Índice general

Tema 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas** es un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (S)$$

En el sistema anterior, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los **coeficientes** del sistema, $b_i \in \mathbb{R}$ los **términos independientes** y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las **incógnitas**.

Si $b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, el sistema se llama **homogéneo**.

El sistema (S) se puede escribir también en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, más brevemente, como

$$A \cdot X = B.$$

La matriz A se llama **matriz de los coeficientes** del sistema.

Diremos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ es una **solución** del sistema (S), si al sustituir cada incógnita x_i por el correspondiente número real α_i se obtienen en (S) m identidades, es decir, si

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\alpha_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}\alpha_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Al conjunto de todas las soluciones lo llamaremos **solución del sistema**.

Llamamos **discusión** de un sistema al proceso consistente en analizar la existencia y unicidad de soluciones, determinar la estructura de la solución cuando exista y obtener métodos para calcularla.

Definición 3.1. Dados los sistemas (S) y (S') con el mismo número de incógnitas, se dice que son **equivalentes** si, y sólo si, toda solución de (S) lo es también de (S') y recíprocamente, o bien si ambos carecen de soluciones.

Para que dos sistemas sean equivalentes es necesario que tengan el mismo número de incógnitas, pero no es preciso que tengan el mismo número de ecuaciones.

Dado un sistema (S), se dice que una ecuación $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = b$ es **combinación lineal** de las ecuaciones del sistema si existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tales que se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} a_k &= \lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \cdots + \lambda_m a_{mk}, \quad \forall k,\ 1 \leq k \leq n, \\ b &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m. \end{aligned}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones, generalmente transformaremos dicho sistema en otro, equivalente al inicial, pero en el que la solución sea fácil de obtener.

El siguiente teorema indica qué transformaciones pueden hacerse en un sistema para obtener otro equivalente al inicial.

Teorema 3.1. *Dado un sistema (S) con m ecuaciones $E_1, E_2, \ldots, E_m$ y n incógnitas, se pueden obtener sistemas equivalentes a (S) efectuando las siguientes* **transformaciones elementales***:*

- *Permutar el orden de dos ecuaciones E_i y E_j, ($E_i \leftrightarrow E_j$).*
- *Multiplicar ambos miembros de una ecuación E_i por un número real $\lambda \neq 0$, ($E_i \to \lambda E_i$).*
- *Sumar a una ecuación E_i el producto de un número $\lambda \neq 0$ por otra ecuación E_j, siendo $j \neq i$, ($E_i \to E_i + \lambda E_j$).*
- *Añadir al sistema (respectivamente, suprimir de él) una ecuación que sea combinación lineal de las restantes.*

3.2. Teorema de Rouché-Fröbenius

Atendiendo a las posibles soluciones, distinguimos los siguientes tipos de sistemas:

- Un sistema es **compatible** cuando admite al menos una solución.
    - Si admite sólo una solución, el sistema se llama **compatible determinado**.
    - Si admite más de una, se trata de un sistema **compatible indeterminado**.
- Un sistema es **incompatible** si no tiene ninguna solución.

Teorema 3.2 (de Rouché-Fröbenius). *Sea $A \cdot X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que*

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B),$$

siendo A la matriz de los coeficientes del sistema y $A|B$ la matriz A ampliada con la matriz columna de los términos independientes.

El teorema puede completarse diciendo que si es compatible, será compatible determinado si

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = n$$

e indeterminado en caso contrario.

Nótese que un sistema homogéneo es siempre compatible.

Este teorema permite saber si un sistema tiene solución o no, aunque no dice cómo se calcula la solución cuando existe. Para clasificar un sistema comprobamos primero si se verifica o no la igualdad $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B)$, que permite saber si el sistema es o no compatible. Despues,

- Si el sistema es compatible, el rango de la matriz de los coeficientes del sistema indica el número de ecuaciones independientes.
- Si además el número de incógnitas es igual a dicho rango el sistema es compatible determinado, mientras que si el número de incógnitas es mayor que el rango el sistema es compatible indeterminado.

