Lección 4. GRAFOS PONDERADOS

1. Definición y ejemplos.
2. Caminos más cortos.
3. Grafos acíclicos. Método del camino crítico.
4. Algoritmo de Dijkstra.
5. Caminos más cortos entre todos los pares de vértices. Método de Floyd-Warshall.
6. Árboles generadores de mínimo peso.

1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

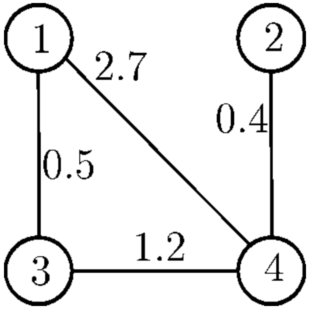
DEFINICIÓN:

Un grafo simple G = (V,A) (grafo simple dirigido, respectivamente) diremos que es un grafo ponderado si tiene asociada una función **W: A $\longrightarrow$ R**, llamada **función de ponderación**.

La imagen de cada arista (arco, respectivamente) determinada por los vértices $\mathbf{v_i}$ y $\mathbf{v_j}$ la llamaremos peso de la arista (arco) y lo denotaremos por $\mathbf{w_{ij}}$.

EJEMPLO: G=(V,A), V={1,2,3,4}, A={{1,3},{2,4},{3,4},{1,4}}. Asociando la función W

$$W : A \longrightarrow R \begin{cases} W(\{1,3\}) = 0.5 \\ W(\{2,4\}) = 0.4 \\ W(\{3,4\}) = 1.2 \\ W(\{1,4\}) = 2.7 \end{cases}$$



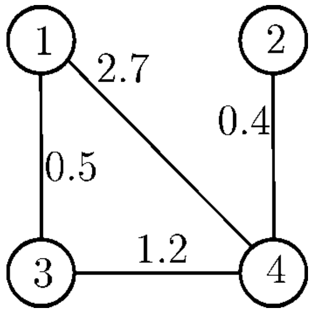
1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

DEFINICIÓN:

Sea G = (V,A) un grafo ponderado finito tal que V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Llamaremos **matriz de peso** del grafo G a la siguiente matriz de orden n × n:

$$\Omega = [a_{ij}] \ / \ a_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} & \text{si } \{v_i, v_j\} \in A \text{ (si } (v_i, v_j) \in A\text{, en el caso dirigido)} \\ \infty & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin A \text{ (si } (v_i, v_j) \notin A\text{, en el caso dirigido)} \end{cases}$$

EJEMPLO:

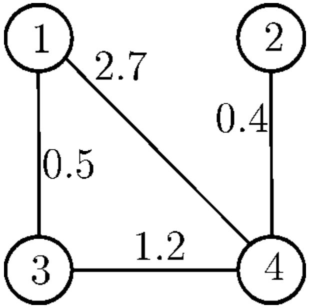


$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0.5 & 2.7 \\ \infty & \infty & \infty & 0.4 \\ 0.5 & \infty & \infty & 1.2 \\ 2.7 & 0.4 & 1.2 & \infty \end{bmatrix}$$

1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

DEFINICIÓN:

En un grafo ponderado llamamos **peso de un camino** a la suma de los pesos de las aristas (arcos respectivamente) que lo forman.



EJEMPLO: Los únicos caminos del vértice 1 al 2 son:

$$C_1 \equiv 1\ 3\ 4\ 2$$

$$\omega(C_1) = \omega(\{1,3\}) + \omega(\{3,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 0.5 + 1.2 + 0.4 = 2.1$$

$$C_2 \equiv 1\ 4\ 2$$

$$\omega(C_2) = \omega(\{1,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 2.7 + 0.4 = 3.1$$

1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

DEFINICIÓN:

- En un grafo ponderado llamamos **camino más corto** entre dos vértices dados al camino de peso mínimo entre dichos vértices.
- En un grafo ponderado llamaremos **camino más largo** o **camino crítico** entre dos vértices dados al camino de peso máximo entre dichos vértices.

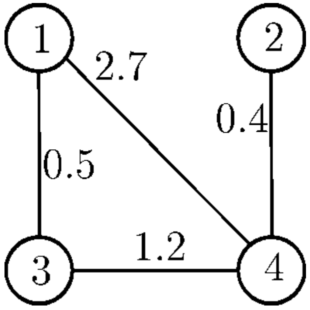
EJEMPLO:

$C_1 \equiv 1\ 3\ 4\ 2$ **Camino más corto**

$$\omega(C_1) = \omega(\{1,3\}) + \omega(\{3,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 0.5 + 1.2 + 0.4 = 2.1$$

$C_2 \equiv 1\ 4\ 2$ **Camino más largo – Camino crítico**

$$\omega(C_2) = \omega(\{1,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 2.7 + 0.4 = 3.1$$



2. CAMINOS MÁS CORTOS

Supondremos que los pesos asociados a los arcos son todos no negativos y que el grafo es dirigido.

Supondremos además que los vértices del grafo están numerados de **1** a **n**, de forma que $\mathbf{w_{ij}}$ representa el peso del arco (i,j) y que el vértice **1** es el origen del camino.

Además $\mathbf{u_j}$ denotará el peso del c.m.c. (camino más corto) de **1** a **j**.

TEOREMA

Sea **1**,...,**k**,...,**j** un c.m.c. entre los vértices **1** y **j** de un grafo ponderado G. Entonces las secciones de este camino **1**,...,**k** y **k**,...,**j** son los caminos más cortos entre los vértices respectivos.

2. CAMINOS MÁS CORTOS

COROLARIO:

Supongamos que en un grafo ponderado tenemos un camino más corto entre los vértices **1** y **j**. Sea **k** el vértice inmediatamente anterior a **j** en este camino. Entonces la sección de este camino desde **1** a **k** es el camino más corto entre estos dos vértices. Además:

$$u_j = u_k + w_{kj}$$

ECUACIONES DE BELLMAN

$$u_1 = 0$$

$$u_j = \min_{k \neq j} \{u_k + w_{kj}\} \quad j = 2, \ldots, n$$

2. CAMINOS MÁS CORTOS

EJEMPLO:

Consideremos el grafo ponderado con 4 vértices, definido por la siguiente matriz de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 2 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Si aplicamos las ecuaciones de Bellman a este grafo, para calcular los pesos de los caminos más cortos del vértice $\mathbf{v_1}$ al resto:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \min\{u_1+\omega_{12}, u_3+\omega_{32}, u_4+\omega_{42}\} \\ &= \min\{5,\infty,u_4+2\} = \min\{5, \underline{u_4+2}\}, \\ u_3 &= \min\{u_1+\omega_{13}, u_2+\omega_{23}, u_4+\omega_{43}\} \\ &= \min\{3,u_2+2,\infty\} = \min\{3, \underline{u_2+2}\} \\ u_4 &= \min\{u_1+\omega_{14}, u_2+\omega_{24}, u_3+\omega_{34}\} \\ &= \min\{2,\infty,u_3+4\} = \min\{2, \underline{u_3+4}\} \end{aligned}$$

Vemos que obtenemos unas relaciones de precedencia cíclicas que impiden el cálculo de los valores $\mathbf{u_j}$. Es debida a la existencia de un circuito: $\mathbf{v_2 v_3 v_4 v_2}$

Índice

2. CAMINOS MÁS CORTOS

EJEMPLO:

Consideremos el grafo ponderado con 4 vértices, definido por la siguiente matriz de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Si aplicamos las ecuaciones de Bellman a este grafo, para calcular los pesos de los caminos más cortos del vértice $\mathbf{v_1}$ al resto:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \text{mín}\{u_1 + \omega_{12}, u_3 + \omega_{32}, u_4 + \omega_{42}\} \\ &= \text{mín}\{5, \infty, \infty\} = 5, \\ u_3 &= \text{mín}\{u_1 + \omega_{13}, u_2 + \omega_{23}, u_4 + \omega_{43}\} \\ &= \text{mín}\{3, u_2 + 2, \infty\} = \text{mín}\{3, 5+2\} = 3, \\ u_4 &= \text{mín}\{u_1 + \omega_{14}, u_2 + \omega_{24}, u_3 + \omega_{34}\} \\ &= \text{mín}\{2, \infty, u_3 + 4\} = \text{mín}\{2, 3+4\} = 2. \end{aligned}$$

∞

Si eliminamos el arco

($\mathbf{v_4}$,$\mathbf{v_2}$)

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

TEOREMA:

Un grafo dirigido no tiene circuitos si y sólo si existe una numeración de los vértices para la que se cumple que si (i, j) es un arco del grafo entonces i < j.

Con esta numeración, las ecuaciones de Bellman pueden ser reemplazadas por:

$$u_1 = 0$$

$$u_j = \min_{k<j}\{u_k + w_{kj}\} \quad j = 2, \ldots, n$$

$$u_j = \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

ALGORITMO DE NUMERACIÓN

Etapa 1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$.

Etapa 2. Tomar $v \in V^{(i)}$ tal que $d_e(v) = 0$ en $G[V_i]$.

Etapa 3. Numerar el vértice v como vértice i.
Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$.
Hacer $i \leftarrow i + 1$.

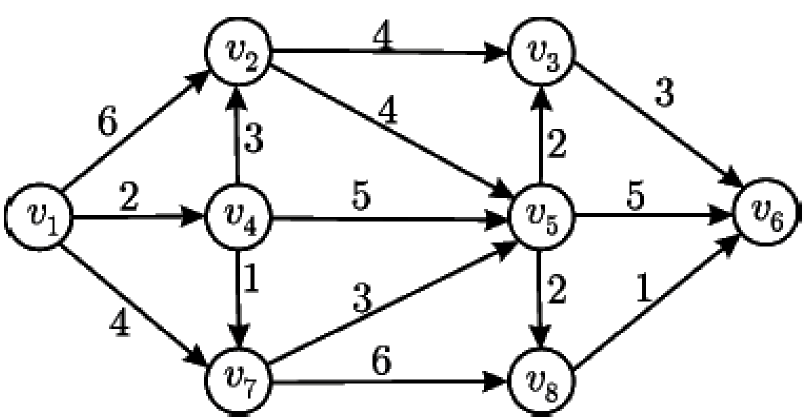
Etapa 4. Si $V^{(i)} = \emptyset$, entonces PARAR.
En otro caso, volver a la etapa 2.

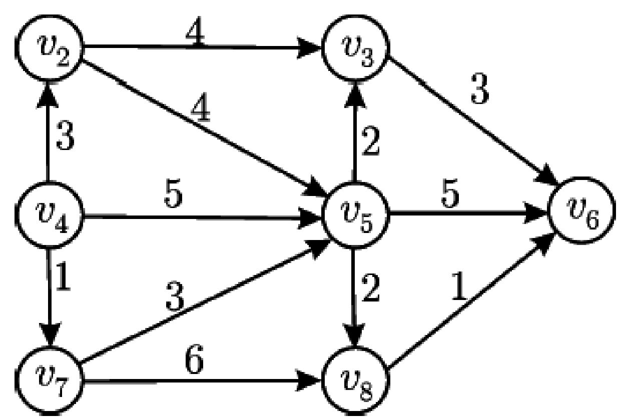
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1							

$i = 1$.
$V^{(1)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.
Tomamos $v_1 \in V^{(1)}$ / $d_e(v_1) = 0$.





