Asignatura 1039

LENGUAJE MATEMÁTICO, CONJUNTOS Y NÚMEROS

Pregunta 1 (2.5 puntos)

Sean A, B y C tres subconjuntos cualesquiera de un conjunto U.

1. Defina el conjunto diferencia $A \setminus B$.

2. Justifique razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

   a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

   b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Pregunta 2 (2.5 puntos)

$$\begin{tikzcd}
8 \arrow[r] \arrow[d] & 6 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[d] & \\
7 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 2 &
\end{tikzcd}$$

Dado el grafo dirigido (V, G) de la figura, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $G = \{31, 32, 43, 53, 64, 65, 75, 86, 87\}$, se considera el pseudo-grafo obtenido al añadir las aristas que unen cada punto con sí mismo. Se define en V la relación $\leqslant_{\mathcal{R}}$ mediante:

$$x \leqslant_{\mathcal{R}} y \quad \text{si y sólo si existe un camino que empieza en } x \text{ y termina en } y\,.$$

Sean los subconjuntos de V, $A = \{4, 5, 7\}$ y $B = \{1, 2, 4, 7\}$. Determine los conjuntos de cotas superiores, conjuntos de cota inferiores, supremo, máximo, maximales, ínfimo, mínimo y minimales de los conjuntos A y B.

Pregunta 3 (2.5 puntos)

Se define en $\mathbb{N}$ la operación interna $\star$ y, por inducción, $a^{(n)}$ mediante:

$$a \star b = 2a + b \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a^{(1)} & = & a \\ a^{(n+1)} & = & a^{(n)} \star a \ \text{ si } n \geqslant 1 \end{array} \right.$$

1. Estudie si la operación $\star$ es conmutativa, asociativa, posee elemento neutro y en su caso, si todo elemento tiene simétrico.

2. Calcule $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ y exprese $a^{(n)}$, respecto de las operaciones usuales de $\mathbb{N}$. Demuestre por inducción la validez de la expresión hallada para $a^{(n)}$ si $n \geqslant 1$.

Pregunta 4 (2.5 puntos)

1. Halle un número complejo $w = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $w^2 = -3 - 4i$.

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 - (9 - 2i)z + 26 = 0$.

3. Si $z = x + iy$ siendo $x, y \in \mathbb{R}$, ¿que deben satisfacer x e y para que $z^2 - (9 - 2i)z + 26$ sea un número real?

Pregunta 1 (2.5 puntos)
Sea en $\mathbb{Z}$ la relación definida para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ mediante:

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

1. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.
2. Determine las clases de equivalencia de 0, 1 y de $a \in \mathbb{Z}$.

Pregunta 2 (2.5 puntos)

1. Dados un conjunto parcialmente ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto D de U, razone si todo elemento maximal de D es un elemento máximo de D e inversamente si un máximo de D es un elemento maximal de D.
2. Se considera en $\mathbb{R}^2$ el orden producto $\leqslant_P$ dado por:

$$(a, b) \leqslant_P (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a \leqslant c \ \text{ y } \ b \leqslant d$$

   Sea D el conjunto de puntos del triángulo de vértices $A(5, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(3, 2)$, incluidos los puntos interiores del triángulo y las aristas. Determine el conjunto de cotas superiores, supremo, máximo y maximales de D.

Pregunta 3 (2.5 puntos)
Se define para todo $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $a + b \neq 0$ la ley $\star$ mediante $a \star b = \dfrac{ab}{a+b}$. Se define por inducción $a^{(n)}$ mediante $\begin{cases} a^{(1)} & = a \\ a^{(n+1)} & = a^{(n)} \star a \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ para todo $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a \neq 0$.

1. Calcule $\dfrac{1}{a} \star \dfrac{1}{b}$ si $a, b \neq 0$ y $a + b \neq 0$.
2. Compruebe que $a \star b = b \star a$ y $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ si $a + b \neq 0$ y $b + c \neq 0$.
3. Dados a y $b \in \mathbb{Q}$, halle $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a \star x = b$.
4. Sea $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a \neq 0$. Calcule $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ y exprese $a^{(n)}$, respecto de las operaciones usuales de $\mathbb{Q}$. Demuestre por inducción la validez de la expresión hallada para $a^{(n)}$ si $n \geqslant 1$.

Pregunta 4 (2.5 puntos) Se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$z^3 + 2(i-1)z^2 - 3iz + i + 1 = 0 \tag{1}$$

1. Compruebe que $z = 1$ es solución de (1) y halle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumpla:

$$z^3 + 2(i-1)z^2 - 3iz + i + 1 = (z-1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación (1).

Pregunta 1 (3 puntos)

a) Dado el universo $U = \{1, 2, 3\}$, justifica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) $\exists x \, \forall y \quad (x^2 < y + 1)$

ii) $\forall x \, \exists y \quad (x^2 < y + 1)$

iii) $\exists x \, \exists y \, \forall z \quad (x^2 + y^2 < 2z^2)$

b) Exprese la negación de las siguientes proposiciones.

i) $(\forall x \, P_x) \wedge (\exists y \, Q_y)$

ii) $(\exists y \, P_y) \rightarrow (\forall x \, \neg Q_x)$

iii) $\exists x \, \forall y \, (P_x \vee \neg Q_y)$

Pregunta 2 (2 puntos)

Sea A un subconjunto no vacío fijo de un conjunto E. Se definen las aplicaciones f y g mediante:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & B & \longmapsto & f(B) = A \cap B \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} g: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & B & \longmapsto & g(B) = A \cup B \end{array}$$

a) Demuestre que los conjuntos imágenes son $f\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(A)$ y $g\big(\mathcal{P}(E)\big) = \{C \subset E \mid A \subset C\}$.

b) Determine razonadamente los subconjuntos originales de $\mathcal{P}(E)$ siguientes: $f^{-1}(f(B))$ y $g^{-1}(g(B))$ siendo $B \in \mathcal{P}(E)$.

Pregunta 3 (2.5 puntos)

a) Defina la estructura de cuerpo.

b) Se considera el subconjunto de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

dotado con las restricciones a $\mathbb{K}$ de la suma y del producto en $\mathbb{R}$. Demuestre que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Pregunta 4 (2.5 puntos)

Dada la sucesión de números complejos definida recurrentemente mediante $\begin{cases} z_0 = 0, & z_1 = i \\ z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \end{cases}$ para todo $n \geqslant 2$ se pide:

a) Demuestre que $z_n - z_{n-1} = i^n$ para todo $n \geqslant 1$.

b) Demuestre por inducción que $z_n = \dfrac{1-i}{2}\,(i^n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 1 (2.5 puntos)

Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto U es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$\forall x, y, z \in U \quad \text{si} \;\; x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z, \;\; \text{entonces } z\mathcal{R}x.$$

1. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, ¿es $\mathcal{R}$ circular?
2. Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y circular, ¿es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia?

Pregunta 2 (2.5 puntos)

1. Defina aplicación inyectiva, aplicación sobreyectiva, y aplicación biyectiva.
2. Sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$ tres aplicaciones tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son aplicaciones biyectivas.

   i) Demuestre que f y g son inyectivas.

   ii) Demuestre que f es biyectiva.

Pregunta 3 (2.5 puntos)

1. Sea $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, un número primo, es decir, tal que los únicos divisores de d en $\mathbb{N}$ son 1 y el propio d. Demuestre que dados $b, c \in \mathbb{N}^*$, si d divide a bc, entonces d divide a b o d divide a c.
2. Compruebe que si $n \in \mathbb{N}$ es par, $n > 1$, entonces la fracción $\dfrac{n^3 - n}{n+2}$ es reducible.
3. Compruebe que si $n + 2$ es múltiplo de 3, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, entonces la fracción $\dfrac{n^3 - n}{n+2}$ es reducible.
4. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es impar, $n > 1$. Supongamos que $d \in \mathbb{N}$ es un divisor común de $n^3 - n$ y $n + 2$ siendo $d > 1$ un número primo. Demuestre que $d = 3$.
5. Determina todos los valores de $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, tales que la fracción $\dfrac{n^3 - n}{n+2}$ es reducible.

