Capítulo 6

Los números racionales y los números reales

La primera parte de este capítulo está dedicada a la construcción de los números racionales. La división, entendida como operación inversa de la multiplicación, no puede ser definida en el conjunto de los números enteros. Las fracciones positivas, que hacen posible esta división, se manejan desde hace tiempo y fueron admitidas con naturalidad muy anteriormente a los números negativos, los números irracionales o los números imaginarios. Un tratamiento sistemático de los números racionales aparece ya en el libro VII de Los Elementos de Euclides que estudia las proporciones de números naturales.

Vimos en el ejemplo 3.9 como se construye el conjunto de los números racionales. Repetiremos aquí su construcción: se trata de construir el menor cuerpo $\mathbb{Q}$, que sea extensión del anillo $\mathbb{Z}$, en el que la ecuación genérica de coeficientes enteros $bx = a$, con $b \neq 0$, tendrá siempre solución. La construcción es análoga a la realizada para $\mathbb{Z}$: se define $\mathbb{Q}$ como conjunto cociente y se definen las operaciones y el orden en $\mathbb{Q}$ a través de sus representantes.

Estudiaremos las propiedades de $\mathbb{Q}$ y destacaremos en particular la propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{Q}$ y el hecho de que el orden en $\mathbb{Q}$ es divisible, es decir, que dados dos elementos arbitrarios $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$, existe $t \in \mathbb{Q}$ que verifica $r < t < s$. Esta última propiedad no es cierta en el anillo $\mathbb{Z}$.

La segunda parte de este capítulo está dedicada a la construcción de los números reales. La propiedad de la divisibilidad del orden de $\mathbb{Q}$ resulta insuficiente en los estudios de análisis o geometría. Esto nos conduce a definir el cuerpo $\mathbb{R}$, extensión de $\mathbb{Q}$, donde la relación de orden será continua, es decir, que además de ser una relación de orden total y divisible se cumple que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

6.1. Los números racionales

Queremos construir una ampliación del conjunto $\mathbb{Z}$ donde la ecuación $bx = a$ con $b \neq 0$ tenga siempre solución. En $\mathbb{Z}^*$, el par (a, b), supuesto que b divide a a, determina un único $x \in \mathbb{Z}$ tal que $bx = a$. Inversamente, existen infinidad de pares que determinan el mismo número x, por ejemplo, todos los pares de la forma (na, nb) con $n \in \mathbb{Z}^*$ determinan el mismo número que el par (a, b).
En general, si los pares (a, b) y (a', b') determinan el mismo número entero x, se verifica entonces que $bx = a$ y $b'x = a'$ y multiplicando en cruz ambas igualdades resulta que $a'bx = ab'x$. De la propiedad cancelativa del producto en $\mathbb{Z}$ se deduce que $a'b = ab'$. Esto lleva a definir la siguiente relación:

Definición 6.1 En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se define la relación de equivalencia $\mathcal{E}$ mediante:

$$(a, b)\ \mathcal{E}\ (a', b') \quad \text{si y sólo si} \quad ab' = ba'$$

Toda clase de equivalencia es por definición un **número racional** y el conjunto de las clases de equivalencia o conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\ \mathcal{E}$ es el conjunto de los números racionales y se denota $\mathbb{Q}$.

Si se representa gráficamente sobre un plano, la clase de equivalencia del par (a, b) es el conjunto de puntos de coordenadas enteras que están situados sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto (a, b). En la figura 6.1 se han representado las clases de equivalencia de $(2, -3)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$ y $(1, 3)$.

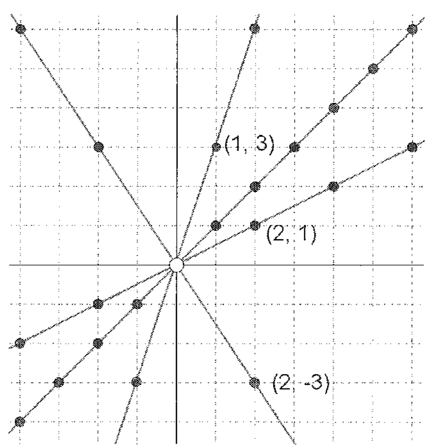


Figura 6.1: Clases de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

Compruébese que efectivamente $\mathcal{E}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
El par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se denomina **fracción**, mientras que la clase $[(a, b)]$ es un número racional que se denota por $\frac{a}{b}$.
Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ y $d = \text{mcd}(|a|, |b|)$, entonces $a = da'$ y $b = db'$, siendo $1 = \text{mcd}(|a'|, |b'|)$. Se verifica trivialmente que $(a, b)\ \mathcal{E}\ (a', b')$. Se denomina a (a', b') **representante canónico** o **fracción irreducible.**
Además la fracción irreducible (a', b') es única salvo factor multiplicativo -1 , por ejemplo, $(2, -3)$ y $(-2, 3)$. Se elegirá en general, $b' \in \mathbb{N}^*$.
Recordamos que al proceso de hallar una fracción irreducible equivalente a una fracción dada se le denomina "simplificar la fracción". Por ejemplo, $\frac{35}{-42} = \frac{-5}{6}$ ya que $7 = \text{mcd}(35, 42)$ y $35 = 7 \cdot 5$ y $42 = 7 \cdot 6$.
Es fácil comprobar que si (a, b) es una fracción irreducible, es decir, $\text{mcd}(|a|, |b|) = 1$, entonces cualquier representante del número racional $\frac{a}{b}$ tiene sus términos proporcionales con la fracción (a, b). En efecto, si $(a, b)\ \mathcal{E}\ (a', b')$, entonces $ab' = ba'$. Del teorema de Gauss se deduce que b divide a b', es decir que $b' = nb$ con $n \in \mathbb{Z}^*$. Sustituyendo b' resulta que $anb = ba'$ y por la propiedad cancelativa del producto resulta que $a' = na$.

Operaciones en $\mathbb{Q}$

En el conjunto $\mathbb{Q}$, se definen dos operaciones internas de la manera siguiente: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ y sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ sendos representantes. Se definen la suma $\alpha + \beta$ y el producto $\alpha\beta$ a los números racionales cuyos representantes vienen dados respectivamente por:

$$\alpha + \beta = [(ad + bc, bd)] \quad \text{y} \quad \alpha\beta = [(ac, bd)]$$

Es decir:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Vemos en primer lugar que las operaciones están bien definidas, o en otras palabras, que el resultado es independiente de los representantes elegidos.
Supongamos que $(a, b)\ \mathcal{E}\ (a', b')$ y que $(c, d)\ \mathcal{E}\ (c', d')$. Hay que ver que:

$$(ad + bc, bd)\ \mathcal{E}\ (a'd' + b'c', b'd') \quad \text{y} \quad (ac, bd)\ \mathcal{E}\ (a'c', b'd')$$

En efecto,

i) $(ad + bc, bd)\ \mathcal{E}\ (a'd + b'c, b'd)$, pues la igualdad $(ad + bc)b'd = (a'd + b'c)bd$ se verifica si $adb' + bcb' = a'db + b'cb$, esto es, $ab' = a'b$, que es cierto pues $(a, b)\ \mathcal{E}\ (a', b')$.

ii) $(a'd + b'c, b'd)\ \mathcal{E}\ (a'd' + b'c', b'd')$: se demuestra de manera análoga.

Como consecuencia de la propiedad transitiva de la relación $\mathcal{E}$ y de i) y ii), se deduce que $(ad + bc, bd)\ \mathcal{E}\ (a'd' + b'c', b'd')$. Luego la definición de la suma es consistente.

El producto tampoco depende de los representantes elegidos. En efecto, si $(a, b)\ \mathcal{E}\ (a', b')$ y $(c, d)\ \mathcal{E}\ (c', d')$, entonces $ab' = a'b$ y $cd' = c'd$ y en consecuencia, utilizando las propiedades asociativa y conmutativa del producto en $\mathbb{Z}$, se obtiene
$$(ac)(b'd') = (ab')(cd') = (a'b)(c'd) = (bd)(a'c')$$
y por consiguiente, $(ac, bd)\ \mathcal{E}\ (a'c', b'd')$. Luego la definición del producto es consistente.

