# Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

**Segunda Prueba de Evaluación Continua.**

Sistemas Lineales y Espacios Vectoriales.
19 de diciembre de 2022

En las preguntas 1 a 4 determine cuál es la opción correcta y justifique por qué. Todas las respuestas y resultados de los ejercicios tienen que estar suficientemente justificados.

1. (1 punto) Sea $AX = B$ un sistema lineal de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas. Si el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ de dimensión $d$, entonces

   (a) Si $d \neq 0$, el sistema $AX = B$ no puede ser incompatible

   (b) Si $d = 0$, el sistema $AX = B$ puede ser compatible indeterminado.

   (c) Si $m = n$ y $d = 0$ el sistema $AX = B$ es compatible para toda matriz $B$.

2. (1 punto) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se considera el conjunto formado por los polinomios
$$1,\ (1+x),\ (1+x)^2,\ (1+x)^3$$
   Determine la opción correcta.

   (a) los planos $L(1, (1+x)^2)$ y $L(1+x, (1+x)^3)$ no tienen ninguna recta en común.

   (b) los polinomios no forman una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (c) los polinomios no forman un sistema generador de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. (1 punto) Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial $V$. Se considera el plano $P = L(v_1, v_2)$ y el espacio cociente $V/P$. Las coordenadas del vector $(v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4) + P$ de $V/P$ respecto de la base $\{(v_3 + v_4) + P,\ (v_3 - v_4) + P\}$ son
$$\text{(a) } \left(\tfrac{5}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \text{(b) } (2,3), \quad \text{(c) } \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

4. (1 punto) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto de $k > 2$ vectores no nulos que son un sistema generador de un espacio vectorial $V$.

   (a) Si $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es un sistema generador de $V$, entonces $L(v_1, \ldots, v_{k-1})$ no contiene a la recta $L(v_k)$.

   (b) Si $L(v_1, \ldots, v_{k-1})$ y $L(v_k)$ no son subespacios suplementarios en $V$, entonces $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es un sistema generador de $V$.

   (c) Si $L(v_1, \ldots, v_{k-1})$ y $L(v_k)$ son subespacios suplementarios en $V$, entonces $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ son linealmente independientes.

**Ejercicio 1**. (2.5 puntos) Discutir y resolver el sistema lineal $AX = B$ para los distintos valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{K}$, siendo
$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ a & 1 & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

**Ejercicio 2**. (3.5 puntos) Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{K}^4$:
$$U \equiv \{2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - x_4 = 0\} \ \text{ y } \ W_a = L((a+1, -a+1, a+3, 2),\ (0,0,0,1),\ (1,0,2,1))$$

(a) Estudie la dimensión del subespacio $W_a$ según el valor de $a \in \mathbb{K}$.

(b) Determine $a$ para que $U \cap W_a$ sea una recta de $\mathbb{K}^4$ y calcule unas ecuaciones implícitas de dicha recta y del subespacio suma $U + W_a$.

(c) Si $a$ es tal que $U \cap W_a$ no es una recta, determine el subespacio suma $U + W_a$.

**Soluciones**

1. Sea $AX = B$ un sistema lineal de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas. Si el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ de dimensión $d$, entonces $\mathrm{rg}(A) = n-d$ (Teorema 3.55).

   Si $d \neq 0$, entonces $\mathrm{rg}(A) < n$ por lo que el sistema $AX = B$ puede ser incompatible si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$, lo que hace (a) incorreta. Si $d = 0$, $\mathrm{rg}(A) = n$, el número de incógnitas, por lo que el sistema $AX = B$, si fuera compatible, sería determinado, lo que hace (b) incorrecta. Si $d = 0$ y $m = n$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ para toda matriz $B$, por lo que $AX = B$ siempre será compatible. Por tanto, (c) es la opción correcta.