Pregunta 4 (2.5 puntos) Se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$w^3 + w^2 + w + 1 = 0 \tag{1}$$

1. Compruebe que $w = -1$ es solución de (1) y halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para todo $w \in \mathbb{C}$ se cumpla:

$$w^3 + w^2 + w + 1 = (w + 1)(w^2 + \alpha w + \beta)$$

2. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación (1).
3. Resuelva en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right)^3 + \left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right)^2 + \left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right) + 1 = 0$$

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Sean U un conjunto no vacío y $A, B \in \mathcal{P}(U)$. Demuestre las siguientes equivalencias

i) $A \subset B \iff \overline{A} \cup B = U$

ii) $A \subset B \iff A \cap \overline{B} = \emptyset$

siendo $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los conjuntos complementarios de A y B en U.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Sean un conjunto A y $*$ una operación interna conmutativa y asociativa en A tal que $a * a = a$ para todo $a \in A$. Se define en A una relación $\mathcal{S}$ tal que para todo $a, b \in A$,

$$a \,\mathcal{S}\, b \iff a * b = b\,.$$

i) Demuestre que $\mathcal{S}$ es una relación de orden.

ii) Demuestre que para todo $a, b \in A$ se tiene que $a * b$ es el supremo en A de $\{a, b\}$ para la relación $\mathcal{S}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

i) Defina la estructura de anillo y de anillo íntegro.

ii) Se definen en $\mathbb{Z}^2$ las operaciones

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', 0)$$

para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$. Demuestre las propiedades del producto que hacen que $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ sea un anillo conmutativo.

a) ¿Es unitario?

b) ¿Es íntegro?

Pregunta 4 (2,5 puntos)

i) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $\omega^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Exprese las soluciones de la ecuación de ii) en forma binómica.

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B y una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$, demuestre que para todo $X \subset A$ y para todo $Y \subset B$ se tiene:

i) $f^{-1}\big(\overline{Y}\big) = \overline{f^{-1}(Y)}$

ii) Si f es inyectiva entonces $f\big(\overline{X}\big) \subset \overline{f(X)}$

iii) Si f es sobreyectiva entonces $\overline{f(X)} \subset f\big(\overline{X}\big)$

donde $\overline{Y}$ y $\overline{f(X)}$ son los conjuntos complementarios de Y y de $f(X)$ en B y $\overline{f^{-1}(Y)}$ y $\overline{X}$ son los conjuntos complementarios de $f^{-1}(Y)$ y de X en A.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo tal que $a \cdot a = a$ para todo $a \in A$.

i) Demuestre que $a + a = 0$ para todo $a \in A$.

ii) Demuestre que $a \cdot b + b \cdot a = 0$ todo $a, b \in A$. Deduzca que el anillo es conmutativo.

iii) Demuestre que el anillo A es íntegro si y sólo si A tiene a lo sumo dos elementos.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

Sea $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación tal que $f(0) = 0$ y para todo $n, m \in \mathbb{N}$ si $n < m$ entonces $f(n) < f(m)$.

i) Demuestre que el conjunto $f(\mathbb{N})$ no está acotado superiormente.

ii) Demuestre que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) \leq m < f(n+1)\,.$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)

i) Enuncie el teorema de Bézout.

ii) Dada la sucesión de números naturales definida recurrentemente mediante $\begin{cases} u_0 = 0, \qquad u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$ para todo $n \geqslant 2$, se pide:

a) Calcule u_2, u_3, u_4 y u_5.

b) Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene:

$$u_{n+1}\, u_{n-1} - \, u_n^2 = (-1)^n$$

Deduzca que u_n y u_{n+1} son primos entre sí.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea $(G, *)$ un grupo no conmutativo de elemento neutro e. Se define en G una relación $\mathcal{S}$ mediante

$$a\,\mathcal{S}\,b \iff \exists x \in G \text{ tal que } b = x * a * x^{-1}\,,$$

donde x^{-1} denota el elemento inverso de x para $*$.

i) Demuestre que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia.

ii) Determine la clase de un elemento a que conmuta con todos los elementos de G.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea un conjunto ordenado $(A, \preccurlyeq)$ tal que existe el mínimo m de A y todo subconjunto no vacío de A tiene supremo. Sea $f\colon A \longrightarrow A$ una aplicación creciente, es decir, $\forall a, b \in A \quad a \preccurlyeq b \Longrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$. Se trata de ver que f tiene un punto fijo. Sea el conjunto:

$$B = \big\{x \in A \mid x \preccurlyeq f(x)\big\}$$

i) Demuestre que $B \neq \emptyset$.

ii) Sea $\alpha = \sup(B)$.
   a) Demuestre que $f(\alpha)$ es cota superior de B.
   b) Demuestre que $f(\alpha) \in B$.
   c) Deduzca que $f(\alpha) = \alpha$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

i) Defina la estructura de ideal.

ii) Se definen en $\mathbb{Z}^2$ las operaciones

$$(a, b) + (a', b') = (a + a'\,,\ b + b') \qquad \text{y} \qquad (a, b) \cdot (a', b') = (aa'\,,\ ab' + ba' + bb')$$

para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$.

   a) Demuestre la propiedad conmutativa del producto y la propiedad distributiva del producto sobre la suma en $\mathbb{Z}^2$. Compruebe además que el producto tiene elemento neutro en $\mathbb{Z}^2$.
   b) Estudie si $I = \mathbb{Z} \times \{0\}$ y $J = \{0\} \times \mathbb{Z}$ son ideales del anillo $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Sean $b, c \in \mathbb{C}$ y sean $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ las soluciones la ecuación $z^2 + 2bz + c = 0$.

i) Demuestre que si b y $c \in \mathbb{R}$ entonces $z_1 = \overline{z}_2$.

ii) Demuestre que si $b \notin \mathbb{R}$ o $c \notin \mathbb{R}$ entonces $z_1 \neq \overline{z}_2$.

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Sean U un conjunto no vacío y $A, B \in \mathcal{P}(U)$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

i) $\forall x \left[\, (x \in A \cup B) \iff (x \notin A \Longrightarrow x \in B) \, \right]$

ii) $\forall x \left[\, (x \in A \setminus B) \iff (x \in A \Longrightarrow x \notin B) \wedge (x \in A) \, \right]$

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se definen en $\mathbb{Q}^2$ las operaciones

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Q}^2$.

i) Demuestre las propiedades del producto que hacen que $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ sea un anillo conmutativo unitario no íntegro.

ii) Demuestre que $I = \mathbb{Q} \times \{0\}$ es un ideal de $\mathbb{Q}^2$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

i) Enuncie la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$.

ii) Aplique la propiedad anterior para demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{n^2 + n}{n - 1} > x \, .$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sea $x = a + bi$ un número complejo fijo y sea

$$H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z = mx + n \} \, .$$

Se considera las restricciones a H de la suma y producto de números complejos.

i) Demuestre que $(H, +)$ es un grupo.

ii) Demuestre que el producto es una operación interna en H si y sólo si $x^2 \in H$.

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestre que es verdadera o ponga un contraejemplo para demostrar que es falsa:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$

c) $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Pregunta 2 (3 puntos)
Sea en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales la relación dada por:

$$x \mathcal{R} y \quad \text{si y sólo si} \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

b) Determine las siguientes clases de equivalencia: $[0]$, $\left[\frac{1}{5}\right]$ y $[\sqrt{2}]$.

c) Justifique que el conjunto cociente no es un conjunto numerable.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de puntos del eje Ox dada recurrentemente por:
A_0 es el origen de coordenadas y A_1 es el punto de abscisa 1.
A_{n+2} es el punto medio del segmento de extremos A_n y A_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sea a_n la abscisa del punto A_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprese a_{n+2} en función de a_{n+1} y de a_n.

b) Demuestre por inducción que $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\, a_n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Sea el número complejo $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

a) Calcule z^2 en forma binómica.

b) Exprese z^2 en forma exponencial y deduzca la forma exponencial de z.

Pregunta 1 (3 puntos)

Sean A, B, C y D cuatro conjuntos arbitrarios. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestre que es verdadera o ponga un contraejemplo para demostrar que es falsa:

a) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Pregunta 2 (3 puntos)

En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ se define la relación:

$$A \mathcal{R} B \quad \text{si y sólo si} \quad A \triangle B \ \text{ es un conjunto finito}$$

siendo $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ el conjunto diferencia simétrica de A y B.

a) Demuestre que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se cumple que $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

b) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

c) Determine las siguientes clases de equivalencia: $[\{1\}]$ y $[\mathbb{N}]$.

Pregunta 3 (2 puntos)

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}\,.$$

a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_{n+1} \geqslant a_n$.

b) Demuestre que si $a_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ entonces $a_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 4 (2 puntos)

Sea el polinomio $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

a) Calcule $P(i\sqrt{3})$ y $P(-i\sqrt{3})$.

b) Demuestre que existe un polinomio $Q(z)$ de grado 2 tal que $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.

c) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $P(z) = 0$.

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean A, B y C tres conjuntos arbitrarios. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestre que es verdadera o ponga un contraejemplo para demostrar que es falsa:

a) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$

b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

c) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

d) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$

Pregunta 2 (3 puntos)
Sea en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales la relación dada por:

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si y sólo si existe} \quad n \in \mathbb{N} \;\text{ tal que }\; y = x + n$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{Q}$.

b) Justifique razonadamente si el orden es total o parcial.

c) Demuestre que si $x\mathcal{R}z$ e $y\mathcal{R}z$ entonces $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.

Pregunta 3 (2 puntos)
Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ el número

$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

es divisible por 17.

