Índice general

Tema 2

Matrices

2.1. Matrices

Definición 2.1 (Matriz)**.** Una **matriz real** de **tamaño** $m \times n$ es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} A: & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (i,j) & \rightsquigarrow & a_{ij} \end{array}$$

donde $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Escribiremos

$$A = (a_{ij})$$

para denotar una matriz, o bien $A = (a_{ij})_{m \times n}$ cuando queramos especificar el tamaño de ésta.

Representamos A en forma de tabla, con m filas y n columnas. El elemento a_{ij} se encuentra en el lugar en que se cruzan la fila i y la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \mathbf{a_{ij}} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los escalares a_{ij} se denominan **elementos** o entradas de la matriz A. El conjunto de matrices reales de tamaño $m \times n$ se representa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, o simplemente por $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Denotaremos por $A_{i\bullet}$ a la fila i-ésima de la matriz A y por $A_{\bullet j}$ a la columna j-ésima, es decir,

$$A_{i\bullet} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}); \quad A_{\bullet j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}).$$

Las m filas de A constituyen un sistema de m vectores de $\mathbb{R}^n$, mientras que las n columnas son un sistema de n vectores de $\mathbb{R}^m$.

2.1.1. Tipos de matrices

Definición 2.2. Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, llamamos **matriz traspuesta** de A y la denotamos por A^t, a la matriz de tamaño $n \times m$ que resulta de intercambiar en A las filas por las columnas.

Por ejemplo, la matriz traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.3. La sucesión de elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$, donde $k = \min\{m, n\}$, recibe el nombre de **diagonal principal** de la matriz A.

La diagonal principal de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

anterior está formada por los elementos $-2,\ 3,\ 7$.

Definición 2.4.

- Una **matriz fila** es una matriz de tamaño $1 \times n$.
- Una **matriz columna** es una matriz de tamaño $m \times 1$.

La matriz F es una matriz fila; la matriz C es una matriz columna.

$$F = (1 \quad -2 \quad 4), \qquad C = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.5. Una **matriz cuadrada** es una matriz de tamaño $n \times n$, es decir, tiene el mismo número de filas que de columnas. Para remarcar su carácter nos referiremos a esta matriz como **matriz cuadrada de tamaño** n.

Al conjunto de matrices cuadradas reales de tamaño n lo denotaremos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o simplemente por $\mathcal{M}_n$.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de tamaño 3.

Definición 2.6.

- Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para cada $(i, j) \in I \times J$, es decir, aquella que es igual a su traspuesta.

- Una **matriz antisimétrica** es una matriz cuadrada tal que $a_{ij} = -a_{ji}$ para cada par $(i,j) \in I \times J$, es decir, aquella que es igual a la opuesta de su traspuesta. Como consecuencia, los elementos de su diagonal principal son todos nulos.

De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A es simétrica y B es antisimétrica.

Definición 2.7. Una **matriz diagonal** es aquella en la que todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal valen cero.

Definición 2.8. Una **matriz escalar** es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal, pero no es escalar. Lo sería si los tres elementos de la diagonal principal fuesen iguales.

Definición 2.9. Llamamos **matriz identidad** de tamaño n y la denotaremos por I_n, a la matriz cuadrada escalar de tamaño n cuyos elementos de la diagonal principal valen 1.

Definición 2.10. Llamamos **matriz nula** a la matriz cuyos elementos son todos iguales a cero. A la matriz nula de tamaño $m \times n$ la denotamos por $O_{m\times n}$.

Las siguientes matrices son la matriz identidad de orden 3 y la matriz nula de tamaño 2×3.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.11.

- Una **matriz triangular inferior** es aquella en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.
- Una **matriz triangular superior** es aquella en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

es triangular inferior.

Definición 2.12. Si tomamos subconjuntos $I_0 \subset I$ y $J_0 \subset J$, la matriz que resulta al suprimir en A las filas y columnas cuyos índices no aparecen en estos subconjuntos se denomina **submatriz** de A correspondiente a $I_0 \times J_0$.