2. El espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ tiene dimensión 4 y el conjunto formado por los 4 polinomios $\{1,\ (1+x),\ (1+x)^2,\ (1+x)^3\}$ es linealmente independiente, por lo que es una base, y por tanto un sistema generador, de $\mathbb{R}_3[x]$, lo que hace (b) y (c) incorrectas.

   los planos $U = L(1, (1+x)^2)$ y $W = L(1+x, (1+x)^3)$ no tienen ningún polinomio en común salvo el 0. Salvo el polinomio constante, 0, los polinomios de $U$ son de grado 0 o de grado 2, mientras que los de $W$ son de grado 1 o de grado 3. Luego $U \cap W = \{0\}$, es decir estos dos planos no tienen ninguna recta en común. La opción correcta es la (a).

3. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial $V$. Se considera el plano $P = L(v_1, v_2)$ y el espacio cociente $V/P$. Para calcular las coordenadas del vector $(v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4) + P$ de $V/P$ respecto de la base $\{(v_3 + v_4) + P,\ (v_3 - v_4) + P\}$, determinamos las coordenadas $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ del vector $v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4$ respecto de la base $\{v_1, v_2, v_3 + v_4, v_3 - v_4\}$ :

$$v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3(v_3 + v_4) + a_4(v_3 - v_4)$$

   Se obtienen los valores: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = \frac{5}{2},\ a_4 = -\frac{1}{2}$. Las coordenadas pedidas son $(a_3, a_4)$, luego la opción correcta es la (a).

4. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto de $k > 2$ vectores no nulos que son un sistema generador de un espacio vectorial $V$.

   Si $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es un sistema generador de $V$, es decir, $V = L(v_1, \ldots, v_{k-1})$, entonces todo vector pertenece a $L(v_1, \ldots, v_{k-1})$, que en particular contiene a la recta $L(v_k)$. Por tanto, (a) es falsa.

   Si $U = L(v_1, \ldots, v_{k-1})$ y $W = L(v_k)$ no son subespacios suplementarios en $V$, entonces $V = U + W$ pero la suma no es directa, es decir $U \cap W \neq \{0\}$. Como $U \cap W$ tiene dimensión al menos 1, y $W$ tiene dimensión 1, la única posibilidad es $U \cap W = W$, es decir $W$ es una recta contenida en $U$. Es decir, $v_k$ pertenece a $U$, que es equivalente a decir que $v_k$ es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_{k-1}$, de donde $V = L(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k) = L(v_1, \ldots, v_{k-1})$, es decir $v_1, \ldots, v_{k-1}$ es un sistema generador de $V$.

   Si $U$ y $W$ son subespacios suplementarios en $V$, entonces la suma $V = U + W$ es directa, es dercir $v_k \notin U$, pero eso no implica que $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ sean linealmente independientes. Este conjunto es un sistema generador de $U$ pero no necesariamente una base. Para que esto ocurra tiene que ser $\dim V < k$, para que $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ sea un sistema generador, peno no una base de $V$.

**Ejercicio 1**. Transformamos el sistema en escalonado para discutir y resolver, después, los casos compatibles

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ a & 1 & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b & b-1 \end{array}\right) = (A'|B')$$

(1) Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, el sistema es compatible determinado ya que $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 3$. La solución es

$$\left(\frac{2+b}{a},\ -1,\ -1\right)$$

(2) Si $a \neq 0$ y $b = 1$, la matriz del sistema equivalente es

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado ya que $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 1$. Se tiene una única ecuación: $ax + y + z = 1$ y la solución general es

$$\left(\frac{1-\lambda-\mu}{a},\ \lambda,\ \mu\right) \quad \text{con} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

(3) Si $a = 0$ y $b = 1$, la matriz del sistema es

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado ya que $rg(A') = \mathrm{rg}(A'|B') = 1$ y la solución general es

$$(\lambda,\ 1-\mu,\ \mu) \quad \text{con} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

(4) Si $a = 0$ y $b \neq 1$, el sistema es equivalente a

$$(A'|B') \xrightarrow[\substack{f_2 \to \frac{1}{1-b} f_2 \\ f_3 \to \frac{1}{1-b} f_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = (A''|B'')$$

Podemos continuar hasta escalonar la matriz o razonar del siguiente modo: de la segunda y tercera ecuaciones se deduce que $y = z = -1$ y sustituyendo estos valores en la primera ecuación se llega a

$$-b - 1 = 1 \Rightarrow b = -2$$

Entonces se tienen los casos:

(4.1) Si $a = 0$ y $b = -2$, el sistema es compatible indeterminado pues $\mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A''|B'') = 2$ y la solución general es

$$(\lambda,\ -1,\ -1) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

(4.2) $a = 0$, $b \neq 1$ y $b \neq -2$, entonces el sistema es incompatible. En este caso se tiene que $\mathrm{rg}(A'') = 2 < \mathrm{rg}(A''|B'') = 3$.

