MATEMÁTICA DISCRETA

CURSO 2022/2023

Violeta Migallón Gomis
Jose Penadés Martínez

MATEMÁTICA DISCRETA

CONTENIDO

Bloque 1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

Lección 1.
GRAFOS: FUNDAMENTOS

1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

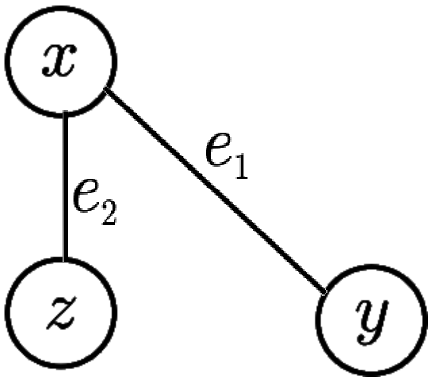
DEFINICIONES

1. Un **grafo no dirigido** *G* es un par (*V*,*A*), en el que *V* es un conjunto cuyos elementos llamaremos **vértices**, y *A* una familia de pares no ordenados de vértices, que llamaremos **aristas**.

EJEMPLO:

V={x,y,z}

A={e_1={x,y}, e_2={x,z}}



Índice

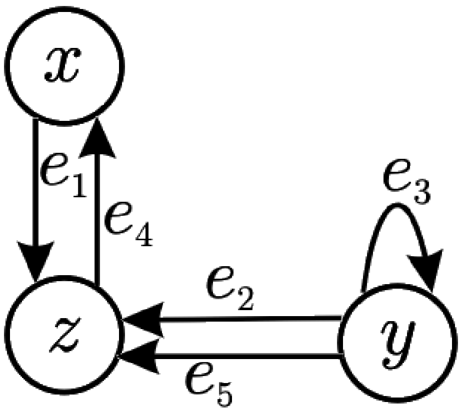
1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

2. Un **grafo dirigido** *G* es un par (*V*,*A*), en el que *V* es un conjunto cuyos elementos llamaremos **vértices**, y *A* una familia de pares ordenados de vértices, que llamaremos **arcos**.

EJEMPLO:

V={x,y,z}

A={e_1=(x,z),e_2=(y,z), e_3=(y,y),e_4=(z,x), e_5=(y,z)}



1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

MOTIVACIÓN

La teoría de grafos nos sirve de ayuda para la representación y conocimiento de las estructuras de informática, además de favorecer la aplicación de la informática a otros campos.

Ejemplos de áreas de aplicación:

- **Encaminamiento de paquetes por routers**: Por ejemplo en redes de telefonía en las que hay que encontrar el camino que tarde menos tiempo.
- **Sistemas de información geográficos**: La extracción de características curvilíneas de imágenes se realiza usando técnicas de minimización de caminos en un grafo.
- **Reconocimiento del habla**: Distinción de palabras que suenan de manera similar.

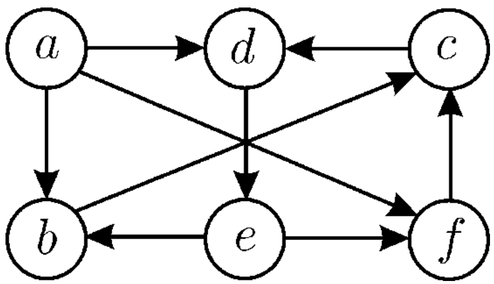
1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

- **Modelización de sistemas de carreteras**: Simulación por ordenador de sistemas de tráfico usando grafos.
- **Modelado de redes de computadores**: Representación de una red de computadores mediante un grafo.
- **Modelado de la distribución de los procesadores en una máquina paralela**: Los grafos permiten representar la distribución de procesadores en una máquina paralela.
- **Grafos de llamada**: Hay muchos programas que constan de módulos que invocan unos a otros. Los grafos de llamadas representan estos módulos y cómo se invocan entre ellos.
- …

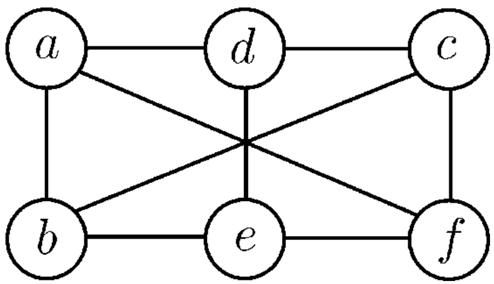
1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

3. Llamamos **grafo no dirigido asociado** a un grafo dirigido, a un grafo con el mismo conjunto de vértices y en el que se han ignorado las direcciones de los arcos.

