Fe de erratas. Capítulos 1 a 4. (Pi, Lj) indica que la errata se encuentra en la página i y en la línea j, $(Pi, L-j)$ indica que la errata se encuentra en la página i y en la línea j contando desde la última hacia arriba. En rojo lo que hay que corregir de las erratas. En azul mejoras que no son erratas.

(P7, L12) Cambio en la última matriz $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 7 & 12 & 4 \\ 7 & 16 & 5 \end{pmatrix}$

(P8, L10) Punto 1 de la demostración cambiar los sumatorios $\sum_{k=1}^{n}$ por $\sum_{k=1}^{p}$

(P10, L17) Cambio en la matriz $\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} & (2) + (14) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & 3 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 17 \\ \hline 7 & 7 & 5 & 16 \end{array}\right)$

(P12, L10) "Demostración: Probaremos que las propiedades 1, 3 y 4 se..."

(P12, L12) "1. ...$= [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$"

*(P13) Se adjunta al final página nueva.

(P20) Última línea. La tercera operación elemental es $f_3 \to f_3 + \frac{1}{2} f_2$.

(P21, L4-5) Cambiar signos "$-$" por "$+$" tras la tercera operación elemental $f_3 \to f_3 + \frac{1}{2} f_2$

(P30) Cambiar el párrafo tras el Teorema 1.37 por el siguiente "Una matriz A es **escalonada (escalonada reducida) por columnas** si su traspuesta A^t es escalonada (escalonada reducida) por filas. La **forma de Hermite por columnas** de A, que denotaremos por $H_c(A)$, es la única matriz escalonada reducida por columnas equivalente por columnas a A. "

(P33) Enunciado del Lema 1.47: Sean $H_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ y $H_s = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ matrices de igual tamaño...

(P37, L-10) Incluir en la definición: Si A es invertible, entonces A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

(P39, L-10) Cambiar H_A por $H_{f(A)}$.

(P40, L10) Eliminar las líneas 10 y 11 "Cuando esto sucede... $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$".

(P42) Delante de la cuarta matriz falta indicar la operación elemental $f_1 \to f_1 - 3f_2$

*(P47) Se adjunta página nueva.

(P49, L-5) $\det(B) = \cdots = -\det(A)$.

(P50, L10) "...$2(h-k)-1$ intercambios de filas consecutivas..."

(P52, L3) "teniendo en cuenta que A y B se diferencian únicamente en la fila k."

(P53, L16) La última operación elemental es $f_4 \to f_4 + \frac{1}{4} f_1$ y la entrada $(4,4)$ de la última matriz es 4.

(P55, L17) "$A \xrightarrow[c_k \to c_k + tc_h]{} B$ entonces $\det(B) = \det(A)$."

(P59, L14) "...columnas iguales entonces dicho determinante es 0."

(P62, L7) "... $= \beta \det(P) \neq 0$"

(P63, L-7) "... que los 16 menores de orden 3 son ~~no~~ nulos, si no..."

(P69, L4) Se introduce el término n-upla. "Una n-upla o lista ordenada..."

(P75) En la última línea $y_1 = -2 - \beta - \frac{2}{3}\alpha$. y en página siguiente.

(P77) En la última ecuación del segundo sistema f_h debe ser f_m.

(P78) La tercera ecuación del sistema es $x_3 = 2 - 2x_4 = 2 - 2\beta$.

(P81) En general cambiar $\mathcal{A}$ por $AX = B$. Tras el teorema, destacar el párrafo. Observación:.... Luego $AX = B$ tiene solución si...

(P84, L14) "...y $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz invertible..."

(P85, L -2 y -4) Cambiar I_m por I_n

(P90) Añadir la siguiente frase tras la propiedad 8: "Las propiedades 1 a 8 son las leyes o axiomas que definen la estructura de espacio vectorial."

(P95) Tras el primer ejemplo. Observación: Tal y como acabamos de ver en el ejemplo, estudiar la dependencia o independencia lineal de vectores de $\mathbb{K}^n$ es equivalente a resolver un sistema lineal.

(P97) Se adjunta página nueva. Se simplifica la demostración de la Proposición 3.8.