Observación: Si se toman representantes con el mismo denominador, entonces:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

En efecto, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ab + cb}{b^2} = \frac{a+c}{b}$. Por este motivo, en la práctica, cuando se suman dos números racionales, se buscan representantes que tengan el mismo denominador, usualmente el mínimo común múltiplo de los dos denominadores.

En el conjunto $\mathbb{Q}$, la operación $+$ satisface las siguientes propiedades:

1. Es conmutativa.
2. Es asociativa.
3. El elemento $[(0, 1)]$, denotado por 0, es el elemento neutro de la suma.
4. Todo número racional tiene elemento opuesto.

En otras palabras $(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo conmutativo:
El opuesto del número $\alpha = \frac{a}{b}$ es el número $\frac{-a}{b}$ y se designa por $-\alpha = -\frac{a}{b}$. Las propiedades asociativa y conmutativa,
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \text{y} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$
de la suma se demuestran viendo en cada caso que los números racionales de cada miembro de la igualdad tienen un representante común.

En el conjunto $\mathbb{Q}$, la operación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades:

1. Es conmutativa.
2. Es asociativa.
3. El elemento $[(1, 1)]$, denotado por 1, es el elemento neutro del producto.
4. Todo número racional no nulo tiene inverso.

En otras palabras, si $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, entonces $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo. Veamos como se calcula el inverso del número $\alpha = [(a, b)] \neq [(0, 1)]$. Como $a \cdot 1 \neq b \cdot 0 = 0$, resulta que $a \neq 0$ y por tanto el par $(b, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ define un número racional que es el inverso de α, que denotaremos $\alpha^{-1} = \frac{b}{a}$. En efecto:
$$\alpha\alpha^{-1} = [(a, b)][(b, a)] = [(ab, ab)] = [(1, 1)]$$

También en este caso, las propiedades asociativa y conmutativa del producto,

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \text{y} \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$

se demuestran viendo en cada caso que los números racionales de cada miembro de la igualdad tienen un representante común.

Finalmente, se demuestra de manera análoga que la operación $\cdot$ es distributiva respecto de la operación $+$ en $\mathbb{Q}$, es decir,

5. Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ se tiene $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Todas las propiedades enunciadas para los números racionales se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 6.2 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

De entre las propiedades que se derivan de la *estructura de cuerpo* destacamos las siguientes:

- $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$.
- Si $\alpha\beta = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $\beta = 0$. (No hay divisores de 0 en $\mathbb{Q}$)
- Si $\alpha\beta = \alpha\gamma$ y $\alpha \neq 0$ entonces $\beta = \gamma$. (Propiedad cancelativa en $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$)
- Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \in \mathbb{Q}$, la ecuación $\alpha x + \beta = 0$ tiene solución única en $\mathbb{Q}$, $x = -\beta\alpha^{-1}$.

Orden en $\mathbb{Q}$

Se definen en $\mathbb{Q}$ dos subconjuntos, el subconjunto $\mathbb{Q}_+$ de los números racionales positivos y el subconjunto $\mathbb{Q}_-$ de los números negativos:

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \neq 0 \text{ y } ab \geqslant 0\right\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}_- = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \neq 0 \text{ y } ab \leqslant 0\right\}$$

Se comprueba fácilmente que la definición de los conjuntos $\mathbb{Q}_+$ y $\mathbb{Q}_-$ no depende del representante elegido. Se cumple:

$$\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$$

Además se tiene:

- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+$, entonces $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}_+$ y $\alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$.

En efecto, si $\alpha = \frac{a}{b}$ y $\beta = \frac{c}{d}$ siendo $ab \geqslant 0$ y $cd \geqslant 0$, entonces

$$(ad + bc)bd = abd^2 + b^2cd \geqslant 0 \quad \text{y} \quad (ac)(bd) = (ab)(cd) \geqslant 0$$

y en consecuencia, $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$.

Definición 6.3 Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, se define la relación:

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+$$

La relación $\leqslant$ es una relación de orden total en $\mathbb{Q}$:
Es reflexiva pues $\alpha - \alpha = 0 \in \mathbb{Q}_+$.
Es antisimétrica pues si $\alpha \leqslant \beta$ y $\beta \leqslant \alpha$ entonces $\beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$, es decir, $\alpha = \beta$.
Es transitiva pues si $\alpha \leqslant \beta$ y $\beta \leqslant \gamma$ entonces $\beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+$ y $\gamma - \beta \in \mathbb{Q}_+$. En consecuencia $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}_+$ y $\alpha \leqslant \gamma$.
El orden es total pues $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$.
Además el orden es compatible con la suma pues si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, como $(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha$, resulta que $\alpha \leqslant \beta$ si y sólo si $\gamma + \alpha \leqslant \gamma + \beta$.
Por tanto se concluye:

Teorema 6.4 $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ es un cuerpo ordenado.

Indistintamente se escribe $b \geqslant a$ para indicar $a \leqslant b$ que se lee como b es *mayor o igual* que a.
Como viene siendo habitual la notación $a < b$ o $b > a$ indica $a \leqslant b$ y $a \neq b$.

Puesto que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ es un cuerpo ordenado se satisfacen todas las propiedades de cuerpo estudiadas en el capítulo 4 y en particular, las propiedades de la proposición 4.37. En concreto se tiene:

- Si $a \leqslant b$ y $a' \leqslant b'$ entonces $a + a' \leqslant b + b'$.
- Si $a \leqslant b$ entonces $-b \leqslant -a$.
- Si $a \leqslant b$ y $0 \leqslant c$ entonces $ac \leqslant bc$.
- Si $a \leqslant b$ y $c \leqslant 0$ entonces $bc \leqslant ac$.
- Para todo $a \in \mathbb{Q}$, $a^2 \geqslant 0$.
- Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.

- Si $0 < a \leqslant b$ entonces $b^{-1} \leqslant a^{-1}$.
- Si $a \leqslant b < 0$ entonces $b^{-1} \leqslant a^{-1}$.

Identificación de $\mathbb{Z}$ con un subanillo ordenado de $\mathbb{Q}$

Veamos que el conjunto de los números racionales constituye una ampliación del conjunto de los números enteros.
Cuando decimos que $\mathbb{Q}$ es una extensión de $\mathbb{Z}$, queremos decir que $\mathbb{Q}$ contiene un anillo ordenado isomorfo al anillo ordenado de los números enteros, es decir, que existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que para todo $a, a' \in \mathbb{Z}$ se tiene:

1. $f(a + a') = f(a) + f(a')$.
2. $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a')$.
3. Si $a \leqslant b$ entonces $f(a) \leqslant f(b)$.

Claramente, la aplicación f definida por $f(a) = [(a, 1)]$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y el anillo A de $\mathbb{Q}$ definido por:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha = [(a, 1)] \text{ y } a \in \mathbb{Z}\}$$

Identificaremos por tanto todo elemento de A con un elemento de $\mathbb{Z}$. Así, escribiremos a en lugar de $[(a, 1)]$. En particular, el elemento nulo $[(0, 1)]$ y el elemento unidad $[(1, 1)]$, que usualmente se escriben como 0 y 1 por ser los elementos neutros de la suma y del producto en un anillo, también se escriben como 0 y 1 por la identificación anterior.
Mediante esta identificación, observemos que se verifica:

$$\frac{a}{b} = [(a, b)] = [(a, 1)] \cdot [(1, b)] = [(a, 1)] \cdot [(b, 1)]^{-1} = ab^{-1}$$

En la figura 6.2, hemos representado algunas clases de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Así, todos los puntos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ que están en la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (a, b) es la clase de equivalencia del par (a, b).
Consideremos la recta horizontal de ecuación $y = 1$. Si $a \in \mathbb{Z}$, el par $(a, 1)$ es un representante del número racional $a = [(a, 1)]$, y tomamos el punto $(a, 1)$ como representación gráfica del número $a = [(a, 1)]$.
Dado el número racional $[(a, b)]$, consideramos la recta r donde se encuentran todos sus representantes. Esta recta r corta a la recta de ecuación $y = 1$ en un único punto. El punto de intersección de la recta r con la recta $y = 1$ será la representación gráfica del número racional $\frac{a}{b} = [(a, b)]$. De esta manera todos los números racionales están representados por un punto de la recta $y = 1$.
En la figura 6.3 se ha representado únicamente la recta anterior.