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

la submatriz que resulta de tomar las filas 1, 2 y 4 y las columnas 1, 3 y 4 es

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.2. Operaciones con Matrices

Pueden definirse las siguientes operaciones con matrices:

Definición 2.13 (Suma de matrices)**.** Dadas matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define la **suma** de las matrices A y B como la matriz $A + B$ que en el lugar (i, j) tiene el elemento $a_{ij} + b_{ij}$, es decir,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma

La suma de matrices verifica en $\mathcal{M}_{m\times n}$ las propiedades

- **Asociativa**: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Existencia de elemento neutro**: La matriz nula $O_{m\times n} = O \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es tal que $O + A = A + O = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
- **Existencia de elemento opuesto**: Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, la matriz $-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es tal que $A + (-A) = (-A) + A = O$
- **Conmutativa**: $A + B = B + A$.

Las propiedades de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}$ se resumen diciendo que $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ tiene estructura de **grupo abeliano** o conmutativo.

Definición 2.14 (Producto por un escalar)**.** Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el **producto de λ por A** como la matriz $\lambda \cdot A$ que en el lugar (i, j) tiene el elemento $\lambda \cdot a_{ij}$, es decir,

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}.$$

Por ejemplo,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 0 \\ -12 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto por un escalar

Esta operación verifica en $\mathcal{M}_{m\times n}$ las propiedades

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A.$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \qquad 1 \cdot A = A.$

Las propiedades de la suma de matrices, junto con las del producto por un escalar que acabamos de mencionar, se resumen diciendo que $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ tiene estructura de **espacio vectorial real**.

Ejemplos 2.1.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

la matriz $A - 2B + 3C$ vale

$$A - 2B + 3C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

2. La matriz A que verifica la igualdad

$$3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} + A$$

es

$$A = 3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 18 \\ 6 & 24 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 14 \\ 8 & 17 & 9 \end{pmatrix}$$

Definición 2.15 (Producto de matrices)**.** Dadas las matrices $A = (a_{ir}) \in \mathcal{M}_{m\times t}$ y $B = (b_{sj}) \in \mathcal{M}_{t\times n}$, se define el **producto** de A por B como la matriz $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} b_{kj}.$$

El elemento c_{ij} coincide con el producto escalar ordinario de los vectores $A_{i\bullet}$ y $B_{\bullet j}$ de $\mathbb{R}^t$.

Nótese que para que el producto pueda hacerse, el número de columnas de la primera matriz ha de coincidir con el número de filas de la segunda.

Para hacer el producto de dos matrices puede ser útil el siguiente esquema:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{it} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & b_{tj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.2.

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Como caso curioso, haz el producto
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & -8 & 4 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

El producto de matrices verifica las propiedades

- **Asociativa**: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ para matrices adecuadas.
- **Distributiva respecto de la suma**: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Además, las matrices identidad $I_m \in \mathcal{M}_n$ e $I_n \in \mathcal{M}_n$ son tales que $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Estas propiedades ponen de manifiesto que el producto de matrices es una operación interna en $\mathcal{M}_n$, siendo $I_n \in \mathcal{M}_n$ el elemento neutro.

Cabe advertir que en general el producto de dos matrices **no es conmutativo**.

También, que en general no existe el elemento inverso de una matriz cualquiera $A \in \mathcal{M}_n$.

2.3. Rango de una matriz. Cálculo del rango

Diremos que una fila (o columna) L de una matriz A **depende linealmente** de sus paralelas $L_1, L_2, \cdots, L_n$, si existen números reales $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que
$$L = a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3 + \cdots + a_nL_n$$

Si una fila (o columna) depende linealmente de una sola fila (o columna), diremos que ambas filas (o columnas) son **proporcionales**, pues lo son sus elementos.

Ejemplo 2.3. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
puede observarse que la fila F_2 es proporcional a la fila F_1 (en concreto $F_2 = 3F_1$); igualmente, los elementos de la columna C_3 son suma de los correspondientes de las columnas C_1 y C_2, es decir, $C_3 = C_1 + C_2$.

Un conjunto de filas (o columnas) de una matriz A es **linealmente dependiente** cuando al menos una de ellas depende linealmente de las restantes. En caso contrario se dice que son **linealmente independientes**.

En el ejemplo anterior las tres primeras columnas de la matriz A son linealmente dependientes pues, recordemos, la tercera columna se obtiene como suma de las dos primeras.

Puede demostrarse que, en cualquier matriz, el número máximo de filas linealmente independientes coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes. A ese número común le llamaremos **rango** de la matriz A y lo representaremos por $\mathrm{rang}(A)$. Este hecho justifica la siguiente definición.

Definición 2.16 (Rango de una matriz)**.** Se llama **rango de una matriz** A al número máximo de filas linealmente independientes de A, que coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes de A.