Pregunta 4 (3 puntos)
Se consideran los números complejos $a = 1 + \sqrt{3}i$ y $b = 1 - i$. Justifique razonadamente cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y cuál es falsa.

a) Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que a^p sea real.

b) Existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que a^q sea imaginario puro.

c) Existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $b^n = 1$.

d) Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que a^m y b^m sean reales.

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean A, B y C subconjuntos arbitrarios de un conjunto X. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestre que es verdadera o ponga un contraejemplo para demostrar que es falsa:

a) $(A \times B) \cap (\overline{A} \times B) = \emptyset$

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$\overline{A}$ designa el complementario del conjunto A con respecto a X.

Pregunta 2 (3 puntos)
En el conjunto $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define la relación dada por:

$$(x_1, y_1) \ll (x_2, y_2) \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \ \text{ y } \ x_1 \leqslant x_2$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

b) Justifique razonadamente si el orden es total o parcial.

c) Determine los intervalos $(\leftarrow, (1,1)]_{\ll}$ y $[(-1,3), \rightarrow)_{\ll}$.

Pregunta 3 (2 puntos)
Demuestre, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ coinciden el resto de la división entera de 7^n entre 5 con el resto de la división entera de 2^n entre 5.

Pregunta 4 (3 puntos)
Se consideran las raíces complejas z_1 y z_2 de la ecuación $z^2 - 2z + 3 = 0$ y sean M y N los puntos de afijos respectivos z_1 y z_2. Justifique razonadamente cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y cuál es falsa

a) $z_1 + z_2$ es real.

b) El punto medio del segmento de extremos M y N es un punto del eje de abscisas.

c) La recta MN es paralela al eje de ordenadas.

d) M y N están en la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio $r = 2$.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean X y Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Demuestre que f es una aplicación biyectiva si y sólo si $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ para todo $A \subset X$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Se consideran en el conjunto $X = \big\{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ es un conjunto finito}\big\}$ las siguientes relaciones: para todo $A, B \in X$

$$A\mathcal{R}B \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)$$

$$A\mathcal{S}B \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B) \text{ o } A = B$$

a) Estudie razonadamente si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

b) Estudie razonadamente si $\mathcal{S}$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Consideremos para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, la igualdad:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

a) Demuestre para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, que si la igualdad es verdadera para n entonces, también es verdadera para $n + 1$.

b) ¿Es verdadera la igualdad para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$?

c) ¿Es verdadera la igualdad para algún $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$?

Pregunta 4 (2,5 puntos)
a) Para $a_0, a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ siendo $a_n \neq 0$ se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Demuestra que si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es solución de la ecuación anterior, también es solución el conjugado de z_0.
b) Sabiendo que $1 - i$ es solución de la ecuación

$$z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = 0$$

calcule el resto de las soluciones.

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean X y Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación.
Sea $g = \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ la aplicación definida para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ mediante:

$$g(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$$

Demuestre que si f es inyectiva entonces también lo es g.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sea en el conjunto $\mathbb{R}^2$ la relación dada por:

$$(x, y)\mathcal{R}(z, t) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{máx}\{|x|, |y|\} = \text{máx}\{|z|, |t|\}$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$.

b) Determine las clases de equivalencia.

c) Sea $f\colon \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida sobre el conjunto cociente tal que $f\big([(x, y)]\big) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$ para todo $[(x, y)] \in \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.
Justifique que f es una aplicación bien definida y determine si f es inyectiva o sobreyectiva.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

a) Demuestre por inducción sobre n que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se cumple:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$$

b) Demuestre que no existe ningún número real $\alpha > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se cumple:

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \geqslant \alpha$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)
a) Demuestra que las soluciones de la ecuación

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

son todas las raíces quintas de la unidad salvo $z = 1$.
b) Sea $\omega = 2e^{\frac{2\pi i}{5}} + 1 + 2e^{\frac{-2\pi i}{5}}$. Demuestre que $\omega^2 = 5$.

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean X y Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación y supongamos que X tiene al menos dos elementos distintos. Demuestre que f es una aplicación inyectiva si y sólo si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subset X$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sea en el conjunto $\mathbb{R}^2$ la relación dada por:

$$(x, y)\mathcal{R}(z, t) \quad \text{si y sólo si} \quad |x| + |y| = |z| + |t|$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$.

b) Determine las clases de equivalencia.

c) Sea $f\colon \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida sobre el conjunto cociente tal que $f\big([(x, y)]\big) = |x| + |y|$ para todo $[(x, y)] \in \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.
Justifique que f es una aplicación bien definida y determine si f es inyectiva o sobreyectiva.

Pregunta 3 (3 puntos)
Sean los conjuntos A, B, C y D tales que A y B son equipotentes y C Y D también son equipotentes.

a) Demuestre que $A \times C$ es equipotente a $B \times D$.

b) Demuestre que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es equipotente a $A \times \{0, 1\}$.

c) Demuestre que si $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ entonces $A \cup C$ es equipotente a $B \cup D$.

Pregunta 4 (2 puntos)
Para $a_0, a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ siendo $a_n \neq 0$ y tales que $a_i = a_{n-i}$ para todo $i = 0, 1, \cdots n$, se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Demuestra que $z_0 \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación si y sólo si es solución de dicha ecuación el inverso de z_0, z_0^{-1} .

Pregunta 1 (3 puntos)
Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestre que es verdadera o ponga un contraejemplo para demostrar que es falsa:

a) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

b) Si f es inyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva.

c) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva.

d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

e) Si $g \circ f$ es biyectiva entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

b) Si f es sobreyectiva entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sea en el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación dada por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad a+b<c+d \;\; \text{o si} \;\; a+b=c+d \;\; \text{entonces} \;\; a \leqslant c\,.$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Justifique razonadamente si el orden es total o parcial.

c) Si $H = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a^2 + b^2 \leqslant 9\}$, determine, en caso de existencia, las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo y máximo y mínimo de H.

Pregunta 3 (2 puntos)
Demuestre, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ coinciden el resto de la división entera de 7^n entre 5 con el resto de la división entera de 2^n entre 5.

Pregunta 4 (2 puntos)
Sea $x = a + bi$ un número complejo fijo y sea

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z = mx + n\}\,.$$

Se considera las restricciones a H de la suma y producto de números complejos.

i) Demuestre que $(H, +)$ es un grupo.

ii) Demuestre que el producto es una operación interna en H si y sólo si $x^2 \in H$.

Pregunta 1 (3 puntos)
Dados tres subconjuntos cualesquiera A, B y C de un conjunto no vacío U, demuestre que

a) $A \triangle B = A \cap B \iff A = B = \emptyset$;

b) $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$;

c) $A \triangle C = B \triangle C \iff A = B$.

Pregunta 2 (2 puntos) Se dice que un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ es un retículo si existen el supremo y el ínfimo de dos elementos cualesquiera a y b de U.

Dado los grafos dirigidos (V, G) y (V, G') de la figura, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $G = \{21, 32, 42, 53, 54\}$ y $G' = \{21, 42, 53, 54\}$, se consideran los pseudo-grafos obtenidos al añadir las aristas que unen cada punto con sí mismo. Se define en V las relaciones $\leqslant_G$ y $\leqslant_{G'}$ mediante:

$$G: \begin{tikzcd} 5 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[d] & \\ 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

$$G': \begin{tikzcd} 5 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ 3 & & 1 \end{tikzcd}$$

$x \leqslant_G y$ (respectivamente $x \leqslant_{G'} y$) si y sólo si existe un camino que empieza en x y termina en y en el pseudografo de G (respectivamente de G').

a) Compruebe si $(V, \leqslant_G)$ es un retículo.

b) Compruebe si $(V, \leqslant_{G'})$ es un retículo.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Determine razonadamente si los siguientes conjuntos con la operación considerada forman un grupo.

a) $A = (-1, 1)$ y la operación $*$ definida mediante $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ con el producto usual de números complejos.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

a) Sean ω_1, ω_2 y ω_3 las tres raíces cúbicas, distintas entre sí, de un mismo número complejo. Determine razonadamente ω_2 y ω_3 en función de ω_1.

b) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^6 - (1 + 2i)z^3 + i - 1 = 0$.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea A un conjunto y $f\colon A \longrightarrow A$ una aplicación. Se define f^n para todo $n \in \mathbb{N}$ mediante

$$\begin{cases} f^0 & = I_A \text{ (aplicación identidad en A)} \\ f^{n+1} & = f^n \circ f \end{cases}$$

Demuestre por inducción sobre n lo siguiente:

a) $f^{n+1} = f \circ f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) si f es biyectiva entonces $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Se dice que el orden de un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ es denso (o divisible) si para todo $a, b \in U$ tales que $a \prec b$ existe $c \in U$ tal que $a \prec c \prec b$. Sean $(U, \preceq)$ y $(V, \preccurlyeq)$ dos conjuntos ordenados tales que existe una aplicación biyectiva $f\colon U \to V$ cumpliendo que para todo $a, b \in U$, $a \preceq b$ si y sólo si $f(a) \preccurlyeq f(b)$.

a) Demuestre que el orden de U es denso si y sólo si es denso el orden de V.

b) Deduzca de lo anterior si existe una aplicación biyectiva $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ cumpliendo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ si $a \leqslant b$ entonces $f(a) \leqslant f(b)$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario. Dados H y P dos subconjuntos no vacíos de A, se considera la suma $H + P$ y el producto $H \cdot P$ definidos por:

$$H + P = \{a + b \mid a \in H \text{ y } b \in P\}$$

$$H \cdot P = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in H,\, b_i \in P,\, i = 1, 2 \ldots, n \text{ y } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Sean I y J dos ideales de A.

a) Demuestre: i) $I \cdot J \subset I \cap J$; ii) $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J)$.

b) Demuestre que si $A = I + J$ entonces $I \cdot J = I \cap J$.