(P103) La primera ecuación del sistema lineal es $(1 - 3i)\alpha_1 + 3i\,\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

(P107, L2) $1 + 5x - 3^2 = (1,\, 5,\, -3)_{\mathcal{B}}$

(P111, L13) $v_3 = (0, 3, 3, 3)_{\mathcal{B}}$

(P112, L8) $v_3 = (5, -4, -1, 13)_{\mathcal{B}}$

(P115, L3) "...transforma las coordenadas de u en $\mathcal{A}$ en las coordenadas de u en $\mathcal{C}$..."

(P116) Cambiar la última frase del primer párrafo por: "Para ello basta con que estas operaciones sean interna y externa en U, respectivamente, lo que suele expresarse diciendo que U es cerrado para la suma y el producto por escalares de V."

(P122, L19) "...necesitamos conocer una base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de U y las coordenadas ... "

(P124) En la última línea $\det C = -3$ y no 7.

(P127) La última ecuación del sistema (3.10) es $x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n$. Ecuación (3.11)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_{r+1} \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(P128) La última operación elemental es $f_3 \to f_3 - 2f_2$, y en la línea siguiente se aplica el Teorema 3.55.

(P131) Cambiar n por m en la afirmación 2 del Teorema 3.62 y en la línea 8 de la demostración.

(P132) Se añade la siguiente frase al inicio de la demostración del Lema 3.64
"**Demostración:** Sean $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{in_i}\}$ para $i = 1, \ldots, m$ y sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m$. 1. Todo..."

*(P133) Se adjunta página.

(P136) Anadir un párrafo antes de la ecuación (3.14) La relación $\sim_U$ divide V en clases de equivalencia. La clase de equivalencia a la que pertenece un vector $v \in V$ viene dada todos los vectores equivalentes a v, es decir, por el conjunto $\{w \in V : v \sim_U w\}$. Tenemos que

$$\{w \in V : v \sim_U w\} = \{v + u : u \in U\} = v + U \quad (3.14)$$

(P137, L7 a 13)

- Si $v+U=v'+U$ y $w+U=w'+U$, entonces

$$\begin{array}{c} v+U=v'+U \\ w+U=w'+U \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} v' \sim_U v \\ w' \sim_U w \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} v-v' \in U \\ w-w' \in U \end{array} \Rightarrow (v'+w')-(v+w) \in U \Leftrightarrow v+w \sim_U v'+w'$$

  de donde $(v+w)+U=(v'+w')+U$.
- Si $v+U=v'+U$, entonces $(\alpha v)+U=(\alpha v')+U$ ya que

$$v+U=v'+U \quad \Leftrightarrow \quad v \sim_U v' \quad \Leftrightarrow \quad v'-v \in U \quad \Leftrightarrow \alpha v'-\alpha v \in U \Leftrightarrow \alpha v \sim_U \alpha v'$$

(P143, L12) "O, equivalentemente, si para cualesquiera $u, w \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple la propiedad :"

(P143, L15) "De (ii) se sigue $f(\alpha u)=\alpha f(u)$ y $f(\beta w)=\beta f(w)$, y de (i) $f(\alpha u+\beta w)=\alpha f(u)+\beta f(w)$."

(P145) Ejemplo 8. Incluir paréntesis en la integral $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\, dx$

(P148, L3) "Si $g(-2,1)=(1,2)$ y $g(1,-1)=(0,1)$ calcule $g(x,y)$ para..."

(P149, L7) "3. $h \circ f : U \to W$ definida por $(h \circ f)(u)=h(f(u))$ es una aplicación lineal."

(P149, L15 y 16) Cambiar g por h

$$\begin{aligned} h \circ f(\alpha u_1+\beta u_2) &= h(f(\alpha u_1+\beta u_2))=h(\alpha f(u_1)+\beta f(u_2)) \\ &= \alpha h(f(u_1))+\beta h(f(u_2))=\alpha(h \circ f(u_1))+\beta(h \circ f(u_2)) \end{aligned}$$

*(P150 y 151) Se adjuntan páginas nuevas.

(P153, L-3) $L((1,2))$. Línea -9: cambiar U por $\mathbb{R}^3$.

(P155, L1) "El Teorema 4.10 dice que si el conjunto $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es sistema generador de U entonces $\{f(u_1),\ldots,f(u_m)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$. Como además $f(u_1),\ldots,f(u_m)$ son linealmente independientes, entonces forman una base de $\mathrm{Im}(f)$."