En general, no es es fácil apreciar a simple vista si las filas o las columnas de una matriz son o no linealmente independientes. Por ejemplo, en la matriz anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

C_4 debe depender linealmente de C_1, C_2 y C_3, aunque no lo observemos "a simple vista".

Sin embargo, el rango de la siguiente matriz es más fácil de hallar.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De hecho, $\mathrm{rang}(B) = 4$, pues las cuatro filas de B son linealmente independientes. En efecto:

- $F_3 = (0,0,1,7)$ y $F_4 = (0,0,0,1)$ son linealmente independientes, pues no son proporcionales.
- También lo son $F_2 = (0,1,2,3)$, $F_3 = (0,0,1,7)$ y $F_4 = (0,0,0,1)$, ya que ninguna operación del tipo $mF_3 + nF_4$ dará como resultado F_2 (pues el elemento igual a 1 de F_2 no se puede obtener operando con 0).
- Por una razón similar son independientes las filas $F_1 = (1,3,5,1)$, $F_2 = (0,1,2,3)$, $F_3 = (0,0,1,7)$ y $F_4 = (0,0,0,1)$, pues no se puede obtener F_1 como combinación lineal de F_2, F_3 y F_4.

El **método de Gauss** para el cálculo del rango de una matriz se basa en transformarla en otra de aspecto semejante a la del ejemplo anterior.

Esto se hace por medio de las **operaciones elementales**. Pueden aplicarse a las filas o a las columnas; las enunciamos para las filas y consisten en:

- Intercambiar de lugar dos filas, $(F_i \leftrightarrow F_j)$.
- Sustituir una fila F_i por el resultado de multiplicar todos los elementos de dicha fila por un escalar $\lambda \neq 0$, (λF_i).
- Sustituir una fila F_i por el resultado de sumarle el producto de un escalar arbitrario λ por otra fila F_j distinta, $(F_i + \lambda F_j)$.

Como queda dicho, pueden definirse idénticas operaciones elementales para las columnas de la matriz para calcular el rango trabajando con éstas.

Así, dada una matriz A podemos encontrar mediante operaciones elementales, ya sean por filas o por columnas (o combinando ambas), una matriz triangular T de igual rango que A, que será precisamente el número de filas no nulas de T.

Ejemplos 2.4.

1. Hallemos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}.$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 + (1/2)F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\text{rang}(A) = 2$.

2. Hallar el rango de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Solución: Hemos de tener en cuenta que

La fila tercera es suma de la primera y de la segunda.

La fila cuarta es suma de la segunda y la tercera, es decir, de la segunda y el doble de la primera.

Las filas primera y segunda no son proporcionales, luego son linealmente independientes.

Por tanto, $\text{rang}(B) = 2$.

3. Calculemos el rango de $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$C \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1\\F_4+F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14\\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3-7F_2\\F_4+3F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28\\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}F_3\\ \frac{1}{10}F_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -4 & 5 & -7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+4F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\operatorname{rang}(C) = 4$.

2.4. Matrices regulares

Definición 2.17 (Matriz regular)**.** Una matriz cuadrada A de tamaño n se dice **regular, invertible** o **no singular**, si existe una matriz cuadrada B de tamaño n de modo que

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

Definición 2.18 (Matriz inversa)**.** Si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz regular, existe una única matriz $B \in \mathcal{M}_n$ que verifica la igualdad anterior. Esta única matriz se denomina **inversa** de A, y se representa por A^{-1}. Por tanto,

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A.$$

Algunas propiedades importantes son:

- Si A y B son regulares, entonces $A \cdot B$ es también regular y se verifica que

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

- La inversa A^{-1} de una matriz regular A es también una matriz regular con inversa precisamente A, ya que

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada real y $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sus n filas, que como sabemos son vectores de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que las operaciones elementales por filas consisten en

- Intercambiar de lugar dos filas F_i y F_j ($F_i \leftrightarrow F_j$).
- Multiplicar todos los elementos de una fila F_i por un escalar λ no nulo (λF_i).
- Sumar a una fila F_i el resultado de multiplicar otra fila F_j, $j \neq i$, por un escalar arbitrario λ ($F_i + \lambda F_j$).

Sea $E_1(A)$ la matriz resultante de hacer una operación elemental E_1 en A, y $E_1(I_n)$ la matriz resultante de hacer la misma operación en la matriz identidad I_n.