En la práctica podemos incluso resolver un sistema de ecuaciones lineales compatible con ayuda del teorema de Rouché-Fröbenius. En efecto, supongamos que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = k$. Entonces el sistema es compatible y para resolverlo seguimos estos sencillos pasos:

- Se eligen k ecuaciones independientes y se desechan las demás, pues son combinación lineal de las restantes.
- Se eligen k incógnitas independientes y se pasan al segundo término de cada ecuación las $n-k$ incógnitas restantes, para obtener un sistema de k ecuaciones con k incógnitas independientes.
- Las $n-k$ incógnitas que se pasan al segundo término se designan con los parámetros λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_{n-k}, para indicar que pueden tomar valores arbitrarios.
- Al resolver el sistema, las restantes incógnitas se expresan en función de λ_i, de modo que la solución obtenida depende de los parámetros λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_{n-k}.

Lo dicho anteriormente permite concluir que si $A \cdot X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, entonces el sistema

- Es compatible determinado si, y sólo si,

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = n.$$

- Es compatible indeterminado si, y sólo si,

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = k < n.$$

- Es incompatible si, y sólo si,
$$\mathrm{rang}(A) \neq \mathrm{rang}(A|B).$$

Además, si $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = k < n$, la solución del sistema se expresa en función de $n-k$ parámetros, correspondientes a las $n-k$ incógnitas que no intervienen en la submatriz de A de rango k.

Ejemplos 3.1.

1. El sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 7 \end{array}\right.$$
es incompatible.

Solución: Para comprobarlo, escribimos la matriz $A|B$ y calculamos su rango.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{E_2 - E_1 \\ E_3 - 2E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Luego $\mathrm{rang}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rang}(A|B)$ y por tanto el sistema es incompatible.

2. El sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 5y & + & 4z & = & 9 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$
es compatible indeterminado.

Solución: De nuevo lo comprobamos estudiando el rango de la matriz $A|B$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

No obstante, lo podemos resolver si escribimos el sistema como
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & 3y & + & 3z & = & 6 \end{array}\right.$$
o mejor, como
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3-\lambda \\ & & 3y & = & 6-3\lambda \end{array}\right.$$
pasando z al segundo término y haciendo $z = \lambda$.

Se obtiene así la solución del sistema, en función del parámetro λ, pues
$$y = \frac{6-3\lambda}{3} = 2-\lambda, \qquad x = 3-\lambda-2(2-\lambda) = -1+\lambda$$

Por tanto, la expresión general de la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+\lambda \\ y & = & 2-\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

3.3. Regla de Cramer. Método de Gauss

Un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas se llama de **Cramer** si tiene solución única, es decir, si es compatible determinado.

Para reconocerlos utilizamos el siguiente teorema:

Teorema 3.3 (de Cramer)**.** *Un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas es de Cramer si, y sólo si,* $|A| \neq 0$.

Los sistemas de Cramer pueden resolverse utilizando el siguiente procedimiento, conocido como **Regla de Cramer**.

La condición $|A| \neq 0$ garantiza la existencia de A^{-1}. En ese caso, dado el sistema $A \cdot X = B$ resulta, multiplicando en la igualdad anterior por A^{-1},

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Por tanto el sistema tiene solución única, $X = A^{-1} \cdot B$. Esta igualdad se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde se representa por A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A.

Desarrollando esta expresión se obtienen las siguientes igualdades, llamadas **fórmulas de Cramer**, que proporcionan la solución del sistema.

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Obsérvese que, en la expresión que da el valor de x_i, el numerador es el determinante de la matriz que resulta al sustituir en A la columna $i-$ésima por la de los términos independientes.

Consecuencia inmediata de la regla de Cramer es que si un sistema homogéneo es de Cramer, la única solución es $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ejemplos 3.2.

1. Resolver el sistema siguiente mediante la regla de Cramer.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right.$$

Solución: Primero debemos calcular el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Por ser $|A| \neq 0$ el sistema es de Cramer, siendo la solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{7} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{21}{7} = 3.$$

2. Discutamos, en función de los valores reales de a, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array} \right.$$

Solución: Para comprobar si se verifica o no la igualdad $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid B)$ comenzaremos por estudiar el valor de $\operatorname{rang}(A)$. Para ello calcularemos el determinante de A, pues sabemos que

