Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2024, primera semana.

En cada pregunta hay una única opción correcta. Cada pregunta acertada: 1 punto; cada pregunta incorrecta: $-0,5$ puntos. Las preguntas sin contestar no suman ni restan puntos. Entregue únicamente la hoja de respuestas. **Material permitido**: un único libro de teoría de Álgebra Lineal.

1. Sea A una matriz no cuadrada de orden $m \times n$ que admite inversa por la izquierda. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (a) La forma de Hermite por columnas de A es $H_c(A) = (I_m|0)$.

   (b) La forma de Hermite por filas de A es $H_f(A) = \left(\dfrac{I_n}{0}\right)$

   (c) La forma de Hermite de A es $H(A) = H_c(A)$.

2. Sea $AX = B$ un sistema lineal escalonado con matriz ampliada $(A|B)$ cuadrada de orden 6.

   (a) Si la matriz $(A|B)$ tiene 21 entradas no nulas, entonces el sistema es incompatible.

   (b) Si la matriz $(A|B)$ tiene menos de 21 entradas no nulas, entonces el sistema es compatible indeterminado.

   (c) Si la matriz A tiene 15 entradas no nulas, entonces el sistema es compatible.

3. Sean U y W dos subespacios distintos de un espacio vectorial V de dimensión $2n-1$ con $n \geq 3$. Si U y W tienen dimensión mayor o igual que n, entonces

   (a) El menor subespacio que contiene a U y W es V.

   (b) El subespacio intersección $U \cap W$ no puede contener un plano de V.

   (c) El subespacio intersección $U \cap W$ contiene al menos una recta de V.

4. Considere las tres aplicaciones siguientes y determine cuántas son lineales.

   $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1 + 1)$

   $g : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}^2$ definida por $g(p(x)) = (p(0),\, p'(1))$, donde $p'(x)$ denota la derivada de $p(x)$.

   $h_C : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ definida por $h_C(A) = C^t AC$ con $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz fija.

   (a) una, (b) dos, (c) tres.

En las preguntas 5, 6, 7 y 8 considere la matriz A de orden 5 cuyas entradas son

$$a_{ij} = x \text{ si } i \neq j \text{ y } a_{ii} = x + y \text{ para } i, j \in \{1, \ldots, 5\};\ x, y \in \mathbb{K} \text{ con } y \neq 0.$$

5. Estudie el rango y el determinante de A y determine cuál de las afirmaciones es correcta:

   (a) A es invertible si $x = -\dfrac{1}{5}\, y$

   (b) El rango de A es siempre igual a 5.

   (c) El determinante de A es igual a $(5x + y)y^4$.

6. Sean A la matriz de la pregunta anterior y U el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^5$ formado por el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $AX = 0$. Entonces,

   (a) U es un hiperplano de $\mathbb{K}^5$ para todo x e $y \neq 0$.

   (b) U es una recta de $\mathbb{K}^5$ sólo para una cantidad finita de valores de x e y.

   (c) U no puede ser un plano de $\mathbb{K}^5$.

7. Sea A la matriz de la pregunta anterior con $x = 1$ e $y = -5$. El sistema lineal $AX = B$ siendo $B = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5)^t$, $b_i \in \mathbb{K}$, cumple alguna de las siguientes condiciones:

   (a) es compatible si $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 0$.

   (b) es compatible indeterminado si $b_5 - \frac{1}{5}(b_1 - b_2 - b_3 - b_4) = 0$.

   (c) no puede ser compatible indeterminado.

8. Sean A la matriz anterior, con $x = 1$ e $y = -5$, y U el subespacio de $\mathbb{K}^5$ formado por las soluciones del sistema lineal homogéneo $AX = 0$, entonces

   (a) un suplementario de U es el subespacio de ecuación implícita $x_1 + x_2 = 0$.

   (b) todos los subespacios de ecuación implícita $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, $a \in \mathbb{K}$, son suplementarios de U.

   (c) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

En las preguntas 9 y 10 considere la aplicación lineal definida en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \text{ definida por } f(p(x)) = (x+1)p'(x)$$

9. La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{1 + x,\ x + x^2,\ x^2\}$ es:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. Sean U el subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$ formado por los polinomios que son múltiplos de x y W el plano generado por los polinomios x^2 y $x^2 + 1$. Entonces:

    (a) $f^{-1}(U) = W$

    (b) $f(W)$ es un plano que contiene a la recta $L(2x^2 + 2x)$

    (c) $f(W) \cap U = \{0\}$.