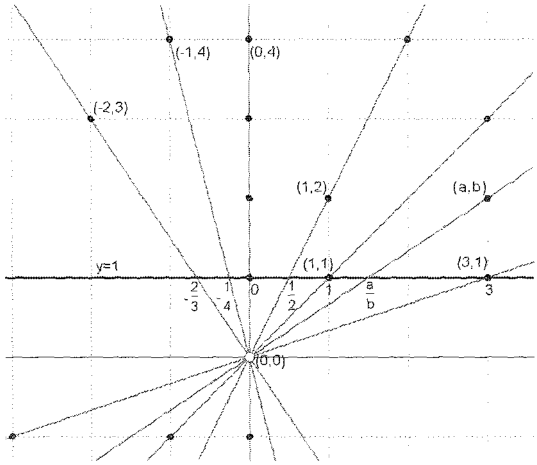


Figura 6.2: Representación lineal de $\mathbb{Q}$

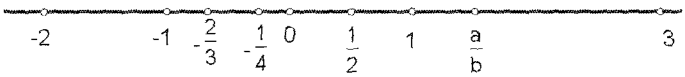


Figura 6.3: Representación lineal de $\mathbb{Q}$

Proposición 6.5 Propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\alpha > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha > \beta$.

Demostración: Sean $\alpha = \dfrac{a}{b}$ y $\beta = \dfrac{c}{d}$, se puede suponer que $b > 0$ y $d > 0$. La desigualdad $n\alpha > \beta$ es cierta si $\dfrac{nad - bc}{bd} > 0$, es decir, si $nad - bc > 0$, esto es $n(ad) > bc$. Pero de $b > 0$, se deduce que $a > 0$ pues $\alpha > 0$, y en consecuencia $ad > 0$. Por tanto la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(ad) > bc$ se debe a la propiedad arquimediana de $\mathbb{Z}$.

□

La siguiente proposición establece una propiedad del orden de $\mathbb{Q}$ que no es cierta en $\mathbb{Z}$.

Proposición 6.6 El orden de $\mathbb{Q}$ es **divisible** , es decir, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, tales que $\alpha < \beta$, existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.

Demostración: Basta observar que $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ cumple los requisitos de la proposición.

□

En $\mathbb{Z}$ la propiedad anterior no es cierta pues tomando $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ y $\beta = n+1$, claramente $\alpha < \beta$ pero sin embargo no existe $\gamma \in \mathbb{Z}$ tal que $n < \gamma < n+1$, ya que el intervalo de $\mathbb{Z}$, $(n, n+1)_{\mathbb{Z}}$, es el conjunto vacío. Se dice que el orden de $\mathbb{Z}$ es discreto. La divisibilidad del orden en $\mathbb{Q}$ significa que *entre dos racionales distintos existe siempre otro número racional*, y en consecuencia un número infinito de números racionales.

6.2. Los números decimales

En el sistema decimal, cuando escribimos el número $71223,145$ queremos indicar el número racional siguiente:

$$7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 + 1\frac{1}{10} + 4\frac{1}{10^2} + 5\frac{1}{10^3}$$

Este número escrito en la forma $\frac{a}{b}$ es $\dfrac{71223145}{10^3}$.
Esto nos lleva a definir un **número decimal**, también llamado número decimal finito o exacto, como un número racional que tenga al menos un representante cuyo denominador es una potencia de 10. Por ejemplo, son números decimales los números $1/5$, o $-3/60$ o 7 pues $1/5 = 2/10$, $-3/60 = -5/10^2$ y $7 = 7/10^0$. Sin embargo, $1/3$ o $3/7$ no son números decimales. Si fuera $1/3 = a/10^n$ con $n \in \mathbb{N}$ tendríamos que $10^n = 3a$ y en consecuencia 3 es un divisor de 10^n, que es una contradicción.
Denotamos por $\mathbb{D}$ al conjunto de los números decimales. En consecuencia $\mathbb{D}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$. Es fácil reconocer si un número racional expresado como fracción irreducible es un número decimal. En concreto:

- Un número racional es un número decimal si y sólo si el denominador de su fracción irreducible es de la forma $2^n 5^p$ con $n, p \in \mathbb{N}$.

En efecto, sea el número racional a/b irreducible y decimal. Por ser un número decimal, se tiene que $a/b = x/10^m$ con $m \in \mathbb{N}$ y en consecuencia, $a \cdot 10^m = bx$. Como a y b son primos entre sí y b es un divisor de $a \cdot 10^m$, resulta que b es un divisor de 10^m y por tanto $b = 2^n 5^p$ con $n, p \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente si $b = 2^n 5^p$, se tiene:
si $n = p$, entonces $a/b = a/10^n$,
si $n < p$, entonces $a/b = (2^{p-n}a)/10^p$,
si $n > p$, entonces $a/b = (5^{n-p}a)/10^n$.

Los números decimales $\frac{71223145}{10^3}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{60}$ se escriben también como 71223,145; 0,2 y $-0,05$ que se denomina representación o expresión decimal de los números decimales dados. En programas de ordenador, calculadoras electrónicas o en inglés la coma separadora de la parte entera de las cifras decimales se sustituye por un punto.

Aproximación decimal de un número racional

Supondremos que el número racional es positivo, $\alpha \in \mathbb{Q}_+$. Tratamos de encuadrar α entre dos números decimales "consecutivos". Con mas precisión:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un único $c \in \mathbb{N}$ que verifica:

$$\frac{c}{10^n} \leqslant \alpha < \frac{c+1}{10^n}$$

En efecto, sea $\alpha = \frac{a}{b}$ siendo $a, b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí. Las desigualdades anteriores equivalen a:

$$bc \quad \leqslant \quad a\,10^n \quad < \quad b(c+1)$$

En otras palabras c es el cociente en la división entera de $a\,10^n$ entre b. El número decimal $\frac{c}{10^n}$, respectivamente $\frac{c+1}{10^n}$, se denomina **aproximación decimal de α de orden n** por defecto, respectivamente por exceso.

Observación: Si $\frac{c}{10^n}$ y $\frac{d}{10^{n+1}}$ son las aproximaciones por defecto de *un mismo* racional, ¿qué relación existe entre ambas aproximaciones? Tenemos que c es el cociente en la división entera de $a\,10^n$ entre b.

Es decir: $a\,10^n = cb + r$ con $0 \leqslant r < b$

En consecuencia: $a\,10^{n+1} = 10cb + 10r$ con $0 \leqslant 10r < 10b$

Si hacemos la división entera de $10r$ entre b, el cociente q es menor que 10 y en consecuencia:

$$10r = bq + s \text{ con } 0 \leqslant s < b \text{ y con } 0 \leqslant q < 10$$

Por tanto: $a\,10^{n+1} = 10cb + bq + s$ con $0 \leqslant s < b$

Es decir: $a\,10^{n+1} = (10c+q)b + s$ con $0 \leqslant s < b$

En definitiva, $10c + q$ es el cociente en la división entera de $a\,10^{n+1}$ entre b. Por lo que se concluye que:

$$d = 10c + q \quad \text{con} \quad 0 \leqslant q < 10$$

Esta fórmula justifica el cálculo en la práctica de las aproximaciones decimales:

- Para calcular un decimal más en la aproximación decimal por defecto de un número racional, se añade un cero al dividendo a y se continua la división entera entre b.

Dado el número racional $\alpha = \dfrac{a}{b}$, siendo $a, b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí vamos hallando sus aproximaciones decimales por defecto, con cada vez más cifras decimales. Es decir, iteramos el proceso de ir añadiendo ceros al dividendo a y proseguimos la división entre b. Pudiendo ocurrir dos cosas:

1. Si α es un número decimal, todas las cifras decimales a partir de un rango son cero.

2. Si α no es un número decimal, vamos obteniendo los restos de la división entera de $a \cdot 10^n$ entre b. Como todos estos restos son números naturales estrictamente menores que b, sólo pueden tomar un número finito de valores y por tanto en un número finito de divisiones (a lo más "b") vuelve aparecer un mismo resto, momento a partir del cual el proceso se repite, es decir, a partir de un rango, las cifras decimales de las aproximaciones por defecto se repiten periódicamente.

Si el conjunto de las cifras decimales que se repiten, empieza inmediatamente después de la coma, se dice que es una expresión decimal periódica, si no diremos que es una expresión decimal periódica mixta.