EJEMPLO:



GRAFO DIRIGIDO

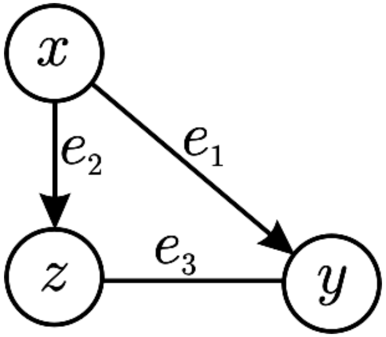


GRAFO NO DIRIGIDO ASOCIADO

1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

4. Un **grafo mixto** es aquel que contiene tanto arcos como aristas.

EJEMPLO:



GRAFO MIXTO

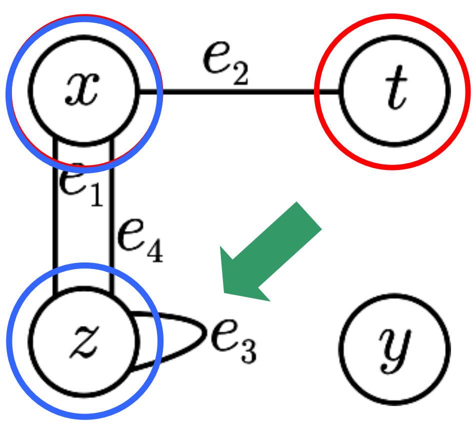
1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

5. Los extremos de una arista (arco) se dice que son **incidentes** con la arista (arco).

6. Dos vértices incidentes con una misma arista (arco) se dicen **adyacentes**.

7. Un **bucle** es una arista (o arco) cuyos extremos son el mismo vértice.

EJEMPLO:



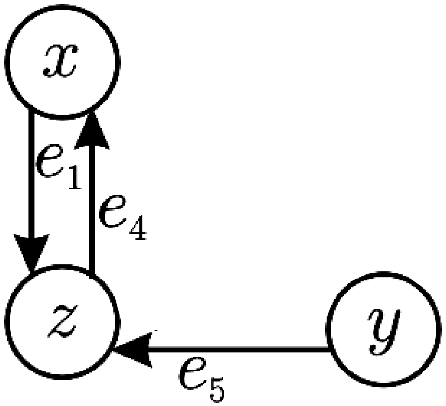
2. TIPOS PARTICULARES DE GRAFOS

DEFINICIONES:

1. Un grafo **simple** es un grafo sin bucles en el que no hay dos aristas que unan el mismo par de vértices. Si el grafo es dirigido diremos que es simple si no tiene bucles y no hay dos arcos uniendo el mismo par de vértices y con la misma dirección. Si un grafo no es simple se llama **multigrafo**.

EJEMPLO:

MULTIGRAFO

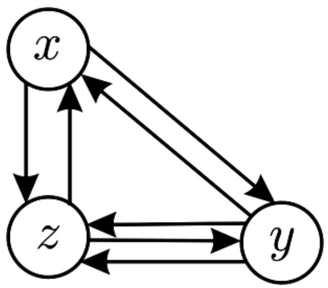


GRAFO SIMPLE

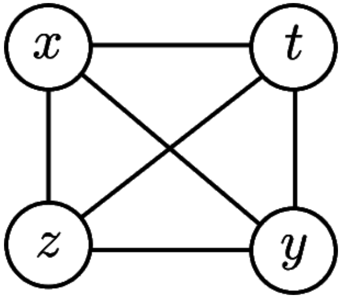
2. TIPOS PARTICULARES DE GRAFOS

2. Un grafo no dirigido (dirigido) se dice que es **completo** si hay al menos una arista (arco) uniendo cada par de vértices distintos. Denominaremos por K_n al grafo completo no dirigido y simple con n vértices.

EJEMPLO:



GRAFO DIRIGIDO COMPLETO NO SIMPLE

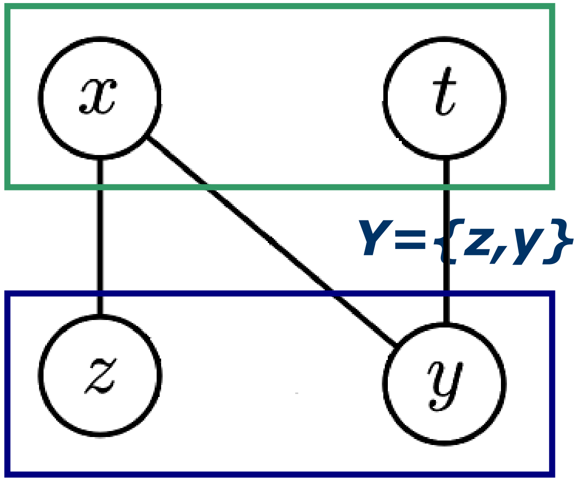


GRAFO NO DIRIGIDO COMPLETO SIMPLE (K_4)

2. TIPOS PARTICULARES DE GRAFOS

3. Un grafo no dirigido diremos que es **bipartido** si existe una partición *{X, Y}* del conjunto de vértices de forma que toda arista tiene un extremo en *X* y otro en *Y*. Un grafo dirigido es bipartido si lo es su grafo no dirigido asociado.

