ **Γ** γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς **Β**, **Δ** σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν.

καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΖΓΚ** γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΖΚ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΓ**, **ΓΚ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΒ**, **ΒΚ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΚ**· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν **ΖΓ**, **ΓΚ** τοῖς ἀπὸ τῶν **ΖΒ**, **ΒΚ** ἐστιν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΓ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΖΒ** ἐστιν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΚ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ **ΒΚ** τῇ **ΓΚ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΒ** τῇ **ΖΓ**, καὶ κοινὴ ἡ **ΖΚ**, δύο δὴ αἱ **ΒΖ**, **ΖΚ** δυσὶ ταῖς **ΓΖ**, **ΖΚ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΒΚ** βάσει τῇ **ΓΚ** [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΚ** [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ **ΚΖΓ** ἐστιν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΚΖ** τῇ ὑπὸ **ΖΚΓ**· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΓ** τῆς ὑπὸ **ΚΖΓ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΚΓ** τῆς ὑπὸ **ΖΚΓ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΓΖΔ** τῆς ὑπὸ **ΓΖΛ** ἐστι διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΛΓ** τῆς ὑπὸ **ΖΛΓ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** περιφέρεια τῇ **ΓΔ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΖΓ** τῇ ὑπὸ **ΓΖΔ**. καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΖΓ** τῆς ὑπὸ **ΚΖΓ** διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΖΓ** τῆς ὑπὸ **ΛΖΓ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΚΖΓ** τῇ ὑπὸ **ΛΖΓ**·

ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΓΚ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΓΛ** ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΖΚΓ**, **ΖΛΓ** τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΖΓ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΚΓ** εὐθεῖα τῇ **ΓΛ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΖΚΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΛΓ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΚΓ** τῇ **ΓΛ**, διπλῆ ἄρα ἡ **ΚΛ** τῆς **ΚΓ**. διὰ τὰ αὐτα δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ **ΘΚ** τῆς **ΒΚ** διπλῆ. καί ἐστιν ἡ **ΒΚ** τῇ **ΚΓ** ἴση· καὶ ἡ **ΘΚ** ἄρα τῇ **ΚΛ** ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν **ΘΗ**, **ΗΜ**, **ΜΛ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΘΚ**, **ΚΛ** ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΗΘΚΛΜ** πεντάγωνον.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΖΚΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΛΓ**, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ **ΖΚΓ** διπλῆ ἡ ὑπὸ **ΘΚΛ**, τῆς δὲ ὑπὸ **ΖΛΓ** διπλῆ ἡ ὑπὸ **ΚΛΜ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΘΚΛ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΚΛΜ** ἐστιν ἴση.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΚΘΗ**, **ΘΗΜ**, **ΗΜΛ** ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΘΚΛ**, **ΚΛΜ** ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΗΘΚ**, **ΘΚΛ**, **ΚΛΜ**, **ΛΜΗ**, **ΜΗΘ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΗΘΚΛΜ** πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον.

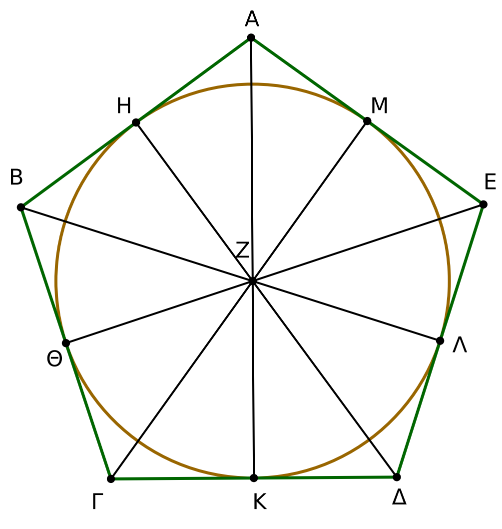
[Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ´.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὴ εἰς τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΓΔ**, **ΓΔΕ** γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΓΖ**, **ΔΖ** εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ **ΓΖ**, **ΔΖ** εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ** εὐθεῖαι.



καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΓΔ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΓΖ**, δύο δὴ αἱ **ΒΓ**, **ΓΖ** δυσὶ ταῖς **ΔΓ**, **ΓΖ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΓΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΓΖ** [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΒΖ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΒΓΖ** τρίγωνον τῷ **ΔΓΖ** τριγώνῳ ἐστιν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΒΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΔΖ**.

καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΓΔΕ** τῆς ὑπὸ **ΓΔΖ**, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ **ΓΔΕ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΓΔΖ** τῇ ὑπὸ **ΓΒΖ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΒΑ** ἄρα τῆς ὑπὸ **ΓΒΖ** ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΒΓ**· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς **ΒΖ** εὐθείας.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΑΕ**, **ΑΕΔ** δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΖΑ**, **ΖΕ** εὐθειῶν.

ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου ἐπὶ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** εὐθείας κάθετοι αἱ **ΖΗ**, **ΖΘ**, **ΖΚ**, **ΖΛ**, **ΖΜ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΘΓΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΚΓΖ**, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΖΘΓ** [ὀρθῇ] τῇ ὑπὸ **ΖΚΓ** ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΖΘΓ**, **ΖΚΓ** τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν **ΖΓ** ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ **ΖΘ** κάθετος τῇ **ΖΚ** καθέτῳ.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν **ΖΛ**, **ΖΜ**, **ΖΗ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΖΘ**, **ΖΚ** ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΖΗ**, **ΖΘ**, **ΖΚ**, **ΖΛ**, **ΖΜ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ζ** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ** σημείοις γωνίας.

εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ **Ζ** διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ** σημείων γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΑ** εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω ὡς ὁ **ΗΘΚΛΜ**.

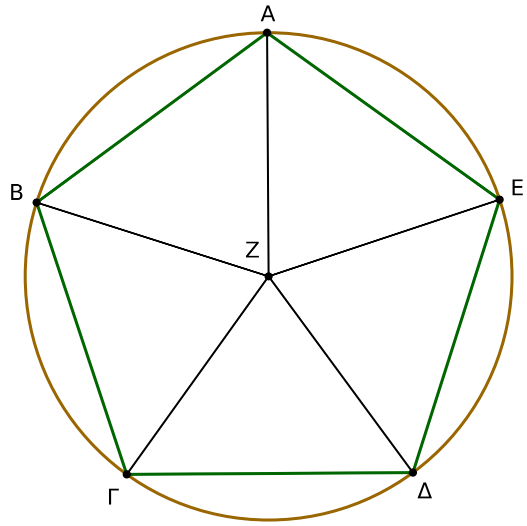
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδ΄.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ **ΑΒΓΔΕ**· δεῖ δὴ περὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΓΔ**, **ΓΔΕ** γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν **ΓΖ**, **ΔΖ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ **Β**, **Α**, **Ε** σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ**.



ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΒΑΕ**, **ΑΕΔ** γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ** εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΔΕ**, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ **ΒΓΔ** ἡμίσεια ἡ ὑπὸ **ΖΓΔ**, τῆς δὲ ὑπὸ **ΓΔΕ** ἡμίσεια ἡ ὑπὸ **ΓΔΖ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΓΔ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΖΔΓ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΖΓ** πλευρᾷ τῇ **ΖΔ** ἐστιν ἴση.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν **ΖΒ**, **ΖΑ**, **ΖΕ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΖΓ**, **ΖΔ** ἐστιν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΔ**, **ΖΕ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ζ** καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΔ**, **ΖΕ** κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. περιγεγράφθω καὶ ἔστω ὁ **ΑΒΓΔΕ**.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιε′.