6.3. Insuficiencia de los números racionales

En el ejemplo 1.9 se demostró que no existe ningún número racional x cuyo cuadrado sea 2, $x^2 = 2$. El conocimiento de que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables se debe a los matemáticos griegos y ya la escuela pitagórica se planteó si admitir únicamente las razones conmensurables, los números racionales, y de esta manera la diagonal de un cuadrado no era medible, o aceptar la existencia de nuevos números que serían definidos por expresiones decimales ilimitadas (no periódicas).

Hemos visto que a todo número racional se le puede asociar una expresión decimal, finita o ilimitada periódica. Con la introducción de los números reales, se trataría de dar sentido a cualquier expresión decimal aunque ésta no sea periódica. Un número real podría verse, bajo forma numérica, como un número entero seguido de una infinidad de decimales. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769 4\ldots$$

Partir de una definición de este tipo para construir los números reales plantea ciertos problemas: Una vez que se le hubiera dado un sentido preciso a las expresiones decimales, surgen algunos inconvenientes, por ejemplo, la expresión decimal

$0,999999999\ldots$ y $1,0000000000\ldots$ representan el mismo número. Al mismo tiempo las operaciones entre expresiones decimales no siempre son tan fáciles de definir. Por ejemplo para conocer la quinta cifra decimal de una suma o de un producto de expresiones decimales ilimitadas habría que conocer todas las cifras decimales de los números considerados: un cambio en la milésima cifra decimal puede producir una alteración en todas las demás que se iría propagando de derecha a izquierda. De las formulaciones más precisas que se fueron dando a lo largo del siglo XIX del concepto de número real, la que más se aproximaba al concepto de expresión decimal, fue la que propuso Weierstrass, que expresaba el concepto mediante intervalos encajados. Dichos intervalos se iban formando con las aproximaciones decimales finitas por defecto y por exceso de la expresión decimal ilimitada.

Por todo lo expuesto anteriormente preferimos introducir los números reales mediante sus propiedades que no construirlos. Veamos que el hecho de que haya expresiones decimales que no definen un número racional se traduce en que en $\mathbb{Q}$ no se cumple la propiedad del supremo. Es decir, existen en $\mathbb{Q}$ subconjuntos acotados superiormente que no admiten supremo.

Ejemplo 6.7 Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0 \ \text{ y } \ x^2 < 2\}$.
Claramente A es un conjunto acotado superiormente. Por ejemplo 2 es una cota superior de A. Veamos que el conjunto A no tiene supremo (en $\mathbb{Q}$), o equivalentemente, que el conjunto B de las cotas superiores de A no tiene elemento mínimo. En efecto, observemos que

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ es cota superior de } A\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0 \ \text{ y } \ x^2 > 2\}$$

y veamos que para todo $r \in B$, existe $s \in B$ tal que $s < r$. Basta tomar $s = \dfrac{2r+2}{r+2}$ y se verifica:

- $s \in \mathbb{Q}$ y $s \geq 0$ pues $r \in \mathbb{Q}$ y $r \geq 0$.
- $s < r$ pues $r - s = r - \dfrac{2r+2}{r+2} = \dfrac{r^2+2r-2r-2}{r+2} = \dfrac{r^2-2}{r+2} > 0$.
- s es cota superior de A. En efecto, como r es cota superior de A, se verifica que $r^2 > 2$. Además,

$$s^2 - 2 = \frac{(2r+2)^2}{(r+2)^2} - 2 = \frac{4r^2+8r+4-2r^2-8r-8}{(r+2)^2} = \frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2} > 0$$

por tanto $s^2 > 2$. En consecuencia, s es también cota superior de A.

6.4. El cuerpo de los números reales

Supondremos pues que existe un cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ ordenado, extensión del cuerpo ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ y que cumple la propiedad del supremo:

Axioma del supremo
Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Los elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se denominan **números irracionales**. Como viene siendo habitual la notación $b \geqslant a$ indica $a \leqslant b$ mientras que las notaciones $a < b$ o $b > a$ indican $a \leqslant b$ y $a \neq b$.
Puesto que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ es un cuerpo ordenado se satisfacen todas las propiedades de cuerpo estudiadas en el capítulo 4 y en particular, las propiedades de las proposiciones 4.21 y 4.37. En concreto se cumplen las siguientes propiedades:

- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$. (No hay divisores de 0)
- Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$. (Propiedad cancelativa en $(\mathbb{R}^*, \cdot)$)
- Si $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la ecuación $ax = b$ tiene solución única en $\mathbb{R}$, $x = ba^{-1}$, que también se denota $x = \dfrac{b}{a}$.
- **Binomio de Newton**
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
para todo $a, b \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
- $a \leqslant b$ si y sólo si $b - a \in \mathbb{R}_+$.
- Si $a \leqslant b$ y $a' \leqslant b'$ entonces $a + a' \leqslant b + b'$.
- Si $a \leqslant b$ entonces $-b \leqslant -a$.
- Si $a \leqslant b$ y $0 \leqslant c$ entonces $ac \leqslant bc$.
- Si $a \leqslant b$ y $c \leqslant 0$ entonces $bc \leqslant ac$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$.
- Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.
- Si $0 < a \leqslant b$ entonces $b^{-1} \leqslant a^{-1}$.
- Si $a \leqslant b < 0$ entonces $b^{-1} \leqslant a^{-1}$.

Sabemos que el cuadrado de un número real es positivo. Cabe preguntarse si todo número real positivo es el cuadrado de un número real. La respuesta es afirmativa:

Ejercicio 6.8 Demuestre que cada número real positivo tiene una única raíz cuadrada positiva.

Solución: Sea $d \geqslant 0$. Buscamos las soluciones de la ecuación $x^2 = d$. Desde luego si $x_0 \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación anterior, también es solución $-x_0$, por lo que buscaremos sólo las soluciones positivas. Podemos además suponer que $d > 0$ pues la ecuación $x^2 = 0$ tiene solución única $x = 0$. Sea el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \ \text{ y } \ x^2 \leqslant d\}$$

El conjunto A es no vacío pues $0 \in A$. Además, A es un conjunto acotado superiormente por $\max(1, d)$ y cualquier número real positivo b tal que $b^2 \geqslant d$ es cota superior de A, ya que en caso contrario existe $a \in A$ tal que $b < a$ y al ser ambos positivos se deduciría que $d \leqslant b^2 < a^2 \leqslant d$. Por el axioma del supremo existe $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Veamos, por reducción al absurdo, que $\alpha^2 = d$.

Si $\alpha^2 > d$, se considera $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2 - d}{2\alpha} > 0$. Se tiene:

$$(\alpha - \varepsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon = \alpha^2 - (\alpha^2 - d) = d$$

Por tanto $\alpha - \varepsilon$ es cota superior de A, que contradice la hipótesis $\alpha = \sup(A)$.

Si $\alpha^2 < d$ se toma $\varepsilon = \min\left(\alpha, \dfrac{d - \alpha^2}{3\alpha}\right) > 0$. Se tiene:

$$(\alpha + \varepsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 \leqslant \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon = \alpha^2 + 3\alpha\varepsilon \leqslant \alpha^2 - (\alpha^2 - d) = d$$

Por tanto, $\alpha + \varepsilon \in A$, que contradice el hecho de ser α cota superior de A.

La unicidad de la raíz positiva se deduce de que si $\beta \geqslant 0$ es tal que $\beta^2 = d$, entonces por un lado $\beta \in A$, y por tanto $\beta \leqslant \alpha$ pues α era cota superior de A. Por otro lado, β es cota superior de A y por tanto $\alpha \leqslant \beta$ pues α era el supremo de A. □

Ejemplo 6.9 **El número e**

Consideramos el conjunto:

$$A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Si desarrollamos mediante el binomio de Newton cada elemento de A se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Así se observa que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$, luego A es un conjunto acotado superiormente y en consecuencia existe el supremo de A, que se denomina número e.

Como en todo anillo ordenado se define el **valor absoluto** de $a \in \mathbb{R}$ mediante:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Se cumple:

- $|a| \geqslant 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$.
- $|ab| = |a|\,|b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

La compatibilidad del orden con las operaciones permite deducir de la propiedad del supremo la propiedad del ínfimo.

Proposición 6.10 Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

Demostración: Basta observar que si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, entonces $B = -A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ es un conjunto no vacío acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $\sup(B) \in \mathbb{R}$. Claramente se cumple que $\text{ínf}(A) = -\sup(B)$.