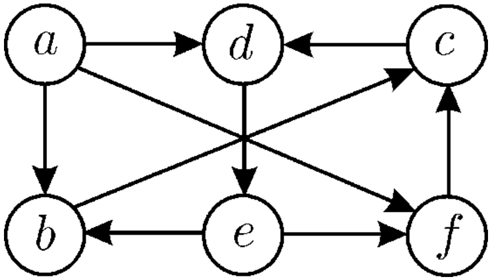
EJEMPLO:



X={x,t}

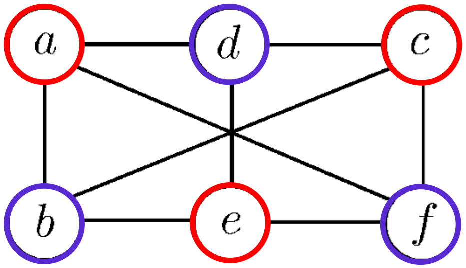
2. TIPOS PARTICULARES DE GRAFOS

EJEMPLO: ¿Es bipartido el siguiente grafo dirigido?



Analizando su grafo no dirigido asociado

X={a,c,e}



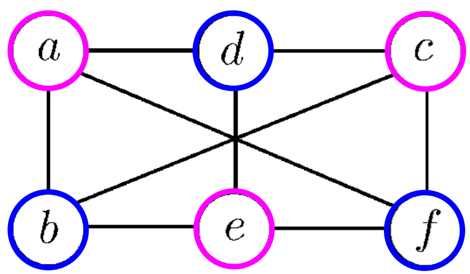
Y={b,d,f}

Es bipartido, y por tanto el grafo inicial lo es.

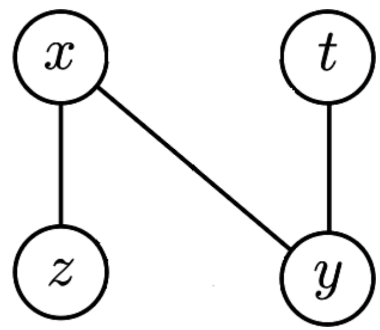
2. TIPOS PARTICULARES DE GRAFOS

4. Diremos que un **grafo bipartido es completo** si cada vértice de *X* está unido con cada vértice de *Y*.

EJEMPLO:



Bipartido completo

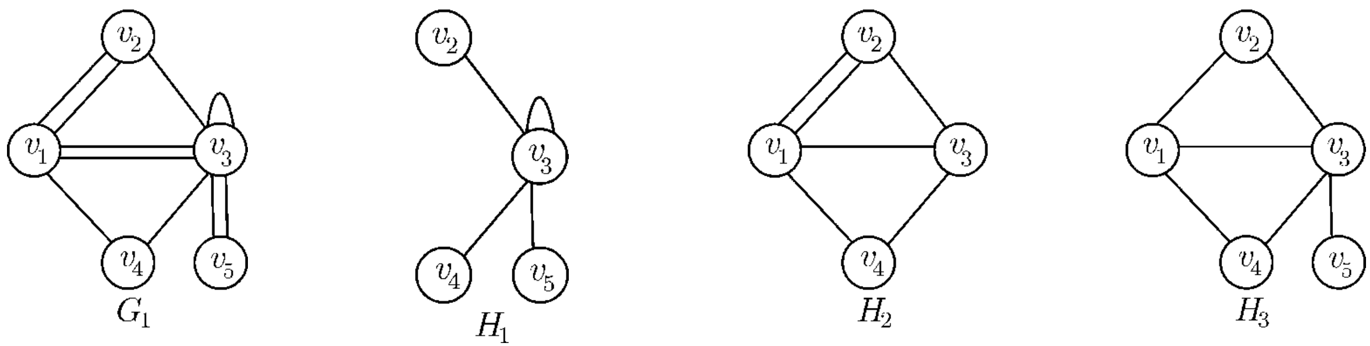


Bipartido no completo

2. TIPOS PARTICULARES DE GRAFOS

5. Sean $G = (V,A)$ y $H = (V',A')$ dos grafos. H es **subgrafo** de G si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$.

EJEMPLO:



6. Diremos que un subgrafo H de un grafo G es **generador** si sus conjuntos de vértices son iguales.

H_3 es subgrafo generador (y G_1)

3. GRADO DE UN VÉRTICE

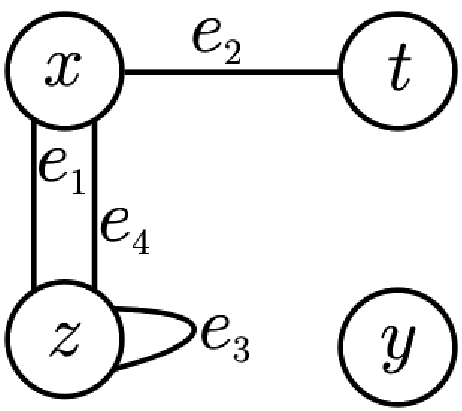
DEFINICIONES:

1. Llamamos **grado de un vértice** *v* en un grafo no dirigido *G* al número de aristas incidentes con él. Cada bucle se cuenta dos veces. Se denotará por $d_G(v)$.

   Designamos por $\Gamma(v)$ al conjunto de vértices adyacentes a *v*.

