Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sean A, B, C y D cuatro conjuntos cualesquiera tales que $C \subset A$ y $D \subset B$. Sea una aplicación arbitraria $f\colon A \to B$ y sea f^{-1} la relación inversa de f.
Se consideran las dos inclusiones:

i) $C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$
ii) $D \subset f\big(f^{-1}(D)\big)$

a) Las dos inclusiones son siempre verdaderas.
b) Las dos inclusiones son siempre falsas.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 2

En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se considera la siguiente relación:

$$(n, m)\, \mathcal{R}\, (p, q) \quad \text{si y sólo si} \quad (n \leqslant p) \ \wedge \ (n^2 + m^2 \leqslant p^2 + q^2)$$

a) $\mathcal{R}$ no es una relación de orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

c) $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio 3

Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario, I un ideal de A y (a) el ideal principal generado por un elemento $a \in A$. Consideramos los enunciados siguientes:

1) $I = A$ si y sólo si I contiene al elemento unidad.
2) $A = (a)$ si y sólo si a no es divisor de cero.
3) $A = (a)$ si y sólo si a es inversible.

Se tiene:

a) El enunciado de 1) es falso.
b) El enunciado de 2) es falso.
c) El enunciado de 3) es falso.

Ejercicio 4

Sean un conjunto arbitrario A y $f\colon A \to A$ cualquier aplicación inyectiva. Consideramos los enunciados siguientes:

1) f es biyectiva.
2) Si A es un conjunto finito entonces f es biyectiva.
3) Si A es un conjunto numerable entonces f es biyectiva.

Se tiene:

a) Los tres enunciados son verdaderos.
b) Sólo los enunciados de 2) y 3) son verdaderos.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 5

¿Cuántas aplicaciones estrictamente crecientes hay del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ al conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

Nota: Una aplicación $f : A \to B$ es estrictamente creciente si para todo $x, y \in A$ tales que $x < y$ se cumple $f(x) < f(y)$.

a) Coincide con el número de aplicaciones inyectivas de A a B.

b) $\binom{7}{3}$.

c) Ninguna de las otras dos opciones.

Soluciones

Ejercicio 1

La opción correcta es la c). En efecto, veamos que la inclusión de i) es siempre verdadera mientras que la inclusión de ii) puede ser falsa.
i) Para todo x, si $x \in C$ entonces $f(x) \in f(C)$. (*)
Ahora bien si $a \in A$ y $H \subset B$, $a \in f^{-1}(H)$ si y sólo si $f(a) \in H$, luego aplicando esto a $a = x$ y a $H = f(C)$ resulta que $x \in f^{-1}(f(C))$ si y sólo si $f(x) \in f(C)$. Combinando este resultado con (*), se obtiene que para todo x, si $x \in C$ entonces $x \in f^{-1}(f(C))$, es decir $C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$.
ii) Tomamos $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f\colon A \to B$ la aplicación tal que $f(1) = 3, f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1$ y sea el conjunto $D = \{1, 2\}$. En este caso $f^{-1}(D) = \{2, 3, 4, 5\}$ y $f(f^{-1}(D)) = \{1\}$ y por tanto no se verifica que $D \subset f\big(f^{-1}(D)\big)$.

Ejercicio 2

La opción correcta es la b).
Veamos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En efecto:
Reflexiva: $(n, m)\,\mathcal{R}\,(n, m)$ pues $(n \leqslant m) \ \wedge\ (n^2 + m^2 \leqslant n^2 + m^2)$.
Antisimétrica: Para todo $(n, m), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
si $(n, m)\,\mathcal{R}\,(p, q)$ y $(p, q)\,\mathcal{R}\,(n, m)$ entonces $(n \leqslant p) \ \wedge\ (n^2 + m^2 \leqslant p^2 + q^2) \ \wedge\ (p \leqslant n) \ \wedge\ (p^2 + q^2 \leqslant n^2 + m^2)$.
En consecuencia, $n = p \ \wedge\ m^2 = q^2$, y por tanto $(n, m) = (p, q)$.
Transitiva : Para todo $(n, m), (p, q), (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
si $(n, m)\,\mathcal{R}\,(p, q)$ y $(p, q)\,\mathcal{R}\,(r, s)$ entonces $(n \leqslant p) \ \wedge\ (n^2 + m^2 \leqslant p^2 + q^2) \ \wedge\ (p \leqslant r) \ \wedge\ (p^2 + q^2 \leqslant r^2 + s^2)$.
En consecuencia, $(n \leqslant r) \ \wedge\ (n^2 + m^2 \leqslant r^2 + s^2)$. Por tanto, $(n, m)\,\mathcal{R}\,(r, s)$.
El orden es parcial. En efecto, tomamos los pares $(1, 4)$ y $(2, 2)$. Se cumple que $1 \leqslant 2$ pero sin embargo no es cierto que $1^2 + 4^2 = 17$ sea menor o igual a $2^2 + 2^2 = 8$. Por tanto los pares $(1, 4)$ y $(2, 2)$ no son comparables.

