Capítulo 7

Los números complejos

La extensión de los números naturales a los números enteros así como la de éstos a los números racionales se han planteado de manera análoga: queríamos que las ecuaciones, $a + x = b$ con $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ en el primer caso, y $ax = b$ con $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ en el segundo caso, tuvieran solución.
El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ es algo más delicado. Nosotros hemos optado por introducir $\mathbb{R}$ axiomáticamente.
En el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, la ecuación $x^2 = \beta$ tiene soluciones reales para todo $\beta \geq 0$, lo cual no es necesariamente cierto en $\mathbb{Q}$, por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2$. Sin embargo, la ecuación $x^2 = \beta$ no tiene soluciones reales si $\beta < 0$ puesto que el cuadrado de cualquier número real es un número positivo.

7.1. Planteamiento del problema

Queremos construir un conjunto $\mathbb{C}$, que sea extensión de $\mathbb{R}$, en el que se tengan definidas dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sea un cuerpo y en el que cualquier número real negativo sea el cuadrado de algún elemento de $\mathbb{C}$.
Supongamos que existe un conjunto $\mathbb{C}$ cumpliendo lo anterior, entonces necesariamente se debe cumplir:

- Existe un elemento en $\mathbb{C}$, que denotaremos por i, tal que $i^2 = -1$.

- Para todo a y $b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a + ib \in \mathbb{C}$,

pues $+$ y $\cdot$ son operaciones internas en $\mathbb{C}$.

- Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, $a + ib = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$.

Vemos primero que de $a + ib = 0$ se deduce que $b = 0$. En efecto, si $b \neq 0$ entonces $ib = -a$, y en consecuencia $i = -a \cdot b^{-1}$ y por tanto i sería un número real. Luego $b = 0$, y por consiguiente $a = 0$. La implicación inversa es inmediata.

- Para todo $a,\ a',\ b$ y $b' \in \mathbb{R}$, $a + ib = a' + ib'$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$.

Esta propiedad se deduce de la anterior y del hecho de que $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ es un cuerpo.

- Para todo $a,\ a',\ b$ y $b' \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

pues $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ es un cuerpo.

- Para todo $a,\ a',\ b$ y $b' \in \mathbb{R}$ se cumple

$$(a + ib) \cdot (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

pues de la distributividad de $\cdot$ respecto de $+$ se tiene que

$$(a + ib) \cdot (a' + ib') = aa' + aib' + iba' + ibib'$$

y aplicando las propiedades asociativas y conmutativas de la suma y del producto, y la relación $i^2 = -1$, se verifica que necesariamente debe cumplirse:

$$(a + ib) \cdot (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Nota: Para que todo número real negativo sea el cuadrado un número complejo es suficiente que lo sea -1. En efecto, si disponemos de i tal que $i^2 = -1$, y si $\beta \in \mathbb{R}$ y $\beta < 0$, entonces $\beta = (i\sqrt{-\beta})^2$. Por ejemplo, $-4 = (i\sqrt{4})^2 = (2i)^2$.

7.2. Los números complejos. Definición

Las propiedades anteriores nos llevan a introducir el conjunto $\mathbb{C}$ como el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los pares $z = (a, b)$ de números reales, $z = (a, b)$, donde se definen dos operaciones internas mediante

$$z + z' = (a + a', b + b') \quad \text{y} \quad z \cdot z' = (aa' - bb', ab' + a'b) \tag{7.1}$$

cualesquiera que sean $z = (a, b)$ y $z' = (a', b')$.

Definición 7.1 El conjunto $\mathbb{R}^2$, con las dos operaciones internas definidas en (7.1), es el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

En el conjunto $\mathbb{C}$, la operación $+$ satisface las siguientes propiedades:

1. Es conmutativa.
2. Es asociativa.
3. El elemento $(0, 0)$ es el elemento neutro de la suma.
4. Todo número complejo tiene elemento opuesto.