EJEMPLO:

El vértice $\mathbf{x}$ es incidente con las aristas: e_1,e_2 y e_4. Por tanto $d_G(\mathbf{x})=3$.
El conjunto de vértices adyacentes para $\mathbf{x}$ es $\Gamma(\mathbf{x})=\{\mathbf{t},\mathbf{z}\}$.
El grado del vértice z es $d_G(z)=4$.



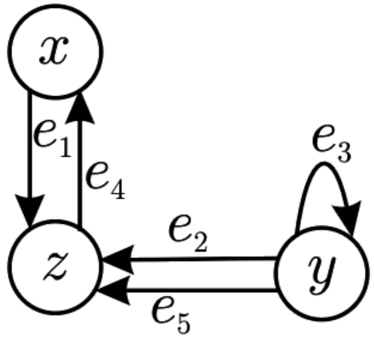
3. GRADO DE UN VÉRTICE

2. Sea G un grafo dirigido. Llamaremos **grado de salida** de un vértice v y lo denotaremos por $d_s(v)$ al número de arcos salientes de v.

   Llamaremos **grado de entrada** de un vértice v y lo denotaremos por $d_e(v)$ al número de arcos entrantes en v.

   Se llamará **grado de un vértice** a la suma de estos dos grados. Análogamente se puede definir $\Gamma(v)$ y $\Gamma^{-1}(v)$.

EJEMPLO:
El vértice $\mathbf{z}$ tiene 3 arcos entrantes: $d_e(\mathbf{z})=3$.
El vértice $\mathbf{z}$ tiene sólo 1 arco saliente: $d_s(\mathbf{z})=1$.
El conjunto de vértices que son extremos finales de arcos que se inician en $\mathbf{z}$ es $\Gamma(\mathbf{z})=\{\mathbf{x}\}$.
El conjunto de vértices que son extremos iniciales de arcos que terminan en $\mathbf{z}$ es $\Gamma^{-1}(\mathbf{z})=\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$.



Índice

3. GRADO DE UN VÉRTICE

TEOREMA

1. Sea $G = (V,A)$ un grafo, entonces

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2card(A)$$

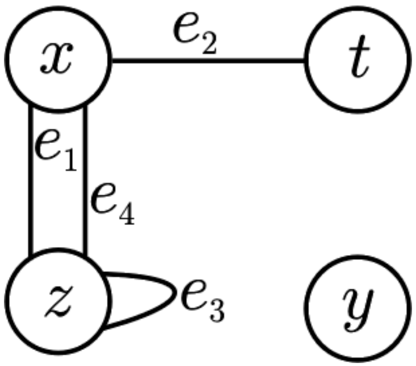
2. Sea $G = (V,A)$ un grafo dirigido, entonces:

$$\sum_{v \in V} d_s(v) = \sum_{v \in V} d_e(v) = card(A)$$

3. GRADO DE UN VÉRTICE

COROLARIO
El número de vértices de grado impar de un grafo es par.

EJEMPLO:



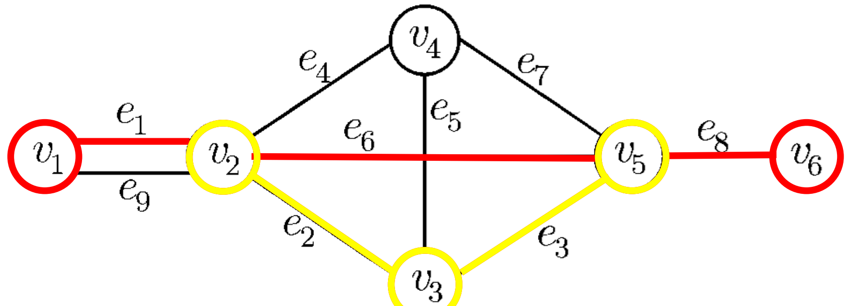
Calculamos los grados de los vértices:
*d(**x**)=3, d(**y**)=0, d(**z**)=4, d(**t**)=1*
Vemos que hay 2 vértices (un número par) con grado impar: ***x*** y ***t***.

4. CAMINOS Y CONEXIÓN

DEFINICIONES: Sea *G* un grafo no dirigido:

1. Una **cadena** es una sucesión finita $W=v_0e_1v_1\ .\ .\ .\ e_kv_k$ cuyos términos son alternativamente vértices y aristas.

   EJEMPLO:



$$C_1=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_5e_6v_2e_2v_3e_3v_5e_8v_6$$

2. La **longitud** de una cadena es el número de aristas que contiene.

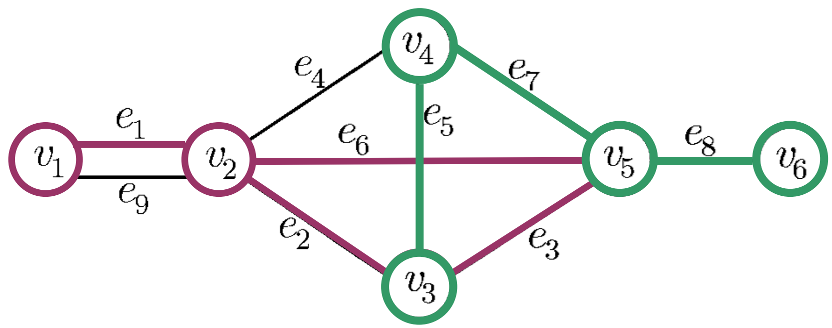
   EJEMPLO: La longitud de la cadena **C** es 7.