Soluciones

1. (Similar a ejercicio de las PEC) Si A es una matriz no cuadrada de orden $m \times n$ que admite inversa por la izquierda, entonces su rango es igual al número de columnas, $\mathrm{rg}(A) = n$, y $n < m$. Todas las formas de Hermite tienen rango n. Hay que estudiar cómo están distribuidos los pivotes para elegir la opción correcta.

   La forma escalonada reducida por filas tendrá n pivotes situados en las n primeras filas, y el resto de filas serán nulas. Además, los n pivotes estarán en las n únicas columnas, es decir, $H_f(A) = \left(\frac{I_n}{0}\right)$. Por tanto, (b) es la opción correcta. Además, como $H_f(A)$ también es escalonada por columnas, se cumple $H_f(A) = H(A)$.

   La forma de Hermite por columnas de A no puede ser $H_c(A) = (I_m|0)$, porque en ese caso $\mathrm{rg}(A) = m > n$. La forma de Hermite de A, escalonada por filas y por columnas, $H(A)$, no tiene porqué ser igual a $H_c(A)$. Por ejemplo, en el caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene $A = H_c(A)$ y $H(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. (Pregunta de examen anterior y autoevaluación) Si $AX = B$ es un sistema lineal escalonado y la matriz ampliada $(A|B)$, de orden 6, tiene 21 entradas no nulas, entonces tiene un pivote en la última columna, es decir, $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$, por lo que el sistema es incompatible y (a) es la opción correcta.

3. Sean U y W dos subespacios distintos de un espacio vectorial V de dimensión $2n-1$ con $n \geq 3$. Si U y W tienen dimensión mayor o igual que n, entonces

$$\dim(V) = 2n - 1 \geq \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \geq 2n - \dim(U \cap W)$$

   Entonces, $\dim(U \cap W) \geq 1$, por lo que $U \cap W$ contiene al menos una recta de V, y (c) es la opción correcta. Para que $U \cap W$ contenga un plano de V es necesario que $\dim(U \cap W) \geq 2$, pero esto no se cumpliría si $\dim(U \cap W) = 1$, por lo que (b) es incorrecta. El menor subespacio que contiene a U y W, que es $U + W$, no tiene porque se V; en particular, $U + W \neq V$ si $\dim(U \cap W) \geq 2$, por lo que (a) es incorrecta.

4. La única no lineal es $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1 + 1)$. Una de las propiedades que no cumple es $f(0,0) = (0,0)$.

Preguntas 5, 6, 7 y 8. Considere la matriz A de orden 5 cuyas entradas son

$$a_{ij} = x \text{ si } i \neq j \text{ y } a_{ii} = x + y \text{ para } i, j \in \{1, \ldots, 5\};\ x, y \in \mathbb{K} \text{ con } y \neq 0.$$

(Ejercicio 1.44, pág. 51, Libro ejercicios resueltos Vol. 1). Para la resolución de las 4 preguntas interesa aplicar sólo operaciones elementales de filas ya que se estudiará y resolverá un sistema lineal (aunque para estudiar el rango se pueden aplicar tanto operaciones de filas como de columnas).

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} x+y & x & x & x & x & b_1 \\ x & x+y & x & x & x & b_2 \\ x & x & x+y & x & x & b_3 \\ x & x & x & x+y & x & b_4 \\ x & x & x & x & x+y & b_5 \end{array}\right)$$

Haciendo las operaciones elementales de filas (similares a los ejercicios de las PEC)

$$f_i \to f_i - f_{i+1}, \text{ para } i = 1, \ldots, 4;$$

Obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} y & -y & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & y & -y & 0 & 0 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & y & -y & 0 & b_3 - b_4 \\ 0 & 0 & 0 & y & -y & b_4 - b_5 \\ x & x & x & x & x+y & b_5 \end{array}\right)$$