Ejercicio 3

La opción correcta es la b).
El enunciado de 1) es verdadero. En efecto, si $I = A$ entonces $1 \in I$. Recíprocamente si $1 \in I$, como I es ideal de A, entonces para todo $c \in A$ se cumple que $1 \cdot c = c \in I$. Por tanto, $A \subset I$ y como de partida $I \subset A$, resulta que $A = I$.
El enunciado de 2) es falso. Por ejemplo, para $A = \mathbb{Z}$ con la suma y producto habitual, tenemos que 2 no es divisor de cero y sin embargo $(2) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$.
El enunciado de 3) es verdadero. En efecto, si $A = (a)$ entonces $1 \in (a)$, es decir, existe $c \in A$ tal que $1 = ac$. Por tanto a es inversible. Recíprocamente si a es inversible, entonces existe $c \in A$ tal que $1 = ac$, y en consecuencia $1 \in (a)$. Del enunciado de 1) se deduce que $(a) = A$.

Ejercicio 4

La opción correcta es la c).
Por el teorema 5.14, sabemos que si A es un conjunto finito toda aplicación $f\colon A \to A$ inyectiva es también sobreyectiva. Por tanto el enunciado de 2) es verdadero. Los enunciados de 1) y 3) no son verdaderos. Basta considerar la aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n^2$ que es inyectiva y no es biyectiva.

Ejercicio 5

La opción correcta es la b).
Veamos que existe una biyección H entre el conjunto $\mathcal{F}$ de aplicaciones estrictamente crecientes de A a B y el conjunto $\mathcal{B}_3$ de subconjuntos de B de tres elementos. Si $f \in \mathcal{F}$ se define $H(f) = \{f(1), f(2), f(3)\} \in \mathcal{B}_3$.
La aplicación H es sobreyectiva: Dado un subconjunto C de B , de tres elementos, se considera la aplicación tal que f de A a B tal que $f(1) = \text{mín}(C)$, $f(3) = \text{máx}(C)$ y $f(2)$ es el elemento restante de C. Por construcción, $f \in \mathcal{F}$ y $H(f) = C$.
La aplicación H es inyectiva: Sean $f, g \in \mathcal{F}$ tales que $H(f) = H(g)$. En consecuencia $\{f(1), f(2), f(3)\} = \{g(1), g(2), g(3)\}$. Teniendo en cuenta que f y g son estrictamente crecientes se tiene además que $f(1) < f(2) < f(3)$ y $g(1) < g(2) < g(3)$. Por tanto $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ y $f(3) = g(3)$.
Por tanto, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{B}_3$ tienen el mismo cardinal: $\dbinom{7}{3}$.

La opción a) no es correcta. Se puede ver directamente observando que el número de aplicaciones inyectivas de A a B es $7 \cdot 6 \cdot 5 \neq \dbinom{7}{3}$ o directamente. Por un lado, toda aplicación estrictamente creciente es inyectiva pues si $x \neq y$ entonces $x < y$ o $y < x$. Por tanto, $f(x) < f(y)$ o $f(y) < f(x)$ y en consecuencia $f(x) \neq f(y)$. Por otro lado, no toda aplicación inyectiva es estrictamente creciente. Por ejemplo, la aplicación f tal que $f(1) = 3$ $f(2) = 2$ y $f(3) = 7$. Así pues, $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ y $\mathcal{F} \neq \mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ es además un conjunto finito, no son iguales los cardinales de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{I}$.