4. CAMINOS Y CONEXIÓN

3. Una **cadena simple** es una cadena con todas sus aristas distintas.

4. Un **camino** es una cadena con todos sus vértices distintos.

EJEMPLO:



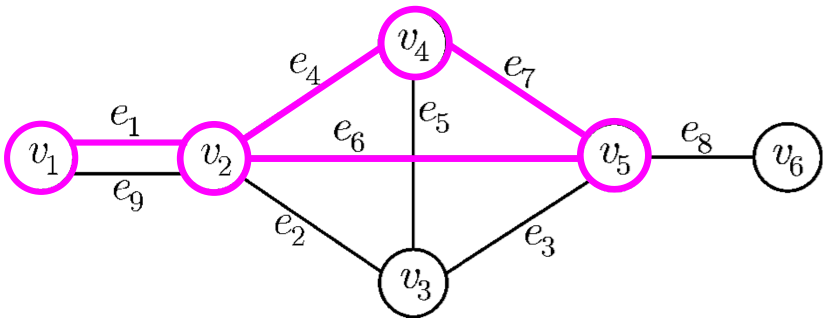
La cadena $\mathbf{C_2=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_5e_6v_2}$ es una cadena simple de longitud 4.

La cadena $\mathbf{C_3=v_6e_8v_5e_7v_4e_5v_3}$ es un camino.

4. CAMINOS Y CONEXIÓN

5. Una **cadena cerrada** es una cadena de longitud no nula en donde el vértice inicial y final coinciden.

EJEMPLO:



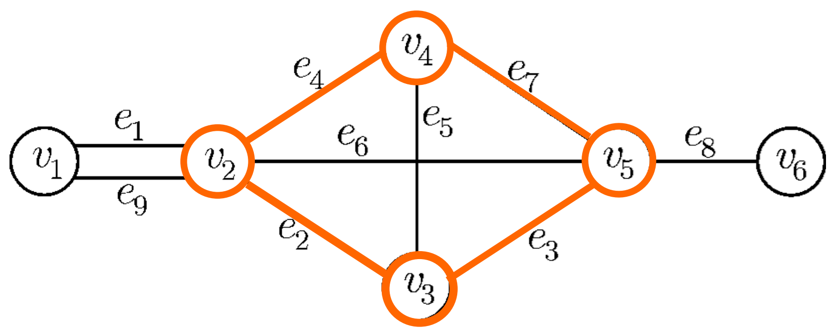
La cadena $\mathbf{C_4=v_2e_6v_5e_7v_4e_4v_2e_1v_1e_1v_2}$ es una cadena cerrada.

Como repite aristas ($\mathbf{e_1}$), la cadena $\mathbf{C_4}$ no es simple.

Como repite vértices ($\mathbf{v_2}$), la cadena $\mathbf{C_4}$ no es un camino.

6. Un **ciclo** es una cadena simple cerrada con todos sus vértices distintos.

EJEMPLO:



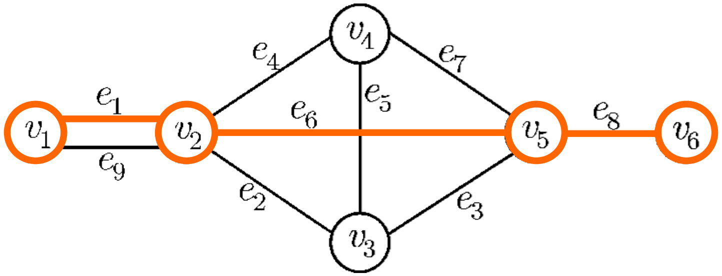
La cadena **$C=v_2e_4v_4e_7v_5e_3v_3e_2v_2$** es un ciclo.

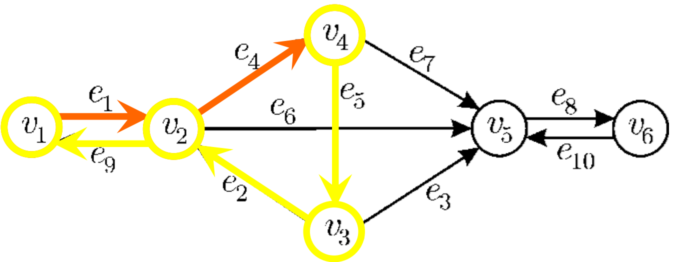
Estos conceptos son los mismos para grafos dirigidos salvo que las direcciones de los arcos deben concordar con la dirección del camino o cadena. En el caso dirigido el ciclo recibe el nombre de **circuito**.

4. CAMINOS Y CONEXIÓN

7. Diremos que dos vértices ***u*** y ***v*** están **conectados** si existe un camino de ***u*** a ***v*** y viceversa.

EJEMPLO:





Los vértices $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_6}$ están conectados por el camino $\boldsymbol{C=v_1e_1v_2e_6v_5e_8v_6}$. Cualquier par de vértices está conectado.