De manera similar, $E_2E_1(A)$ y $E_2E_1(I_n)$ serán las matrices resultantes de hacer en $E_1(A)$ y $E_1(I_n)$ otra operación elemental E_2.

Si $E_1, E_2, \ldots, E_m$ es una sucesión de m operaciones elementales que aplicadas sucesivamente sobre la matriz A dan lugar a la matriz identidad I_n, el resultado de aplicar la misma sucesión de operaciones sobre la matriz identidad I_n es precisamente la matriz A^{-1}.

El esquema para el cálculo de la matriz inversa será entonces:

$$\begin{array}{rcc} (A|I_n) & \xrightarrow{E_1} & (E_1(A)|E_1(I_n)) \\ & \xrightarrow{E_2} & (E_2E_1(A)|E_2E_1(I_n)) \\ & & \cdots \\ & \xrightarrow{E_m} & (I_n|A^{-1}). \end{array}$$

Para calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

comenzamos formando la matriz $(A|I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Entonces

$$(A|I_3) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 + 3F_3 \\ F_1 - 2F_3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1/2)F_2 \\ -F_3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. Determinante de una matriz cuadrada

Definimos el determinante de la matriz cuadrada de tamaño dos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

como el número real

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo 2.5. Se verifica que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - (-2) \cdot 4 = 1.$$

Definimos el determinante de la matriz cuadrada de tamaño tres

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$$

como el número real

$$\begin{aligned} \det(A) &= |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}). \end{aligned}$$

Como regla nemotécnica, si se añaden a debajo de la matriz A sus dos primeras filas, los términos del primer paréntesis son los productos de las diagonales **hacia abajo**, mientras que los del otro son los productos de las diagonales **hacia arriba**.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Diagonales hacia abajo. Diagonales hacia arriba.

Ejemplo 2.6.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & -7 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 1 \cdot (-7) + 0 \cdot (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot (-5)]$$

$$-[2 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-2) \cdot (-5)] = -23 + 2 = -21.$$

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, llamamos **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de la submatriz de A que resulta de suprimir la fila i y la columna j.

Al menor complementario de a_{ij} lo denotaremos por α_{ij}.

Llamaremos **adjunto** del elemento a_{ij} y lo denotaremos por A_{ij}, al número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}.$$

Ejemplo 2.7. En la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ el menor complementario y el adjunto del elemento $a_{32} = -5$ son, respectivamente

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad \text{y} \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\alpha_{32} = 4$$

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de tamaño n, podemos obtener su determinante desarrollando por los elementos de la fila i-ésima (o la columna j-ésima) del siguiente modo:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

De esta manera, el problema de calcular un determinante de orden n se reduce al de calcular n determinantes de orden $n-1$.

De las expresiones anteriores se deduce la conveniencia de desarrollar los determinantes por filas o columnas con el mayor número de ceros posibles.

Ejemplo 2.8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

hallamos $|A|$ desarrollando por los elementos de la tercera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot 62 - 3 \cdot (-94) = 34 \end{aligned}$$

2.6. Propiedades de los determinantes

Enunciaremos algunas interesantes propiedades de los determinantes de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$. Aunque las propiedades las enunciamos para las columnas, podría hacerse un enunciado similar para las filas.

En las propiedades que requieran desarrollo, por comodidad, lo hacemos para matrices de orden 3.

- $|A| = |A^t|$.
- Si B es la matriz que resulta de intercambiar dos columnas de A, entonces $|B| = -|A|$.
- Si $A(\lambda)$ es la matriz que resulta de multiplicar todos los elementos de una columna por un escalar real λ, entonces $|A(\lambda)| = \lambda \cdot |A|$.
- Si una columna de A es combinación lineal del resto de columnas, entonces su determinante vale cero. En particular,
  - Si A tiene una columna de ceros, entonces $|A| = 0$.
  - Si A tiene dos columnas iguales, entonces $|A| = 0$.
  - Si A tiene dos columnas proporcionales, entonces $|A| = 0$.