Pregunta 4(2,5 puntos)
Sea en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ siendo $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demuestre que si $\omega \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación si y sólo si es solución de dicha ecuación el opuesto de ω, $-\omega$

b) Resuelva la ecuación.

Pregunta 1 (2 puntos)

a) Sean, $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{N}^*$, k números primos distintos. Demuestre que el número $N = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ no es divisible por ningún p_i siendo $i = 1, 2, \ldots, k$.

b) Deduzca de lo anterior que existen infinitos números primos.

Nota. Se recuerda que un número natural primo es un número natural n estrictamente mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores naturales distintos: el 1 y él mismo.

Pregunta 2 (3 puntos) Sea la sucesión a_n definida por recurrencia mediante:

$$\begin{cases} a_0 & = 4 \\ a_{n+1} & = \dfrac{2a_n^2 - 3}{a_n + 2} \end{cases}$$

a) Demuestre, por inducción, que $a_n - 3 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre que $a_{n+1} - 3 - \dfrac{3}{2}(a_n - 3) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Demuestre, por inducción, que $a_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Sea $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una aplicación creciente, es decir, para todo $x, x' \in [0,1]$, si $x \leqslant x'$ entonces $f(x) \leqslant f(x')$. Sea $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.

a) Demuestre que $A \neq \emptyset$.

b) Demuestre que $f(A) \subset A$.

c) Sea $a = \inf(A)$. Demuestre que $f(a)$ es una cota inferior de A y deduzca que $f(a) = a$.

Pregunta 4 (2,5 puntos) En el conjunto $\mathcal{G} = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, se considera las restricciones a $\mathcal{G}$ de la suma y el producto de números complejos.

a) Demuestre que si $z, z' \in \mathcal{G}$ entonces $z + z'$ y $zz' \in \mathcal{G}$.

b) Determine el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{G}$ con inverso en $\mathcal{G}$.

c) Demuestre que para todo $\omega \in \mathbb{C}$ existe $z \in \mathcal{G}$ tal que $|\omega - z| < 1$.

Pregunta 1 (2,5 puntos) Dado un subconjunto A de un conjunto no vacío U, se llama función característica de A, a la función $\chi_A : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Si $A, B \subset U$ demuestre que las funciones h, g y f que se definen a continuación son funciones características de subconjuntos de U que se determinarán:

a) $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 1 - \chi_A(x)$.

b) $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$.

c) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

Pregunta 2 (2,5 puntos) En $\mathbb{C}$ se define la relación:

$$z\mathcal{R}z' \quad \text{si y sólo si} \quad |z| = |z'|$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{C}$.

b) Determine geométricamente la clase de equivalencia de cada $z \in \mathbb{C}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Se define sobre $\mathbb{R}^2$ la relación dada por:

$$(x, y) \ll (x', y') \quad \text{si y sólo si} \quad |x' - x| \leqslant y' - y$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden.

b) Represente gráficamente en el plano los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, 0) \ll (x, y)\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \ll (0, 0)\}$. Razone si la relación $\ll$ es una relación de orden total.

c) Si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0\}$, determine el supremo de C.

Pregunta 4 (2,5 puntos) Determine los conjuntos de números complejos que cumplen las siguientes ecuaciones. Indique, en cada caso, la figura geométrica que representen.

a) $\dfrac{|z-2|}{|z-4|} = 1$ b) $\dfrac{|z-2|}{|z-4|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean tres subconjuntos cualesquiera A, B y C de un conjunto no vacío U tales que $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$. Demuestre que $B = C$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Sean los subconjuntos $A, A' \subset X$ y $B \subset Y$.

a) Demuestre que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

b) Determine razonadamente si se cumplen las inclusiones $f(A \Delta A') \subset f(A) \Delta f(A')$ y $f(A) \Delta f(A') \subset f(A \Delta A')$, siendo Δ la diferencia simétrica de conjuntos.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
En el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 se consideran los subconjuntos

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } \det(A) = ad - bc \neq 0 \right\}$$

y

$$F = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } \det(B) = ad - bc = 1 \right\}.$$

a) Determine razonadamente si H es un grupo con el producto usual de matrices.

b) Determine razonadamente si F es un grupo con el producto usual de matrices.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Dados los números $z, z' \in \mathbb{C}$, se pide:

a) Demuestre que $|zz'| = |z||z'|$.

b) Demuestre que $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$ y determine una condición necesaria y suficiente para que la desigualdad sea una igualdad.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación.

a) Demuestre que $\forall B \subset Y$ se tiene que $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$.

b) Demuestre que f es inyectiva si sólo si $\forall A \subset X$ se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sean X un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación de orden en X. Se define en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$A \,\mathcal{R}\, B \quad \text{si y sólo si} \quad A = B \text{ o } \quad (\forall a \in A \ \forall b \in B \ \ a \preceq b)$$

Determine razonadamente si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia o de orden en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$.

Pregunta 3 (3 puntos)
Sea $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Calcule razonadamente el valor de $f(0)$.

b) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(-x) = -f(x)$.

c) Demuestre por inducción sobre n, que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(nx) = nf(x)$$

Deduzca que también es cierto $\forall n \in \mathbb{Z}$.

d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{Q}$ se cumple que $f(x) = kx$ siendo $k = f(1)$.

Pregunta 4 (2 puntos)
Si $E(a)$ denota la parte entera de cualquier $a \in \mathbb{R}$, demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$$

Pregunta 1 (3 puntos)

Sean U un conjunto y $f\colon U \longrightarrow U$ una aplicación biyectiva. En U se define la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a\,\mathcal{R}\,b \quad \text{si y sólo si} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f^n(a) = b$$

siendo $f^0 = I_U$, $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n\text{veces}}$ y $f^{-n} = \overbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}^{n\text{veces}}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que si $A \subset U$ es una clase de equivalencia para $\mathcal{R}$ entonces $f(A) = A$.

c) Demuestra que si $B \subset U$, $B \neq \varnothing$, cumple que $f(B) = B$ entonces B es una unión de clases de equivalencia.

Pregunta 2 (2 puntos)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo.

a) Demuestre que $\forall a \in A,\ a \cdot 0 = 0$.

b) Demuestre que $\forall a, b \in A,\ (-a)b = -(ab)$.

Pregunta 3 (3 puntos) Se define sobre $\mathbb{R}^2$ la relación dada por:

$$(x, y) \ll (x', y') \quad \text{si y sólo si} \quad |x' - x| \leqslant y' - y$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden.

b) Represente gráficamente en el plano los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, 0) \ll (x, y)\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \ll (0, 0)\}$. Razone si la relación $\ll$ es una relación de orden total.

c) Si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0\}$, determine el supremo de C.

Pregunta 4 (2 puntos)

Sea la función $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z}\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

a) Determine los valores de z tales que $f(z) = z$.

b) Determine los valores de z tales que $f(z)$ es real.

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Dados tres conjuntos arbitrarios no vacíos A, B y C y dos aplicaciones $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$, demuestre que:

a) si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a\,\mathcal{R}\,b \quad \text{si y sólo si} \quad a^2 - b^2 = a - b$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia.

Pregunta 3 (3 puntos)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario.

a) Demuestre que dados $x, y \in A$ si xy es inversible entonces x e y son inversibles.

b) Demuestre que si $x \in A$ es inversible entonces x no es un divisor de cero.

c) Sea $a \in A$ y sea aA el ideal generado por a. Demuestre que $aA = A$ si y sólo si a es inversible.

Pregunta 4 (2 puntos)

Sea el número complejo $w = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

a) Exprese w y w^2 en forma binómica y calcule $1 + w + w^2$.

b) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^3 - 8i = 0$.