En otras palabras $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo. El opuesto del elemento $z = (a, b)$ es el elemento $(-a, -b)$ (y que como viene siendo habitual denotamos por $-z$).

En el conjunto $\mathbb{C}$, la operación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades:

1. Es conmutativa.
2. Es asociativa.
3. El elemento $(1, 0)$ es el elemento neutro del producto.
4. Todo número complejo no nulo tiene inverso.

En otras palabras si $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$, entonces $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo. Veamos como se calcula el inverso del elemento $z = (a, b) \neq (0, 0)$. Supongamos que $z' = (x, y)$ es el inverso de z. Entonces, se cumple $z \cdot z' = (1, 0)$, esto es:

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones cuando $(a, b) \neq (0, 0)$ comprobando que dicho sistema tiene solución única $x = a/(a^2 + b^2)$ e $y = (-b)/(a^2 + b^2)$. Luego, si $z = (a, b) \neq (0, 0)$, el inverso de $z = (a, b)$, que denotaremos z^{-1} o $\dfrac{1}{z}$ es:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \tag{7.2}$$

Finalmente, la operación $\cdot$ es distributiva respecto de la operación $+$ en $\mathbb{C}$, es decir:

5. Para todo z, z' y $z'' \in \mathbb{C}$ se tiene $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$.

Todas las propiedades enunciadas para los números complejos se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 7.2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Veamos que el conjunto de los números complejos cumple los otros requisitos que nos habíamos propuesto.

- $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$.

Cuando decimos que $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$, queremos decir que $\mathbb{C}$ contiene un subcuerpo isomorfo al cuerpo de los números reales, es decir, que existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo a y $a' \in \mathbb{R}$ se tiene:

1. $f(a+a') = f(a) + f(a')$.
2. $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a')$.

Claramente, la aplicación f definida por $f(a) = (a, 0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ es un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y el subcuerpo F de $\mathbb{C}$ definido por:

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (a, 0) \text{ y } a \in \mathbb{R}\}$$

Identificaremos por tanto todo elemento de F con un elemento de $\mathbb{R}$. Así, escribiremos a en lugar de $(a, 0)$ y en particular, escribimos 0 para indicar el elemento nulo $(0, 0)$ y 1 para indicar el elemento unidad $(1, 0)$.
Mediante esta identificación, tiene sentido hablar de $x \cdot (a, b)$ o $(a, b) \cdot x$ si $x \in \mathbb{R}$ y $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, siendo

$$x \cdot (a, b) = (x, 0) \cdot (a, b) = (xa, xb) = (a, b) \cdot x$$

y por tanto podemos escribir:

$$z = (a, b) = a \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot b$$

Sea $i = (0, 1)$. Entonces todo elemento $z = (a, b) = a \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot b \in \mathbb{C}$ puede escribirse en la forma (llamada **forma binómica**)

$$\boxed{z = a + ib}$$

donde hemos omitido el símbolo del producto. Indistintamente, también se utiliza la notación $z = a + bi$; de hecho, es más común escribir la expresión $3 + 2i$ en lugar de $3 + i2$ cuando se concretan los números reales a y b.

Ejemplo 7.3 **Potencias de la unidad imaginaria**
Observemos que las primeras potencias de i son

$$i^1 = i,\ i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i^4 \cdot i = i \quad \text{etc.}$$

si queremos calcular i^n, basta elevar i al resto de la división entera de n entre 4. Por ejemplo,

$$i^{323} = i^{80 \cdot 4 + 3} = (i^4)^{80} \cdot i^3 = 1^{80}(-i) = -i\ .$$

La **parte real** del número complejo $z = a + ib$ se denota por $\Re(z)$ o $\mathrm{Re}(z)$ y es el número real a, mientras que la **parte imaginaria** de z se denota por $\Im(z)$ o $\mathrm{Im}(z)$ y es el número real b.
Se denomina **número imaginario puro** a todo número complejo z tal que $\mathrm{Re}(z) = 0$.
Dado un elemento $z = a + ib$ se llama **conjugado de** z al número complejo:

$$\boxed{\overline{z} = a - ib}$$

Claramente se cumplen las relaciones:

$$z + \overline{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)\ , \quad z - \overline{z} = i(2b) = 2i\,\mathrm{Im}(z) \qquad \text{y} \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

