Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Sean U un conjunto no vacío y $A, B \in \mathcal{P}(U)$. Demuestre las siguientes equivalencias

i) $A \subset B \iff \overline{A} \cup B = U$

ii) $A \subset B \iff A \cap \overline{B} = \emptyset$

siendo $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los conjuntos complementarios de A y B en U.

Solución:
i) Observemos en primer lugar que se tiene:

$$A \subset B \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff \forall x(x \notin B \Rightarrow x \notin A) \tag{1}$$

Veamos primero que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \cup B = U$. Supongamos que $A \subset B$. Como $U = B \cup \overline{B}$,

$$\begin{aligned} x \in U \quad &\Rightarrow \quad (x \in B) \vee (x \notin B), \text{ y aplicando (1)}, \\ &\Rightarrow \quad (x \in B) \vee (x \notin A) \Rightarrow x \in \overline{A} \cup B \end{aligned}$$

En consecuencia $U \subset \overline{A} \cup B$, y como la inclusión inversa es obvia, resulta que $\overline{A} \cup B = U$.
Supongamos ahora que $\overline{A} \cup B = U$. Veamos que $A \subset B$.
Sea $x \in A$. Como $x \in U = \overline{A} \cup B$ tenemos que $x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$, esto es, $(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$.
En consecuencia, $x \in A \wedge x \in B$, y por tanto $x \in B$.

ii) Utilizando el apartado anterior se tiene:

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\iff \quad \overline{A} \cup B = U \iff \overline{\overline{A} \cup B} = \overline{U} \\ &\iff \quad \overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = \emptyset \iff A \cap \overline{B} = \emptyset \end{aligned}$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Sean un conjunto A y $*$ una operación interna conmutativa y asociativa en A tal que $a * a = a$ para todo $a \in A$.
Se define en A una relación $\mathcal{S}$ tal que para todo $a, b \in A$,

$$a \,\mathcal{S}\, b \iff a * b = b\,.$$

i) Demuestre que $\mathcal{S}$ es una relación de orden.

ii) Demuestre que para todo $a, b \in A$ se tiene que $a * b$ es el supremo en A de $\{a, b\}$ para la relación $\mathcal{S}$.

Solución:
i) Veamos que $\mathcal{S}$ es una relación de orden:
Reflexiva: Para todo $a \in E$ $a \,\mathcal{S}\, a$ pues se satisface la igualdad $a * a = a$.
Antisimétrica: Para todo $a, b \in E$, si $a \,\mathcal{S}\, b$ y $b \,\mathcal{S}\, a$, entonces $a * b = b$ y $b * a = a$. Pero $*$ es conmutativa y en consecuencia, $a * b = b * a$. Por tanto, $a = b$.
Transitiva : Para todo $a, b, c \in E$, si $a \,\mathcal{S}\, b$ y $b \,\mathcal{S}\, c$, entonces $a*b = b$ y $b*c = c$. Pero $*$ es asociativa y en consecuencia, $a * c = a * (b * c) = (a * b) * c = b * c = c$. Por tanto, $a \,\mathcal{S}\, c$.

ii) Veamos en primer lugar, que $a * b$ es cota superior de a y b para la relación $\mathcal{S}$. En efecto, aplicando que $*$ es una operación conmutativa y asociativa en A tal que $x * x = x$ para todo $x \in A$, se obtiene:

$a \,\mathcal{S}\, (a * b)$ pues $a * (a * b) = (a * a) * b = a * b$.

$b \, \mathcal{S} \, (a * b)$ pues $b * (a * b) = b * (b * a) = (b * b) * a = b * a = a * b$.
Para terminar, veamos que $a * b$ es la menor, para la relación $\mathcal{S}$, de las cotas superiores de a y b. En efecto si $c \in A$ es una cota superior de a y b, es decir, si $a \, \mathcal{S} \, c$ y $b \, \mathcal{S} \, c$, entonces $(a * b) \, \mathcal{S} \, c$ ya que

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= a * (b * c) \quad \text{asociativa} \\ &= a * c \quad \text{pues } b \, \mathcal{S} \, c \\ &= c \quad \text{pues } a \, \mathcal{S} \, c \,. \end{aligned}$$

Pregunta 3 (2,5 puntos)

i) Defina la estructura de anillo y de anillo íntegro.

ii) Se definen en $\mathbb{Z}^2$ las operaciones

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \qquad \text{y} \qquad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', 0)$$

para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$. Demuestre las propiedades del producto que hacen que $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ sea un anillo conmutativo.

a) ¿Es unitario?

b) ¿Es íntegro?