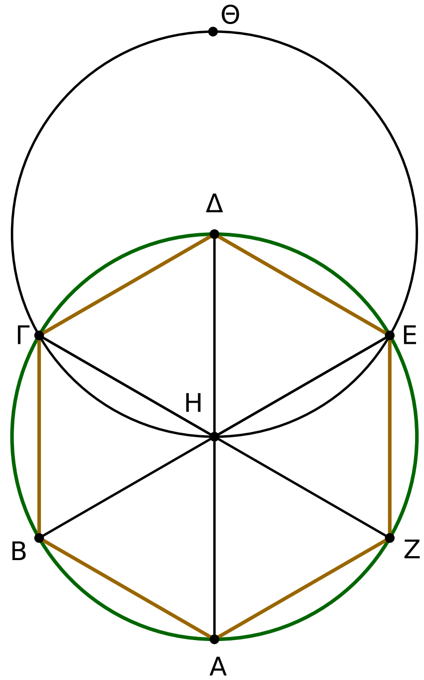
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕΖ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλου διάμετρος ἡ **ΑΔ**, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Η**, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ **Δ** διαστήματι δὲ τῷ **ΔΗ** κύκλος γεγράφθω ὁ **ΕΗΓΘ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ **ΕΗ**, **ΓΗ** διήχθωσαν ἐπὶ τὰ **Β**, **Ζ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΖΑ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ **Η** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΗΕ** τῇ **ΗΔ**. πάλιν, ἐπεὶ τὸ **Δ** σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ **ΗΓΘ** κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΔΗ**. ἀλλ᾽ ἡ **ΗΕ** τῇ **ΗΔ** ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ **ΗΕ** ἄρα τῇ **ΕΔ** ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΕΗΔ** τρίγωνον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΗΔΕ**, **ΔΕΗ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΕΗΔ** γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΗΓ** τρίτον δύο ὀρθῶν.

καὶ ἐπεὶ ἡ **ΓΗ** εὐθεῖα ἐπὶ τὴν **ΕΒ** σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ **ΕΗΓ**, **ΓΗΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΗΒ** τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΔΗΓ**, **ΓΗΒ** γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ **ΒΗΑ**, **ΑΗΖ**, **ΖΗΕ** ἴσαι εἰσὶν [ταῖς ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΔΗΓ**, **ΓΗΒ**].



αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΕΗΔ**, **ΔΗΓ**, **ΓΗΒ**, **ΒΗΑ**, **ΑΗΖ**, **ΖΗΕ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΖΑ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ το **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΑ** περιφέρεια τῇ **ΕΔ** περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ **ΑΒΓΔ** περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ **ΖΑΒΓΔ** ὅλῃ τῇ **ΕΔΓΒΑ** ἐστιν ἴση· καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς **ΖΑΒΓΔ** περιφερείας ἡ ὑπὸ **ΖΕΔ** γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς **ΕΔΓΒΑ** περιφερείας ἡ ὑπὸ **ΑΖΕ** γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΖΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**.

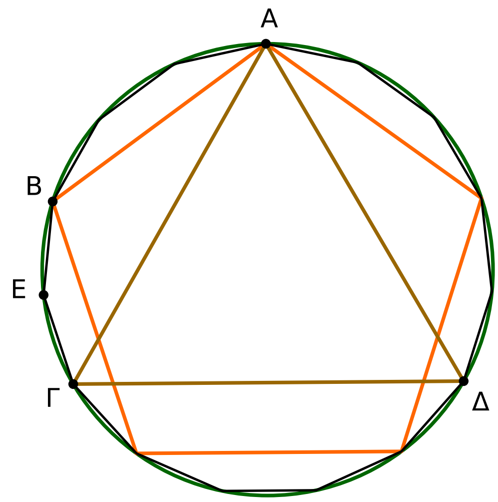
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ **ΑΖΕ**, **ΖΕΔ** γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕΖ** κύκλον. Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιϛʹ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ **ΑΒΓΔ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ **ΑΓ**, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ **ΑΒ**· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν **ΑΒΓ** περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ **ΑΒ** περιφέρεια πέμπτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν·

λοιπὴ ἄρα ἡ **ΒΓ** τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ **ΒΓ** δίχα κατὰ τὸ **Ε**· ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΒΕ**, **ΕΓ** περιφερειῶν πεντεκαιδέκατόν ἐστι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου. Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς **ΒΕ**, **ΕΓ** ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν **ΑΒΓΔ**[**Ε**] κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου δείξεων καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.