En consecuencia, un número complejo z es real si y sólo si $\overline{z} = z$.
Un número complejo z es imaginario puro si y sólo si $\overline{z} = -z$.
Además, si $z \neq 0$, se tiene

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

y recuperamos la fórmula del inverso (7.2). Este es el método que se usa habitualmente para calcular el inverso de un número complejo dado en forma binomial.

Ejemplo 7.4

1. Sea z un número complejo y sea $w = (z - 1)(\overline{z} - i)$. Determínese z tal que:

   a) w sea real,

   b) w sea imaginario puro.

   Solución: Partimos de la forma binómica $z = x + iy$; se obtiene

$$\begin{aligned} w &= (z-1)(\overline{z} - i) = \big((x-1) + iy\big)\big(x - i(y+1)\big) \\ &= x(x-1) + y(y+1) + i\big(yx - (x-1)(y+1)\big) \\ &= x^2 - x + y^2 + y + i(y - x + 1) \end{aligned}$$

   Por tanto:
   a) w es real si y sólo si $\mathrm{Im}(w) = 0$, esto es, $y - x + 1 = 0$. Luego el conjunto solución es el conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y - x + 1 = 0\}$.
   b) w es imaginario puro si y sólo si $\mathrm{Re}(w) = 0$, esto es, $x^2 - x + y^2 + y = 0$. Luego la solución es el conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 - x + y^2 + y = 0\}$. □

2. Sea un número complejo $z = x + iy$ y sea $w = \dfrac{z^2 + 5z + 6}{z + 1}$. Determínese z de modo que w sea un número real.

   Solución:

$$\begin{aligned} w &= \frac{z^2 + 5z + 6}{z + 1} = \frac{\big(x^2 - y^2 + i(2xy)\big) + \big(5x + i(5y)\big) + 6}{(x+1) + iy} \\ &= \frac{\big(x^2 - y^2 + 5x + 6 + i(2xy + 5y)\big)\big((x+1) - iy\big)}{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(w) &= \frac{2x^2y + 5yx + 2xy + 5y - x^2y + y^3 - 5xy - 6y}{(x+1)^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + y^2 - 1)y}{(x+1)^2 + y^2}\end{aligned}$$

Por tanto, w es real si y sólo si $\operatorname{Im}(w) = 0$, esto es, $(x^2 + 2x + y^2 - 1)y = 0$, o equivalentemente, $y = 0$ o $x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0$. Luego el conjunto solución es el conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0\} \cup \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0\}$. □

Se satisfacen las siguientes propiedades cualesquiera que sean los números complejos z y z'.

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\ \overline{z'}$

Estos resultados se extienden a una suma o producto de n términos y en particular:

- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Finalmente:

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ y $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$

Para establecer estas dos últimas propiedades se parte de las fórmulas (7.1) y (7.2) y se estudia lo que sucede al sustituir b y b' por sus opuestos sin modificar a y a'.

7.3. Representación geométrica de los números complejos

Consideramos en el plano dos ejes coordenados rectangulares Ox y Oy. Dado el número complejo $z = a + ib$, consideramos el punto M_z de coordenadas (a, b). Recíprocamente a todo punto M del plano de coordenadas (a, b) le asociamos el número complejo $z_M = a + ib$. Se dice que z_M es el **afijo del punto** M. De esta manera se obtiene una biyección del conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos sobre el conjunto de los puntos del plano, una vez fijado un sistema de referencia ortonormal del plano $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$. De manera análoga, dado $z = a + ib$ se considera el vector $\vec{v}_z$

del plano vectorial euclideo de coordenadas (a, b) respecto de una base ortonormal fija: Se obtiene también una biyección del conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos sobre el conjunto de los vectores del plano vectorial. También se dice que z es el **afijo del vector** $\vec{v}_z$.