- Si expresamos la columna j-ésima de A, (por ejemplo, la segunda, (a_{12}, a_{22}, a_{32})), como suma de dos vectores cualesquiera (b_{12}, b_{22}, b_{32}) y (c_{12}, c_{22}, c_{32}) de $\mathbb{R}^3$, el determinante se expresa como suma de dos, de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}+c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22}+c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32}+c_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- El determinante de $A = (a_{ij})$ es igual al determinante de la matriz que resulta de sustituir la fila i-ésima $A_{i\bullet}$ por el resultado de sumarle a dicha fila el producto de un escalar λ cualquiera por otra fila $A_{h\bullet}$ con $h \neq i$. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Gracias a esta propiedad es posible transformar cualquier matriz cuadrada en otra cuyo determinante valga lo mismo y que tenga una columna con todos los elementos nulos menos uno. Calculamos así el determinante de esta matriz desarrollándolo por los elementos de la columna en cuestión.

De hecho, es posible encontrar una matriz triangular superior (o inferior) cuyo determinante sea el mismo que el de la matriz original.

- El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- Dadas dos matrices cuadradas A y B, se verifica que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- Una matriz cuadrada A es invertible si, y sólo si, su determinante es no nulo. Además, $|A^{-1}| = 1/|A|$.
- El rango de una matriz (no necesariamente cuadrada) coincide con el tamaño de su mayor submatriz cuadrada cuyo determinante es no nulo.

Ejemplos 2.9.

1. Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Solución: Basta observar que si a la tercera fila le sumamos la segunda, resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix}$$

y el determinante vale 0, pues tiene la primera y la tercera filas proporcionales.

2. Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Solución: Se comprueba que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10-9 = 1$$

3. Calcula el valor de

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

Solución: Si sumamos a la primera columna todas las demás se obtiene

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+b & a & a & a \\ 4a+b & a+b & a & a \\ 4a+b & a & a+b & a \\ 4a+b & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (4a+b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+b & a & a \\ 1 & a & a+b & a \\ 1 & a & a & a+b \end{vmatrix} = (4a+b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b^3(4a+b)$$

2.7. Aplicación de los determinantes al cálculo de la inversa

Recordemos la definición de adjunto A_{ij} del elemento a_{ij} de una matriz. Llamaremos **matriz adjunta** de A a la matriz cuadrada de tamaño n

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pues bien, si A es una matriz cuadrada invertible (es decir, tal que $|A| \neq 0$), se verifica que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, [\mathrm{Adj}(A)]^t.$$

Ejemplo 2.10. Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Como $|A| = 2 \neq 0$, A es una matriz invertible.

En primer lugar calculamos la matriz adjunta de A. Los adjuntos son

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -2, & A_{12} = 2, & A_{13} = -2, \\ A_{21} = -4, & A_{22} = 3, & A_{23} = -2, \\ A_{31} = 0, & A_{32} = 1, & A_{33} = 0. \end{array}$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7.1. Rango de una matriz utilizando determinantes

Aunque ya conocemos un método para calcular el rango de una matriz, hay otro procedimiento para hallar dicho número, basado en el cálculo de determinantes.

Recordemos que se llama **rango de una matriz** al número máximo de vectores fila (o de vectores columna, puesto que coinciden) linealmente independientes.

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$; si tomamos r filas $i_1, i_2, \ldots, i_r$ y r columnas $j_1, j_2, \ldots, j_r$ cualesquiera de A, siendo $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_r < n$, $0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_r < m$, llamaremos **menor** de tamaño r de A al determinante

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix}.$$

No es difícil comprobar que **el determinante de una matriz cuadrada de tamaño n es distinto de cero si, y sólo si, las filas (o columnas) que lo forman son n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes**.

De este resultado se deduce que **las filas (y las columnas) de una matriz A que intervienen en un menor M de tamaño r distinto de cero son linealmente independientes**.

A partir de este resultado se puede demostrar el siguiente

Teorema 2.1. *La condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ tenga rango r, es que exista un menor de tamaño r extraído de A y distinto de cero y que todos los menores de tamaño $r+1$ sean nulos.*

De estos resultados se sigue una **regla práctica para el cálculo del rango**, utilizando menores.

- Se observa si, a simple vista, hay filas o columnas que sean combinación lineal de las demás. En caso afirmativo se suprimen.

  Si la matriz dada tiene todos los elementos nulos entonces $A = O$ y $\text{rang}(A) = 0$; en caso contrario tendrá algún elemento no nulo y $\text{rang}(A) \geq 1$.

- Se busca un menor de tamaño 2 no nulo. Si no existe, entonces $\text{rang}(A) = 1$; si existe, entonces $\text{rang}(A) \geq 2$.