□

Si $A \neq \emptyset$ es un conjunto no acotado superiormente se suele escribir $\sup(A) = +\infty$. Análogamente se escribe $\text{ínf}(A) = -\infty$ para indicar que A es un conjunto no acotado inferiormente.

Veamos como se obtiene la expresión decimal de un número real.

Proposición 6.11 Sea $x \in \mathbb{R}$. Existe un único número entero $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$z \leqslant x < z+1\,.$$

Al número entero z se le denomina **parte entera de x** y se denota por $E(x)$ o $[x]$.

Demostración: Supongamos primero que $x \geqslant 0$. Sea el conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}$$

i) $A \neq \emptyset$ pues $0 \in A$.
ii) A está acotado superiormente en $\mathbb{R}$, por x.
Por el axioma del supremo, existe $z = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Veamos que $z \in A$. En efecto: Como $z-1$ no es cota superior de A, existe $p \in A$ tal que $z-1 < p \leqslant z$. De $z-1 < p$, se deduce que $z < p+1$ y en consecuencia, cualquier entero estrictamente superior a p es superior a z y por tanto, no es elemento de A. Luego p es el máximo de A y se concluye que $p = z$. Por tanto $z \in A$ y en particular $z \in \mathbb{N}$ y $z \leqslant x$. Como además $z+1 \notin A$, se deduce que $x < z+1$.
Supongamos ahora que $x < 0$.
Si $x \in \mathbb{Z}$, tomamos $z = x$, y se cumple $z \leqslant x < z+1$.
Si $x \notin \mathbb{Z}$, entonces $-x \geqslant 0$ y sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \leqslant -x < q+1$. Se toma $z = -q-1 \in \mathbb{Z}$. Como $-q-1 < x \leqslant -q$, se tiene que $z < x \leqslant z+1$. Como $z \notin \mathbb{Z}$, resulta que $z < x < z+1$ y en consecuencia, $z \leqslant x < z+1$. La unicidad del entero z se deduce de lo siguiente: Sea z tal que $z \leqslant x < z+1$. Si $p \in \mathbb{Z}$ es tal que $p < z$, entonces $p+1 \leqslant z \leqslant x$ y por tanto, p no cumple que $p \leqslant x < p+1$. Si $p \in \mathbb{Z}$ es tal que $p > z$, entonces $p \geqslant z+1 > x$ y por tanto, p no cumple que $p \leqslant x < p+1$.

□

Observación: Téngase en cuenta que $E(2) = 2$, $E(2,5) = 2$, $E(-2) = -2$, mientras que $E(-2,5) = -3$.

La parte entera permite calcular el truncamiento, de cualquier orden $n \in \mathbb{N}$, de un número real. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos el número $10^n x$. Por la proposición anterior, tenemos que $E(10^n x) \leqslant 10^n x < E(10^n x)+1$ y dividiendo las desigualdades por 10^n se obtiene:

$$\frac{E(10^n x)}{10^n} \leqslant x < \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$$

Los números $\dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ y $\dfrac{E(10^n x)+1}{10^n}$ son dos números decimales, de n cifras decimales, consecutivos que se denominan, respectivamente, **aproximación decimal de x de orden n por defecto y por exceso.**
En particular, una aproximación del número e, véase el ejemplo 6.9, es $2,7182818$.

Proposición 6.12 Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Demostración: Si $y \leq 0$, basta tomar $n = 1$. Si $y > 0$, se toma $n = E\left(\frac{y}{x}\right) + 1$. De $\frac{y}{x} < n$ se obtiene que $nx > y$.

$\square$

6.5. Intervalos en $\mathbb{R}$

En las definiciones 3.18 y 3.20 se introdujeron los intervalos en un conjunto ordenado arbitrario. Los símbolos $\leftarrow$ y $\rightarrow$ en los intervalos iniciales y finales de $\mathbb{R}$ se suelen indicar respectivamente por $-\infty$ y $+\infty$. Se recuerda todos los tipos de intervalos posibles:

$$(-\infty, b],\ (-\infty, b),\ (a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b],\ (a, +\infty) \text{ y } [a, +\infty)$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leqslant b$.

El propio conjunto $\mathbb{R}$ también es considerado un intervalo y a veces se indica como $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
Diremos que el subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un **intervalo** si es de algún tipo de los intervalos anteriores incluyendo el propio $\mathbb{R}$.

La siguiente proposición caracteriza los intervalos de $\mathbb{R}$.

Proposición 6.13 Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si cualesquiera que sean los números x, y de I tales que $x < y$ se cumple que $[x, y] \subset I$.

Demostración: Si I es un intervalo, claramente se satisface la propiedad del enunciado. Recíprocamente, sea I un conjunto no vacío tal que cualesquiera que sean los puntos x, y de I tales que $x < y$ se cumple que $[x, y] \subset I$. Sean $a = \text{ínf}(I)$ y $b = \sup(I)$, donde a y $b \in \mathbb{R}$, salvo en los casos donde I no está acotado inferiormente, en ese caso $a = -\infty$, o I no está acotado superiormente, y en ese caso $b = +\infty$. Para ver que $(a, b) \subset I$, demostramos que si $z \in (a, b)$ entonces $z \in I$. En efecto:

i) Si $a < z$ y $a = -\infty$, entonces I no está acotado inferiormente y por tanto z no es cota inferior de I. En consecuencia, existe $x \in I$ tal que $x < z$.

ii) Si $a < z$ y $a \neq -\infty$, como a es la mayor de las cotas inferiores de I, z no es cota inferior de I. En consecuencia, existe $x \in I$ tal que $x < z$.

En ambos casos hemos probado que si $a < z$, existe $x \in I$ tal que $x < z$.
De manera análoga se prueba que si $z < b$, entonces existe $y \in I$ tal que $z < y$.

En definitiva, si $z \in (a, b)$, existen x e $y \in I$ tales que $x < z < y$, y por la propiedad que satisface I, resulta que $z \in I$.

$\square$

Observación: La caracterización anterior de los intervalos de $\mathbb{R}$ no es válida para los intervalos de $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, para :

$$I = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \text{ y } x^2 \leqslant 2\}$$

el conjunto I satisface que cualesquiera que sean los puntos x, y de I tales que $x < y$ se cumple que $[x, y]_{\mathbb{Q}} \subset I$, y sin embargo I no es un intervalo de $\mathbb{Q}$. En este caso, aun siendo I un subconjunto acotado de $\mathbb{Q}$, el problema es que no existe $b = \sup_{\mathbb{Q}}(I)$. Por tanto I no se puede poner en la forma $[0, b)_{\mathbb{Q}}$ o $[0, b]_{\mathbb{Q}}$ con $b \in \mathbb{Q}$.

Proposición 6.14 Cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se tiene:

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Se enuncia esta propiedad diciendo que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son **densos** en $\mathbb{R}$.

Demostración: Hay que demostrar que el intervalo (a, b) contiene números racionales e irracionales. Sean x e y dos elementos de (a, b). Si uno de ellos es racional y el otro irracional, no hay nada que probar.

Si los dos son racionales y $x < y$, entonces $z = x + \dfrac{(y-x)\sqrt{2}}{2}$ es irracional y verifica $x < z < y$.

Luego, entre dos números racionales siempre hay un número irracional.

Si los dos son irracionales y $x < y$, sea $n = E\left(\dfrac{1}{y-x} + 1\right)$. Como $n > \dfrac{1}{y-x}$ resulta que:

$$1 < n(y - x)$$

Sea ahora $m = E(nx)$. Se tiene:

$$m \leqslant nx < m + 1 \leqslant nx + 1 < nx + n(y - x) = ny$$

es decir, $nx < m + 1 < ny$. Luego, $x < \dfrac{m+1}{n} < y$. Por tanto, $\dfrac{m+1}{n}$ es un número racional entre x e y.

En consecuencia, entre dos irracionales siempre hay un número racional.