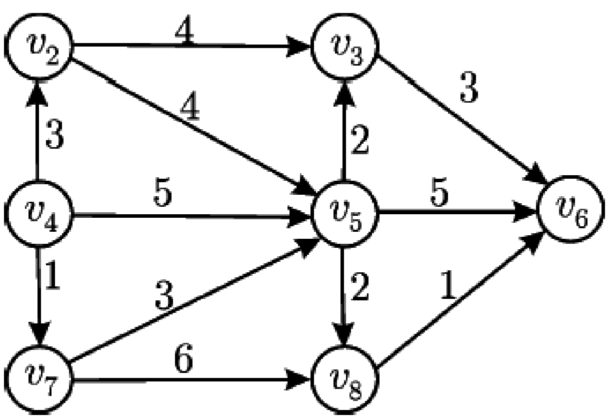
Numeramos v_1 con 1.
Eliminamos v_1 de $V^{(1)}$, es decir,
$V^{(2)} = V^{(1)} \sim \{v_1\}$.

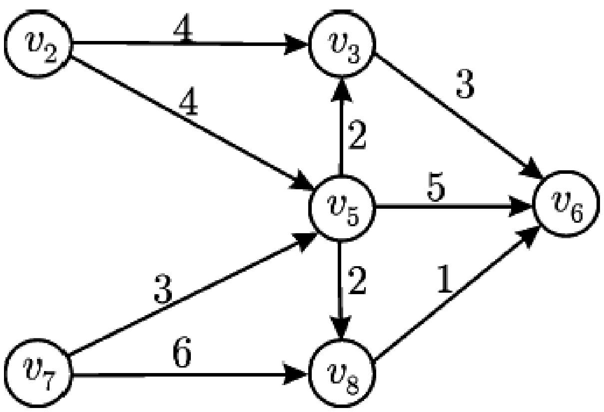
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1			2				

$i = 2$.
$V^{(2)} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.
Tomamos $v_4 \in V^{(2)}$ / $d_e(v_4) = 0$.





Numeramos v_4 con 2.
Eliminamos v_4 de $V^{(2)}$, es decir,
$V^{(3)} = V^{(2)} \sim \{v_4\}$.

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

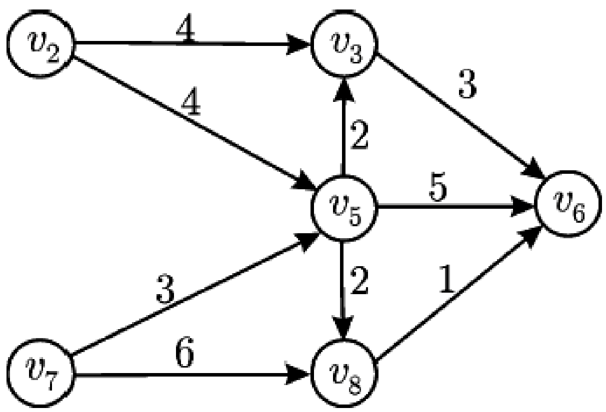
ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

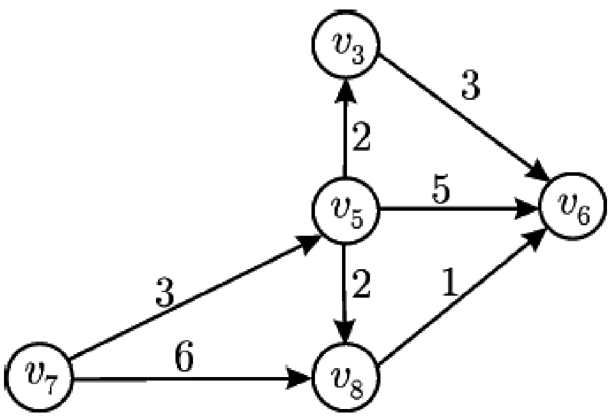
Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2				

$i = 3.$

$V^{(3)} = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$

Tomamos $v_2 \in V^{(3)}$ / $d_e(v_2) = 0.$





Numeramos v_2 con 3.

Eliminamos v_2 de $V^{(3)}$, es decir,

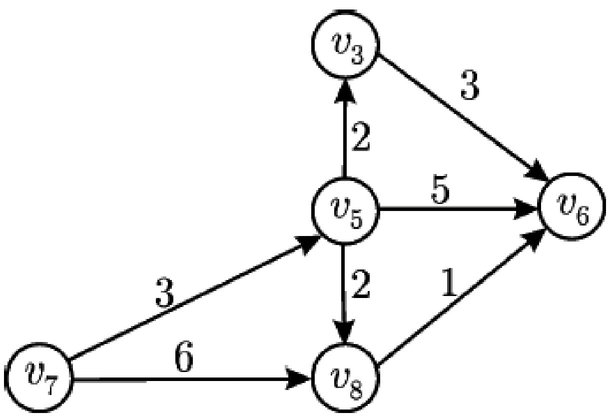
$V^{(4)} = V^{(3)} \sim \{v_2\}.$

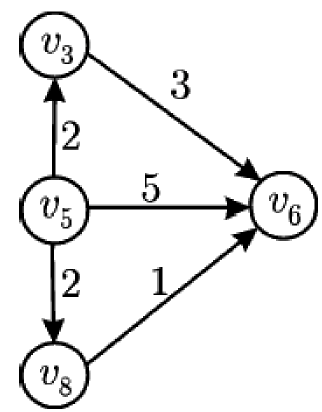
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2			4	

$i = 4.$
$V^{(4)} = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_7 \in V^{(4)}$ / $d_e(v_7) = 0.$





Numeramos v_7 con 4.
Eliminamos v_7 de $V^{(4)}$, es decir,
$V^{(5)} = V^{(4)} \sim \{v_7\}.$

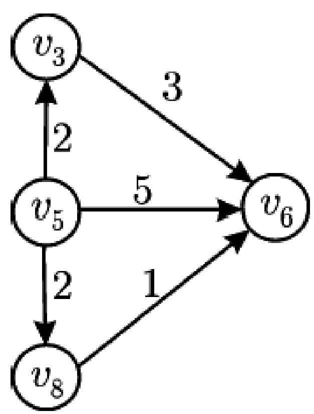
ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

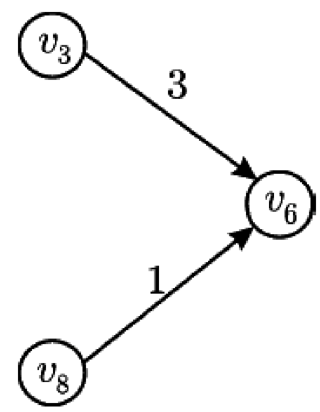
Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2	5		4	

$i = 5.$

$V^{(5)} = \{v_3, v_5, v_6, v_8\}.$

Tomamos $v_5 \in V^{(5)}$ / $d_e(v_5) = 0.$





Numeramos v_5 con 5.

Eliminamos v_5 de $V^{(5)}$, es decir,

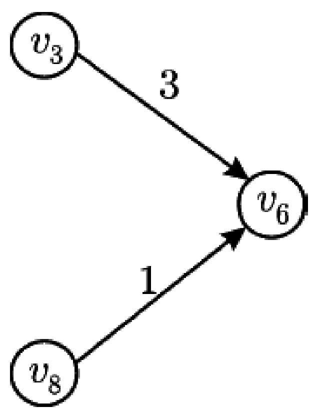
$V^{(6)} = V^{(5)} \sim \{v_5\}.$

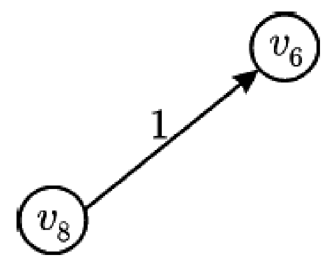
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5		4	

$i = 6.$
$V^{(6)} = \{v_3, v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_3 \in V^{(6)}$ / $d_e(v_3) = 0.$



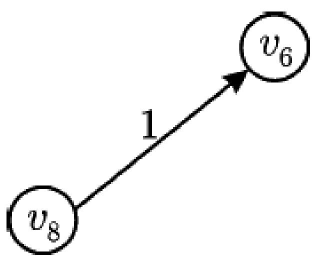


Numeramos v_3 con 6.
Eliminamos v_3 de $V^{(6)}$, es decir,
$V^{(7)} = V^{(6)} \sim \{v_3\}.$

ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5		4	7

$i = 7.$
$V^{(7)} = \{v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_8 \in V^{(7)}$ / $d_e(v_8) = 0.$



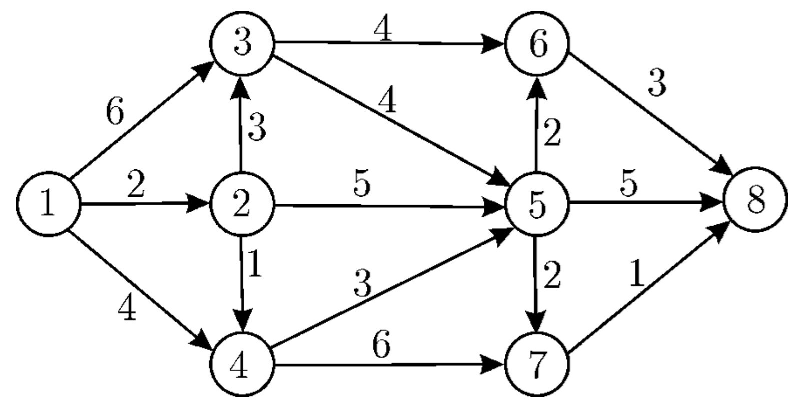
Numeramos v_8 con 7.
Eliminamos v_8 de $V^{(7)}$, es decir,
$V^{(8)} = V^{(7)} \sim \{v_8\}.$

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

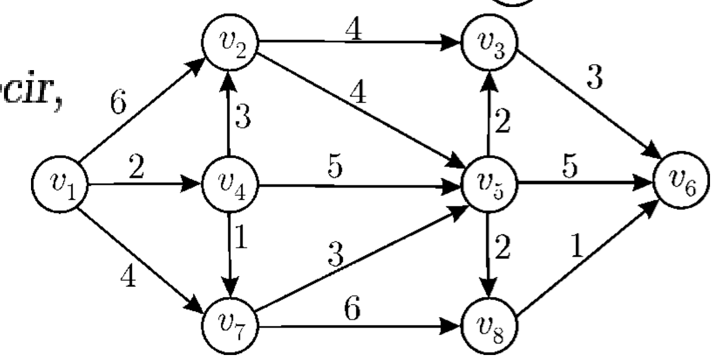
ALG. DE NUMERACIÓN: EJEMPLO

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5	8	4	7

$i = 8$.
$V^{(8)} = \{v_6\}$.
Tomamos $v_6 \in V^{(8)}$ / $d_e(v_6) = 0$.