- Si $\text{rang}(A) \geq 2$ se añaden al menor de tamaño 2 no nulo las filas y columnas restantes, para formar menores de tamaño 3. Si todos esos menores son nulos, $\text{rang}(A) = 2$; si no, $\text{rang}(A) \geq 3$.

- Si $\text{rang}(A) \geq 3$, se sigue este proceso (buscando todos los menores de orden tres, luego los de orden cuatro, ...) las veces que haga falta, hasta agotar las filas y columnas.

Ejemplo 2.11. Halla el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de la matriz es como mínimo 2.

Añadiendo a este menor de tamaño dos el resto de filas y columnas, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esos tres determinantes nulos significan que la tercera fila de la matriz A es combinación lineal de las dos primeras; en caso contrario, al menos uno de los tres debería haber sido no nulo.

Además,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Por tanto, el rango es al menos 3.

Como ya hemos agotado las filas y columnas de la matriz A y no podemos formar menores de tamaño cuatro para ver si son o no nulos, se deduce que $\text{rang}(A) = 3$.

2.8. Ejercicios

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

   halla las matrices

$$B \cdot A, \qquad A \cdot (B + C), \qquad A \cdot (2B - 3C).$$

   ¿Es posible hallar $A + C$ o $B \cdot C$? ¿Por qué?

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   halla la matriz $M = A^5 + B^3 - C$.

3. Comprueba que las identidades algebraicas
$$(A+B)^2 = A^2 + 2A\cdot B + B^2, \qquad (A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2,$$
no son ciertas en general para matrices cuadradas cualesquiera, utilizando para ello las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
¿Cuál es la razón por la que dichas identidades no son ciertas? Modifica el segundo miembro de ambas identidades de manera que el resultado sea cierto para cualesquiera A y B matrices cuadradas.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestra las siguientes implicaciones, siendo O la matriz nula e I la matriz identidad, ambas de orden n.
   a) Si $A^2 = 0$ entonces $(I+A)^5 = I + 5A$.
   b) Si $A^2 = I$ entonces $(I+A)^5 = 16(I+A)$.
   c) Si $A^2 = A$ entonces $(I+A)^4 \cdot A = O$.

5. Halla las matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que $X^2 - X = O$.

6. Dadas las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$
   a) Comprueba si se verifica alguna de las igualdades
   $$A\cdot B = B\cdot A, \qquad A\cdot C = C\cdot A.$$
   b) Comprueba si alguna de las matrices dadas verifica la ecuación matricial
   $$X^2 - 6X + I = O$$
   c) ¿Es $P = 6I - A$ la matriz inversa de A?
   d) Prueba que las matrices $M = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $N = P\cdot M\cdot A$ son soluciones de la ecuación del apartado *b*).

7. Dadas las matrices M_1 tal que $M_1^2 = M_1$, $M_2 = I - M_1$ y $M_3 = I - M_2$, prueba que
$$M_1^2 \cdot M_2^2 \cdot M_3^2 = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = (M_1\cdot M_2\cdot M_3)^2 = O$$

8. Prueba que si dos matrices A y B son tales que el producto es regular (es decir, existe $(A\cdot B)^{-1}$), entonces A y B son regulares, y se verifica que $A^{-1} = B\cdot(A\cdot B)^{-1}$, $B^{-1} = (A\cdot B)^{-1}\cdot A$.

9. Halla, según los valores que tomen los parámetros, los rangos de las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}; \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & a \\ 3 & 3 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Se considera el conjunto de matrices de la forma

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix},$$

con a, b, c números racionales. Se designará este conjunto por $N_3(\mathbb{Q})$. Se pide:

a) Demostrar que toda matriz de $N_3(\mathbb{Q})$ se escribe de manera única en la forma

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK,$$

donde I es la matriz identidad de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ y las matrices J y K son independientes de a, b, c.

b) Demostrar que $N_3(\mathbb{Q})$ con las operaciones usuales de suma de matrices y producto por un escalar, es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$. Hallar la dimensión de este subespacio.

c) Hallar los productos J^2, $J \cdot K$, $K \cdot J$, K^2 y comprobar que $J^3 = J + I$.

11. Calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \dots & \beta & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \end{vmatrix}$$

12. Halla $|A|$ y A^{-1} si existe, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

13. Halla, si existe, la inversa de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Determina para qué valores de a son invertibles las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & a \end{pmatrix}$$