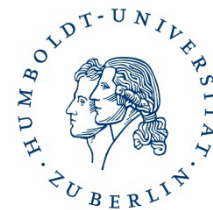




Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen



Das Raschmodell als Spezialfall des Allgemeinen Linearen Gemischten Modells (Generalized Linear Mixed Model, GLMM) mit fixierten Effekten auf der Item- und zufälligen Effekten auf der Personenseite

Sebastian Weirich und Nicklas Hafiz

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB)
Humboldt-Universität zu Berlin

Gesis Workshop, Oktober 2024

Das Allgemeine Lineare Gemischte Modell

- Bis jetzt: Raschmodell als reines Messmodell
 - Keine Zusammenhangsanalysen
 - Generalized Linear Mixed Models
 - Framework zur Modellierung (log-)linearer Modelle
 - fixierte oder zufällige Effekte
 - Fixiert: “Levels” der Variablen sind theoretisch begrenzt (z.B. Geschlecht)
 - Zufällig: “Levels” der Variablen sind theoretisch unbegrenzt oder sehr groß, z.B. individuelle Personen und Itemeffekte
 - Das Raschmodell kann als ein GLMM mit fixierten Item- und zufälligen Personeneffekten verstanden werden.
 - Im GLMM können theoretisch noch mehr Ebenen als nur Personen und Items betrachtet werden (→ große Flexibilität), z.B. Messzeitpunkte (genestet in Personen),
 - Im GLMM können auch Interaktionen von Effekten verschiedener Ebenen modelliert werden
- Tag1_2Nachmittag_Nr2_Raschmodell_als_GLMM.r

Das Allgemeine Lineare Gemischte Modell (De Boeck & Wilson, 2004)



• GLMM vs. Raschmodell

- Im Raschmodell werden Itemschwierigkeiten modelliert (“Minus“-Parametrisierung):

$$\text{logit}(P(X_{ni} = 1)) = \theta_n - \beta_i$$

- Im GLMM “Itemleichtigkeiten”, also additive lineare Effekte: $Y_{pi} = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot X_{ik} + \sum_{j=0}^J \theta_{pi} \cdot Z_{ij} + \varepsilon_{pi}$

- Notation

- X: Prädiktor mit fixiertem Effekt

- Z: Prädiktor mit zufälligen Effekt

- Raschmodell in GLMM Notation: $Y_{pi} = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot X_{ik} + \sum_{j=0}^J \theta_{pi} \cdot Z_{ij} + \varepsilon_{pi}$ mit $\theta_{pj} \sim N(0, \sigma_j^2)$

- Letzteres dient der Modellidentifizierung

```
random <- ranef(mod2)
```

Mittelwert des random effects entspricht naheungsweise 0

```
round(mean(random$person[,1]), digits = 4)
```

```
## [1] -4e-04
```

standardabweichung des random effects entspricht naheungsweise 1

```
round(sd(random$person[,1]), digits = 4)
```

```
## [1] 1.1037
```

Das Allgemeine Lineare Gemischte Modell

- GLMM vs. Raschmodell

- GLMMs sind gut geeignet, um eine Vielzahl von Modellen aus der Rasch-“Familie” (1pl) zu modellieren, z.B. Linear-logistische Testmodelle (LLTMs), Längsschnittmodelle, ...
- “klassische” IRT/Raschmodelle sind weniger flexibel

- Raschmodell besteht aus drei Komponenten

1. **Modellgleichung:** $\eta_{ni} = \theta_n - \beta_i$
2. **Transformationsfunktion:** $\eta_{ni} = \ln \left(\frac{P(X_{ni} = 1)}{1 - P(X_{ni} = 1)} \right)$
3. **Random component:** $X_{ni} \sim \text{binomial}(1, \pi_{ni})$ mit $\pi_{ni} = (P(X_{ni} = 1))$

Raschmodell als GLMM

```
mod2 <- glmer(value ~ variable + (1|person), data = datLong, family = binomial(link="logit"))
```

Das Allgemeine Lineare Gemischte Modell



- **Raschmodell**

- Items als fixierte Effekte, Personen als zufällige Effekte
- Prädiktoren i.d.R. nur auf Personenseite: $\text{logit}(P(X_{ni} = 1)) = \theta_n - \beta_i$ mit $\theta_n = \mathbf{Y}_n \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_n$ und $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$

- **GLMM**

- oft sinnvoll, auch Items als zufällige Effekte zu modellieren
- Prädiktoren auf Item- und/oder Personenseite
 - Prädiktoren müssen immer manifest sein
 - **UVs**: manifest
 - **AVs**: latent
- Cross-level Interaktionen
- Für Zusammenhangsanalysen im 1pl-Kontext geeignet

Gütekriterien



- **Raschmodell vs. GLMM**

- **Empfehlung: mehrschrittiges Vorgehen**
- Raschmodell, um die Eignung der Items für die intendierte Untersuchung zu prüfen
- GLMM für die Überprüfung der konkreten Forschungshypothesen

- **Eignung des Modells: Gütekriterien**

- Reliabilität: da IRT “itembasiert” ist, hängt Reliabilität (notwendig, aber nicht hinreichend) von Itemeigenschaften ab
 - Passung (Fit)
 - Lokale stochastische Unabhängigkeit
 - Unidimensionalität
- Wenn diese Bedingungen als gegeben gelten können, kann die Reliabilität als WLE- oder Konstrukt- (bzw. EAP/PV)-Reliabilität bestimmt werden
 - Weighted Likelihood Estimate (WLE; Warm, 1989): individueller Personenparameter (= “Personenfähigkeit”)
 - EAP: expected a posteriori estimate. Erwartungswert der latenten intra-individuellen Personenfähigkeitsverteilung
 - PV: plausible values. Zufallsziehungen aus der EAP-Verteilung