Numeramos v_6 *con* 8.
Eliminamos v_6 *de* $V^{(8)}$, *es decir,*
$V^{(9)} = V^{(8)} \sim \{v_6\} = \emptyset$.

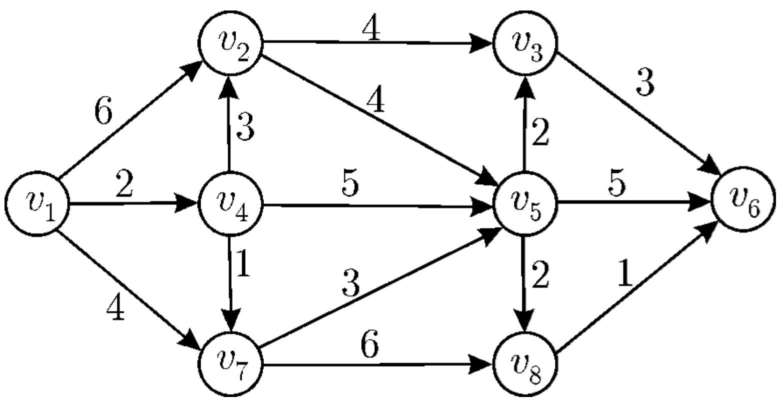


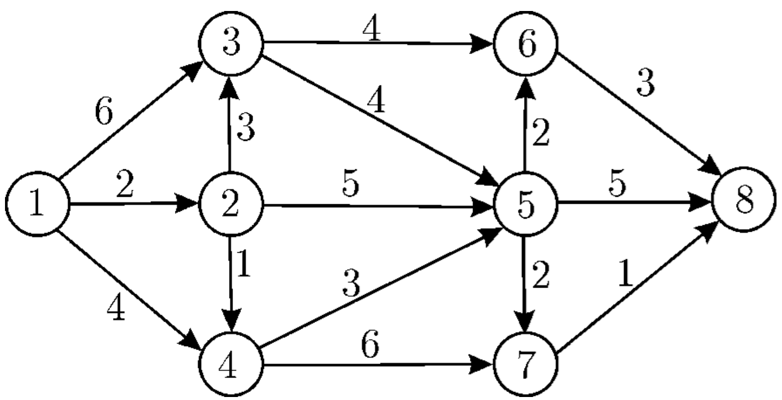
Índice

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO:

Consideremos el grafo dirigido de la siguiente figura:



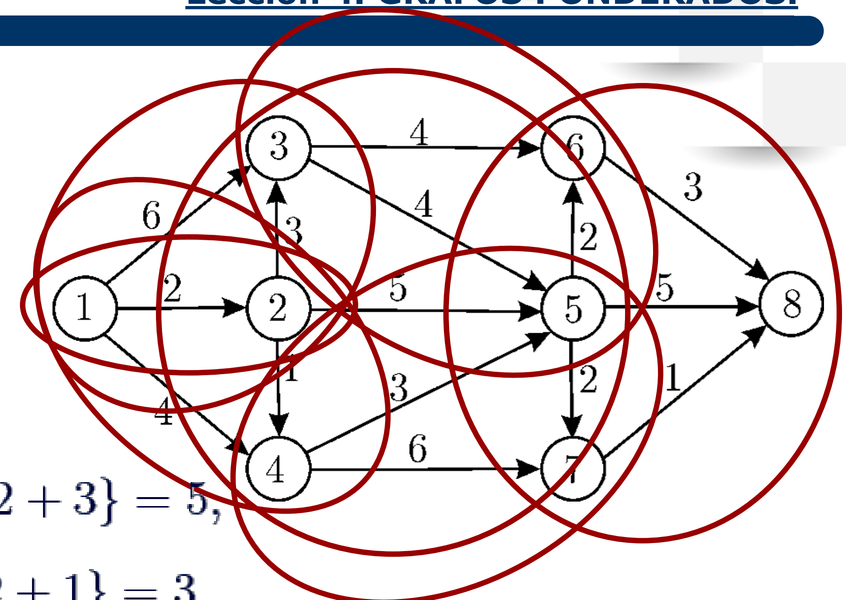


Con la nueva numeración que acabamos de calcular, ya podemos aplicar las ecuaciones de Bellman

$$u_j = \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

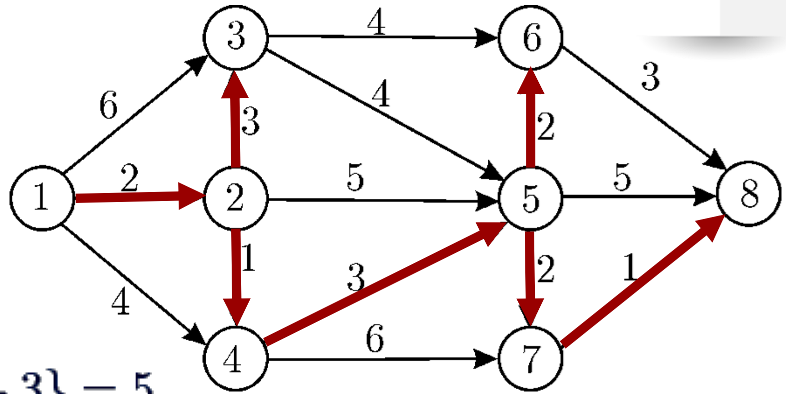
EJEMPLO:



$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \min\{u_1+\omega_{12}\} = 2,\\
u_3 &= \min\left\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\right\} = \min\{6, 2+3\} = 5,\\
u_4 &= \min\left\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\right\} = \min\{4, 2+1\} = 3,\\
u_5 &= \min\left\{u_2+\omega_{25}, u_3+\omega_{35}, \underline{u_4+\omega_{45}}\right\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6,\\
u_6 &= \min\left\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\right\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8,\\
u_7 &= \min\left\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\right\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8,\\
u_8 &= \min\left\{u_5+\omega_{58}, u_6+\omega_{68}, \underline{u_7+\omega_{78}}\right\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9.
\end{aligned}
$$

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO:
IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS



$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \min\{u_1+\omega_{12}\} = 2,\\
u_3 &= \min\left\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\right\} = \min\{6, 2+3\} = 5,\\
u_4 &= \min\left\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\right\} = \min\{4, 2+1\} = 3,\\
u_5 &= \min\left\{u_2+\omega_{25}, u_3+\omega_{35}, \underline{u_4+\omega_{45}}\right\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6,\\
u_6 &= \min\left\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\right\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8,\\
u_7 &= \min\left\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\right\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8,\\
u_8 &= \min\left\{u_5+\omega_{58}, u_6+\omega_{68}, \underline{u_7+\omega_{78}}\right\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9.
\end{aligned}
$$

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

APLICACIÓN: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Existen proyectos de gran envergadura que incluyen la realización de un gran número de subtareas o actividades que están mutuamente relacionadas de diversas formas.

Por ejemplo, para realizar una determinada actividad es necesario que ciertas actividades hayan sido ya realizadas.

La realización de este tipo de proyectos hace necesaria una planificación racional de la actividad a desarrollar que se designa por el nombre genérico de PERT.

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

APLICACIÓN: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Uno de los métodos utilizados en el contexto PERT pasa por representar el proyecto mediante un grafo dirigido.

Cada actividad de la que se compone el proyecto se representa por un vértice $\mathbf{v_j}$.

Si para realizar la actividad $\mathbf{v_j}$ es necesario haber realizado inmediatamente antes la actividad $\mathbf{v_i}$, incluimos un arco $(\mathbf{v_i},\mathbf{v_j})$.

A este arco le asignaremos un peso $\mathbf{w_{ij}}$, que represente el tiempo entre el inicio de la act. $\mathbf{v_i}$ y el inicio de la act. $\mathbf{v_j}$.

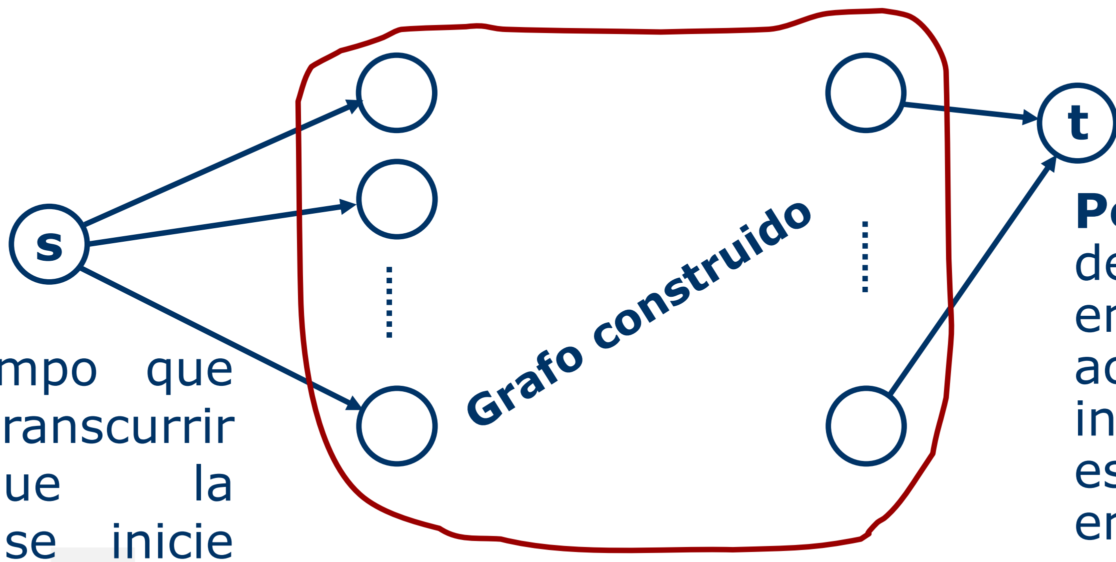
El grafo así construido es acíclico ya que la existencia de un circuito implicaría que el proyecto es irrealizable.

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

APLICACIÓN: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Añadiremos un vértice ficticio que una los vértices con grado de entrada cero. Indicará el inicio del proyecto.

Añadiremos un vértice ficticio que una los vértices con grado de salida cero. Indicará el final del proyecto.



Peso: tiempo que debe transcurrir para que la actividad se inicie (normalmente, 0)

Peso: tiempo que debe transcurrir entre el inicio de la actividad y el instante en que está lista para ser entregada.

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

APLICACIÓN: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Mínimo tiempo necesario para completar el proyecto en su totalidad:

Este camino se denomina **camino crítico** ya que las actividades que incluye determinan el tiempo total de realización del proyecto y cualquier retraso en la ejecución de una de ellas implica un retraso en la terminación del proyecto.

Es por ello que a estas actividades se las denomina **actividades críticas**.