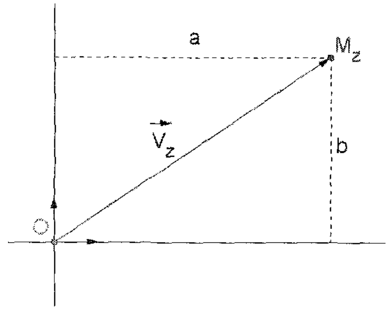

Figura 7.1: Representación de un *número complejo*

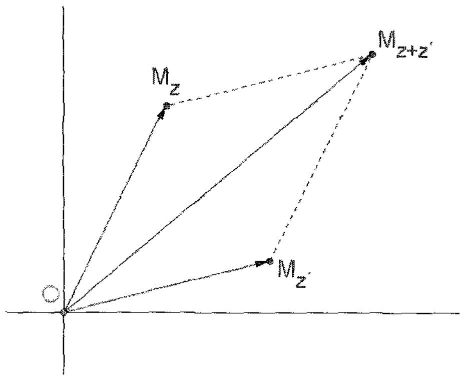

Figura 7.2: La suma de números complejos

Representación de la suma de *números complejos*:
si M_z, $M_{z'}$ y $M_{z+z'}$ son respectivamente los puntos del plano de afijos z, z' y $z + z'$, se debe cumplir que:

$$\vec{v}_{z+z'} = \vec{v}_z + \vec{v}_{z'}$$

Esto es:

$$\overrightarrow{OM}_{z+z'} = \overrightarrow{OM}_z + \overrightarrow{OM}_{z'}$$

ya que para sumar vectores con origen en O, basta sumar sus componentes respecto de un sistema de referencia, véase la figura 7.2.

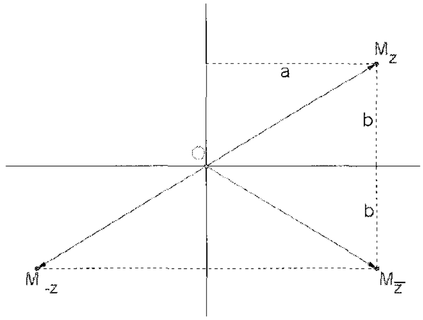

Figura 7.3: Representación del conjugado $\overline{z}$ y del opuesto $-z$

Interpretación geométrica del conjugado $\overline{z}$:
Los puntos M_z y $M_{\overline{z}}$, de afijos z y $\overline{z}$ respectivamente, son simétricos respecto del eje de abscisas, que se denomina eje real.

Sea el número complejo $z = a + ib$. Se denomina **módulo** de z a:

$$|z| = r = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El módulo de z es un número real positivo r que en virtud del teorema de Pitágoras, es justamente la distancia del punto M_z al punto O. Entre las propiedades del módulo se encuentran las siguientes:

- $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.
- $|zz'| = |z||z'|$ para todo z, $z' \in \mathbb{C}$.

  En efecto:

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (zz')\overline{zz'} = z\,z'\,\overline{z}\;\overline{z'} \\ &= (z\,\overline{z})(z'\overline{z'}) = |z|^2|z'|^2 \end{aligned}$$

- $|z| = |\overline{z}|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- Desigualdad triangular; $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ para todo z, $z' \in \mathbb{C}$.