Pregunta 1 (2 puntos)(0,75+0,75+0,5)
Se definen las aplicaciones f y g mediante:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (n,m) & \longmapsto & f(n,m) = mn \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ & n & \longmapsto & g(n) = \big(n, (n+1)^2\big) \end{array}$$

a) Determine razonadamente si f es inyectiva o sobreyectiva.

b) Determine razonadamente si g es inyectiva o sobreyectiva.

c) Determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Se define en $\mathbb{N}^*$ la relación $\ll$ dada por:

$$a \ll b \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } \; n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } b = a^n$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}^*$.

b) Si $A = \{2, 4, 8\}$, estudie la existencia, y en su caso explicítelos, de cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales del conjunto A .

Pregunta 3 (2 puntos)

Se define por recurrencia la sucesión u_n mediante: $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ se cumple:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$$

Pregunta 4 (3 puntos)
Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la aplicación definida mediante $f(z) = z^3 - 2z^2 + 16$. Se pide:
a) Calcule $f(-2)$, deduzca una factorización de $f(z)$ y resuelva la ecuación $f(z) = 0$.
b) Sean los números complejos $z_0 = -2$, $z_1 = 2(1+i)$ y $z_2 = 2(1-i)$.

Calcule el módulo y el argumento de los números z_0, z_1, z_2 y $\omega = \dfrac{z_0\, z_1^2}{z_2^3}$.

c) Represente en el plano complejo los puntos M_0, M_1 y M_2 cuyos afijos son respectivamente z_0, z_1 y z_2. Demuestre que el triángulo de vértices M_0, M_1 y M_2 es isósceles pero no es equilátero.

Pregunta 1 (2 puntos)(0,75+0,75+0,5)
Se definen las aplicaciones f y g mediante:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & f(n) = 2n \end{array} \qquad\qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & g(n) = E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

a)Determine razonadamente si f es inyectiva o sobreyectiva.

b) Determine razonadamente si g es inyectiva o sobreyectiva.

c) Determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

Pregunta 2 (3 puntos)
En el conjunto de las partes finitas de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_F(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ es un conjunto finito}\}$, se define la relación la relación $\mathcal{R}$ tal que dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si coinciden las sumas de sus respectivos elementos, es decir: $\forall A, B \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$

$$A \,\mathcal{R}\, B \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$.

b) Determine la clase de $A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{1\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

c) Justifique razonadamente que la clase de cualquier elemento A de $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ es un conjunto finito.

Pregunta 3 (2 puntos) (1+0,5+0,5)
Consideremos en $\mathbb{N}^*$ las propiedades P y Q definidas para todo $n \in \mathbb{N}^*$ mediante:

P_n: $4^n - 1$ es divisible por 3

Q_n: $4^n + 1$ es divisible por 3

a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ se tiene $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ y $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.

b) Demuestre que P_n es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

c) ¿Qué se puede deducir de Q_n?

Pregunta 4 (3 puntos)

a) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ se cumple que $\dfrac{z-i}{z+i} \neq 1$.

Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ la aplicación definida mediante:

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

b) Demuestre que para todo $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ existe un único $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ tal que $f(z) = \omega$.

c) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z-i)^3 + 8(z+i)^3 = 0$.

Pregunta 1 (2.5 puntos) (1+1.5)
Sea E un conjunto no vacío y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que dados dos subconjuntos disjuntos cualesquiera de E, A y B, se cumple que $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

a) Demuestre que $f(\varnothing) = 0$.

b) Demuestre que $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E)$ se cumple que $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Se define en $\mathbb{R}^2$ la relación $\ll$ dada por:

$$(x, y) \ll (x', y') \text{ si y sólo si } \ (x + y < x' + y') \text{ o } \ (x + y = x' + y' \text{ y } \ x \leq x')$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden en $\mathbb{R}^2$ y determine si el orden es total o parcial.

b) Represente en el plano el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1, 1) \ll (x, y)\}$. Determine razonadamente, si existen, cotas superiores, supremo y máximo del conjunto $B = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ y del triángulo CDE siendo C, D y E los puntos de coordenadas $(-7, 0)$, $(0, 7)$ y $(2, 5)$, respectivamente.

Pregunta 3 (2 puntos)
Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$. Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Pregunta 4 (2.5 puntos)
Sea el conjunto de los números primos estrictamente superiores a 2:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ es primo y } \ p > 2\}$$

Se define en $\mathbb{P}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$p\mathcal{R}q \text{ si y sólo si } \ \frac{p + q}{2} \in \mathbb{P}$$

Determine razonadamente si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

Se recuerda que todo número primo mayor que 2 tiene, en $\mathbb{N}$, únicamente dos divisores distintos, el propio número y el 1.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean A, B y C subconjuntos arbitrarios de un conjunto X. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestre que es verdadera o ponga un contraejemplo para demostrar que es falsa:

a) $(A \times B) \cap (\overline{A} \times B) = \emptyset$

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$\overline{A}$ designa el complementario del conjunto A con respecto a X.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sea $\cdot$ una operación interna definida en un conjunto $E \neq \varnothing$ conmutativa y asociativa tal que $\forall x \in E$ se cumple que $x \cdot x = x$. Se define sobre E la relación

$$x \ll y \text{ si y sólo si } \quad x \cdot y = x$$

a) Si $E = \mathcal{P}(X)$ siendo X un conjunto no vacío qué relación conocida es la relación $\ll$ en los dos casos siguientes:

i) la operación $\cdot$ es la intersección $(\cap)$ en $\mathcal{P}(X)$.

ii) la operación $\cdot$ es la unión $(\cup)$ en $\mathcal{P}(X)$.

b) En el caso general, demuestre que $\ll$ es una relación de orden en E y demuestre que $\forall x, y \in E$ se cumple que $\inf(x, y) = x \cdot y$.

Pregunta 3 (2 puntos)
Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Sean los números complejos $x = \sqrt{3} - i$, $y = 2 - 2i$ y $z = \dfrac{x^4}{y^3}$.

a) Calcule módulo y argumento de x, y, x^4, y^3 y z.

b) Calcule la forma binómica de x^4, y^3 y z.

c) Deduzca los valores exactos de $\cos(\pi/12)$ y $\operatorname{sen}(\pi/12)$.

Pregunta 1 (2,5 puntos))
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. Dado $x \in A$ se dice que

$$x \text{ es nihilpotente si } \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } x^n = 0.$$

Sean $x, y \in A$ tales que x e y son nihilpotentes. Demuestre que:

a) $x \cdot y$ es nihilpotente.

b) $x + y$ es nihilpotente.

c) $1 - x$ no es nihilpotente.
Indicación: Calcule previamente $(1-x)(1+x+\cdots+x^k)$ siendo $k \in \mathbb{N}^*$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas existen del conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, n+1\}$ al conjunto $B = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$? Justifique la respuesta.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pregunta 4 (2,5 puntos) (1+1,5)

a) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 - 6z + 12 = 0$.

b) Sea $\omega = 3 + i\sqrt{3}$. Calcule el módulo y el argumento de los números ω, $\omega - 4$, $\dfrac{\omega}{\omega - 4}$ y $\dfrac{\overline{\omega}}{\overline{\omega} - 4}$, siendo $\overline{\omega}$ el conjugado de ω.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Se define en $\mathbb{N}^*$ la relación $\ll$ dada por:

$$x \ll y \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } \ k \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } y = x^k$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}^*$.

b) Si $A = \{2, 8\}$ y $B = \{3, 5\}$ estudie la existencia, y en su caso explicítelos, de cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales de los conjuntos A y B.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \colon \exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \text{ tal que } n \text{ impar y } x = \dfrac{m}{n}\right\}$.

a) Demuestre que A, con las operaciones de $\mathbb{Q}$ restringidas a A, es un anillo unitario.

b) Determine en el anillo A los elementos que son inversibles.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ se cumple que $2^n \geq n^2$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Utilice la fórmula de Moivre para expresar $\cos 5\alpha$ y $\operatorname{sen} 5\alpha$ en función de $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \alpha$.

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Sea un conjunto X no vacío y sea $f\colon X \longrightarrow X$ una aplicación tal que $f \circ f \circ f = f$. Demuestre que:

$$f \text{ es inyectiva si y sólo si } f \text{ es sobreyectiva}$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se define en $\mathbb{Z}$ la relación dada por:

$$x \,\mathcal{R}\, y \;\text{ si y sólo si }\; x + y \text{ es divisible por } 2$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

b) Determine las clases de equivalencia.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

Sea la sucesión tal que $u_0 = 0$ y

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene $0 < u_n \leq 1$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sea $H = \{z \in \mathbb{C}\colon z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos las operaciones suma y producto de números complejos restringidas a H.

a) ¿Es $(H, +)$ un grupo?

b) ¿Es $(H^*, \cdot)$ un grupo? (siendo $H^* = H \setminus \{0\}$)

Justifique las respuestas.