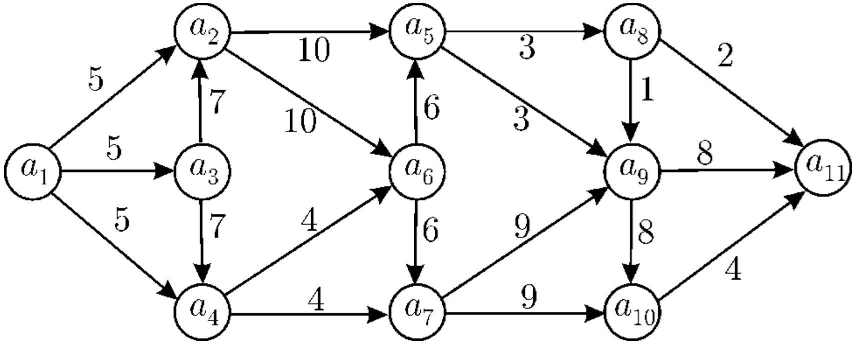
¿Cómo calcularlo?

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_j &= \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

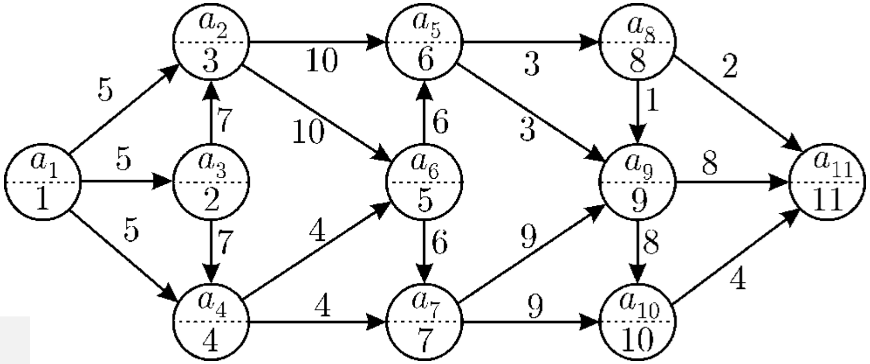
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 1: PERT

Calculemos el mínimo número de días en que puede completarse el siguiente proyecto.



Primero: calcular nueva numeración

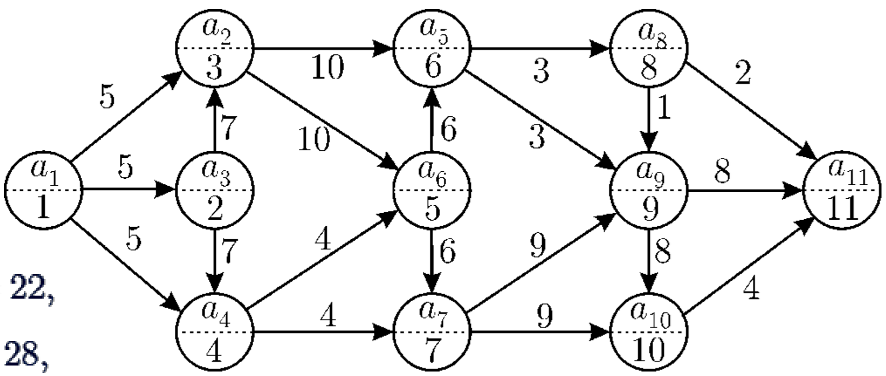


3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 1: PERT

Segundo: Aplicar ec. de Bellman

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \max\{u_1+\omega_{12}\} = 5,\\
u_3 &= \max\left\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\right\} = \max\{5, 5+7\} = 12,\\
u_4 &= \max\left\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\right\} = \max\{5, 5+7\} = 12,\\
u_5 &= \max\left\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\right\} = \max\{12+10, 12+4\} = 22,\\
u_6 &= \max\left\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\right\} = \max\{12+10, 22+6\} = 28,\\
u_7 &= \max\left\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\right\} = \max\{12+4, 22+6\} = 28,\\
u_8 &= \max\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31,\\
u_9 &= \max\left\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\right\} = \max\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37,\\
u_{10} &= \max\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \max\{28+9, 37+8\} = 45,\\
u_{11} &= \max\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \max\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$



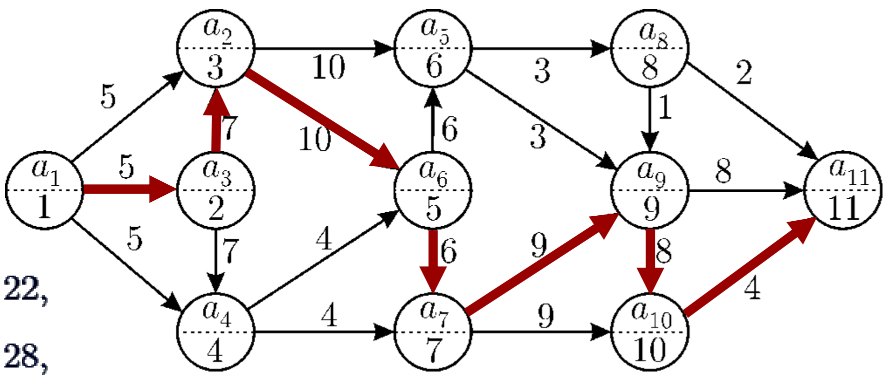
Mínimo número de días en que puede completarse el proyecto: 49

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 1: PERT

Tercero: Identificar el camino crítico

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \max\{u_1+\omega_{12}\} = 5,\\
u_3 &= \max\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\} = \max\{5, 5+7\} = 12,\\
u_4 &= \max\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\} = \max\{5, 5+7\} = 12,\\
u_5 &= \max\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\} = \max\{12+10, 12+4\} = 22,\\
u_6 &= \max\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\} = \max\{12+10, 22+6\} = 28,\\
u_7 &= \max\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\} = \max\{12+4, 22+6\} = 28,\\
u_8 &= \max\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31,\\
u_9 &= \max\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\} = \max\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37,\\
u_{10} &= \max\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \max\{28+9, 37+8\} = 45,\\
u_{11} &= \max\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \max\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$



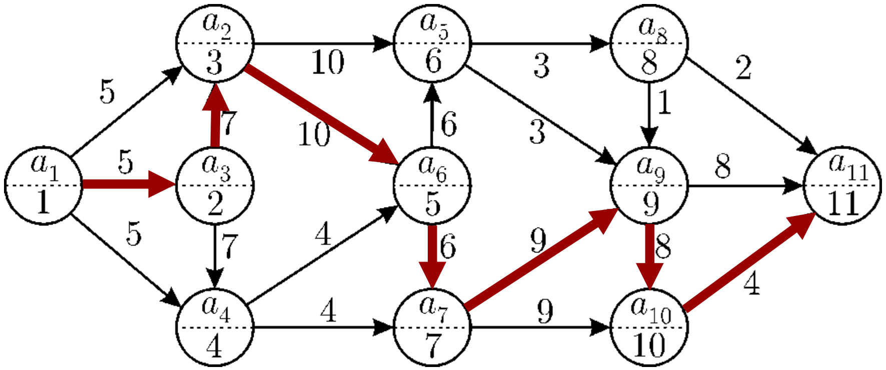
Mínimo número de días en que puede completarse el proyecto: 49

Índice

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 1: PERT

Pregunta: calcular el máximo retraso permitido para la actividad $\mathbf{a_5}$ (correspondiente al vértice renumerado con un 6) de manera que no afecte a la duración del proyecto en su totalidad

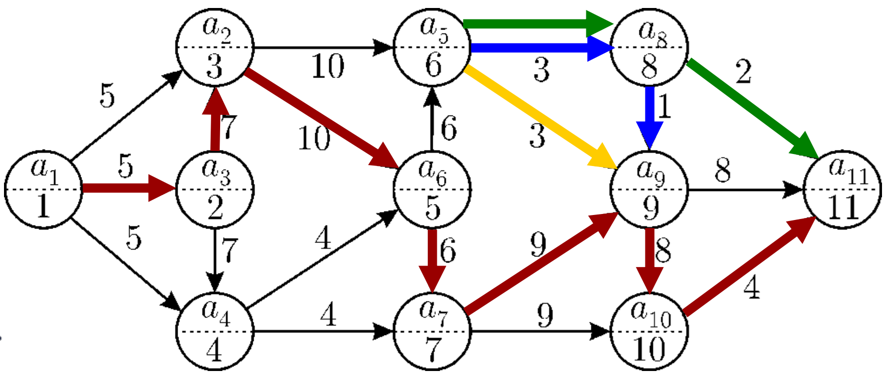


Solución: consideraremos los distintos caminos que enlazan la actividad $\mathbf{a_5}$ con el camino crítico

3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 1: PERT

- Camino $P_{6,9}^{(1)}$: 6 9, con peso $\omega(P_{6,9}^{(1)}) = 3$.
- Camino $P_{6,9}^{(2)}$: 6 8 9, con peso $\omega(P_{6,9}^{(2)}) = 4$.
- Camino $P_{6,11}$: 6 8 11, con peso $\omega(P_{6,11}) = 5$.



Supongamos que la actividad $\mathbf{a_5}$ se retrasa x días. Para que los tres caminos anteriores no retrasen el camino crítico se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{ll} P_{6,9}^{(1)}: & u_6 + \omega(P_{6,9}^{(1)}) + x \leq u_9 \\ P_{6,9}^{(2)}: & u_6 + \omega(P_{6,9}^{(2)}) + x \leq u_9 \\ P_{6,11}: & u_6 + \omega(P_{6,11}) + x \leq u_{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 28 + 3 + x \leq 37 \\ 28 + 4 + x \leq 37 \\ 28 + 5 + x \leq 49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \leq 6 \\ x \leq 5 \\ x \leq 16 \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq 5$$

Máximo retraso permitido de la actividad $\mathbf{a_5}$: 5 días

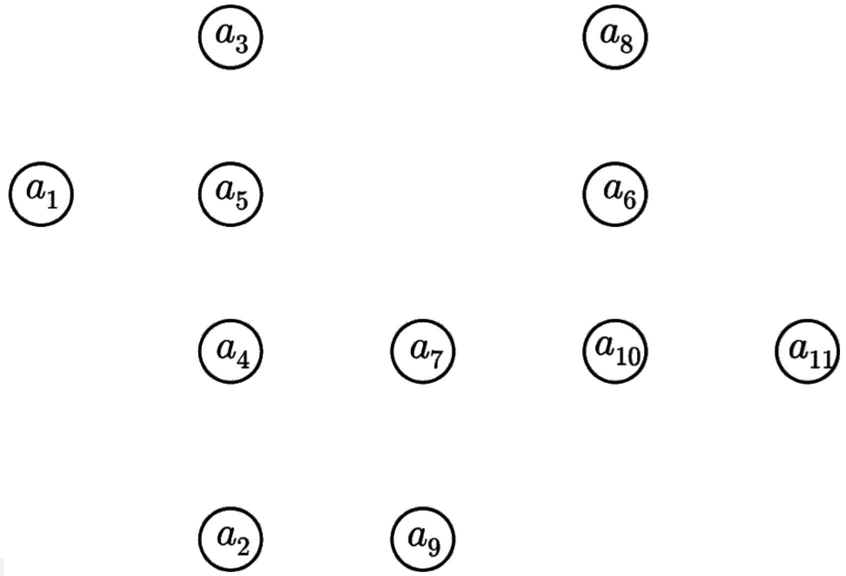
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 2: PERT

¿Cómo representar el grafo a partir de una tabla de prerrequisitos?