A continuación hacemos ceros en la última fila teniendo en cuenta que $y \neq 0$. Las cuatro operaciones elementales de filas necesarias se suman en:

$$f_5 \to f_5 - \tfrac{x}{y} f_1 - \tfrac{2x}{y} f_2 - \tfrac{3x}{y} f_3 - \tfrac{4x}{y} f_4$$

obteniendo la matriz escalonada equivalente por filas

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} y & -y & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & y & -y & 0 & 0 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & y & -y & 0 & b_3 - b_4 \\ 0 & 0 & 0 & y & -y & b_4 - b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5x + y & b_5 - \frac{x}{y}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - 4b_5) \end{array}\right)$$

5. El determinante de A es igual al de A' que es igual a $(5x + y)y^4$ con $y \neq 0$, lo que hace (c) correcta. Este determinante se anula si $x = -\frac{1}{5}y$, en cuyo caso A no es invertible y su rango es menor que 5, lo que hace (a) y (b) falsas.

6. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^5$ formado por el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $AX = 0$. Entonces, $\dim(U) = 5 - \mathrm{rg}(A) = 5 - \mathrm{rg}(A')$. El rango de A es igual a 4 si $5x + y = 0$, o 5 si $5x + y \neq 0$. Es decir, $\dim(U) \leq 1$, por lo que no puede ser un plano de $\mathbb{K}^5$ ni un hiperplano de $\mathbb{K}^5$; y es una recta para todo x tal que $5x + y = 0$. La opción correcta es (c).

7. Si $x = 1$ e $y = -5$. El sistema lineal $AX = B$ siendo $B = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5)^t$, $b_i \in \mathbb{K}$, es equivalente al sistema $A'X = B'$ con

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & b_3 - b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & b_4 - b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 + \frac{1}{5}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - 4b_5) \end{array}\right)$$

que es compatible si y sólo si $b_5 + \frac{1}{5}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - 4b_5) = 0$, es decir, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 0$. Por tanto, (a) es la opción correcta y (b) incorrecta. Además, en caso de ser compatible, como el rango de A es menor que el número de incógnitas, sería compatible indeterminado, lo que hace (c) incorrecta.

8. Si $x = 1$, $y = -5$ y U el subespacio de $\mathbb{K}^5$ formado por las soluciones del sistema lineal homogéneo $AX = 0$, entonces $\dim(U) = 5 - \mathrm{rg}(A') = 1$. Es decir, U es una recta de $\mathbb{K}^5$. Unas ecuaciones implícitas de U se obtienen simplificando el sistema equivalente $A'X = 0$.

$$U \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\ x_2 - x_3 = 0,\ x_3 - x_4 = 0,\ x_4 - x_5 = 0\}$$

U es la recta de $\mathbb{K}^5$ generada por el vector $v = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Los suplementarios de U son todos los hiperplanos que no contienen a U, es decir los hiperplanos que no contienen al vector v. La opción (a) es correcta: un suplementario de U es el subespacio de ecuación implícita $x_1 + x_2 = 0$; pero (b) es incorrecta ya que si $a = -4$ obtendríamos la ecuación $-4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, que es la de un hiperplano que contiene a v.

Preguntas 9 y 10 (Ejercicio 4.32, Libro ejercicios, Vol.1,)

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \text{ definida por } f(p(x)) = (x+1)p'(x)$$

9. La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{1 + x,\ x + x^2,\ x^2\}$ es (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. Los subespacios son

$$U = \{ax^2 + bx : \, a, b \in \mathbb{K}\} = L(x^2, x) \;\text{ y }\; W = L(x^2, x^2+1) = \{ax^2 + c : \, a, c \in \mathbb{K}\}$$

Calculamos $f^{-1}(U)$ y $f(W)$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{ax^2 + bx + c : \, f(ax^2 + bx + c) \in U\} \\ &= \{ax^2 + bx + c : \, (x+1)(2ax + b) \in U\} \\ &= \{ax^2 + bx + c : \, b = 0\} = W. \end{aligned}$$

$$f(W) = L(f(x^2), f(x^2+1)) = L(2x^2 + 2x, \, 2x^2 + 2x) = L(2x^2 + 2x), \text{ es una recta contenida en } U.$$

Por tanto (a) es correcta y (b) incorrecta. Además, como $f(W) \subset U$, entonces $f(W) \cap U = f(W)$ lo que hace (c) incorrecta.