*(P159) Se adjunta página. Demostración del Teorema de isomorfía.

(P161) En la última línea eliminar "$\mathcal{B}'=$" quedando sólo $\{w_1=3u_1-2u_2,\ w_2=4u_1-3u_2\}$

(P163, L14) Cambiar $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$ por $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}$

(P164) Cambiar la segunda $\mathfrak{M}(f)$ por $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}$

(P164, L-8) $f(u_1+u_3)=4v_1+2v_2$

(P165, L3) El rango de cualquier matriz de una aplicación lineal...Más adelante: Definición rango.

*(P171) Se adjunta página. Demostración de la Proposición 4.40.

(P172, L8) "$U \subset Fix(s)$ ya que $s(u)=u$ si $u \in U$, y $W \subset Fix^{-}(s)$ ya que $s(w)=-w$ si $w \in W$."

(P172, L11) "Como $s(v)=-v$..."

(P173, L2) Añadir llaves $Fix(s) \cap Fix^{-}(s)=\{0\}$.

(P179) Ejercicio 4.10. Cambiar $P_3(\mathbb{R})$ por $\mathbb{R}_3[x]$.

Ejercicios resueltos

(P356) Delante de la segunda matriz. "a la fila i le ~~sumamos~~ restamos..."

(P365) Cambiar A^* por $(A|B)$.

(P366) Ejercicio 2.5(b) Poner barras verticales para separar las columnas y que se entienda mejor.

(P369) Incluir el siguiente párrafo al final del ejercicio 3.1 "Otro modo de proceder es considerar la matriz A formada por los 4 vectores en (9.9) y tomar las dos últimas filas linealmente independientes de las anteriores (de modo que $\det(A) \neq 0$). Esto resultará más sencillo si escalonamos la parte de la matriz que conocemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(P373) Hacia la mitad $(x, y, z, t) = \ldots = \frac{1}{3}\lambda(1, 0, 3, 0) + \frac{1}{3}\mu(2, 3, 0, 3)$

(P373) Añadir el siguiente párrafo al final de la página. Otra información interesante que podemos obtener de la última matriz es la siguiente: como $v_3 - 3v_2 + v_4 = 0$, entonces $v_3 + v_4 = 3v_2 \in V \cap U$, lo que nos permitiría haber resuelto el apartado (a) con más facilidad.

(P374, L-6 y L-11) y (P375, L2) Cambiar E por V

(P381, L8) $w = (3, -3, -1)_{\mathcal{B}}$

(P388) En la primera matriz, $\mathfrak{M}_{\mathcal{AB}}(f)$, cambiar la entrada $(3, 2)$ por un 2.

El apartado 2 se puede deducir del apartado 1 ya que

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

Y el apartado 3 se demuestra aplicando la propiedad 4 del Teorema 1.7:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t \qquad \square$$

Ejemplo 1.9. Escriba la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

como suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica.

Solución: Calculamos

$$\frac{A + A^t}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -3 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = B$$

$$\frac{A - A^t}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -3 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = C$$

y se comprueba fácilmente que $A = B + C$ $\square$

Propiedades de la traza

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.
3. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^t)$.
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Demostración: En las tres primeras propiedades suponemos que A y B son matrices de orden n.

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} [A + B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} + \sum_{i=1}^{n} [B]_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda A]_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A)$.
3. Es evidente pues A y A^t tienen los mismos elementos en la digonal principal.
4. Para que los productos AB y BA tengan ambos sentido necesariamente serán $A \in \mathfrak{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, y en tal caso

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} [BA]_{jj} = \operatorname{tr}(BA) \qquad \square$$

1.5. El determinante de una matriz cuadrada

Hay varias formas de definir el determinante. Nosotros lo vamos a hacer de forma recursiva.

Definición 1.71.

Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Se denota por A_{ij} a la submatriz de A de orden $n-1$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.
Si $n = 1$ y $A = (a)$, entonces el determinante de A es a.
Si $n > 1$ entonces el **determinante** de A, $\det(A)$, viene dado por la fórmula

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1}) \\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + a_{n1}(-1)^{n+1}\det(A_{n1})\end{aligned}$$

El **menor adjunto** del elemento a_{ij} de A es el escalar

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

de manera que

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1} = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

que se conoce como **fórmula de Laplace**[5] **del determinante por la primera columna**.

