Examen Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- Sistemas compatibles arbitrarios. (1.5 puntos)

2.- Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de R^3 y a es un vector no nulo de R^3, entonces

$\{a + u_1, a + u_2, a + u_3\}$ es otra base de R^3. (Justificar razonadamente la veracidad o la falsedad). (1 punto)

3.- Sean a, b, c números reales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Probar que la matriz $M = A^2 + I_3$ es simétrica (es decir $M^t = M$), siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

ii) Demostrar que $M^2 = M$.

(3 puntos)

4.- a) Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $T^2 = 0$ es la aplicación nula, y sea

$R : V \to V$, la aplicación definida por $R(v) = v + T(v)$, para todo $v \in V$. Demostrar que R es lineal e invertible.(1,5 puntos)

b) Sea f una aplicación lineal de R^3 en R^3, tal que :

$$\begin{aligned} f^{-1}(L(1,2,0)) &= \{(x,y,z) \mid 2x - y - z = 0\} \\ f^{-1}(L(0,2,1)) &= \{(x,y,z) \mid x - 2y + z = 0\} \end{aligned}$$

i) Demostrar que si $f(v) = (1,2,0)$, entonces $f^{-1}(L(1,2,0)) = L(v) + \ker(f)$.

ii) Encontrar el núcleo y la imagen de f.

(3 puntos)
($L(1,2,0)$ subespacio vectorial generado por (1,2,0))