Los vértices $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_4}$ están conectados por los caminos:

$\mathbf{C_1=v_1e_1v_2e_4v_4}$

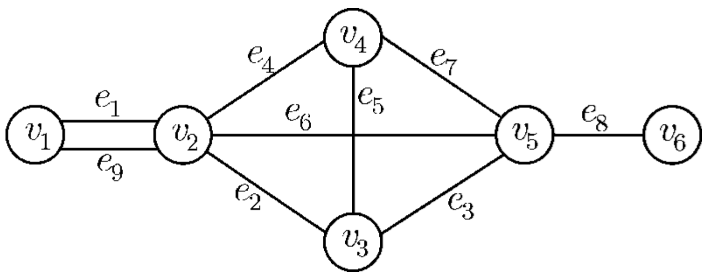
$\mathbf{C_2=v_4e_5v_3e_2v_2e_9v_1}$

Los vértices $\mathbf{v_4}$ y $\mathbf{v_5}$ no están conectados

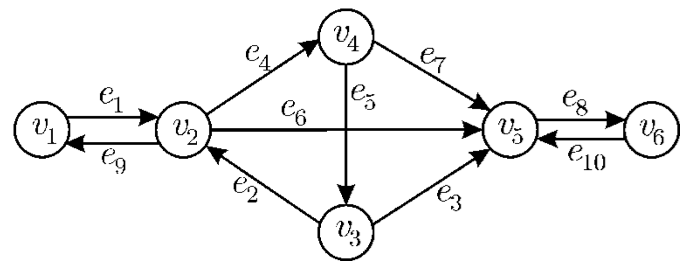
Índice

4. CAMINOS Y CONEXIÓN

8. Un grafo es **conexo** si todo par de vértices están conectados.

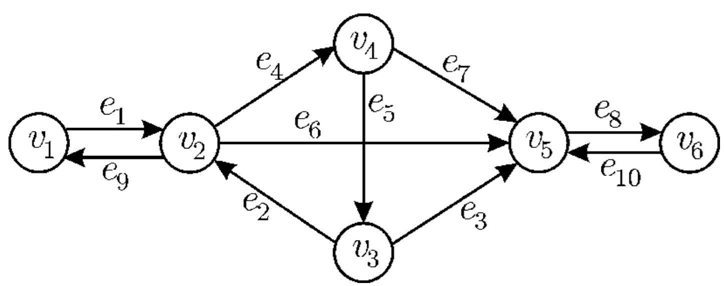


Grafo conexo



Grafo no conexo

9. Un grafo dirigido es **débilmente conexo** si su grafo no dirigido asociado es conexo.



4. CAMINOS Y CONEXIÓN

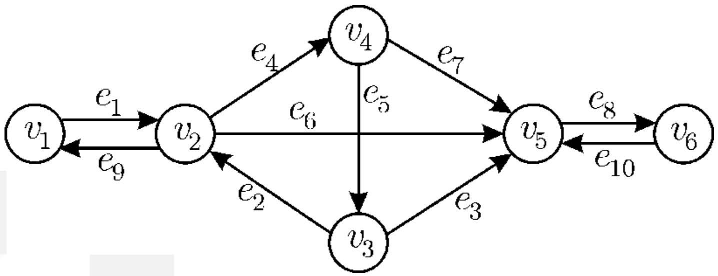
TEOREMA

La relación de conexión es de equivalencia y por tanto determina una partición en el conjunto de vértices. A los elementos de dicha partición se les denomina componentes conexas del grafo.

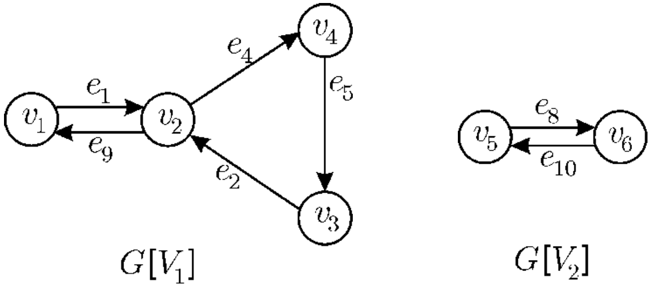
TEOREMA

Un grafo es conexo si y sólo si el número de componentes conexas es 1.

EJEMPLO:



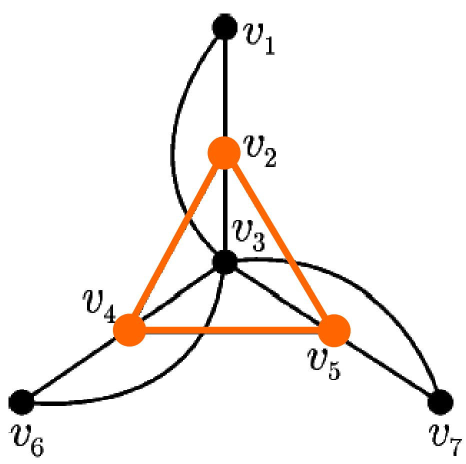
Componentes conexas



4. CAMINOS Y CONEXIÓN

TEOREMA (Para grafos no dirigidos)
Un grafo es bipartido si y sólo si no contiene ningún ciclo impar.