- Para referirnos al determinante de A también emplearemos la notación

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- El determinante de una matriz A de orden 2 viene dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

  ya que

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- **Regla de Sarrus**[6]**:** El determinante de una matriz A de orden 3 viene dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

[5] Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, 1749 – Paris 1827).
[6] Pierre Frédéric Sarrus (Saint-Affrique, 1798 – 1861).

Proposición 3.8.

Si $v_1, \ldots, v_m$ son vectores linealmente independientes de V y v_{m+1} es un vector de V que no es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$ entonces $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ son linealmente independientes.

Demostración: Procedemos por reducción al absurdo, suponiendo que $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ son linealmente dependientes, esto es, que existen $\beta_1, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1} \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m + \beta_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Como $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes entonces $\beta_{m+1} \neq 0$ y

$$v_{m+1} = -\frac{\beta_1}{\beta_{m+1}} v_1 - \cdots - \frac{\beta_m}{\beta_{m+1}} v_m$$

contradiciendo que v_{m+1} no es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$. $\square$

Ejemplo 3.9. Consideramos los vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,1,2,1), \quad v_2 = (2,1,3,2), \quad v_3 = (1,2,3,1), \quad v_4 = (2,1,1,4), \quad v_5 = (4,1,0,9)$$

Construya un subconjunto S de $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ formado por el mayor número de vectores linealmente independientes.

Solución Como $v_1 \neq 0$ tenemos que v_1 es linealmente independiente y $v_1 \in S$. Como v_1 y v_2 no son proporcionales entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes y, por tanto, $v_2 \in S$.

Veamos si v_3 pertenece a S. Escribimos v_3 como combinación lineal de v_1 y v_2:

$$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Esta ecuación da lugar a un sistema lineal en las incógnitas α y β que tiene solución (dejamos como ejercicio comprobarlo). Es decir, v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2 y, por lo tanto, $v_3 \notin S$.

Veamos si v_4 pertenece a S. Como antes, escribimos v_4 como combinación lineal de v_1 y v_2:

$$v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Esta ecuación da lugar a un sistema lineal en las incógnitas α y β que no tiene solución (dejamos como ejercicio comprobarlo). Es decir, v_4 no es combinación lineal de v_1 y v_2 y, por lo tanto, $v_4 \in S$.

Por último, veamos si v_5 pertenece a S. Escribimos v_5 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_4:

$$v_5 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4$$

Esta ecuación da lugar a un sistema lineal en las incógnitas α, β y γ que tiene solución (dejamos como ejercicio comprobarlo). Es decir, v_5 es combinación lineal de v_1, v_2 y v_4 y, por lo tanto, $v_5 \notin S$.

En resumen, $S = \{v_1, v_2, v_4\}$. $\square$

La definición del conjunto imagen inversa no quiere decir que exista la aplicación inversa. Por ejemplo si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dado por $f(x) = 0$ entonces la aplicación inversa no existe ya que f no es biyectiva y sin embargo el conjunto imagen inversa de $\{0\}$ es $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$.

Teorema 4.10.

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal. Son ciertas las afirmaciones:

1. Si U' es un subespacio vectorial de U entonces $f(U')$ es un subespacio vectorial de V.
2. Si V' es un subespacio vectorial de V entonces $f^{-1}(V')$ es un subespacio vectorial de U.

Demostración: 1. En primer lugar $f(U')$ es un subconjunto no vacío de V puesto que $f(0) = 0 \in f(U')$. Por otro lado, si v_1 y v_2 son vectores de $f(U')$ entonces existen vectores u_1 y u_2 de U tales que $f(u_1) = v_1$ y $f(u_2) = v_2$. De manera que si α_1 y α_2 son elementos de $\mathbb{K}$ entonces

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$$

también es un vector de $f(U')$. Y por lo tanto $f(U')$ es un subespacio vectorial de V.

2. En primer lugar $f^{-1}(V')$ es un subconjunto no vacío de U puesto que $0 \in f^{-1}(\{0\})$. Por otro lado, si u_1 y u_2 son vectores de $f^{-1}(V')$ entonces existen vectores v_1 y v_2 de V' tales que $f(u_1) = v_1$ y $f(u_2) = v_2$. De manera que si α_1 y α_2 son elementos de $\mathbb{K}$ entonces

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V'$$

y, por tanto, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in f^{-1}(V')$. Luego $f^{-1}(V')$ es un subespacio vectorial de U. □

Proposición 4.11.