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo necesario	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Primero: Representamos cada actividad mediante un vértice



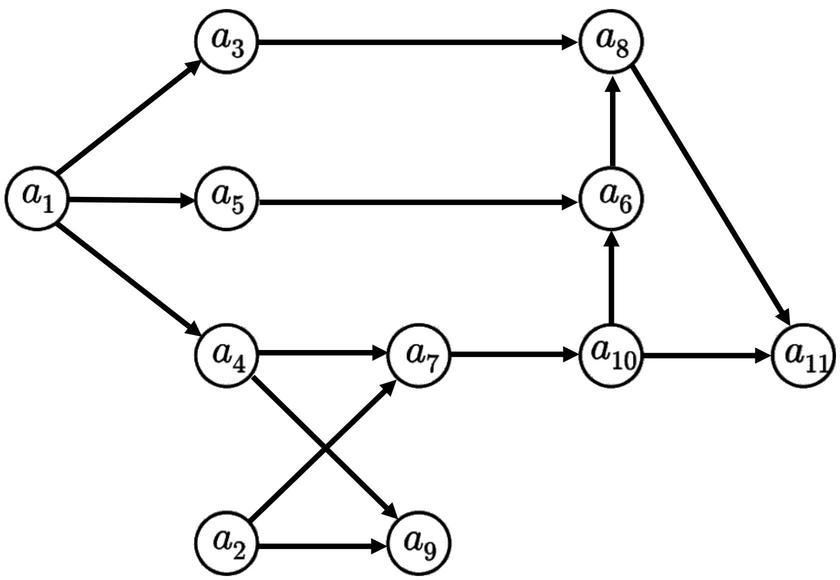
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 2: PERT

¿Cómo representar el grafo a partir de una tabla de prerrequisitos?

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo necesario	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Segundo: Incorporamos los arcos en función de los prerrequisitos



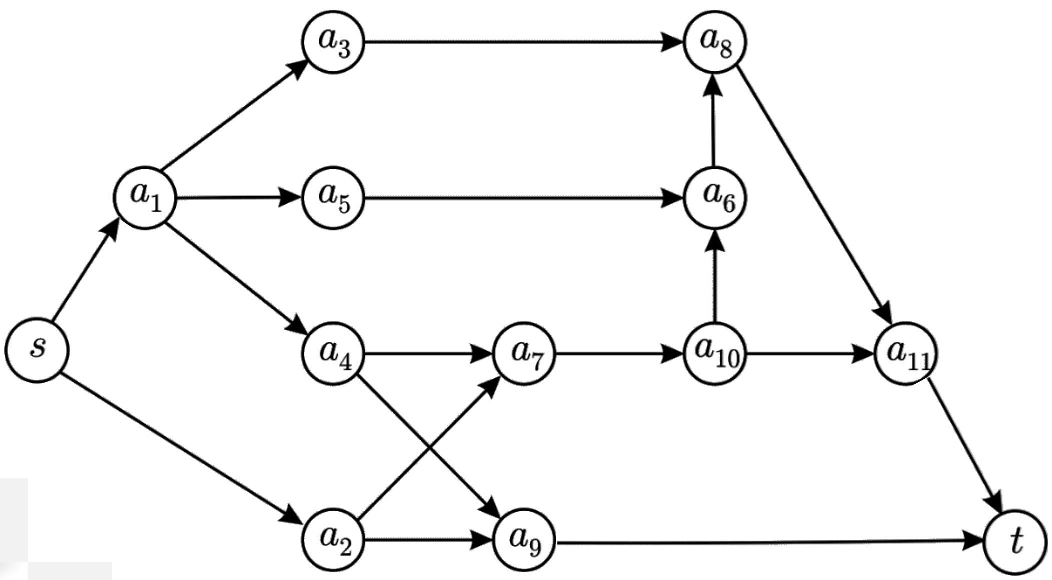
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 2: PERT

¿Cómo representar el grafo a partir de una tabla de prerrequisitos?

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo necesario	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Tercero: Añadimos los vértices ficticios



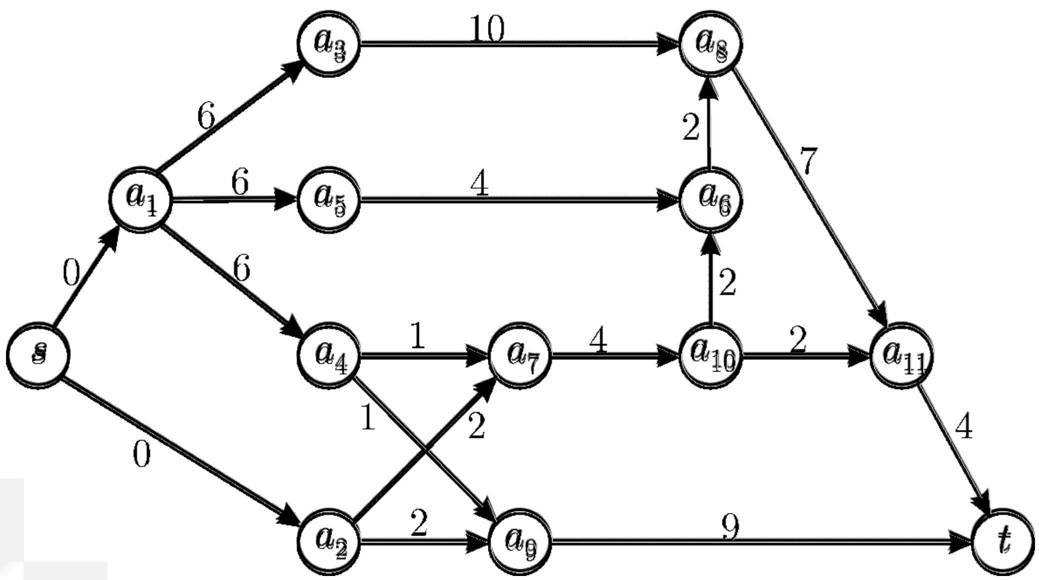
3. GRAFOS ACÍCLICOS. MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO

EJEMPLO 2: PERT

¿Cómo representar el grafo a partir de una tabla de prerrequisitos?

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo necesario	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Cuarto: Añadimos los pesos



4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

Sea un grafo ponderado tal que $\mathbf{w_{ij}} \geq 0$.
Este algoritmo encuentra los caminos más cortos y sus pesos desde el vértice 1 al resto.

Se asignan varias etiquetas a los vértices del grafo. En algún momento algunos vértices podrán tener etiquetas variables y el resto etiquetas fijas.

Denotaremos al conjunto de vértices con etiqueta fija por P y al conjunto de vértices con etiqueta variable por T.

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

ALGORITMO DE DIJKSTRA

Paso 1. Inicialización:

$$P = \{1\} \quad T = \{2, 3, \ldots, n\}$$
$$u_1 = 0$$
$$u_j = w_{1j} \quad j \in \Gamma(1)$$
$$u_j = \infty \quad j \notin \Gamma(1)$$

Paso 2. Designación de etiqueta variable como fija.

Determinar $k \in T \ / \ u_k = \text{mín}_{j \in T}\{u_j\}$

Hacer $T := T \sim \{k\}$ y $P := P \cup \{k\}$

Si $T = \emptyset$, STOP; u_j es el peso del camino más corto de 1 a j, $j = 2, 3, \ldots, n$

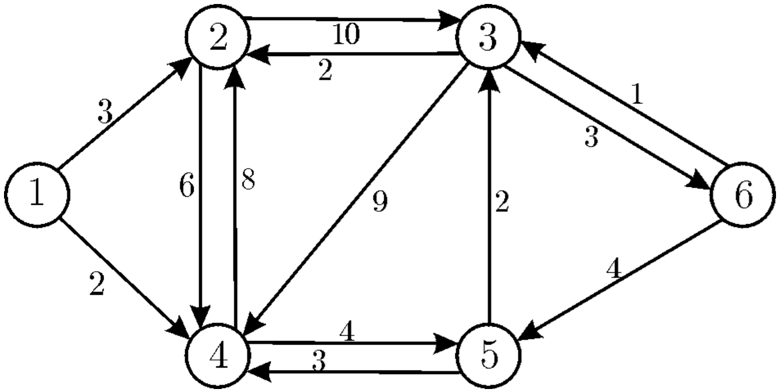
Paso 3. Actualización:

$$\forall j \in \Gamma(k) \cap T, \quad u_j := \text{mín}\{u_j, u_k + w_{kj}\}$$

Ir al Paso 2.

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

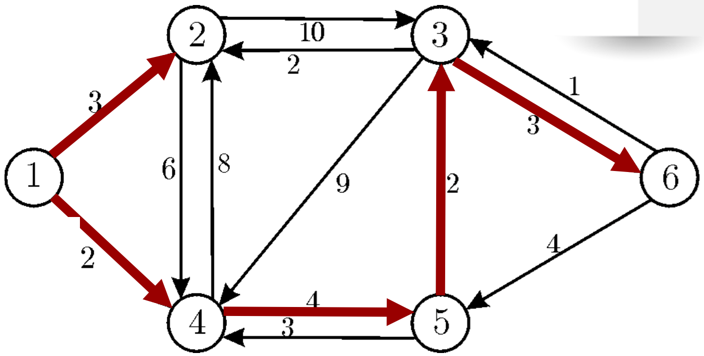
EJEMPLO: Consideremos el siguiente grafo ponderado:



Deseamos calcular los caminos más cortos y sus pesos desde el vértice 1 al resto. Aplicaremos el algoritmo de Dijkstra.