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

Como

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2 \cdot (a+2)$$

entonces, $|A| = 0$ si, y sólo si, $a = 1$ o $a = -2$. Por tanto para discutir el sistema hay que considerar los siguientes casos:

$$i)\ a \neq 1,\ a \neq -2; \qquad ii)\ a = 1; \qquad iii)\ a = -2.$$

- Si $a \neq 1$, $a \neq -2$, el sistema es compatible determinado, ya que

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A|B).$$

Resolviendo por la regla de Cramer dicho sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(1-a)\cdot(a^2-1)}{(a-1)^2\cdot(a+2)} = \frac{-(a+1)}{a+2} \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2\cdot(a+2)} = \frac{1}{(a+2)} \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)^2\cdot(a+1)^2}{(a-1)^2\cdot(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}
\end{aligned}$$

- Si $a = 1$, el sistema resultante es

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

que es compatible indeterminado, pues se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$.
La solución depende de $3 - 1 = 2$ parámetros, ya que el sistema tiene tres incógnitas y sólo una ecuación. Para obtenerla, hacemos $y = \lambda$, $z = \mu$:
Resulta así la expresión general de la solución,

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & = & 1 & - & \lambda & - & \mu \\ y & = & & & \lambda & & \\ z & = & & & & & \mu \end{array} \right.$$

siendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valores cualesquiera.

- Si $a = -2$, el sistema resultante es

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 4 \end{array} \right.$$

Estudiemos los rangos de las matrices

$$A \quad \text{y} \quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{E_2 - E_1 \\ E_3 + 2E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

por lo que $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\operatorname{rang}(A \mid B) = 3$, y en consecuencia el sistema es incompatible.

Además del teorema de Rouché-Fröbenius, podemos utilizar la regla de Cramer para resolver sistemas en general pues, si se verifica la igualdad

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B),$$

podemos extraer un subsistema del sistema dado en el que puede aplicarse la regla de Cramer para obtener la expresión general de la solución.

En efecto, consideremos el sistema (S) compatible

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

tal que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = r \leq \text{mín}\{n, m\}$.

Si suponemos, por comodidad de escritura, que

$$r = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

entonces (S) es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & = & \overline{b}_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & = & \overline{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r & = & \overline{b}_r \end{array}\right.$$

siendo

$$\overline{b}_i = b_i - \big(a_{i(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{in}x_n\big)$$

para $i = 1, \ldots, r$.

Como la matriz de coeficientes de este nuevo sistema tiene determinante no nulo, puede aplicarse al mismo la regla de Crámer, obteniéndose soluciones

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 = f_2(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{array}\right.$$

por lo que la solución de (S) es

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & f_1(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \\ x_2 & = & f_2(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \\ \cdots & & \cdots\ \ \cdots \\ x_r & = & f_r(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \\ x_{r+1} & = & \lambda_{r+1} \\ \cdots & & \cdots \\ x_n & = & \lambda_n \end{array}\right.$$

donde los parámetros $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ toman valores en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.3. Resolvamos el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 4x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & 4y & + & z & + & t & = & 2 \\ 4x & + & 6y & + & 2z & & & = & 6 \end{array}\right.$$

Solución: Se observa que la tercera ecuación es suma de las otras dos; más en concreto, se comprueba que

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

por lo que la submatriz anterior está determinada por los coeficientes de las variables z, t en las dos primeras ecuaciones.

Por tanto el sistema se puede transformar en

$$\left\{\begin{array}{ccccc} z & - & t & = & 4-4x-2y \\ z & + & t & = & 2-4y \end{array}\right.$$

y se obtiene, mediante la regla de Crámer, que

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4-4x-2y & -1 \\ 2-4y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}; \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-4x-2y \\ 1 & 2-4y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}},$$

es decir,

$$z = \frac{4-4x-2y+2-4y}{2} = 3-2x-3y, \qquad t = \frac{2-4y-4+4x+2y}{2} = -1+2x-y.$$

Así, las variables x e y toman valores arbitrarios, mientras que z y t dependen de dichos valores según acabamos de describir.

De esa manera, las infinitas soluciones del sistema inicial se expresan por

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & & & \lambda & & \\ y & = & & & & & \mu \\ z & = & 3 & - & 2\lambda & - & 3\mu \\ t & = & -1 & + & 2\lambda & - & \mu \end{array}\right.$$

al variar λ y μ en $\mathbb{R}$.