EJEMPLO:
El siguiente grafo NO es bipartido ya que contiene un ciclo impar: $v_2v_4v_5$



Índice

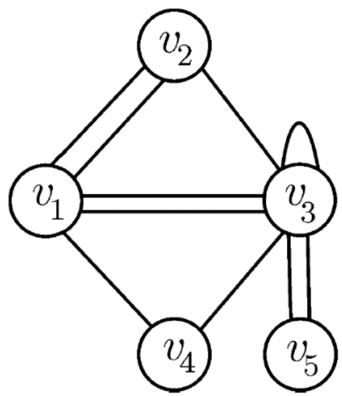
5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

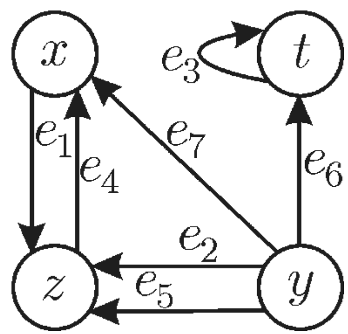
DEFINICIÓN:

Sea G un grafo con n vértices $\{v_i\}_{i=1}^{n}$. Llamamos **matriz de adyacencia** a la matriz de orden $n \times n$, $A = [a_{ij}]$ tal que a_{ij} es igual al número de aristas (arcos) del vértice v_i al v_j. En el caso no dirigido, el bucle se cuenta dos veces.

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





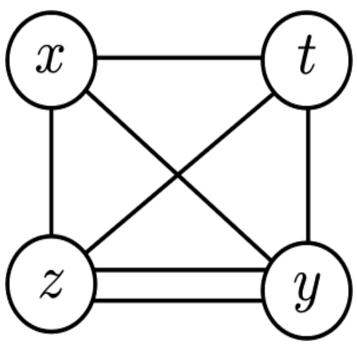
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA:

1. Sea *G* un grafo no dirigido con matriz de adyacencia *A*. Entonces, la suma de los elementos de la fila *i* (o columna *i*) es igual al grado del vértice v_i.

EJEMPLO:



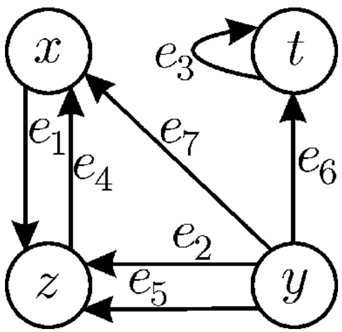
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} =3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

El grado del vértice ***x*** es 3.

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

2. Sea *G* un grafo dirigido con matriz de adyacencia *A*. Entonces, la suma de los elementos de la fila *i* es igual al grado de salida del vértice v_i y la suma de los elementos de la columna *j* es igual al grado de entrada del vértice *j*.

EJEMPLO:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} =1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 3 \end{matrix}$$

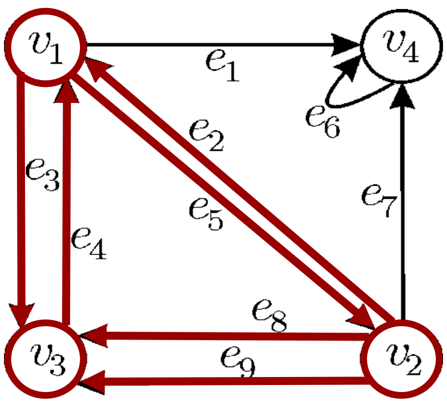
$d_s(x)=1$ y $d_e(z)=3$

Índice

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

3. Sea G un grafo con matriz de adyacencia A. Entonces, el elemento (i,j) de la matriz A^r, $r \geq 1$, es igual al número de cadenas de v_i a v_j de longitud r.

EJEMPLO:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el número de cadenas de longitud 3 de $\boldsymbol{v_2}$ a $\boldsymbol{v_3}$ es 4.

Índice

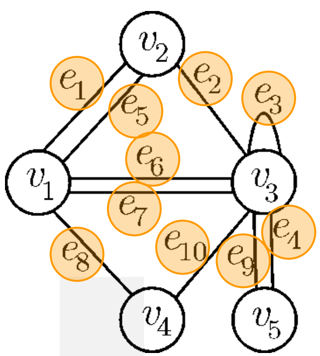
5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

DEFINICIONES:

1. Sea G = (V,A) un grafo no dirigido con n vértices y m aristas siendo $V=\{v_i\}_{i=1}^{n}$ y $A=\{a_i\}_{i=1}^{m}$. Llamamos **matriz de incidencia** de G a la matriz de orden $n \times m$

$$M=[m_{ij}]\ /\ m_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } a_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ es un bucle en } v_i \end{cases}$$