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea E un conjunto no vacío y sean A, B y C tres subconjuntos arbitrarios de E. Demuestre que

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea E un conjunto tal que $\operatorname{card}(E) = 40$ y sea $A \subset E$ tal que $\operatorname{card}(A) = 7$.

a) ¿Cuántos subconjuntos de E tienen intersección no vacía con A?

b) ¿Cuántos subconjuntos de E contienen al conjunto A?

Razone la respuesta.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Demuestre por inducción que $10^n - 1$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

a) Sea $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$. Calcule $P(i\sqrt{3})$ y $P(-i\sqrt{3})$ y halle un polinomio Q de grado 2 y con coeficientes reales tal que $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.

b) Resuelva la ecuación $P(z) = 0$.

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Justifique si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 - 1 = 0\ \wedge\ x^2 - 2 = 0)$

b) $\big(\exists x \in \mathbb{R}\ \ (x^2 - 1 = 0)\ \big)\ \ \wedge\ \big(\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ (x^2 - 2 = 0)\ \big)$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 - 1 \neq 0\ \vee\ x^2 - 2 \neq 0)$

d) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \ (|a| < \varepsilon)$

e) $\exists a > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \ (a < \varepsilon)$

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones de orden total en un conjunto E. Se definen en E las relaciones:

$$x\,\mathcal{T}\,y \text{ si y sólo si } \ x\,\mathcal{R}\,y \wedge x\,\mathcal{S}\,y$$

$$x\,\mathcal{Q}\,y \text{ si y sólo si } \ x\,\mathcal{R}\,y \vee x\,\mathcal{S}\,y$$

Determine si las relaciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{Q}$ son reflexivas, antisimétricas, transitivas y en su caso, si la relación de orden resultante es de orden total.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

Sean E y F dos conjuntos y $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación. Sean $A \subset E$ y $B \subset F$. Demuestre que

$$f^{-1}(B) \cap A\ \subset\ f^{-1}\big(B \cap f(A)\big)$$

siendo f^{-1} la relación inversa de f. Muestre que la inclusión

$$f^{-1}\big(B \cap f(A)\big)\ \subset\ f^{-1}(B) \cap A$$

no es siempre cierta.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación: $z^n = \overline{z}$.

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Demuestre que dados tres subconjuntos A, B, y C de un conjunto U se tiene:

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se define en $\mathbb{R}$ la relación definida para todo $x, y \in \mathbb{R}$ mediante:

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ si y sólo si } \quad x - y \in \mathbb{N}$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{R}$. ¿Es orden total?

b) Dado el subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1\right\}$, determine, respecto del orden $\mathcal{R}$ definido anteriormente, si A es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ y especifique los maximales del conjunto A.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

Demuestre, utilizando la identidad de Bézout que,

$$5^{n+1} + 6^{n+1} \quad \text{y} \quad 5^n + 6^n$$

son dos números primos entre sí para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

Pregunta 1 (2 puntos)

Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left| x - \frac{1}{2} \right| \leqslant 2 \right\} \text{ y } B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 8x - 5 < 0 \right\}$$

Obtenga $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ y $\overline{B}$, expresados mediante intervalos.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto U es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$\forall x, y, z \in U \quad \text{si } x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z, \text{ entonces } z\mathcal{R}x.$$

1. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, ¿es $\mathcal{R}$ circular? ¿Por qué?
2. Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y circular, ¿es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia? ¿Por qué?

Pregunta 3 (3 puntos)

Se define en $\mathbb{N}$ la operación interna $\star$ y, por inducción, $a^{(n)}$ mediante:

$$a \star b = 2a + b \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^{(1)} & = & a \\ a^{(n+1)} & = & a^{(n)} \star a \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{array} \right.$$

1. Estudie si la operación $\star$ es conmutativa, asociativa, posee elemento neutro y en su caso, si todo elemento tiene simétrico.
2. Calcule $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ y exprese $a^{(n)}$, respecto de las operaciones usuales de $\mathbb{N}$. Demuestre por inducción la validez de la expresión hallada para $a^{(n)}$ si $n \geqslant 1$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación:

$$(z - 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1 + i)(z + 1 - i) = 5$$

Pregunta 1 (2,5 puntos)

1. Defina aplicación inyectiva, aplicación sobreyectiva, y aplicación biyectiva.
2. Sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$ tres aplicaciones tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son aplicaciones biyectivas.

   i) Demuestre que f y g son inyectivas.

   ii) Demuestre que f es biyectiva.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

1. Dados un conjunto parcialmente ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto D de U, razone si todo elemento maximal de D es un elemento máximo de D e inversamente si un máximo de D es un elemento maximal de D.
2. Se considera en $\mathbb{R}^2$ el orden producto $\leqslant_P$ dado por:

   $$(a, b) \leqslant_P (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a \leqslant c \;\; \text{y} \;\; b \leqslant d$$

   Sea D el conjunto de puntos del triángulo de vértices $A(5, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(3, 2)$, incluidos los puntos interiores del triángulo y las aristas. Determine el conjunto de cotas superiores, supremo, máximo y maximales de D.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

Demuestre por inducción que

$$1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \cdots + (n-1)1 = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

para todo $n \geqslant 1$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sean z_1 y z_1 dos números complejos no nulos tales $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

1. Demuestre que $z_1\overline{z_2}$ es un número real tal que $z_1\overline{z_2} \geqslant 0$
2. Deduzca que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, tal que $z_1 = \alpha z_2$.

Sin material permitido. Duración: **2 horas.** **Respuestas únicas** Respuesta Bien=1, Mal=-0.5 Sin contestar=0.

Pregunta 1

Sea un conjunto U tal que $100 < \operatorname{card}(\mathcal{P}(U)) < 500$, donde $\mathcal{P}(U)$ es el conjunto de las partes de U. Se considera el conjunto $P_3 = \{X \subset \mathcal{P}(U) | \operatorname{card}(X) = 3\}$. Si k representa el número elementos de P_3 tales que dos cualesquiera X e Y cumplen que $\operatorname{card}(X \cap Y) = 1$, entonces:

A) $k < 10$.

B) $10 < k < 20$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 2

Se considera la relación R en $\mathbb{N}^2$ definida por $(x, y)R(z, t) \iff x^2 + y^2 = z^2 + t^2$. Entonces

A) R es una relación de equivalencia y todas las clases, menos $[(0, 0)]$, tienen 2 elementos.

B) R es una relación de equivalencia y existen algunas clases que tiene cuatro elementos.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 3

Se considera el conjunto $(\mathbb{Z}_-)^2$ con la relación $(x, y)S(, z, t) \iff |x| + |y| \leqslant |z| + |t|$, o si $|x| + |y| = |z| + |t|$, entonces $|y| \leqslant |t|$.

A) S es una relación de orden sin la propiedad de ser un buen orden.

B) S es una relación de orden y existe un isomorfismo de orden entre $(\mathbb{N}, \leqslant)$ y $((\mathbb{Z}_-)^2, S)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 4

Se considera la relación de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ definida por $F = \{(x, x^4 - x) \in \mathbb{Z}^2\}$

A) F es una aplicación inyectiva.

B) F es una aplicación sobreyectiva.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 5

En el conjunto de las partes de un conjunto, $\mathcal{P}(U)$, se considera una operación de subconjuntos de U definida de la forma $A * B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.

A) $*$ cumple la propiedad del elemento simétrico. Además, dado A el simétrico de A es A' cumple que $A \cap A' = \emptyset$

B) $\mathrm{card}(E) > 1$, donde E es el elemento neutro.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 6

Sean z_1 y z_2 las dos raíces de la ecuación $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$.

A) $|\mathrm{Re}\ z_1| = |\mathrm{Re}\ z_2|$.

B) $|\mathrm{Im}\ z_1| = |\mathrm{Im}\ z_2|$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 7

Sea $C(z) = az^2 + bz + c$ el cociente de dividir el polinomio $z^3 - 3iz^2 - 3z + 1 - i = 0$ entre el polinomio $z - 1 + 2i$.

A) c es un número imaginario puro.

B) $(\mathrm{Im}\ c)(\mathrm{Re}\ c) < 0$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 8

Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Se considera el subconjunto $A \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $(x, y) \in A \iff x^2 = y^2 + p^2$.

A) Existe algún p para el cual card $A > 1$.

B) $A = \emptyset$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 9

Sea f la aplicación entre el conjunto $A \subset \mathbb{C}$ formado por las raíces de $z^9 - 1 = 0$ y el conjunto $\mathbb{Z}/9$ definida por $f(z) = \dfrac{9\arg z}{2\pi}$.

A) f es un homomorfismo entre grupos; $(A, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}/9, +)$.

B) f es un homomorfismo entre grupos; $(A, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}/9, \cdot)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 10

Sea un conjunto U y $A, B, C \in \mathcal{P}(U))$ no vacíos. Se consideran las expresiones:

1. $A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \triangle (A \cap B) \subset A \setminus B$.
3. $A \triangle (B \triangle C) \subset (A \triangle B) \triangle C$.

A) Sólo dos de las expresiones son verdaderas.