  En efecto:

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\big(\overline{z + z'}\big) = (z + z')\big(\overline{z} + \overline{z'}\big) \\ &= z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \quad \text{(pues} \quad z\overline{z'} \text{ y } z'\overline{z} \quad \text{son conjugados)} \end{aligned}$$

Ahora bien, para todo $\omega \in \mathbb{C}$ claramente se cumple que $\mathrm{Re}(\omega) \leqslant |\omega|$ y por tanto,

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &\leqslant |z|^2+|z'|^2+2|z\overline{z'}| \\ &= (\,|z|+|z'|\,)^2 \end{aligned}$$

deducióndose la desigualdad: $\quad |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$

Ejemplo 7.5 Demuéstrese la desigualdad $\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.
Solución: Se aplica la desigualdad triangular a

$$\begin{aligned} |z+(z'-z)| &\leqslant |z|+|z'-z| \quad \text{es decir,} \\ |z'| &\leqslant |z|+|z'-z| \quad \text{o equivalentemente:} \\ |z'|-|z| &\leqslant |z'-z| \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene $|z|-|z'| \leqslant |z-z'|$ y en consecuencia $\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|$.
□

Supongamos ahora que $z \neq 0$; el ángulo α que forman los vectores $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{OM}_z$, que es un número real módulo 2π (veáse el ejemplo 3.11), se denomina **argumento** de z y se designa por la notación:

$$\arg(z) = \alpha = (\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}_z}) \quad [\mathrm{mod}\ 2\pi]$$

De la propia definición de argumento se deduce lo siguiente:

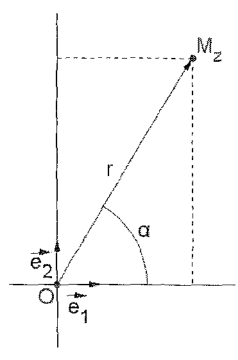

Figura 7.4: Representación del módulo y argumento.

1. El número complejo 0 tiene módulo 0 pero obsérvese que la definición de argumento no tiene sentido para 0. Diremos que 0 no tiene argumento.

2. Si $z \neq 0$, z es real si y sólo si $\arg(z) = 0 \quad [\text{mod } \pi]$ mientras que z es imaginario puro si y sólo si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\text{mod } \pi]$.

3. Si $z \neq 0$, entonces $$\begin{aligned} \arg(\overline{z}) &= -\arg(z) \quad [\text{mod } 2\pi] \\ \arg(-z) &= \pi + \arg(z) \quad [\text{mod } 2\pi] \end{aligned}$$

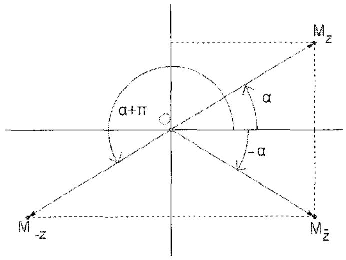

Figura 7.5: Opuesto y conjugado

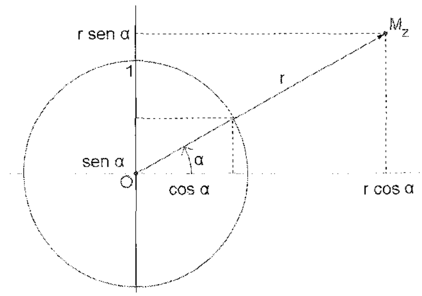

Figura 7.6: Forma trigonométrica

De la figura 7.6 se desprende que la parte real a y la parte imaginaria b de un número complejo z no nulo vienen expresados mediante el módulo r y argumento α como

$$a = r\cos\alpha, \qquad b = r \operatorname{sen}\alpha$$

que da lugar a la expresión del número complejo z en **forma trigonométrica**:

$$z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

y en **forma polar**:

$$z = r_\alpha$$

Recíprocamente, si $z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ con $r > 0$, entonces $|z|^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = r^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = r^2$ y por tanto $|z| = r$. Si $\arg(z) = \beta$ entonces se cumple $\cos\alpha = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ y en consecuencia $\beta = \alpha \quad [\text{mod } 2\pi]$. Hemos por tanto establecido los siguientes resultados:

> Sea $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ un número complejo no nulo.
> Si $|z| = r$ y $\arg(z) = \alpha \quad [\text{mod } 2\pi]$, entonces
> $a = r\cos\alpha$ y $b = r\operatorname{sen}\alpha$.

