Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Septiembre 2024

En cada pregunta hay una única opción correcta. Cada pregunta acertada: 1 punto; cada pregunta incorrecta: $-0,5$ puntos. Las preguntas sin contestar no suman ni restan puntos. Entregue únicamente la hoja de respuestas. **Material permitido**: un único libro de teoría de Álgebra Lineal.

1. Sean A una matriz no cuadrada de orden $m \times n$ que admite inversa por la derecha, y $H_f(A)$, $H_c(A)$ y $H(A)$ las formas escalonadas reducidas por filas, columnas y (filas y columnas) de A. Entonces, siempre se cumple una de las siguientes condiciones:

   (a) $H_f(A) = H_c(A)$
   (b) $H_f(A) = H(A)$
   (c) $H_c(A) = H(A)$

2. Si A es una matriz orden n tal que $A^5 - 3A^4 + A^2 - I_n = 0$, entonces

   (a) A es invertible y $A^{-1} = AB$ con B de orden n.
   (b) A es invertible y $A^{-1} = A^2B$ con B de orden n.
   (c) A puede tener rango menor que n.

3. Si el conjunto de todas las soluciones de un sistema lineal $AX = B$ es
   $\{\,(1-\lambda-\mu,\ \lambda,\ \lambda-\mu,\ \mu,\ 2\,\lambda-\mu),\ \lambda,\mu \in \mathbb{K}\,\}$, entonces

   (a) La matriz B es una combinación lineal de las columnas de la matriz A.
   (b) La matriz A es de orden $m \times 5$ con $m < 5$.
   (c) La matriz $(A|B)$ tiene rango 2 pues el conjunto de soluciones depende de dos parámetros.

4. Si $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es una base de $\mathbb{K}^6$ y U es el subespacio generado por los vectores v_1, v_2 y v_3, entonces

   (a) Ningún suplementario de U contiene al vector $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.
   (b) Un suplementario de U no puede contener a los vectores $v_1 + v_5 + v_6$ y $v_1 - v_5 - v_6$.
   (c) Todos los suplementarios de U contienen al vector v_4.

5. Respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{K}^4$, se consideran los subespacios vectoriales

   $$U = L(v_2 + v_3) \ \text{ y } \ W \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

   Determine la afirmación correcta:

   (a) Existe un suplementario de W que contiene a U.
   (b) El subespacio $U + W$ es un hiperplano de $\mathbb{K}^4$.
   (c) $U + W = W$.

En las preguntas 6, 7, 8, 9 y 10 considere las matrices A y $(A|B)$ siguientes

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ a & 1 & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right) \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{K}$$

6. El sistema lineal $AX = B$ cumple alguna de las siguientes condiciones:

   (a) Una condición necesaria para que el sistema sea incompatible es $a = 0$.

   (b) Una condición necesaria para que sea compatible indeterminado es $a \neq 0$.

   (c) Una condición suficiente para que sea compatible indeterminado es $b = -2$.

7. Si el sistema lineal $AX = B$ es compatible determinado, entonces la solución es

   (a) $\left(\dfrac{1+b}{a},\ \dfrac{1-b}{b},\ -1\right)$,

   (b) $\left(\dfrac{2+b}{a},\ -1,\ -1\right)$,

   (c) $\left(\dfrac{1+b}{a},\ -1,\ 0\right)$.

8. Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$, la solución general del sistema lineal $AX = B$ es

   (a) $\{(b,\ a,\ \lambda) : \lambda \in \mathbb{K}\}$,

   (b) $\{(b\lambda,\ -a\lambda,\ 1) : \lambda \in \mathbb{K}\}$,

   (c) $\{(-\lambda,\ -1,\ -1) : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

9. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz en la base canónica es A. Entonces

   (a) Si $a \neq 0$, f es un isomorfismo.

   (b) Una condición suficiente para que el subespacio $\mathrm{Im}(f)$ sea una recta de $\mathbb{K}^3$ es $b = 1$.

   (c) Si el subespacio $\mathrm{Ker}(f)$ es un plano de $\mathbb{K}^3$, entonces $a = 0$.