EJEMPLO:



$$M=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

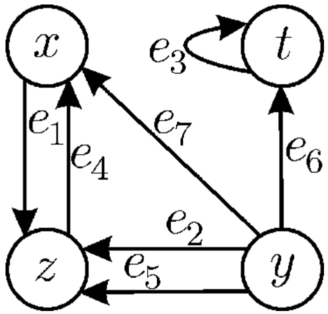
Índice

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

2. Sea *G* = (*V*,*A*) un grafo dirigido con *n* vértices y *m* arcos siendo $V = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ y $A = \{a_i\}_{i=1}^{m}$. Llamamos **matriz de incidencia** de *G* a la matriz de orden *n* × *m*

$$B = [b_{ij}] \ / \ b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } a_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es vértice inicial de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es vértice final de } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ es un bucle en } v_i \end{cases}$$

EJEMPLO:



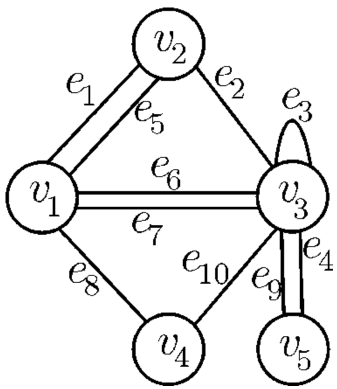
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE INCIDENCIA:

1. Sea *G* un grafo no dirigido. La suma de los elementos de cada fila de la matriz de incidencia es igual al grado del correspondiente vértice.

EJEMPLO:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} =5 \\ =3 \\ =8 \\ =2 \\ =2 \end{matrix}$$

Los grados de los vértices son:

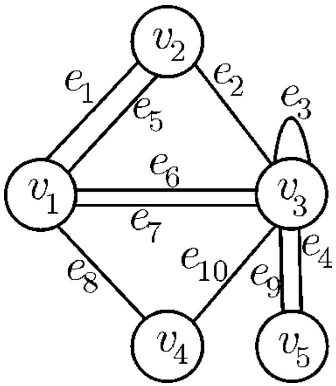
$d(v_1)=5,\ d(v_2)=3,\ d(v_3)=8,\ d(v_4)=2,\ d(v_5)=2$

Índice

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

2. Sea G un grafo no dirigido. La suma de los elementos de cada columna de la matriz de incidencia es igual a 2.

EJEMPLO:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

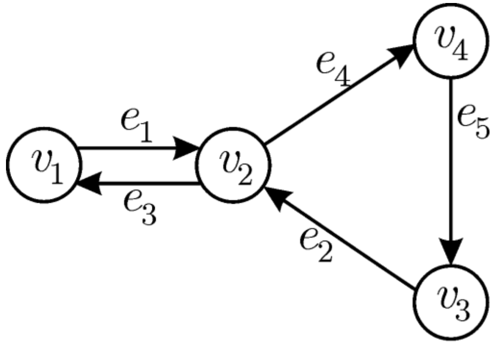
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

Índice

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

3. Sea *G* un grafo dirigido sin bucles. La suma de los elementos de cada columna de la matriz de incidencia es igual a 0.

EJEMPLO:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Índice

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

DEFINICIONES:

1. Sea *G* un grafo no dirigido. Llamaremos **tabla de aristas incidentes** del grafo *G* a una tabla que lista, para cada vértice *v*, todas las aristas incidentes con *v*.

EJEMPLO:

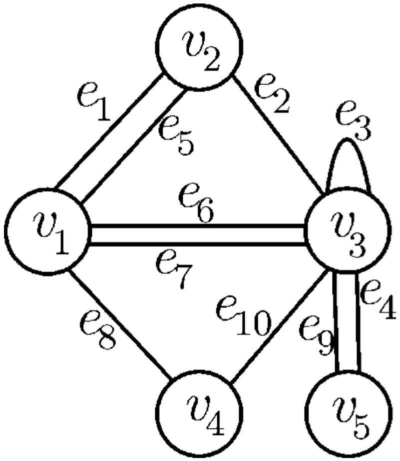


Tabla de aristas incidentes

$v_1 : e_1, e_5, e_6, e_7, e_8$

$v_2 : e_1, e_2, e_5$

$v_3 : e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_9, e_{10}$

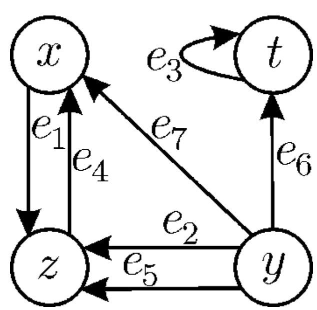
$v_4 : e_8, e_{10}$

$v_5 : e_4, e_9$

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL

2. Sea *G* un grafo dirigido. Llamaremos **tabla de arcos salientes** del grafo *G* a una tabla que lista, para cada vértice *v*, todos los arcos salientes de *v*. Llamaremos **tabla de arcos entrantes** del grafo *G* a una tabla que lista, para cada vértice *v*, todos los arcos entrantes en *v*.

EJEMPLO:



Arcos	salientes	Arcos	entrantes
x:	e_1	x:	e_4, e_7
y:	$e_2, e_5 e_6, e_7$	y:	
z:	e_4	z:	e_1, e_2, e_5
t:	e_3	t:	e_3, e_6