$\square$

Observación: La densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ permite deducir que todo número real x es el límite de una sucesión de números racionales (a_n) y el límite de una sucesión de números irracionales (b_n). En efecto, si consideramos la sucesión de intervalos $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$, tomamos para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}$ y $b_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ son dos sucesiones adecuadas pues para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple:

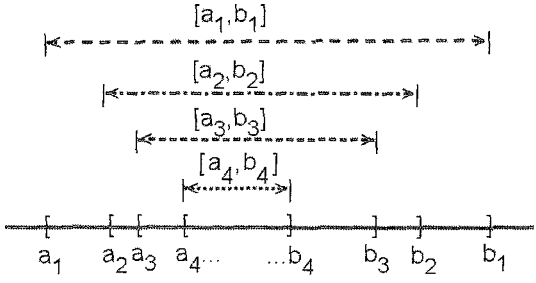
$$|x - a_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |x - b_n| < \frac{1}{n}$$

Proposición 6.15 Propiedad de los intervalos encajados
Se considera en $\mathbb{R}$ la sucesión de intervalos cerrados,

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$$

siendo $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.
2. Si la longitud $b_n - a_n$ del intervalo $[a_n, b_n]$ tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces existe un único punto $\alpha \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.



Demostración: El conjunto $A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ es un conjunto acotado superiormente, ya que $a_n \leqslant b_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, existe $\alpha = \sup(A)$.
Análogamente, el conjunto $B = \{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ es un conjunto acotado inferiormente, ya que $a_0 \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $\beta = \text{ínf}(B)$.
Para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que $a_n \leqslant b_m$, por lo que $\alpha \leqslant \beta$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $[\alpha, \beta] \subset [a_n, b_n]$, luego

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

y por consiguiente, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Finalmente, si existen $x \neq y$ tales que $x, y \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $b_n - a_n \geqslant l = |x - y| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $b_n - a_n$ no tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Así pues, el único elemento de esta intersección es $\alpha = \beta$.

□

Observación: Hemos visto como a todo número real se le puede asociar una expresión decimal por defecto de cualquier orden. Incluso sabemos que si el número es racional, la expresión decimal asociada es finita, ilimitada periódica o ilimitada periódica mixta. La propiedad de los intervalos encajados permite asociar a toda expresión decimal ilimitada un número real. Basta para ello considerar la sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, siendo a_n el truncamiento de la expresión hasta la n-ésima cifra decimal y $b_n = a_n + 10^{-n}$. Por la propiedad anterior, se obtiene que existe un único número real x tal que $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, si escribimos $x = 1,151151115111115....$ queremos simplemente indicar que x es el único número real tal que

$$\begin{array}{c} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1,1 \leqslant x \leqslant 1,2 \\ 1,15 \leqslant x \leqslant 1,16 \\ 1,151 \leqslant x \leqslant 1,152 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

En particular, si la expresión decimal es periódica, por ejemplo, $x = 1,025252525\ldots$ justifique todos los pasos del algoritmo que se utiliza a continuación para hallar la fracción generatriz de x.

$$\begin{aligned} x &= 1,025252525\ldots \\ 10x &= 10,25252525\ldots \\ 1000x &= 1025,252525\ldots \\ 990x &= 1015 \\ x &= \frac{1015}{990} = \frac{203}{198} \end{aligned}$$

Hemos representado todos los números racionales sobre una recta, véase la figura 6.2. Es decir, a cada número racional le corresponde un punto sobre una recta. Sin embargo a todo punto de la recta no le corresponde un número racional. Esto es debido al no cumplimiento en $\mathbb{Q}$ de la propiedad de los intervalos encajados que sin embargo, si se satisface en los números reales. De hecho una de las propiedades más importantes de los números reales es que pueden ser representados en un recta. Además, una vez escogidos los puntos que representan a los números 0 y 1, el 1 usualmente a la derecha del 0, cada punto de la recta representa un único número real e inversamente cada número real está representado por un punto de la recta. Esta recta se denomina **recta real** (véase la figura 6.4).

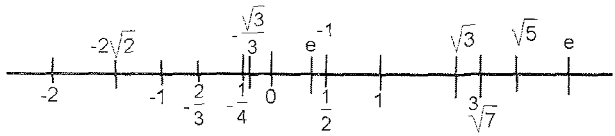


Figura 6.4: La recta real

Proposición 6.16 El intervalo $[0,1]$ no es numerable.

Demostración: Nos basaremos en la propiedad de los intervalos encajados para demostrar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable. Supongamos, por reducción al absurdo, que $[0,1]$ es numerable. Por tanto, $[0,1] = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Definimos, por recurrencia, la sucesión de intervalos siguiente.
Paso 1. Consideramos los intervalos $[0,\ 1/3]$, $[1/3\ ,\ 2/3]$ y $[2/3\ , 1]$. Necesariamente x_0 no está al menos en uno de los tres intervalos, ya que x_0 está como máximo en dos intervalos según x_0 sea o no sea punto extremo $1/3$ o $2/3$. Sea por tanto $I_0 = [a_0, b_0]$ uno, de los tres intervalos, tal que que $x_0 \notin I_0$.
Paso 2. Dividimos el intervalo I_0 en tres partes, $[a_0, a_0 + 1/9]$, $[a_0 + 1/9, a_0 + 2/9]$ y $[a_0 + 2/9, b_0]$. Necesariamente x_1 no está al menos en uno de los tres intervalos, ya que x_1 está como máximo en dos intervalos según x_1 no esté en I_0 o , si está en I_0, sea o no sea un punto extremo $a_0 + 1/9$ o $a_0 + 2/9$. De entre los tres intervalos elegimos uno, $I_1 = [a_1, b_1]$, tal que $x_1 \notin I_1$.
Por inducción, dividimos el intervalo I_n en tres partes:

$$\left[a_n\ ,\ a_n + \frac{1}{3^{n+2}}\right],\ \left[a_n + \frac{1}{3^{n+2}}\ ,\ a_n + \frac{2}{3^{n+2}}\right] \quad \text{y} \quad \left[a_n + \frac{2}{3^{n+2}}\ ,\ b_n\right]$$

Necesariamente x_{n+1} no está en al menos uno de los tres intervalos, ya que x_{n+1} está como máximo en dos intervalos según x_{n+1} no esté en I_n o , si está en I_n, sea o no sea un punto extremo , $a_n + 1/(3^{n+2})$ o $a_n + 2/(3^{n+2})$. De entre los tres intervalos elegimos uno, $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, tal que $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.
Hemos construido una sucesión de intervalos cerrados tales que

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots \quad \text{y} \quad x_n \notin [a_n, b_n]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea, por la propiedad de los intervalos encajados,

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \subset [0,1]$$

Se deduce que $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \notin [0,1]$ que es una contradicción.

□

Ejemplo 6.17 Si $a < b$, el intervalo $[a,b]$ no es numerable.
En efecto, basta observar que card $([a,b])$ = card $([0,1])$ puesto que la aplicación $f\colon [0,1] \longrightarrow [a,b]$, definida por $f(x) = bx + a(1-x)$ para todo $x \in [0,1]$, es claramente biyectiva.

Ejemplo 6.18 Los conjuntos $\mathbb{R}$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(a,+\infty)$ y $[a,+\infty)$, con $a < b$, no son numerables.
Basta observar que si I es uno cualquiera de los intervalos anteriores, existen x e $y \in I$ tales que $x < y$. Por tanto, $[x,y] \subset I$. En consecuencia, I no puede ser numerable pues los subconjuntos de un conjunto numerable son numerables o finitos. En los ejercicios propuestos se pide además demostrar que todos estos conjuntos son equipotentes.

Ejemplo 6.19 El conjunto de los números irracionales no es numerable.
Si fuera un conjunto numerable entonces $\mathbb{R}$ que es la unión de los números racionales e irracionales (que al ser ambos numerables) sería numerable.

