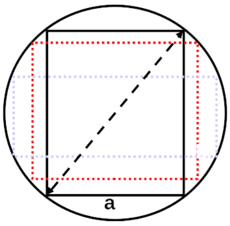
Ejercicio Matemáticas 2 - Optimización - UA

Angelo Araujo

Hallar las dimensiones que debe tener un rectángulo inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio para que el área del mismo sea la mayor posible.



Solución

Radio es 5: $r = 5$

Por la figura sabemos que podemos calcular un triangulo rectángulo de lados a, b (lado vertical) y hipotenusa $2r$. El radio es solo la mitad de la hipotenusa y por lo tanto tiene que ser el doble.

Por el teorema de Pitágoras sabemos que $(2r)^2 = a^2 + b^2$ que es lo mismo que $4r^2 = a^2 + b^2$.

Resolviendo en orden al x:

$x = \sqrt{4r^2 - y^2}$
con $r = 5$
$x = \sqrt{100 - y^2}$

El area (que es lo que se busca), es dado por $A = xy$, que sustituyendo por el x hallado anteriormente se queda $A = \sqrt{100 - y^2} \cdot y$

De esta manera ya está despejada la función en una sola variable (y).

Buscamos entonces los puntos críticos (para hallar el máximo).

$A'(y) = 0$

$A'(y) \to \frac{d}{dy}(\sqrt{100 - y^2} \cdot y)$

> Aplicar la regla del producto $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\frac{d}{dy}(\sqrt{100 - y^2}) \cdot y + \frac{d}{dy}(y) \cdot \sqrt{100 - y^2}$

Por partes:

$\frac{d}{dy}(\sqrt{100-y^2})$

$\frac{d}{dy}(\sqrt{100-y^2}) =$

$\frac{d}{dy}((100-y^2)^{\frac{1}{2}}) =$

$\frac{1}{2}((100-y^2)^{\frac{1}{2}-1}) \cdot \frac{d}{dy}((100-y^2)) =$

$\frac{1}{2}((100-y^2)^{-\frac{1}{2}}) \cdot (\frac{d}{dy}(100) - \frac{d}{dy}(y^2)) =$

$\frac{1}{2}((100-y^2)^{-\frac{1}{2}}) \cdot (0-2y) =$

$\frac{(100-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot -2y =$

$\frac{(100-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2y}{2} =$

$\frac{-2y}{2 \cdot \sqrt{100-y^2}} =$

$\frac{-y}{\sqrt{100-y^2}}$

$\frac{d}{dy}(y)$

$\frac{d}{dy}(y) = 1$

Seguimos con la derivada del area:

$\frac{-y}{\sqrt{100-y^2}} \cdot y + 1 \cdot \sqrt{100-y^2} =$

$\frac{-y^2}{\sqrt{100-y^2}} + \sqrt{100-y^2} =$

$\frac{-y^2}{\sqrt{100-y^2}} + \frac{(\sqrt{100-y^2})^2}{\sqrt{100-y^2}} =$

$\frac{-y^2}{\sqrt{100-y^2}} + \frac{100-y^2}{\sqrt{100-y^2}} =$

$\frac{100-2y^2}{\sqrt{100-y^2}}$

Puntos críticos

$\frac{100-2y^2}{\sqrt{100-y^2}} = 0 \rightarrow$

$100 - 2y^2 = \sqrt{100 - y^2} \cdot 0 \rightarrow$

$100 - 2y^2 = 0 \rightarrow$

$2y^2 = 100 \rightarrow$

$y^2 = 50 \rightarrow$

$y = \pm\sqrt{50}$

No existen tamaños negativos, entonces:

$y = \sqrt{50}$

Finalización

Volvemos a la ecuación del x: $x = \sqrt{100 - y^2} = \sqrt{100 - \sqrt{50}^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = \pm\sqrt{50}$

No existen tamaños negativos, entonces:

$x = \sqrt{50}$

y finalmente,

$A_{optima} = \sqrt{50} * \sqrt{50} = 50$