Las ecuaciones anteriores son unas **ecuaciones paramétricas** del conjunto de las soluciones.

3.4. Eliminación de parámetros

Un sistema de ecuaciones como el que sigue:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = b_1 + b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \cdots + b_{1p}\lambda_p \\ x_2 = b_2 + b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \cdots + b_{2p}\lambda_p \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = b_n + b_{n1}\lambda_1 + b_{n2}\lambda_2 + \cdots + b_{np}\lambda_p \end{array}\right.$$

donde b_i, b_{ij} son números reales, puede interpretarse como el conjunto formado por los elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que se obtienen dando todos los valores posibles a los parámetros λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_p.

Eliminar parámetros consiste en obtener otro sistema equivalente en el que no intervengan dichos parámetros. Este proceso es el que hay que hacer, por ejemplo, para pasar de las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial a las implícitas (lo veremos en el tema siguiente).

Utilizaremos para ello el método de Gauss, interpretando el sistema precedente como un sistema de n ecuaciones con p incógnitas $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Ejemplo 3.4. Eliminar los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & \alpha & + & \beta \\ y & = & 2 & + & \alpha & - & \beta \\ z & = & 3 & + & 2\alpha & - & 3\beta \end{array}\right.$$

Solución: Nótese que las ecuaciones propuestas son las ecuaciones paramétricas de un plano, pues tienen 2 parámetros independientes. El resultado de eliminar los parámetros será en este caso una ecuación, con las incógnitas x, y, z.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & \beta & = & x-1 \\ \alpha & - & \beta & = & y-2 \\ 2\alpha & - & 3\beta & = & z-3 \end{array}\right. \quad \overset{\substack{E_2-E_1 \\ E_3-2E_1}}{\longrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & \beta & = & x-1 \\ & - & 2\beta & = & -x+y-1 \\ & - & 5\beta & = & -2x+z-1 \end{array}\right.$$

$$\overset{E_3-5/2\ E_2}{\longrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & \beta & = & x-1 \\ & - & 2\beta & = & y-2 \\ & & 0 & = & 1/2x-5/2y+z+3/2 \end{array}\right.$$

Por tanto, la ecuación resultante, (que es la ecuación implícita del plano) es

$$x - 5y + 2z + 3 = 0.$$

3.5. Ejercicios

1. Discútase el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & + & 6z & = & 7 \\ 5x & + & 2y & - & 4z & = & 5 \\ x & + & 3y & - & 5z & = & 3 \end{array}\right.$$

2. Discútase el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 4 \\ -x & + & 2y & + & z & - & 2t & = & -2 \\ 3x & - & y & - & 3z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

3. Discútase el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & z & - & 2t & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & + & 3t & = & 3 \end{array}\right.$$

4. Discútase el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & + & 2v & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & u & - & 2v & = & -4 \\ 3x & - & y & - & 3z & - & 4u & + & 4v & = & 1 \end{array}\right.$$

5. Resuélvase el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 2z & = & 6 \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 10 \end{array}\right.$$
aplicando la regla de Cramer.

6. Obténganse las matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que verifican la igualdad
$$X^2 - X = O.$$

7. Discútase, en función de los valores reales de a y b, el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & az & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

8. Discútase, en función de los valores reales del parámetro a, el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & + & az & = & a^2+4 \\ ax & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

9. Discútase, en función de los valores reales del parámetro a, el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 5 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & a \end{array}\right.$$

10. Discútase, en función de los valores reales de a, el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} (3+a)x & + & 4y & + & 5z & = & 4+a \\ 2x & + & (1-a)y & & & = & 2 \\ 5x & + & (5-a)y & + & 5z & = & 5 \end{array}\right.$$

11. Discútase, en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & b \end{array}\right.$$

12. Discútase, en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & az & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ bx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & by & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

13. Resuélvase, usando la regla de Cramer, el siguiente sistema compatible indeterminado en función del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 0 & = & (a+1)x & + & ay & + & z & + & 2t \\ -1 & = & x & + & y & & & + & t \\ 1 & = & x & & & + & z & + & t \\ -1 & = & 3x & + & 2y & + & z & + & 3t \end{array}\right.$$