Ejercicio 6.20 Utilizando el teorema de Cantor-Berstein-Schroeder, véase el teorema 3.67, demuestre que $[0,1)$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son equipotentes.
Solución: Utilizando dicho teorema, basta demostrar que existen dos aplicaciones inyectivas f y g con $f\colon [0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1)$.
Construcción de f: Dado el número real $x \in [0,1)$, consideramos la expresión decimal de $x = 0,x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots$ siendo $0,x_1x_2\ldots x_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ con $x_j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.
Definimos:

$$\begin{array}{rcl} f: & [0,1) & \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ & x = 0,x_1x_2\ldots x_n\ldots & \longmapsto f(x) = \{10^n x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \end{array}$$

La aplicación f es inyectiva pues si $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \neq y_n$. En consecuencia, $10^n y_n \notin f(x)$ y por tanto $f(x) \neq f(y)$.
Construcción de g: Definimos

$$\begin{array}{rcl} g: \ \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow [0,1) & \\ A & \longmapsto g(A) = 0,x_0x_1\ldots x_n\ldots & \text{siendo } x_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \in A \\ 8 & \text{si } n \in \mathbb{N}\setminus A \end{cases} \end{array}$$

La aplicación g es inyectiva pues si $A, B \subset \mathbb{N}$ son tales que $A \neq B$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \in A$ y $n \notin B$, o , $n \notin A$ y $n \in B$. Si $g(A) = 0,x_0x_1\ldots x_n\ldots$ y $g(B) = 0,y_0y_1\ldots y_n\ldots$, entonces $|y_n - x_n| = 5$ y por tanto $g(A) \neq g(B)$ pues $|g(A) - g(B)| \geqslant 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Comentarios

Números conmensurables

El estudio del cociente de longitudes de segmentos o áreas condujo a la noción de conmensurabilidad. Para los antiguos griegos, todo se medía con números enteros: un segmento de recta r se medía en relación a un segmento unidad u contando el número de veces que cabe u en r. De esta manera, se obtenía

$$r = \overbrace{u + u + \cdots + u}^{n \text{ veces}} = nu$$

Dos segmentos de recta r_0 y r_1 se denominaban **conmensurables** cuando se podían medir ambos con el mismo segmento unidad, es decir, había que encontrar u tal que $r_0 = nu$ y $r_1 = mu$. Esto quiere decir que una regla marcada en unidades de distancia u, sirve para medir el segmento r_0 y el segmento r_1.
En los elementos de Euclides aparece ya el algoritmo, que hoy conocemos con el nombre de algoritmo de Euclides, para hallar u: Se sustrae al segmento mayor r_0, tantas veces (q_1) como sea posible, el segmento r_1. En consecuencia, lo que queda, r_2, es estrictamente menor que r_1.

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad r_2 < r_1$$

Si r_2 fuera cero el problema estaría resuelto. En caso contrario, iteramos el proceso con r_1 y r_2 y sucesivamente con r_2 y r_3, ...

$$\begin{array}{llr} r_1 = q_2 r_2 + r_3 & \text{y} & r_3 < r_2 < r_1 \\ r_2 = q_3 r_3 + r_4 & \text{y} & r_4 < r_3 < r_2 < r_1 \\ \cdots \quad \cdots & & \cdots \quad \cdots \end{array}$$

El proceso se acaba si en algún momento r_{k+1} fuera cero y en ese caso,

$$r_{k-1} = q_k r_k$$

En ese caso la medida común u a r_0 y a r_1 es r_k. Observe que el algoritmo de Euclides de la sección 5.5 para hallar el máximo común divisor es exactamente el mismo proceso. Si el algoritmo se acaba, los números son conmensurables, o equivalentemente el cociente es racional. Si el algoritmo no tiene fin, estamos ante **magnitudes inconmensurables**, o equivalentemente, el cociente es un número irracional. Algunos pitagóricos, de resultas de sus disquisiciones geométricas, intuyeron que algunos cocientes de magnitudes no podían ser cocientes de números enteros, como por ejemplo, la diagonal de un cuadrado y su lado. Sin embargo, estas magnitudes inconmensurables revolucionaban la teoría filosófica de la escuela pitagórica porque ponían en duda uno de sus postulados básicos sobre la posibilidad de descifrar los enigmas de la naturaleza. En el libro X de los *Elementos* de Euclides ya aparece una demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado y su lado, es decir de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. En esencia, la demostración dada en el ejemplo 1.9 es la que aparece en los *Elementos* de Euclides. Pero se sabe que mucho antes ya se había probado la irracionalidad de $\sqrt{2}$. La demostración geométrica de que la razón áurea, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, es irracional consiste en demostrar que la diagonal y el lado de un pentágono regular son inconmensurables.

Sobre la definición axiomática de $\mathbb{R}$

En la definición axiomática de $\mathbb{R}$, hemos supuesto la existencia de un cuerpo ordenado extensión del cuerpo ordenado de los números racionales donde se satisface el axioma del supremo. La definición es un poco más abstracta:
En primer lugar, la inclusión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ se puede sustituir por la propiedad de que el cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ sea isomorfo a un subcuerpo del cuerpo ordenado $\mathbb{R}$.
En segundo lugar, se demuestra fácilmente que todo cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{Q}$.
En efecto, si momentáneamente denotamos por $0_{\mathbb{K}}$ y $1_{\mathbb{K}}$ al elemento neutro y al elemento unidad de $\mathbb{K}$, basta definir una aplicación $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K}$ de la manera siguiente:

$$f(a) = \begin{cases} \overbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}}^{a \text{ veces}} & \text{si } \ a \in \mathbb{N}^* \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si } \ a = 0 \\ -\overbrace{\left(1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}\right)}^{-a \text{ veces}} & \text{si } \ -a \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Así, se tiene definida f sobre $\mathbb{Z}$. La extensión a todo el conjunto de los números racionales se hace teniendo en cuenta que si $\alpha \in \mathbb{Q}$ entonces $\alpha = \frac{a}{b}$ siendo $a, b \in \mathbb{Z}$ y se define:

$$f(\alpha) = \big(f(a)\big)\big(f(b)\big)^{-1} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

Se puede comprobar que f es una aplicación bien definida, es decir, que no depende del representante $\frac{a}{b}$ de α elegido y que además, para todo α, $\beta \in \mathbb{Q}$, cumple lo siguiente:

- $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.
- $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$.
- Si $\alpha \leqslant \beta$ entonces $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Luego la definición axiomática de $\mathbb{R}$ se puede expresar en la forma:

Definición 6.21 Existe un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ que satisface el axioma del supremo.

Para que la definición anterior sea más coherente, habría que ver la "unicidad"del cuerpo de los números reales. Esa "unicidad" es el resultado del siguiente teorema que admitiremos sin demostración.

Teorema 6.22 Todos los cuerpos ordenados que cumplen el axioma del supremo son isomorfos para la estructura de cuerpo y de orden.

En realidad, también se puede eliminar de la definición de $\mathbb{R}$ la hipótesis de la existencia, pues existen diversos procedimientos para, partiendo de ciertos conjuntos de partes de $\mathbb{Q}$, construir un cuerpo ordenado que satisface el axioma del supremo. Las dos construcciones más clásicas se basan en:

1. Las sucesiones fundamentales o de Cauchy de los números racionales.
2. Las cortaduras de Dedekind.

La construcción de $\mathbb{R}$ mediante sucesiones de Cauchy de números racionales puede hallarla el lector en cualquier libro de introducción al análisis real, como por ejemplo [9] o [11].
Esquemáticamente, se hace lo siguiente: Intuitivamente, todo número real es límite de sucesiones de números racionales. Todas estas sucesiones se caracterizan por ser sucesiones de Cauchy. Pero hay sucesiones distintas que tienen el mismo límite real. Por tanto, lo que se hace es identificar todas las sucesiones de Cauchy que tengan el mismo límite. Con más precisión, en el conjunto C de todas la sucesiones de Cauchy de números racionales, se define una relación de equivalencia en la que dos sucesiones de Cauchy están relacionadas si su diferencia (término a término) es una sucesión cuyo límite es cero. El conjunto cociente mediante esta relación de equivalencia es precisamente el conjunto de los números reales, una vez que se definan las operaciones y el orden.

Construcción de $\mathbb{R}$ por cortaduras de Dedekind

Para entender esta construcción vamos a hacer antes algunas consideraciones sobre $\mathbb{R}$. Sea a un número real, que puede ser racional o no. Sean en $\mathbb{R}$ los intervalos

$$(-\infty, a] \qquad \text{y} \qquad (a, +\infty)$$

cuya unión es $\mathbb{R}$ y cuya intersección es vacía. Definimos los subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = (-\infty, a] \cap \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad B = (a, +\infty) \cap \mathbb{Q}$$

Por así decir, el número real a, sea racional o no lo sea, nos ha permitido partir, o "cortar" $\mathbb{Q}$ en dos conjuntos, el conjunto de la izquierda A y el conjunto de la derecha B que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$.
2. Ambos conjuntos A y B son no vacíos.
3. Todo elemento de A es estrictamente inferior a todo elemento de B.
4. B no tiene elemento mínimo.

