Subespacios suplementarios en un espacio vectorial

La Proposición 3.64 da pistas de como proceder para calcular una base de la suma de subespacios vectoriales: si se juntan las bases de los subespacios se tiene un sistema generador de la suma y si de este conjunto se van eliminando vectores que dependan linealmente del resto se termina construyendo una base de la suma. En el caso de que la suma sea directa no se eliminará ningún vector.

Definición 3.65.

Los **subespacios vectoriales** U y W son **suplementarios en** V si $U \oplus W = V$. O lo que es lo mismo, U y V son suplementarios en V si

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) = \dim(V)$$

Proposición 3.66.

Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ conjuntos disjuntos de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V si y sólo si $L(\mathcal{B}_1)$ y $L(\mathcal{B}_2)$ son suplementarios en V.

Demostración: Es consecuencia de la definición de subespacios suplementarios y de lo que nos dice el apartado 2 de la Proposición 3.64 cuando $m = 2$. $\square$

Este resultado nos permite ver que un subespacio vectorial admite diferentes subespacios suplementarios. Basta coger una base del subespacio y completarla a una base del espacio vectorial de diferentes formas.

Ejemplo 3.67. Encontrar todos los subespacios vectoriales suplementarios en $\mathbb{R}^3$ al subespacio vectorial U cuya base es $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Solución: Sea W un subespacio vectorial suplementario de U. En primer lugar, podemos calcular la dimensión de W según la Definición 3.65:

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(\mathbb{R}^3) \implies \dim(W) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U) = 3 - 2 = 1$$

Luego una base de W estará formada por un único vector $\{(\alpha,\beta,\gamma)\}$. Además sabemos que el conjunto

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(\alpha,\beta,\gamma)\}$$

formado con los vectores de las bases de U y W es una base de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto $\{(\alpha,\beta,\gamma)\}$ es la base de un subespacio complementario a U siempre que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \gamma \neq 0$$

Dado que dos vectores proporcionales generan el mismo subespacio vectorial entonces los subespacios vectoriales suplementarios a U son todos aquellos dados por

$$W_{\alpha,\beta} = L((\alpha,\beta,1)) \quad \text{con } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \qquad \square$$