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal. Son ciertas las afirmaciones:

1. Si $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente dependientes en U entonces $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ lo son en V.
2. Si $U' = L(u_1, \ldots, u_n)$ entonces $f(U') = L(f(u_1), \ldots, f(u_n))$.
3. Si U' es un subespacio vectorial de U entonces $\dim(f(U')) \leq \dim(U')$.

Demostración: 1. Como $u_1, \ldots, u_n$ son dependientes entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos 0 tales que

$$0 = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Aplicando f en ambos lados tenemos que

$$0 = f(0) = f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$$

y por lo tanto $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son vectores linealmente dependientes de V.

2. Sea $u \in U'$. Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es sistema generador entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Entonces

$$f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$$

Y por lo tanto $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ es un sistema generador de $f(U')$.

3. Sea $\{u'_1, \ldots, u'_k\}$ una base de U'. Entonces $\dim(U') = k$. Dado que $\{u'_1, \ldots, u'_k\}$ es un sistema generador de U', del apartado 2 se sigue que $\{f(u'_1), \ldots, f(u'_k)\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial $f(U')$ y por tanto $\dim(f(U')) \leq k$. Luego

$$\dim(f(U')) \leq \dim(U') \qquad \square$$

Observación: Hemos visto que una aplicación lineal conserva la dependencia lineal. El siguiente ejemplo muestra que no ocurre lo mismo con la independencia lineal, es decir, que una aplicación lineal no siempre transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes.

$\boxed{\textbf{Ejemplo 4.12.}}$ Sea f la aplicación lineal definida por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3) \end{array}$$

Si $U = L((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ entonces

$$f(U) = L(f(1,0,0,0), f(0,1,0,0)) = L((1,1,1),(1,1,1)) = L((1,1,1))$$

y por tanto

$$\dim(U) = 2 > 1 = \dim(f(U))$$

Observamos que dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^4$, $(1,0,0,0)$ y $(0,1,0,0)$, se transforman en el mismo vector $(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Y por lo tanto f no transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes.

Ahora vamos a calcular el conjunto imagen inversa del plano $P \equiv \{\, y_3 = 0 \,\}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P\,\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3) \in P\,\} \end{aligned}$$

El vector $(x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3)$ pertenece a P si su tercera componente es igual a 0, es decir

$$f^{-1}(P) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

En este caso $f^{-1}(P) \equiv \{\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\}$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^4$. $\square$

Luego $\dim(U/\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\operatorname{Im}(f))$ y por el Teorema 4.21 son isomorfos.

A continuación veamos que $\widetilde{f}$ es un isomorfismo entre $U/\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. Primero vemos que la aplicación está bien definida, es decir que no depende del representante de la clase de equivalencia que se tome: si $u_1+\operatorname{Ker}(f) = u_2+\operatorname{Ker}(f)$ tiene que ocurrir que $\widetilde{f}(u_1+\operatorname{Ker}(f)) = \widetilde{f}(u_2+\operatorname{Ker}(f))$. En efecto, como $u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces $f(u_1 - u_2) = 0$ y por linealidad de f se tiene que $f(u_1) = f(u_2)$ y así $\widetilde{f}(u_1 + \operatorname{Ker}(f)) = \widetilde{f}(u_2 + \operatorname{Ker}(f))$.

Por otro lado comprobamos que es lineal. Sean $u_1 + \operatorname{Ker}(f), u_2 + \operatorname{Ker}(f) \in U/\operatorname{Ker}(f)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\alpha_1(u_1 + \operatorname{Ker}(f)) + \alpha_2(u_2 + \operatorname{Ker}(f))) &= \widetilde{f}((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + \operatorname{Ker}(f)) \\
&= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) \\
&= \alpha_1 \widetilde{f}(u_1 + \operatorname{Ker}(f)) + \alpha_2 \widetilde{f}(u_2 + \operatorname{Ker}(f))
\end{aligned}$$

Finalmente, comprobamos que es inyectiva, y como $\dim(U/\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\operatorname{Im}(f))$ también será biyectiva. Supongamos $u_1 + \operatorname{Ker}(f) \neq u_2 + \operatorname{Ker}(f)$ y veamos que las imágenes son distintas, es decir $\widetilde{f}(u_1 + \operatorname{Ker}(f)) \neq \widetilde{f}(u_2 + \operatorname{Ker}(f))$, o equivalentemente $f(u_1) \neq f(u_2)$.