Una partición de $\mathbb{Q}$ que satisface las propiedades anteriores se denomina **cortadura de Dedekind**. Se puede observar que una cortadura está determinada si se conoce uno de los dos conjuntos, A o B, pues el otro es el complementario (en $\mathbb{Q}$). Si nos quedamos con los conjuntos de la derecha tendríamos:

Definición 6.23 Una **cortadura de Dedekind** es un subconjunto B de $\mathbb{Q}$ que verifica:

1. El conjunto B y su complementario $\mathbb{Q} \setminus B$ son no vacíos.
2. Si $b \in B$, $c \in \mathbb{Q}$ y $b \leqslant c$ entonces $c \in B$.
3. B no tiene elemento mínimo.

Por definición, un **número real** es una cortadura de Dedekind. El conjunto de las cortaduras de Dedekind se denota por $\mathbb{R}$.

El proceso es análogo si se hiciera con los conjuntos de la izquierda.
Cualquier número racional β define una cortadura de Dedekind. Basta tomar $B = (\beta, +\infty)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \beta\}$ y a éstas se les denomina cortaduras racionales. Hay cortaduras que no son racionales, por ejemplo, si $B' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ y } x^2 > 2\}$ entonces B' satisface las tres propiedades de la definición anterior. En particular, la demostración de la última propiedad se deduce de que si B' tuviera un mínimo en $\mathbb{Q}$, el conjunto A del ejemplo 6.7 tendría supremo. Luego B es una cortadura y además no es racional.
Veamos como se define el orden y las operaciones en el conjunto de las cortaduras de Dedekind.

Orden en $\mathbb{R}$

Sean B y B' dos cortaduras. Se define el orden mediante la inclusión de conjuntos:

$$\boxed{B \leqslant B' \iff B' \subset B}$$

Se comprueba fácilmente que es una relación de orden total en $\mathbb{R}$. Además el orden satisface el axioma del supremo, que se deja como ejercicio:

Ejercicio 6.24 Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de cortaduras de Dedekind acotado superiormente. Demuestre que el conjunto $A = \bigcap_{B\in\mathcal{C}} B$ es una cortadura tal que $A = \sup(\mathcal{C})$.

Por último, la relación de orden definida en el conjunto de cortaduras extiende el orden de $\mathbb{Q}$. Es decir, la aplicación i en la que a todo número racional β se le asocia la cortadura racional

$$i(\beta) = (\beta, +\infty)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \beta\}$$

es una aplicación inyectiva compatible con el orden, pues:

$$\beta \leqslant \beta' \Longrightarrow (\beta', +\infty)_{\mathbb{Q}} \subset (\beta, +\infty)_{\mathbb{Q}} \Longrightarrow i(\beta) \leqslant i(\beta')$$

Observaciones: Si B es una cortatura de Dedekind y $\beta \in B$ entonces $i(\beta) \subset B$ e $i(\beta) \neq B$ (que abreviaremos poniendo $i(\beta) \subsetneqq B$) , es decir, $B < i(\beta)$.
Una propiedad importante que se deduce fácilmente es que los números racionales son densos en $\mathbb{R}$, pues si B y B' son dos cortaduras tales que $B < B'$, entonces $B' \subsetneqq B$ y por tanto, existe $\beta \in B$ tal que $\beta \notin B'$. Además se puede tomar $\beta \neq \text{máx}\left(\complement_{\mathbb{Q}} B'\right)$. Así pues $B' \subsetneqq i(\beta) \subsetneqq B$, es decir $B < i(\beta) < B'$.

Suma en $\mathbb{R}$

Sean B y B' dos cortaduras. Se define la suma $B + B'$ mediante la suma de números racionales:

$$\boxed{B + B' = \{\beta + \beta' \mid \beta \in B,\ \beta' \in B'\}}$$

No es difícil establecer que $B + B'$ es una cortadura.
La aplicación $i \colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $i(\beta) = (\beta, +\infty)_{\mathbb{Q}}$ para todo $\beta \in \mathbb{Q}$ es un homomorfismo respecto de las sumas pues se verifica:

$$(\beta + \beta', +\infty)_{\mathbb{Q}} = (\beta, +\infty)_{\mathbb{Q}} + (\beta', +\infty)_{\mathbb{Q}}$$

Además, $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo conmutativo ordenado donde el elemento nulo es la cortadura $\mathbf{0} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\} = i(0)$ y el elemento opuesto de la cortadura B es la cortadura

$$-B = \{x \in \mathbb{Q} \mid i(-x) < B\} = \{-x \mid x \in \complement_{\mathbb{Q}} B \ \text{ y } \ x \neq \text{máx}\left(\complement_{\mathbb{Q}} B\right)\}$$

puesto que si $x \in B$ e $y \in -B$ entonces $i(x) \subsetneqq B$ y $B \subsetneqq i(-y)$ y en consecuencia $i(x) \subsetneqq i(-y)$. Por tanto, $-y < x$ en $\mathbb{Q}$, esto es, $x + y > 0$, que significa que $x + y$ es un elemento de la cortadura 0. Es decir, $B + (-B) \subset \mathbf{0}$.
Inversamente sea x un elemento de la cortadura 0, es decir $x > 0$. Como B y $\complement_{\mathbb{Q}} B$ son conjuntos contiguos existen y, $z \in \mathbb{Q}$ tales que $y \in B$, $z \in \complement_{\mathbb{Q}} B \setminus \{\text{máx}(\complement_{\mathbb{Q}} B)\}$ y $0 < y - z < x$. Por tanto, $-z \in -B$ y consecuentemente, $y - z \in B + (-B)$. De la propiedad 2 de la definición de cortadura y de $x > y - z$ se deduce que $x \in B + (-B)$ y en consecuencia $\mathbf{0} \subset B + (-B)$.

Producto en $\mathbb{R}$

El producto de números reales es un poco más complicado de definir y hay que hacerlo distinguiendo casos. Definimos en primer lugar el caso de cortaduras positivas.
Caso 1. B y B' son dos cortaduras tales que $\mathbf{0} \leqslant B$ y $\mathbf{0} \leqslant B'$. Se define el producto $B \cdot B'$ mediante el producto de números racionales:

$$\boxed{B \cdot B' = \{\beta\beta' \mid \beta \in B,\ \beta' \in B'\}}$$

No es difícil establecer que $B \cdot B'$ es una cortadura ($\geqslant \mathbf{0}$), que el producto es asociativo y conmutativo y que el elemento unidad es la cortadura $\mathbf{1} = i(1)$. Además si $B > 0$, se establece con mayor dificultad, que la cortadura inversa de B es la cortadura:

$$B^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in \complement_{\mathbb{Q}} B,\ x > \mathbf{0} \text{ y } x \neq \text{máx}(\complement_{\mathbb{Q}} B)\}$$

En este caso, la dificultad de la demostración de ser B^{-1} la cortadura inversa de B es la inclusión $\mathbf{1} \subset B \cdot B^{-1}$, que utiliza la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$.
Caso 2. Si B y B' son dos cortaduras tales que $B < \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} \leqslant B'$ se define:

$$B \cdot B' = -\big((-B) \cdot B'\big)$$

Caso 3. Si B y B' son dos cortaduras tales que $\mathbf{0} \leqslant B$ y $B' < \mathbf{0}$ se define:

$$B \cdot B' = -\big(B \cdot (-B')\big)$$

Caso 4. Si B y B' son dos cortaduras tales que $B < \mathbf{0}$ y $B' < \mathbf{0}$ se define:

$$B \cdot B' = \big(-B\big) \cdot \big(-B'\big)$$

Obsérvese que de la propia definición se obtiene que el producto de dos cortaduras negativas es positiva.
En este caso, una expresión para la cortadura inversa de una cortadura $B < \mathbf{0}$ es:

$$B^{-1} = -\Big((-B)^{-1}\Big)$$

Con estas dos operaciones y con la relación de orden se demuestra que el conjunto de cortaduras es un cuerpo ordenado en el que se satisface el axioma del supremo. El homorfismo inyectivo del *cuerpo* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ al cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ que sabemos que existe por ser $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ un cuerpo ordenado es precisamente la aplicación i.