Solución:
ii) El producto es conmutativo pues $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', 0) = (a'a, 0) = (a', b') \cdot (a, b)$ para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$.
El producto es asociativo pues

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \big[(a', b') \cdot (a'', b'')\big] &= (a, b) \cdot (a'a'', 0) = \big(a(a'a''), 0\big) = \big((aa')a'', 0\big) = (aa', 0) \cdot (a'', b'') \\ &= \big[(a, b) \cdot (a', b')\big] \cdot (a'', b'') \text{ para todo } (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

El producto es distributivo sobre la suma pues

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \big[(a', b') + (a'', b'')\big] &= (a, b) \cdot (a' + a'', b' + b'') = \big(a(a' + a''), 0\big) = (aa', 0) + (aa'', 0) \\ &= (a, b) \cdot (a', b') \, + \, (a, b) \cdot (a'', b'') \text{ para todo } (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

y por la propiedad conmutativa del producto también se cumple que

$$\big[(a', b') + (a'', b'')\big] \cdot (a, b) = (a', b') \cdot (a, b) \, + \, (a'', b'') \cdot (a, b).$$

a) El anillo no es unitario. No existe $(e, f) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $(e, f) \cdot (a, b) = (a, b)$ para todo (a, b) pues $(e, f) \cdot (a, b) = (ea, 0) \neq (a, b)$ si $b \neq 0$.

b) El anillo no es íntegro. En particular, $(1, 5) \cdot (0, 7) = (0, 0)$ con $(1, 5) \neq (0, 0)$ y $(0, 7) \neq (0, 0)$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

i) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $\omega^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Exprese las soluciones de la ecuación de ii) en forma binómica.

Solución:

i) Expresando la ecuación en forma exponencial para $\omega = re^{i\beta}$, se obtiene

$$r^n e^{in\beta} = e^{i\cdot 0}$$

cuyas soluciones son $\begin{cases} r^n = 1 \text{ (ecuación en } \mathbb{R}_+) \\ n\beta = 0 \ [\bmod 2\pi] \end{cases}$.

Obtenemos n soluciones distintas $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$:

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

ii) Observemos en primer lugar que la ecuación $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$ es en realidad una ecuación de grado $n-1$. Para $n = 1$ se obtiene $2 = 0$ que no tiene solución. Supondremos pues que $n > 1$. Teniendo en cuenta que $z = 1$ no es solución de la ecuación, dividimos por $(z-1)^n$ y se obtiene

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1\,.$$

Efectuando el cambio de variable $\omega = \frac{z+1}{z-1}$ se obtiene la ecuación $\omega^n = 1$ resuelta en el apartado anterior. Deshaciendo el cambio de variable, $\omega(z-1) = z+1$, esto es, $z(\omega-1) = \omega+1$. Y por tanto,

$$z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$$

siempre que $\omega \neq 1$. En consecuencia como para $k = 0$, se obtiene $\omega = 1$, las soluciones de la ecuación propuesta son

$$z_k = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

iii) Expresemos en forma binómica el número complejo $z = \dfrac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}$. Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, se obtiene:

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1} = \left(\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}\right)\left(\frac{e^{-i\alpha}-1}{e^{-i\alpha}-1}\right) = \frac{e^0 + e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} - 1}{e^0 - e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} + 1} \\ &= \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{2 - (e^{-i\alpha} + e^{i\alpha})} = \frac{(-2\operatorname{sen}\alpha)i}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}i = \frac{-2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}i \\ &= -\operatorname{cotg}(\alpha/2)i \end{aligned}$$

Sustituyendo α por $\frac{2k\pi}{n}$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, las soluciones de la ecuación en forma binómica son:

$$z_k = -i\operatorname{cotg}(k\pi/n) \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1$$