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

EJEMPLO:



Inicialización
Iteración 1

$T = \{2,3,4,5,6\}$
$P = \{1\}$,
$u_1 = 0$
$u_2 = w_{12} = 3$
$u_3 = \infty$
$\boxed{u_4 = w_{14} = 2}$
$u_5 = \infty$
$u_6 = \infty$

Iteración 2

$T = \{2,3,5,6\}$
$P = \{1,4\}$, $\Gamma(4) \cap T = \{2,5\}$
$\boxed{u_2 = \text{mín}\{\underline{u_2}, u_4 + w_{42}\} = \text{mín}\{3, 2+8\} = 3}$
$u_3 = \infty$
$u_5 = \text{mín}\{u_5, \underline{u_4 + w_{45}}\} = \text{mín}\{\infty, 2+4\} = 6$
$u_6 = \infty$

Iteración 3

$T = \{3,5,6\}$
$P = \{1,4,2\}$, $\Gamma(2) \cap T = \{3\}$
$u_3 = \text{mín}\{u_3, \underline{u_2 + w_{23}}\} = \text{mín}\{\infty, 3+10\} = 13$
$\boxed{u_5 = 6}$
$u_6 = \infty$

Iteración 4

$T = \{3,6\}$
$P = \{1,4,2,5\}$, $\Gamma(5) \cap T = \{3\}$
$\boxed{u_3 = \text{mín}\{u_3, \underline{u_5 + w_{53}}\} = \text{mín}\{13, 6+2\} = 8}$
$u_6 = \infty$

Iteración 5

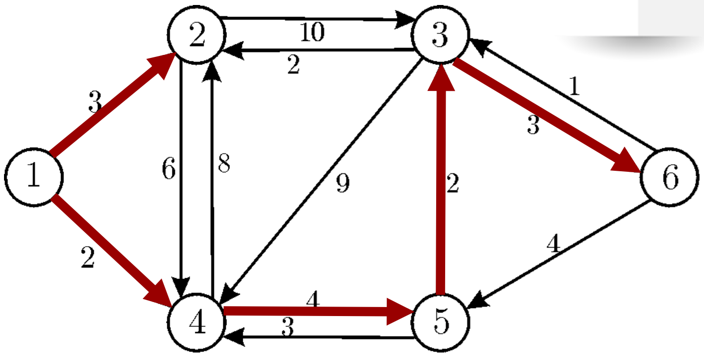
$T = \{6\}$
$P = \{1,4,2,5,3\}$, $\Gamma(3) \cap T = \{6\}$
$\boxed{u_6 = \text{mín}\{u_6, \underline{u_3 + w_{36}}\} = \text{mín}\{\infty, 8+3\} = 11}$

Iteración 6

$T = \emptyset$
$P = \{1,4,2,5,3,6\}$, STOP

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

EJEMPLO:



	Camino	*Peso*
De 1 a 2	1 2	$u_2 = 3$
De 1 a 3	1 4 5 3	$u_3 = 8$
De 1 a 4	1 4	$u_4 = 2$
De 1 a 5	1 4 5	$u_5 = 6$
De 1 a 6	1 4 5 3 6	$u_6 = 11$

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

Llamaremos $\mathbf{u_{ij}}$ al peso del camino más corto de **i** a **j**.

Utilizaremos las variables:

$\mathbf{u_{ij}^{(m)}}$: peso del camino más corto del vértice **i** al **j** con la restricción de que no contenga a los vértices **m**, **m** + 1, ..., **n** (exceptuando a los extremos **i** y **j** en su caso).

Estas variables pueden calcularse recursivamente utilizando las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i,j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j, \\
& m = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$

Y es posible ver que $\mathbf{u_{ij}} = \mathbf{u_{ij}^{(n+1)}}$, con lo que tendremos los pesos de los caminos más cortos entre todos los pares de vértices.

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

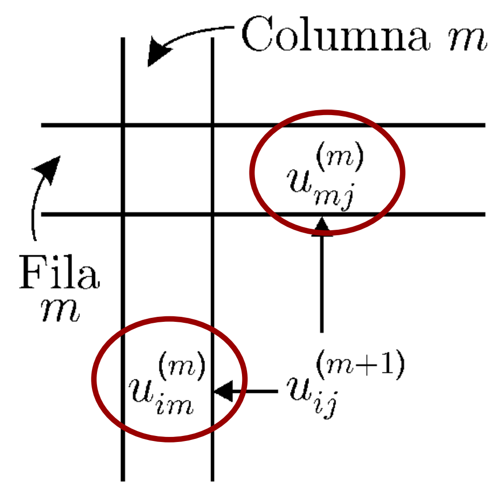
$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i, j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \underset{m=1,2,\dots n}{\underline{\text{mín}}} \left\{ u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)} \right\} \quad \forall i, j,$$

Para actualizar un elemento que ocupe la fila **i** y columna **j** en la iteración **m**+1, debemos calcular:

el mínimo entre el mismo elemento de la iteración anterior **m** y la suma de dos elementos:

- el que ocupa la misma fila **i** y la columna de la iteración **m**,
- el que ocupa la misma columna **j** y la fila de la iteración **m**.



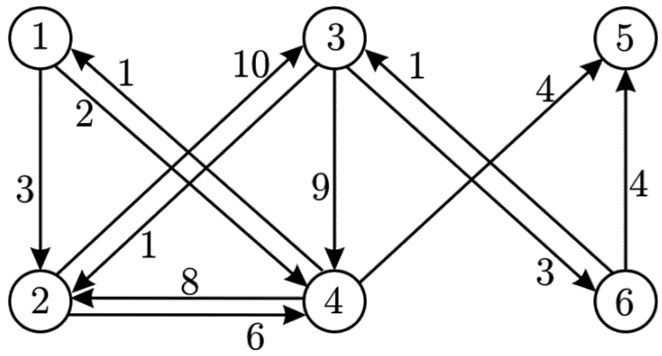
5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i,j$$
$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j,$$
$$m = 1,2,\ldots n$$

W=

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞



(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

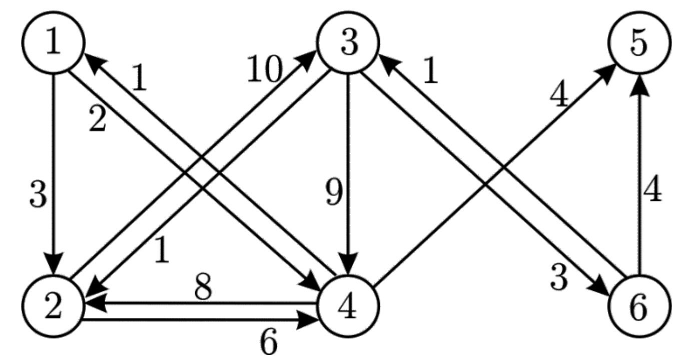
5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i, j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j,$$

$$m = 1, 2, \ldots n$$



(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

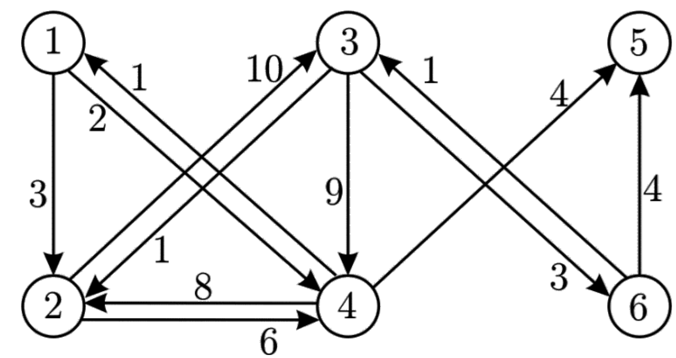
5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i, j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j,$$

$$m = 1, 2, \ldots n$$



(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

Para facilitar la construcción de los caminos más cortos una vez calculados sus pesos, se puede utilizar otra matriz:

$$\Theta^{(m)} = [\theta_{ij}^{(m)}]$$

donde $\theta_{ij}^{(m)}$ representa el vértice anterior al **j** en el camino más corto de **i** a **j** en la iteración **m**.

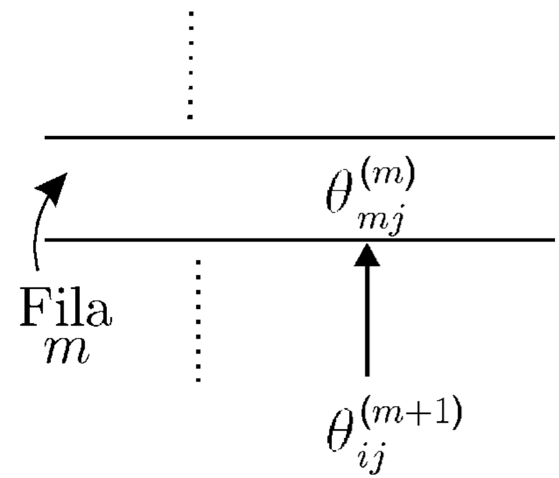
Inicialmente $\theta_{ij}^{(1)} = i$ si $u_{ij}^{(1)} < +\infty$ y:

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

Si un elemento de la matriz de pesos no se modifica en la iteración **m**+1, entonces el correspondiente elemento de la matriz $\Theta^{(m+1)}$ tampoco se modifica.



Si un elemento de la matriz de pesos se modifica en la iteración **m**+1, entonces el correspondiente elemento de la matriz $\Theta^{(m+1)}$ se modifica por el que ocupa su misma columna y fila **m**.

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=1)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	4			4	
5						
6			6		6	

(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	[1]		[1]	4	
5						
6			6		6	

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

	1	2	3	4	5	6
1		1	2	1		[3]
2		[3]	2	2		[3]
3		3	2	2		3
4	4	1	2	1	4	[3]
5						
6		[3]	6	[2]	6	[3]

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	[6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=7)

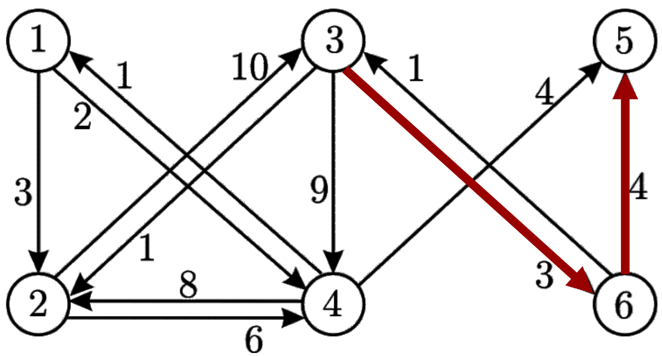
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS:

Camino más corto de 3 a 5:

1. Peso: $\mathbf{u}_{35}^{(\mathbf{7})} = 7$
2. Camino:
   - Vértice anterior al 5: $\theta_{35}^{(7)} = 6$
   - Vértice anterior al 6: $\theta_{36}^{(7)} = 3$



5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=6)

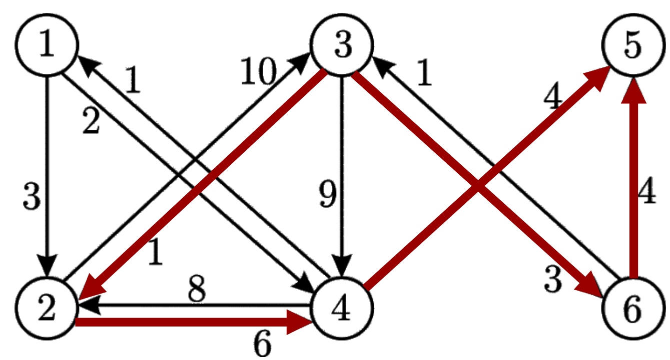
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS:

Camino más corto de 3 a 5 **sin pasar por el vértice 6**:
Necesitamos los datos de la iteración 6.

1. Peso: $\mathbf{u}_{35}^{(\mathbf{6})} = 11$
2. Camino:
   - Vértice anterior al 5: $\theta_{35}^{(6)} = 4$
   - Vértice anterior al 4: $\theta_{34}^{(6)} = 2$
   - Vértice anterior al 2: $\theta_{32}^{(6)} = 3$



5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO: Consideremos un grafo con V={A,B,C,D,E,F} y matriz de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 6 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 1 & \infty & 7 & \infty & \infty & 4 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Supongamos que deseamos calcular el camino más corto de A a E y su peso, con la condición de que no contenga los vértices C y F como internos.

Deberemos reordenar los vértices del grafo de manera que los vértices por donde no queremos que el camino pase sean los últimos.