$$\begin{aligned}
u_1 + \operatorname{Ker}(f) = u_2 + \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u_1 - u_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow f(u_1) - f(u_2) = 0 \Leftrightarrow f(u_1) = f(u_2)
\end{aligned}$$

$\square$

Obviamente f y $\widetilde{f}$ están relacionadas ya que $\widetilde{f}$ se define a partir de f. A continuación vamos a hacer esta relación más evidente. Definimos las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{rccc} \pi: & U & \longrightarrow & U/\operatorname{Ker}(f) \\ & u & \mapsto & u + \operatorname{Ker}(f) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} i: & \operatorname{Im}(f) & \longrightarrow & V \\ & v & \mapsto & v \end{array}$$

donde π es un epimorfismo e i es un monomorfismo. Comprobamos que para todo $u \in U$

$$i \circ \widetilde{f} \circ \pi(u) = i \circ \widetilde{f}(u + \operatorname{Ker}(f)) = i(f(u)) = f(u)$$

y por lo tanto

$$f = i \circ \widetilde{f} \circ \pi$$

A esta expresión se la denomina **descomposición canónica** de f. Esto es, toda aplicación lineal se puede descomponer como la composición de un epimorfismo π con un isomorfismo $\widetilde{f}$ y con un monomorfismo i. Esta descomposición queda reflejada en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \\
U/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \operatorname{Im}(f) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Nota: Se dice que el diagrama conmuta para expresar que $f = i \circ \widetilde{f} \circ \pi$.

- $W \subset \text{Ker}(p)$ ya que $p(W) = 0$, y $\text{Ker}(p) \subset W$ ya que si $p(v) = 0$ entonces $v = 0 + w \in W$. Luego $W = \text{Ker}(p)$ $\square$

Proposición 4.40.

Un endomorfismo p es una proyección si y sólo si $p^2 = p$.

Demostración: $\Rightarrow$) Sea p la proyección de base U y dirección W. Para todo $v \in V$ existen $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$ y $p(v) = u$.. Entonces $p^2(v) = p(p(v)) = p(u) = u$.

$\Leftarrow$) Asumimos que $p^2 = p$. Todo $v \in V$ lo podemos escribir como $v = p(v) + (v - p(v))$ donde $p(v) \in \text{Im}(p)$ y $v - p(v) \in \text{Ker}(p)$ ya que $p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = p(v) - p(v) = 0$. Entonces, $V = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$ y por la fórmula de dimensiones se tiene que la suma es directa. Por otro lado, como $p(v)$ es la componente de v en $\text{Im}(p)$ entonces p es la proyección de base $\text{Im}(p)$ y dirección $\text{Ker}(p)$. $\square$

De la Proposición 4.40 se deduce que una matriz M de orden n es la matriz de la proyección p respecto de una base $\mathcal{B}$ de V si y sólo si M es idempotente ($M^2 = M$). La matriz del Ejemplo 4.38 lo cumple.

Matriz de una simetría

Sea s una simetría de V de base U y dirección W. Entonces $V = U \oplus W$ y podemos formar una base $\mathcal{B}$ de V uniendo dos bases: $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ de U y $\mathcal{B}_W = \{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$, igual que hicimos para la proyección. La matriz de la simetría respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right)$$

ya que $f(u_i) = u_i$ para $i = 1, \ldots, k$ y $f(w_j) = -w_j$ para $j = k+1, \ldots, n$.

Ejemplo 4.41. Con los mismos datos del Ejemplo 4.38 calculamos la matriz de la simetría $s : V \to V$ de base $U = L(v_1 + 5v_3,\, 2v_1 + v_2 + 6v_3)$ y dirección $W = L(3v_1 + 4v_2)$.

La matriz de la simetría respecto de la base $\mathcal{B}' = \{(1,0,5)_{\mathcal{B}},\, (2,1,6)_{\mathcal{B}},\, (3,4,0)_{\mathcal{B}}\}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz en la base $\mathcal{B}$ hacemos el cambio de base

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) &= \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(s)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -24 & -6 \\ 40 & -31 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square
\end{aligned}$$