B) Una única expresión es verdadera.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 1

Sean dos conjuntos A, de números, y B, de letras, tales que $20 < \text{card}(\mathcal{P}(A) \cup B) = 70$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de las partes de A. Si $a = \text{card}(A)\}$ y $b = \text{card}(B)\}$, entonces puede ocurrir que :

A) $a = b$.

B) $a \cdot b < 30$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 2

Se considera el conjunto $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4 | x^2 - t^2 = z^2 - y^2\}$. Se considera la relación R en $\mathbb{Z}^2$ definida por $(x, y)R(z, t) \iff (x, y, z, t) \in A$. Entonces

A) R es una relación de equivalencia y la clase $[(3, 2)]$ tiene más de ocho elementos.

B) R es una relación de equivalencia y la clase $[(3, 4)]$ tiene ocho elementos.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 3

Se considera el conjunto $\mathbb{N}^2$ con la relación $(x, y)S(, z, t) \iff x+y \leqslant z+t,$ o si $x+y = z + t,$ entonces $y \leqslant t$.

A) S es una relación de orden total pero no tiene la propiedad de ser un buen orden.

B) S no es una relación de orden.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 4

Se considera el conjunto U y la aplicación definida de $\mathcal{P}(U)$ a $\mathcal{P}(U)$ definida por la expresión $f(X) = \overline{X}$, donde $\overline{X} = U \setminus X$ ($\setminus$ es la diferencia de conjuntos).

A) f es una aplicación inyectiva y $f(X \bigtriangleup Y) \neq \overline{X} \bigtriangleup Y)$ ($\bigtriangleup$ es la diferencia simétrica de conjuntos).

B) f es una aplicación sobreyectiva y $f(X \bigtriangleup Y) \neq X \bigtriangleup \overline{Y})$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 5

En el conjunto de las partes de un conjunto $\mathcal{P}(U)$ se considera una operación de subconjuntos de U definida de la forma $A * B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.

A) $*$ cumple la propiedad asociativa.

B) No existe elemento neutro.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 6

Sea z_0 el resto de dividir el polinomio $z^3 - 3iz^2 - 3z + 1 - i = 0$ entre el polinomio $z - 1 + 2i)$.

A) $mcd(\text{Re } z_0, \text{Im } z_0) = 1$.

B) Im z_0 es divisible por Re z_0.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 7

Sea (z_0, w_0) la solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} z + (3+i)w = 1 \\ (2+i)z + 5w = 0 \end{cases}$

A) $||z_0|| < ||w_0||$.

B) $\arg w_0 < |\arg z_0|$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 8

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ dos números primos. Se considera el subconjunto $A \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $(x, y) \in A \iff x^2 = y^2 + pq$.

A) Existe algún p para el cual card $A = 0$.

B) card $A > 1$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 9

Sea f la aplicación entre $\mathbb{Z}/6$ y $\mathbb{C}$ definida por $f(n) = e^{\frac{2\pi n i}{6}}$.

A) $(f(\mathbb{Z}/6), \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}, \cdot)$.

B) En $(f(\mathbb{Z}/6), \cdot)$ no se cumple la existencia del elemento inverso.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 10

Sea un conjunto U y $A, B, C \in \mathcal{P}(U))$ no vacíos. Se consideran las expresiones:

1. $A \setminus (B \setminus C) \supset (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \triangle (A \cap B) \supset A \setminus B$.
3. $A \triangle (B \triangle C) \supset (A \triangle B) \triangle C$.

A) Sólo dos de las expresiones son verdaderas.

B) Una única expresión es verdadera.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 1

Sean un conjunto no vacío A y un elemento $a \notin A$. Se considera el conjunto $E = \{X \subset A \cup \{a\} \mid a \in X\}$. Se define operación $X \cup^* Y = (X - \{a\}) \cup Y$ y se considera la intersección de conjuntos. Entonces:

A) $(E, \cup^*, \cap)$ es un anillo con elemento unidad.

B) $(E, \cup^*, \cap)$ es un cuerpo.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 2

Sea la relación R en $\mathbb{Z}^2$ definida por $(x, y)R(z, t) \iff x^3 - y^3 = z^3 - t^3$. Entonces

A) Si R es una relación de equivalencia, entonces $[(a, 0)] \cup [(0, a)],\ a > 0$, tiene menos de 3 elementos.

B) Si R es una relación de equivalencia, entonces existe alguna clase con más de 3 elementos.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 3

Se considera un conjunto ni vacío A. En el conjunto $A \times A$ se tiene definido una relación $\leqslant$ de buen orden.

A) La relación $\leqslant$ induce una relación de buen orden en A sólo si A es un conjunto finito.

B) Si A no es un conjunto finito, entonces la relación $\leqslant$ no puede inducir un buen orden en A.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 4

Observación: Esta pregunta tiene exactamente el mismo enunciado que la pregunta 3. No es un error de edición. Se valora negativamente le cambio de marca

Se considera un conjunto ni vacío A. En el conjunto $A \times A$ se tiene definido una relación $\leqslant$ de buen orden.

A) La relación $\leqslant$ induce una relación de buen orden en A sólo si A es un conjunto finito.

B) Si A no es un conjunto finito, entonces la relación $\leqslant$ no puede inducir un buen orden en A.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 5

En el conjunto de las partes de un conjunto, $\mathcal{P}(U)$, se considera una operación de subconjuntos de U definida de la forma $A * B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$

A) $*$ cumple la propiedad conmutativa y $\overline{A * B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

B) $*$ cumple la propiedad $A \cup (B * C) = (A \cup B) * (A \cup C)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 6

De la ecuación $z^3 + (-1 - 3i)z^2 + (-5 + 2i)z + (1 + 3i) = 0$ se sabe que una raíz z_0 es imaginaria pura. Sean z_1 y z_2 las otras dos raíces de la ecuación. Entonces

A) Im $(z_1 + z_2 \leqslant 2\text{Im } z_0$.

B) Im $(z_1 - z_2) \geqslant \text{Im } z_0$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 7

De la ecuación $z^3 + (-1 - 3i)z^2 + (-5 + 2i)z + (1 + 3i) = 0$ se sabe que una raíz z_0 es imaginaria pura. Sean z_1 y z_2 las otras dos raíces de la ecuación. Entonces

A) Re $(z_1 + z_2 < \text{Im } z_0$.

B) Re $(z_1 + z_2) > 0$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 8

Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Se considera el subconjunto $A \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $(x, y) \in A \iff x^2 = y^2 + p^2$.

A) Existe algún p para el cual card $A > 1$.

B) $A = \emptyset$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 9

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos no vacíos y
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (a_1, a_2) \in A, \exists (b_1, b_2) \in B$ tales que $(x, y) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)\}$
siendo la operación $+$ de $\mathbb{R}^2$ definida como $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ se dice acotados el conjunto $\{d = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \mid \forall (x, y) \in X\}$ es un conjunto acotado.

A) Si A y B son acotados, entonces C es acotado.

B) Para que C sea acotado, basta que exista un cuadrado I tal que $A \subset I$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 10

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos no vacíos y
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (a_1, a_2) \in A, \exists (b_1, b_2) \in B$ tales que $(x, y) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)\}$,
siendo la operación $+$ de $\mathbb{R}^2$ definida como $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^2$ se dice acotados el conjunto $\{d = |x| + |y| \in \mathbb{R} \mid \forall (x, y) \in Y\}$ es un conjunto acotado.

A) A es un conjunto acotado sólo si y sólo si C acotado.

B) Si C es acotado, entonces A y B son acotados.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Sin material permitido. Duración: **2 horas.** **Respuestas únicas** Respuesta Bien=1, Mal=-0.5 Sin contestar=0.
Atención: Si el número de respuesta Mal es mayor que 4, se resta 1 por cada una en lugar de 0.5.

Pregunta 1

Se considera la relación T en $\mathbb{R}^2$ definida por $(x,y)T(z,t) \iff |x|+|y| = |z|+|t|$. Entonces:

A) R no es una relación de equivalencia.

B) La elementos de la clase $[(1,2)]$ es el perímetro de una figura cuyo área es menor que 15.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 2

Se considera la relación T en $\mathbb{R}^2$ definida por $(x,y)T(z,t) \iff |x|+|y| = |z|+|t|$. Entonces:

A) $\mathrm{Card}\big([(x,y)]\big)$ es $2^{\aleph_0}$.

B) Existe una biyección entre el conjunto cociente $\mathbb{R}^2_{/T}$ y el intervalo $[0,2] \subset \mathbb{R}$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 3

En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos
$A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1-1| \leqslant 1, |x_2-1| \leqslant 1, |x_3-1| \leqslant 1\}$
$B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 \leqslant 1\}$ y la relación
$(x_1,x_2,x_3)S(y_1,y_2,y_3)$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes
$x_1 < y_1$ o $x_1 = y_1,\ x_2 < y_2$ o $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 \leqslant y_3$.