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO: Camino más corto de A a E y su peso, con la condición de que no contenga los vértices C y F como internos.

Posibles reordenaciones:

- A, B, D, E, C, F : Parar en la iteración 5.
- B, D, A, E, C, F : Parar en la iteración 3.

$\Omega =$

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	∞	5	8	∞
B	∞	∞	1	2	6	∞
C	1	∞	∞	3	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permutamos filas

	A	B	C	D	E	F
B	∞	∞	1	2	6	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
A	∞	2	∞	5	8	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
C	1	∞	∞	3	∞	∞
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permutamos columnas

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	6	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	5	∞	8	∞	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	∞	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

EJEMPLO: Con la matriz reordenada iniciamos el algoritmo de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(1)} \equiv \begin{array}{c||c|ccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
A & 2 & 5 & \infty & 8 & \infty & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(1)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & & B & & B & B & \\ \hline
D & & & & D & & \\
A & A & A & & A & & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\ \hline\hline
\end{array}$$

$$\Omega^{(2)} \equiv \begin{array}{c||c|c|cccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \hline
A & 2 & [4] & \infty & 8 & [3] & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(2)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & & B & & B & B & \\ \hline
D & & & & D & & \\ \hline
A & A & [B] & & A & [B] & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\ \hline\hline
\end{array}$$

EJEMPLO: Con la matriz reordenada iniciamos el algoritmo de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(2)} \equiv \begin{array}{c||c|c|cccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\
\hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
\hline
A & 2 & [4] & \infty & 8 & [3] & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\hline\hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(2)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & & B & & B & B & \\
\hline
D & & & & D & & \\
\hline
A & A & [B] & & A & [B] & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\
\hline\hline
\end{array}$$

$$\Omega^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & \infty & 2 & \infty & [5] & 1 & \infty \\
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
A & 2 & 4 & \infty & [7] & 3 & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & [6] & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\hline\hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & & B & & [D] & B & \\
D & & & & D & & \\
A & A & B & & [D] & B & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & [D] & & \\
F & & & F & & & \\
\hline\hline
\end{array}$$

EJEMPLO: Con la matriz reordenada iniciamos el algoritmo de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline B & \infty & 2 & \infty & [5] & 1 & \infty \\ D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ A & 2 & 4 & \infty & [7] & 3 & \infty \\ E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\ C & \infty & 3 & 1 & [6] & \infty & \infty \\ F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline \end{array}, \quad \Theta^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline B & & B & & [D] & B & \\ D & & & & D & & \\ A & A & B & & [D] & B & \\ E & & & E & & E & E \\ C & & C & C & [D] & & \\ F & & & F & & & \\ \hline \end{array}$$

IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS:

Camino más corto de A a E **sin pasar por los vértices C, F**:

1. Peso: $\mathbf{u}_{AE}^{(\mathbf{3})} = 7$
2. Camino:
   - Vértice anterior a E: $\theta_{AE}^{(3)} = D$
   - Vértice anterior a D: $\theta_{AD}^{(3)} = B$
   - Vértice anterior a B: $\theta_{AB}^{(3)} = A$

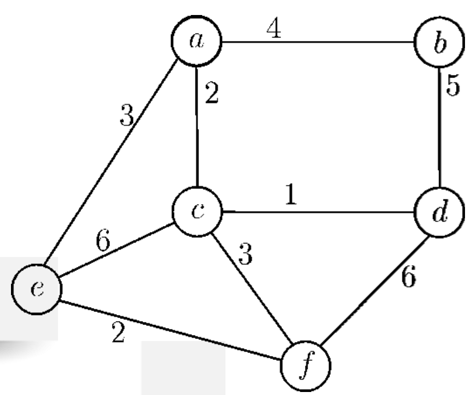
A, B, D, E

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

DEFINICIÓN:

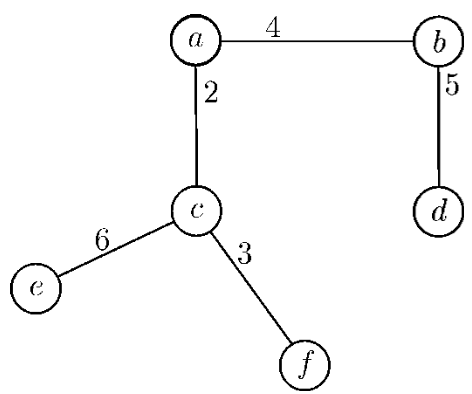
Sea G un grafo ponderado y no dirigido. Diremos que T es un **árbol generador de mínimo peso** si T es un árbol generador tal que la suma de los pesos asociados a sus aristas es mínima.

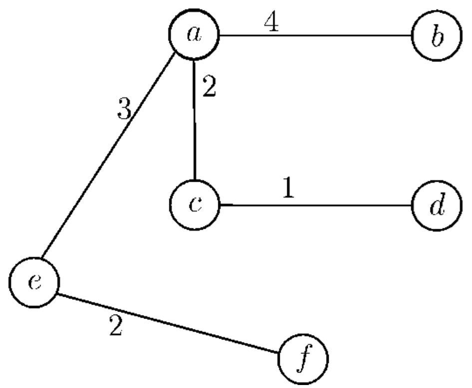
EJEMPLO: El siguiente grafo representa una red de telecomunicaciones.



Este árbol generador no es de peso mínimo: Su peso es 20.

Hay árboles con menor peso: 12.





6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

ALGORITMO DE KRUSKAL

Sea G = (V,A) un grafo no dirigido y con pesos $\mathbf{w_i}$ asociados a cada arista $\mathbf{e_i} \in$ A, i = 1, 2, . . . , m y con n vértices.

PASO 1. $T = \emptyset$.

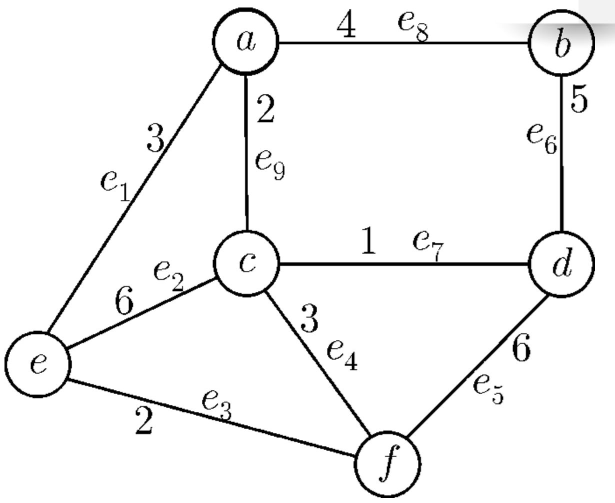
PASO 2. Ordenar en orden creciente las aristas de G, es decir,

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \;/\; \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_m.$$

PASO 3. Añadir aristas en T de forma ordenada siempre que no se formen ciclos hasta tener en T, n−1 aristas.

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: El siguiente grafo representa una red de telecomunicaciones. Aplicaremos el algoritmo de Kruskal para obtener un árbol generador de peso mínimo.

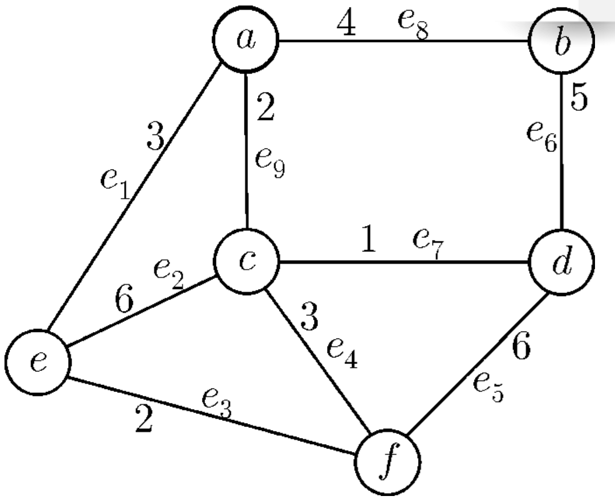


Para ello primero ordenamos las aristas del árbol en orden creciente de pesos:

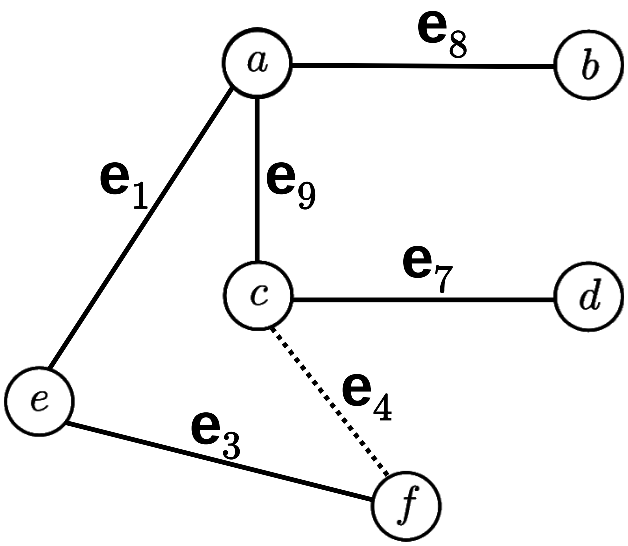
Arista:	e_7	e_9	e_3	e_1	e_4	e_8	e_6	e_5	e_2
Peso:	1	2	2	3	3	4	5	6	6

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

Arista:	e_7	e_9	e_3	e_1	e_4	e_8	e_6	e_5	e_2
Peso:	1	2	2	3	3	4	5	6	6



Vamos añadiendo aristas en T de forma ordenada siempre que no se formen ciclos hasta tener en T, 6−1 aristas.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

ALGORITMO DE PRIM

Sea G un grafo no dirigido ponderado con n vértices.

Paso 1. $T = \emptyset$, $U = \{v^\star\}$ $\quad v^\star \in V(G)$

$L(u) = w(u, v^\star)$ (∞ si $\nexists$ arista) $\forall u \in V(G)$

Paso 2. Encontrar $u^\star \in V(G)$ tal que

$L(u^\star) = \text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\}$

Paso 3. Añadir $u^\star$ a U, es decir, $U := U \cup \{u^\star\}$

Añadir la arista e incidente con $u^\star$ con peso $L(u^\star)$ a T, es decir, $T := T \cup \{e\}$

Paso 4. Si $card(U) = n$, STOP.

