

1. Introducción al análisis combinatorio

- **Análisis combinatorio**
 - Variaciones / con repetición
 - Permutaciones / con repetición
 - Combinaciones / con repetición
- Cálculo integral
- Series

Variaciones

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, una **variación ordinaria** de orden h (siendo $1 \leq h \leq n$) es un **subconjunto ordenado** de h elementos de A .

$$V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

12 variaciones de orden 2:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

$$V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Variaciones

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

24 variaciones de orden 3:

<i>abc</i>	<i>bac</i>	<i>cab</i>	<i>dab</i>
<i>abd</i>	<i>bad</i>	<i>cad</i>	<i>dac</i>
<i>acb</i>	<i>bca</i>	<i>cba</i>	<i>dba</i>
<i>acd</i>	<i>bcd</i>	<i>cbd</i>	<i>dbc</i>
<i>adb</i>	<i>bda</i>	<i>cda</i>	<i>dca</i>
<i>adc</i>	<i>bdc</i>	<i>cdb</i>	<i>dcb</i>

$$V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Variaciones con repetición

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, una variación con repetición de orden h (siendo $h \geq 1$, pero puede ser $h > n$) es un subconjunto ordenado de h elementos de A que se pueden repetir.

$$VR_{n,h} = n^h$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

16 variaciones con repetición de orden 2:

<i>aa</i>	<i>ba</i>	<i>ca</i>	<i>da</i>
<i>ab</i>	<i>bb</i>	<i>cb</i>	<i>db</i>
<i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>cc</i>	<i>dc</i>
<i>ad</i>	<i>bd</i>	<i>cd</i>	<i>dd</i>

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Permutaciones

- Son variaciones ordinarias donde se toman todos los elementos del conjunto. Dos permutaciones son distintas solo por el orden de sus elementos.

$$P_n = n! = V_{n,n}$$

- Ej: $A = \{a, b, c\}$

6 permutaciones:

<i>abc</i>	<i>bac</i>	<i>cab</i>
<i>acb</i>	<i>bca</i>	<i>cba</i>

$$P_3 = 3! = 6$$

Permutaciones con repetición

- Son variaciones con repetición donde se toman todos los elementos del conjunto con una determinada duplicidad que conocemos. En este caso, n es el número de elementos que tomamos incluyendo las repeticiones.

$$PR_n^{a,b,\dots,r} = \frac{n!}{a! b! \dots r!}$$

- Ej: $A = \{a, b, c\}$, en el que a se repite 2 veces, y b y c 1 vez.

12 permutaciones con repetición:

$aabc$	$abac$	$abca$	$baac$	$baca$	$bcaa$
$aacb$	$acab$	$acba$	$caab$	$caba$	$cbaa$

$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2! 1! 1!} = 12$$

Combinaciones

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, una combinación ordinaria de orden h (siendo $1 \leq h \leq n$) es un subconjunto de h elementos de A sin importar el orden.

$$C_{n,h} = \binom{n}{h} = \frac{n!}{h! (n-h)!}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

6 combinaciones de orden 2:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! (4-2)!} = 6$$

Combinaciones

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

4 combinaciones de orden 3:

<i>abc</i>	<i>bac</i>	<i>cab</i>	<i>dab</i>
<i>abd</i>	<i>bad</i>	<i>cad</i>	<i>dac</i>
<i>acb</i>	<i>bca</i>	<i>cba</i>	<i>dba</i>
<i>acd</i>	<i>bcd</i>	<i>cdb</i>	<i>dbc</i>
<i>adb</i>	<i>bda</i>	<i>cda</i>	<i>dca</i>
<i>adc</i>	<i>bdc</i>	<i>cdb</i>	<i>dcb</i>

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

- Propiedad: $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$

Combinaciones con repetición

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, una combinación con repetición de orden h (siendo $1 \leq h$, pero puede ser $h > n$) es un subconjunto de h elementos de A sin importar el orden que se pueden repetir.

$$CR_{n,h} = \binom{n + h - 1}{h}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$ 10 combinaciones con repetición de orden 2:

aa	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

$$CR_{4,2} = \binom{4 + 2 - 1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

Resumen combinatoria

	Con orden		Sin orden
	Variaciones	Permutaciones	Combinaciones
Sin repetición (ordinarias)	$V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}$	$P_n = n!$	$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!}$
Con repetición	$VR_{n,h} = n^h$	$PR_n^{a,b,\dots,r} = \frac{n!}{a! b! \dots r!}$	$CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h}$

Resolución de problemas

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto inicial?
 - n
- ¿Cuántos elementos se toman (orden)?
 - h
- ¿Importa el orden?
 - Sí: Variaciones o Permutaciones
 - No: Combinaciones
- ¿Se repiten?
 - Sí: con repetición
 - No: ordinarias

Problema 1.1

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos de un dado (o con 3 dados)?

111
112
...
211
...
666

Problema 1.2

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 7 amigos en una fila de cine con 7 butacas?

ABCDEFGG
ABCDEGF
...
FGEDCBA

Problema 1.3

Un científico dispone de 40 ratones en el animalario ¿De cuántas maneras distintas se puede escoger una muestra de 5 ratones para inyectarles una proteína?

1	2	3	4	5
1	2	3	4	6
...				
36	37	38	39	40

Problema 1.4

En un campeonato de voleibol con 20 equipos, todos tienen que jugar contra todos y en sus campos respectivos. ¿Cuántos partidos se disputan en total?



1 2
2 1
...
19 20

Problema 1.5

Si sólo disponemos de 3 letras diferentes A, B y C, ¿cuántas contraseñas distintas podríamos formar con 4 A, 3 B y 2 C?

AAAABBBCC
AAAABBCBC
AAAABBCCB
...
CCBBBAAAA

Problema 1.6

Una tienda dispone de botes de pintura de 1 kg, de 5 colores distintos. Para pintar una habitación se precisan 2 kg de pintura, por lo que se compran 2 botes (no necesariamente del mismo color).

¿De cuántos colores diferentes se podría pintar la habitación (toda del mismo color)?