**Ejercicio 2**. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{K}^4$:

$U \equiv \{2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$ y $W_a = L((a+1, -a+1, a+3, 2),\ (0,0,0,1),\ (1,0,2,1))$

(a) La dimensión del subespacio $W_a$ es igual al rango del conjunto de vectores que son un sistema generador: $w_1 = (1,0,2,1)$, $w_2 = (0,0,0,1)$, $w_3 = (a+1, -a+1, a+3, 2)$; y que a la vista de los vectores puede ser igual a 2 o 3.

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w_2 \\ a+1 & -a+1 & a+3 & 2 & w_3 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w_2 \\ 0 & -a+1 & -a+1 & -a+1 & w_3 - (a+1)w_1 \end{array}\right)$$

Entonces $\dim W_a = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \\ 3 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$

(b) Para estudiar el subespacio intersección $U \cap W_a$, hacemos una primera inspección y comprobamos que $w_1 \in U$, $w_2 \notin U$ y $w_3 \in U$. Teniendo en cuenta que $w_1$ y $w_3$ son proporcionales si $a = 1$, podemos afirmar que $U \cap W_a$ contiene siempre a la recta $L(w_1)$, y

- si $a \neq 1$, entonces $\dim(W_a) = 3$ y, como $U = L(w_1, w_3)$ es un plano contenido en $W_a$, entonces

$$U \cap W_a = U$$

- si $a = 1$, entonces $\dim(W_a) = 2$ y $W_a = L(w_1, w_2)$. Además, como $\dim U = 2$ y $w_2 \notin U$, entonces

$$U \cap W_a = L(w_1)$$

Así, $a = 1$ es el único valor de $a$ para el que $U \cap W_a$ es una recta.

En los dos casos podemos determinar la dimensión del subespacio suma:

$$\dim(U + W_a) = \dim(U) + \dim(W_a) - \dim(U \cap W_a) = \begin{cases} 2+2-1 = 3 & \text{si } a = 1 \\ 2+3-2 = 3 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

El subespacio $U + W_a$ es un hiperplano para todo $a$.

Ecuaciones implícitas en el caso $a = 1$:

Intersección: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \cap W_1 = L((1,0,2,1))$ si y sólo si $\mathrm{rg}\{(1,0,2,1), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 1$ de donde se obtienen las ecuaciones.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \\ 2 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \\ x_4 - x_1 = 0 \end{cases}$$

Suma: un sistema generador del subespacio suma $U + W_1$ se consigue uniendo una base de $U$: $\{u_1 = w_1 = (1,0,2,1),\ u_2 = (1,-1,1,0)\}$ y una de $W_1$: $\{w_1, w_2\}$.

$$U + W_1 = L(w_1, w_2, u_1, u_2) = L(w_1, w_2, u_2)$$

Como $\dim U + W_1 = 3$, los tres vectores son, además, una base. Unas ecuaciones implícitas de este subespacio se obtienen de la condición $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U + W_1$ si y sólo si $\mathrm{rg}\{w_1, w_2, u_2, (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 3$. Tomando la matriz de coordenadas por columnas (o por filas) se tiene que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 \\ 2 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{si y sólo si} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 \\ 2 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

de donde se obtiene la ecuación: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(c) El subespacio $U \cap W_a$ no es una recta si y sólo si $a \neq 1$ y, en tal caso, $U$ es un plano contenido en $W_a$, que es un hiperplano; es decir $U \cap W_a = U$. Por tanto, el subespacio suma $U + W_a$, que es el menor subespacio vectorial que contiene a $U$ y a $W_a$, es el propio $W_a$: es decir $U + W_a = W_a$.