A) S es una relación de orden total y $\min(A) = (0,0,0)$.

B) S es una relación de orden parcial y $\inf(B) = (0,1,1)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 4

En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos
$A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1-1| \leqslant 1, |x_2-1| \leqslant 1, |x_3-1| \leqslant 1\}$
$B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 \leqslant 1\}$ y la relación
$(x_1,x_2,x_3)S(y_1,y_2,y_3)$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes
$x_1 < y_1$ o $x_1 = y_1,\ x_2 < y_2$ o $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 \leqslant y_3$.

A) S es una relación de orden parcial y $\sup(A) = (2,2,2)$.

B) S es una relación de orden total y $\max(B) = (2,1,1)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 5

Sea $a \in \mathbb{Q}; a > 1$ y sea el conjunto $A = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dotado del producto de $\mathbb{Q}$ restringido a A. Se considera la relación $F = \{(x, \ln x) \mid x \in A\} \subset A \times \mathbb{R}$, donde $\ln x$ representa al logaritmo neperiano de x. Entonces:

A) F es una aplicación de A a $\mathbb{R}$, pero $F(A)$ no es un grupo con la suma de $\mathbb{R}$ restringida a $F(A)$.

B) F es un homomorfismos entre grupos.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 6

Sea $a \in \mathbb{Q}; a > 1$ y sea el conjunto $A = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dotado del producto de $\mathbb{Q}$ restringido a A. Se considera la relación $F = \{(x, \ln x) \mid x \in A\} \subset A \times \mathbb{R}$, donde $\ln x$ representa al logaritmo neperiano de x. Entonces:

A) $(A\ .)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}^+\ .)$, pero $(F(A)\ +)$ no es un subgrupo de $(\mathbb{R}\ +)$.

B) F es una aplicación inyectiva.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 7

Sea la sucesión $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + a_n}{2}}$ para $n \in \mathbb{N};\ n > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se considera la subsucesión r_k de s construida al hacer desaparecer los k primeros términos de s. Entonces:

A) Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que r_k está acotada inferiormente por 1.

B) Existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que r_p está acotada superiormente por $\dfrac{1}{3}$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 8

Sea la sucesión $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + a_n}{2}}$ para $n \in \mathbb{N};\ n > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se considera la subsucesión r_k de s construida al hacer desaparecer los k primeros términos de s. Entonces:

A) $\dfrac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.

B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 9

Se considera la ecuación $z^3 + (-2+2i)z^2 - 3iz + (1+i) = 0$ en $\mathbb{C}$ y las tres raíces, z_1, z_2, z_3. Se sabe que se cumple $\mathrm{Im}(z_1) = 0$. Entonces:

A) $\mathrm{Re}(z_2)\mathrm{Re}(z_3) = 0$.

B) $|z_2||z_3| = 1$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 10

Se considera la ecuación $z^3 + (-2+2i)z^2 - 3iz + (1+i) = 0$ en $\mathbb{C}$ y las tres raíces, z_1, z_2, z_3. Se sabe que se cumple $\mathrm{Im}(z_1) = 0$. Entonces:

A) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z_2}\right)\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z_3}\right) > 0$.

B) $\left|\dfrac{1}{z_2}\right|\left|\dfrac{1}{z_3}\right| > 1$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Sin material permitido. Duración: **2 horas.** **Respuestas únicas** Respuesta Bien=1, Mal=-0.5 Sin contestar=0.
Atención: Si el número de respuesta Mal es mayor que 4, se resta 1 por cada una en lugar de 0.5.

Pregunta 1

Sea U un conjunto no vacío y A, B y C tres subconjuntos de U. Se consideran las equivalencias: **(1)** $A \triangle B = B \cap A \iff A = B = \emptyset$, **(2)** $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$, **(3)** $A \triangle C = B \triangle C \iff A = B$. Entonces:

A) Las equivalencias (1) y (3) son ciertas, pero (2) no.

B) Las equivalencias (2) y (3) son ciertas, pero (1) no.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 2

Sea U un conjunto no vacío y A, B y C tres subconjuntos de U. Se consideran las equivalencias: **(1)** $A \triangle B = B \cap A \iff A = B = \emptyset$, **(2)** $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$, **(3)** $A \triangle C = B \triangle C \iff A = B$. Entonces:

A) Las equivalencias (1) y (2) son ciertas, pero (3) no.

B) Las tres equivalencias son falsas.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 3

En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos
$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1 - 1| \leqslant 1, |x_2 - 1| \leqslant 1, |x_3 - 1| \leqslant 1\}$,
$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 \leqslant 1\}$ y la relación
$(x_1, x_2, x_3) S (y_1, y_2, y_3) \iff x_1 \leqslant y_1 \text{ y } x_2 \leqslant y_2 \text{ y } x_3 \leqslant y_3$.

A) S es una relación de orden total y $\min(A) = (0, 0, 0)$.

B) S es una relación de orden parcial y $\inf(B) = (0, 0, 0)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 4

En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos
$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1 - 1| \leqslant 1, |x_2 - 1| \leqslant 1, |x_3 - 1| \leqslant 1\}$,
$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 \leqslant 1\}$ y la relación
$(x_1, x_2, x_3) S (y_1, y_2, y_3) \iff x_1 \leqslant y_1 \text{ y } x_2 \leqslant y_2 \text{ y } x_3 \leqslant y_3$.

A) S es una relación de orden y $\max(A) S (2, 2, 2)$.

B) S es una relación de orden y $\max(B) S (2, 2, 2)$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 5

Sea $(\mathbb{G} + .)$ un cuerpo. Para cada $k \in \mathbb{N};\ k > 1$, se consideran el conjunto de secuencias finitas $A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_n \in \mathbb{G};\ n \in \{1, \cdots, k\}\}$ y $A_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{G}\}$ el conjunto de sucesiones, que dotados de las leyes de composición interna
$(a_n) \oplus (b_n) = (a_n + b_n)$ y $(a_n) \odot (b_n) = (a_n b_n)$ para cualesquiera secuencias finitas de A_k o cualesquiera sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementos de A_∞. Entonces:

A) $(A_k\ \odot)$ es un grupo y $(A_\infty\ \oplus\ \odot)$ es un cuerpo.

B) $(A_k\ \oplus\ \odot)$ y $(A_\infty\ \oplus\ \oplus\ )$ son anillos unitarios.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 6

Sea $(\mathbb{G} + .)$ un cuerpo. Para cada $k \in \mathbb{N};\ k > 1$, se consideran el conjunto de secuencias finitas $A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_n \in \mathbb{G};\ n \in \{1, \cdots, k\}\}$ y $A_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{G}\}$ el conjunto de sucesiones, que son dotados de las leyes de composición interna
$(a_n) \oplus (b_n) = (a_n + b_n)$ y $(a_n) \odot (b_n) = (a_n b_n)$ para cualesquiera secuencias finitas de A_k o cualesquiera sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementos de A_∞. Entonces:

A) $(A_k\ \odot)$ es un grupo, pero $(A_\infty\ \oplus\ \odot)$ no es un anillo unitario.

B) $(A_\infty\ \oplus\ \odot)$ no cumple la propiedad distributiva.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 7

Sea una sucesión $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por a_0 y $a_{n+1} = a_n^2 + \dfrac{1}{4}$ para $n \in \mathbb{N};\ n > 0$. Entonces:

A) Si $a_0 \in \left[\dfrac{-1}{2}, 0\right]$, entonces $a_n < a_{n+1}$.

B) Si $a_0 \in \left[\dfrac{-1}{2}, 0\right]$, entonces $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 8

Sea una sucesión $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por a_0 y $a_{n+1} = a_n^2 + \dfrac{1}{4}$ para $n \in \mathbb{N};\ n > 0$. Entonces:

A) Si $a_0 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, entonces $a_n < a_{n+1}$.

B) Si $a_0 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, entonces $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 9

Se considera la ecuación $z^3 + 2(-1+i)z^2 - 3iz + 1 + i = 0$ en $\mathbb{C}$ y las tres raíces, z_1, z_2, z_3. Se sabe que se cumple $\mathrm{Re}(z_1) = 0$. Entonces:

A) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z_2}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z_3}\right) < 0.$

B) $\left|\frac{1}{z_2}\right|\left|\frac{1}{z_3}\right| > 1.$

C) Ninguna de las otras respuestas.

Pregunta 10

Se considera la ecuación $z^3 + 2(-1+i)z^2 - 3iz + 1 + i = 0$ en $\mathbb{C}$ y las tres raíces, z_1, z_2, z_3. Se sabe que se cumple $\mathrm{Re}(z_1) = 0$. Entonces:

A) $\mathrm{Ime}(z_2)\mathrm{Im}(z_3) = 0.$

B) $|z_2||z_3| > 2.$

C) Ninguna de las otras respuestas.