Si $card(U) < n$, hacer

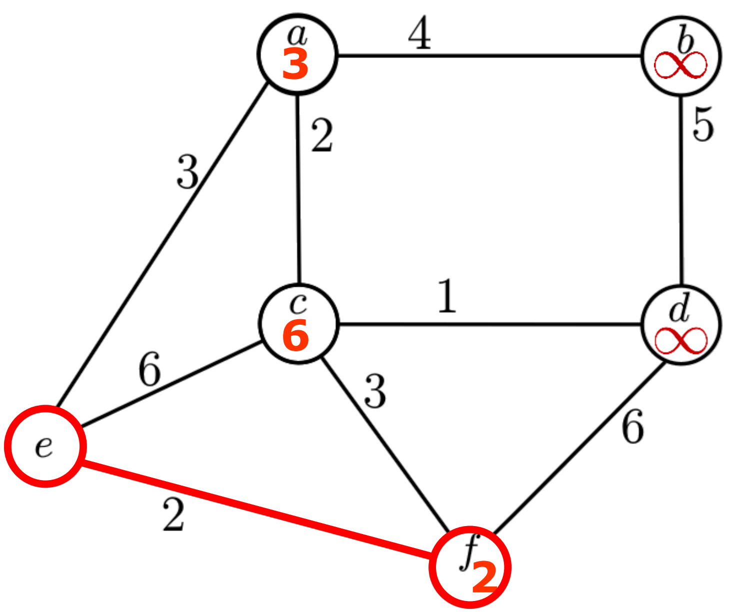
$L(u) := \text{mín}\{L(u), w(u^\star, u)\} \quad \forall u \notin U$

e ir al Paso 2.

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \emptyset,\ U = \{e\}.$
$L(a) = \omega_{ea} = 3,$
$L(b) = \infty,$
$L(c) = \omega_{ec} = 6,$
$L(d) = \infty,$
$L(f) = \omega_{ef} = 2.$
Seleccionamos $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(f)$.
Añadimos el vértice f a U y la arista $\{e, f\}$ a T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

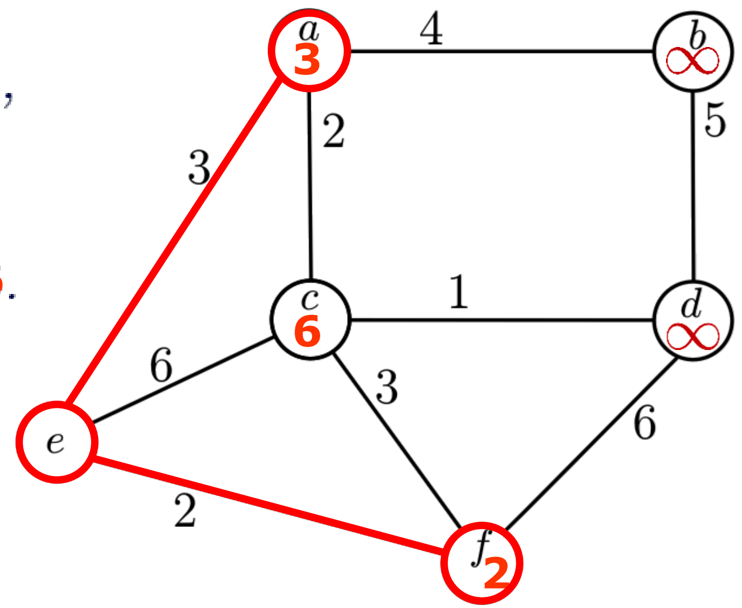
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e, f\}\},\ U = \{e, f\}.$

$L(a) = \text{mín}\{L(a), \omega_{fa}\} = \text{mín}\{3, \infty\} = \omega_{ea} = 3,$
$L(b) = \text{mín}\{L(b), \omega_{fb}\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty,$
$L(c) = \text{mín}\{L(c), \omega_{fc}\} = \text{mín}\{6, 3\} = \omega_{fc} = 3,$
$L(d) = \text{mín}\{L(d), \omega_{fd}\} = \text{mín}\{\infty, 6\} = \omega_{fd} = 6.$

Seleccionamos $\text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\} = L(a).$

Añadimos el vértice a a U y la arista $\{e, a\}$ a T.



Índice

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

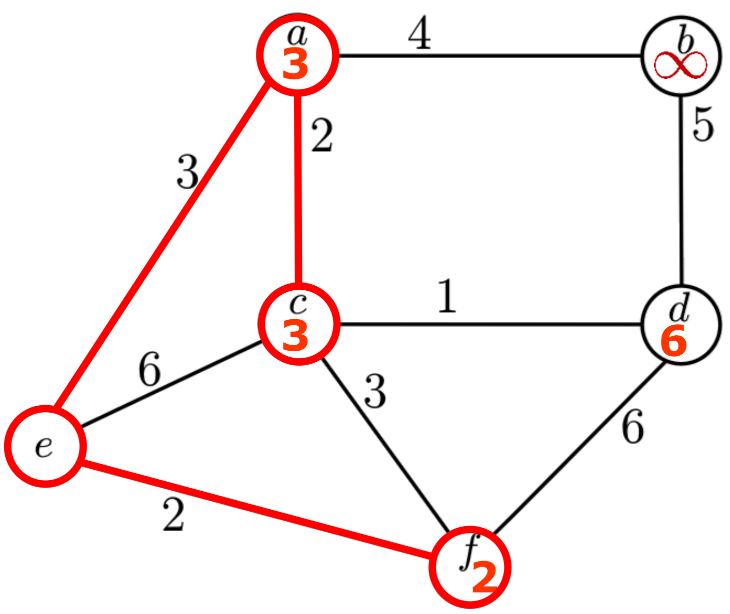
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\}\},\ U = \{e,f,a\}.$

$L(b) = \text{mín}\{L(b), \underline{\omega_{ab}}\} = \text{mín}\{\infty, 4\} = \omega_{ab} = 4,$
$L(c) = \text{mín}\{L(c), \underline{\omega_{ac}}\} = \text{mín}\{3, 2\} = \omega_{ac} = 2,$
$L(d) = \text{mín}\{\underline{L(d)}, \omega_{ad}\} = \text{mín}\{6, \infty\} = \omega_{fd} = 6.$

Seleccionamos $\text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\} = L(c).$

Añadimos el vértice c *a* U *y la arista* $\{a,c\}$ *a* T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

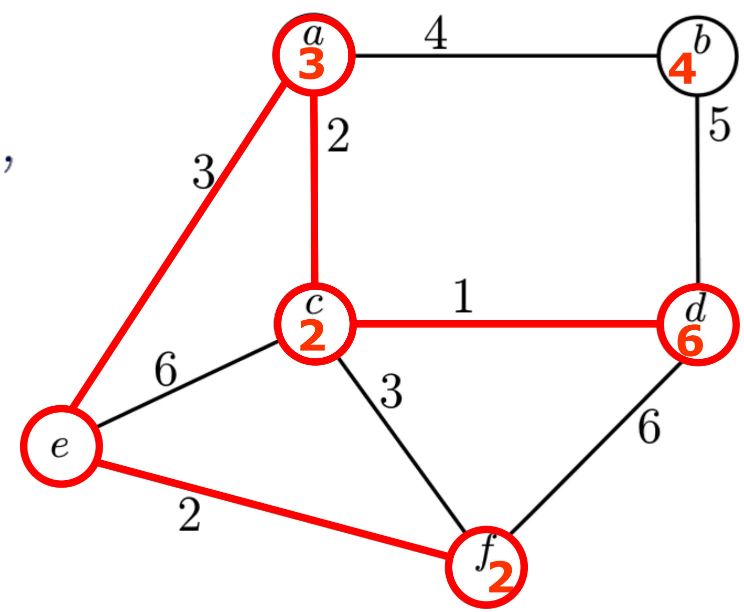
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e, f\}, \{e, a\}, \{a, c\}\},\ U = \{e, f, a, c\}.$

$L(b) = \text{mín}\{\underline{L(b)}, \omega_{cb}\} = \text{mín}\{4, \infty\} = \omega_{ab} = 4,$
$L(d) = \text{mín}\{\overline{L(d)}, \underline{\omega_{cd}}\} = \text{mín}\{6, 1\} = \omega_{cd} = 1.$

Seleccionamos $\text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\} = L(d)$.

Añadimos el vértice d a U y la arista $\{c, d\}$ a T.



Índice

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

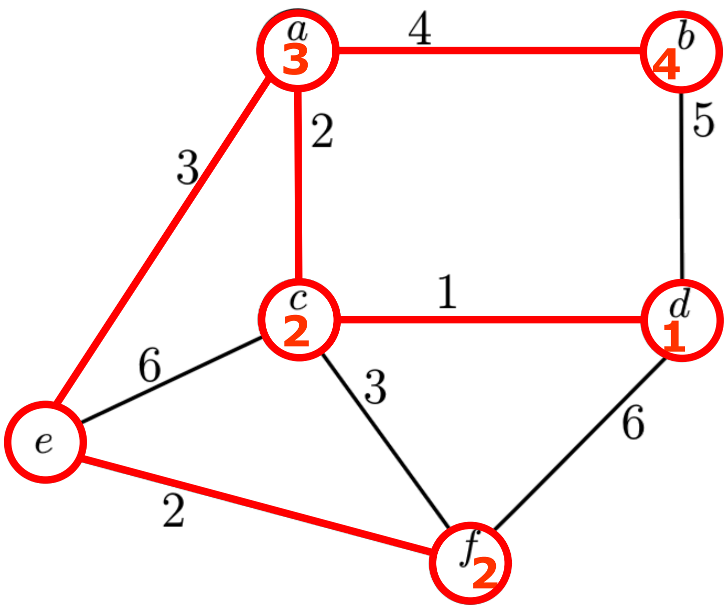
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\},\{c,d\}\},$$
$$U = \{e,f,a,c,d\}.$$

$$L(b) = \text{mín}\{\underline{L(b)}, \omega_{db}\} = \text{mín}\{4,5\} = \omega_{ab} = 4,$$

Seleccionamos $\text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\} = L(b)$.

Añadimos el vértice b a U y la arista $\{a,b\}$ a T.

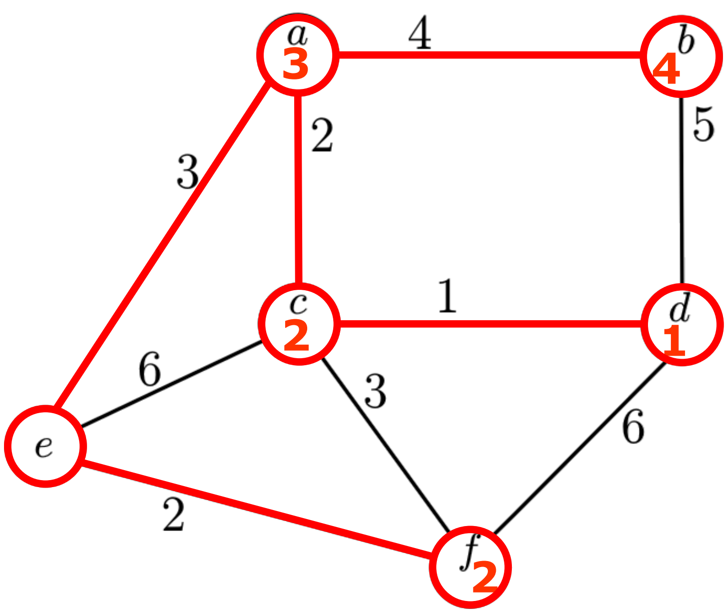


Índice

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,b\}\},$$
$$U = \{e,f,a,c,d,b\}, \text{ PARAR.}$$



T es un árbol generador de mínimo peso, con peso 2+3+2+1+4=12.