10. Sea g el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,-1,0), (0,0,1)\}$ es A. Entonces, la primera columna de la matriz de g en la base canónica es:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} a \\ b-1 \\ \dfrac{2a+b-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b-1 \\ a-b+1 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b-1 \\ 2b-2 \\ 2a+b-1 \end{pmatrix}.$$

Soluciones

1. Sea A una matriz no cuadrada de orden $m \times n$ que admite inversa por la derecha, entonces su rango es igual al número de filas, $\mathrm{rg}(A) = m$, y $m < n$. Todas las formas de Hermite tendrán rango m. Hay que estudiar cómo están distribuidos los m pivotes para decidir cuál es la opción correcta. La forma de Hermite por columnas de A tiene los m pivotes en las m primeras columnas (el resto de columnas son nulas). Los pivotes, además, estarán en las m únicas filas, por tanto $H_c(A) = (I_m|0)$. Esta es una matriz escalonada por columnas y también por filas, por tanto $H_c(A) = H(A)$. La respuesta correcta es la (c).

2. Si A es una matriz de orden n tal que $A^5 - 3A^4 + A^2 - I_n = 0$, entonces $A(A^4 - 3A^3 + A) = I_n$ por lo que $A^{-1} = A^4 - 3A^3 + A = A(A^3 - 3A^2 + I_n)$. Por tanto, A es invertible y $A^{-1} = AB$ con $B = A^3 - 3A^2 + I_n$ de orden n. La respuesta correcta es la (a).

3. Cualquier sistema lineal $AX = B$ es compatible si y sólo si la matriz columna de términos independientes, B, es combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes A. Por tanto, (a) es la opción correcta.

4. Si $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es una base de $\mathbb{K}^6$ y $U = L(v_1, v_2, v_3)$, entonces $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \notin U$, por lo que sí puede pertenecer a un suplementario de U. Por ejemplo, $W = L(v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_5, v_6)$ sería un suplementario de U. Es decir, (a) es incorrecta.

   Un suplementario de U no puede tener vectores en común con U salvo el 0; entonces, no puede contener a los vectores $w_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_5$ y $w_2 = v_1 + v_2 + v_3 - v_5$, ya que contendría a su suma que es $w_1 + w_2 = v_1 + v_2 + v_3 \in U$. Por tanto (b) es correcta.

   Un suplementario de U que no contiene al vector v_6 es el subespacio $L(v_4, v_5, v_6 + v_1)$, luego (c) es incorrecta.

5. Dados los subespacios de $\mathbb{K}^4$

$$U = L(v_2 + v_3) \ \text{ y } \ W \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

   Es muy fácil comprobar que U es una recta contenida en el plano W, por lo que el subespacio $U + W$, que es el menor subespacio que contiene a U y a W es el propio W. Es decir, $U + W = W$, lo que hace que (c) sea la opción correcta.

Para resolver las **preguntas 6, 7, 8 y 9**, necesitamos conocer el rango de las matrices A y $(A|B)$ clasificando todos los tipos de sistemas lineales según los valores de a y b. Para ello, transformamos el sistema en escalonado

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ a & 1 & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b & b-1 \end{array}\right) = (A'|B')$$

(1) Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, el sistema es compatible determinado ya que $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 3$. La solución es

$$\left(\frac{2+b}{a},\ -1,\ -1\right)$$

(2) Si $a \neq 0$ y $b = 1$, la matriz del sistema equivalente es

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado ya que $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 1$. Se tiene una única ecuación: $ax + y + z = 1$ y la solución general es

$$\left(\frac{1-\lambda-\mu}{a},\ \lambda,\ \mu\right) \quad \text{con} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

(3) Si $a = 0$ y $b = 1$, la matriz del sistema es

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado ya que $rg(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 1$ y la solución general es

$$(\lambda,\ 1-\mu,\ \mu) \quad \text{con} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

(4) Si $a = 0$ y $b \neq 1$, el sistema es equivalente a

$$(A'|B') \xrightarrow[\substack{f_2 \to \frac{1}{1-b} f_2 \\ f_3 \to \frac{1}{1-b} f_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = (A''|B'')$$

Podemos continuar hasta escalonar la matriz o razonar del siguiente modo: de la segunda y tercera ecuaciones se deduce que $y = z = -1$ y sustituyendo estos valores en la primera ecuación se llega a

$$-b - 1 = 1 \Rightarrow b = -2$$

Entonces se tienen los casos:

(4.1) Si $a = 0$ y $b = -2$, el sistema es compatible indeterminado pues $\mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A''|B'') = 2$ y la solución general es

$$(\lambda,\ -1,\ -1) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

(4.2) $a = 0$, $b \neq 1$ y $b \neq -2$, entonces el sistema es incompatible. En este caso se tiene que $\mathrm{rg}(A'') = 2 < \mathrm{rg}(A''|B'') = 3$.

6. El sistema es incompatible en el caso: $a = 0$, $b \neq 1$ y $b \neq -2$. Por lo que, $a = 0$ es una condición necesaria para que el sistema sea incompatible y (a) es la opción correcta. La opción (b) es falsa ya que no es necesario que $a = 0$ para que el sistema sea compatible indeterminado (CI). Por ejemplo, en el caso $a \neq 0$ y $b = 1$ el sistema es CI. También es falsa la opción (c), es decir $b = -2$ no es una condición suficiente para que el sistema sea CI, ya que si $b = -2$ y $a \neq 0$ (estaríamos en el caso (1)) el sistema es compatible determinado.

7. El sistema es compatible determinado para los valores $a \neq 0$ y $b \neq 1$, y la solución correcta es la dada en la opción (b)

$$\left(\frac{2+b}{a},\ -1,\ -1\right)$$

8. Se cumple que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ si y sólo si $a = 0$ y $b = -2$. En este caso, el sistema es compatible indeterminado y la solución general es la dada en la opción (c)

$$(\lambda,\ -1,\ -1) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

9. Si A es la matriz en la base canónica de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$, entonces f es isomorfismo si y sólo si $\text{rg}(A) = 3$. Es decir, f es isomorfismo si y sólo si $a \neq 0$ y $b \neq 1$. Por tanto $a \neq 0$ es una condición necesaria, pero no suficiente para que f sea un isomorfismo, lo que hace (a) falsa.

   La dimensión del subespacio $\text{Im}(f)$ es igual al rango de A. Entonces, $\text{Im}(f)$ es una recta de $\mathbb{K}^3$ si y sólo si $\text{rg}(A) = 1$, lo que se cumple en los siguientes casos:

$$(a \neq 0 \text{ y } b = 1) \text{ o bien } (a = 0 \text{ y } b = 1)$$

   Por tanto, si $b = 1$, $\text{Im}(f)$ es una recta; es decir $b = 1$ es una condición suficiente, y (b) es la opción correcta.

   Finalmente, de la fórmula de dimensiones $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 3$ se deduce que el subespacio $\text{Ker}(f)$ es un plano si y sólo si $\text{Im}(f)$ es una recta, si y sólo si $b = 1$. Por tanto, $a = 0$ no es una condición necesaria para que $\text{Ker}(f)$ sea un plano, lo que hace (c) falsa.

10. Sea g el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ a & 1 & b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$$

   La matriz de g en la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ tiene por columnas las coordenadas respecto de $\mathcal{C}$ de los vectores: $g(1,0,0),\ g(0,1,0),\ g(0,0,1)$. Sólo nos piden la primera columna. Comenzamos calculando $g(1,0,0)$. Para ello, tenemos que calcular las coordenadas de $(1,0,0)$ respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) - \frac{1}{2}(0,0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

   Aplicando la linealidad de g tenemos

$$\begin{aligned} g(1,0,0) &= \tfrac{1}{2}g(1,1,1) + \tfrac{1}{2}g(1,-1,0) - \tfrac{1}{2}g(0,0,1) \\ &= \tfrac{1}{2}(a,a,a) + \tfrac{1}{2}(b,1,1) - \tfrac{1}{2}(1,b,1) = \tfrac{1}{2}\left(a+b-1, a-b+1, a\right)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

   Finalmente, determinamos las coordenadas de $g(1,0,0)$ respecto de $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} g(1,0,0) &= \tfrac{1}{2}\left(a+b-1, a-b+1, a\right)_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{2}\left(a+b-1(1,1,1) + a-b+1(1,-1,0) + a(0,0,1)\right) \\ &= \left(a, b-1, \tfrac{2a+b-1}{2}\right)_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$