Sea el número complejo $z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ con $r > 0$. Entonces,

$$|z| = r \quad \text{y} \quad \arg(z) = \alpha \quad [\text{mod } 2\pi].$$

La forma trigonométrica y la forma polar de un número complejo son especialmente útiles cuando se multiplican números complejos. Sean los números complejos no nulos $z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ y $z' = r'(\cos\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha')$ en forma trigonométrica.

$$\begin{aligned} zz' &= [r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)][r'(\cos\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha')] \\ &= (rr')\big[(\cos\alpha\cos\alpha' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha') + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \cos\alpha'\operatorname{sen}\alpha)\big] \end{aligned}$$

Ahora bien, de las igualdades

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\alpha') &=& \cos\alpha\cos\alpha' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' \\ \operatorname{sen}(\alpha+\alpha') &=& \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \cos\alpha'\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right.$$

se obtiene que:

$$zz' = rr'(\cos(\alpha+\alpha') + i(\operatorname{sen}(\alpha+\alpha'))$$

Hemos por tanto establecido lo siguiente:

$$\boxed{|zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{y} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [\text{mod } 2\pi]}$$

Las siguientes propiedades son consecuencia de las relaciones anteriores:

- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ y $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ $[\text{mod } 2\pi]$
- $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ y $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)$ $[\text{mod } 2\pi]$

cualesquiera que sean los números complejos $z,\ z' \neq 0$. También las fórmulas de multiplicación se extienden a un número finito de factores y en particular, se obtiene:

- $|z^n| = |z|^n$ y $\arg(z^n) = n\arg(z)$ $[\text{mod } 2\pi]$
- $|z^{-n}| = |z|^{-n}$ y $\arg(z^{-n}) = -n\arg(z)$ $[\text{mod } 2\pi]$

para todo complejo $z \neq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.
Cuando $|z| = 1$, esto es, $z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, se obtiene la denominada **fórmula de Moivre**:

$$\boxed{z^n = (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha}$$

cierta para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 7.6 La fórmula de Moivre permite calcular $\cos n\alpha$ y $\mathrm{sen}\,n\alpha$ en función de $\cos\alpha$ y $\mathrm{sen}\,\alpha$. Para ello se calcula $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n$ mediante el desarrollo del Binomio de Newton y mediante la fórmula de Moivre. Se igualan entonces las partes reales o las partes imaginarias de ambas expresiones. Se tiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha &= (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 \\
&= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + 3\cos\alpha(i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 + (i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 \\
&= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + i\,(3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\,\alpha)
\end{aligned}$$

Por tanto, $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\alpha$ y $\mathrm{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\,\alpha$.

7.4. Forma exponencial de un número complejo

Las relaciones,

(1) $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\alpha' + i\,\mathrm{sen}\,\alpha') = \cos(\alpha+\alpha') + i\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\alpha')$

(2) $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha$

ponen en evidencia que las propiedades de la aplicación $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\alpha \mapsto \Phi(\alpha) = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

son similares a las de la función exponencial de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, en el sentido

(1') $\Phi(\alpha+\alpha') = \Phi(\alpha)\Phi(\alpha') \quad \rightsquigarrow \quad e^{x+x'} = e^x e^{x'}$

(2') $\Phi(n\alpha) = \big(\Phi(\alpha)\big)^n \quad \rightsquigarrow \quad e^{nx} = (e^x)^n$

y esto conduce a que sea muy práctica la siguiente notación,

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.7 $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$.

Las fórmulas (1) y (2) anteriores se traducen en:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad e^{i(\alpha+\alpha')} = e^{i\alpha}e^{i\alpha'} \\
&(2) \quad e^{i(n\alpha)} = \left(e^{i\alpha}\right)^n
\end{aligned}$$

Si $z \neq 0$ es un número complejo de módulo r y de argumento α, la escritura

$$z = re^{i\alpha}$$

se denomina **forma exponencial** del número complejo z.

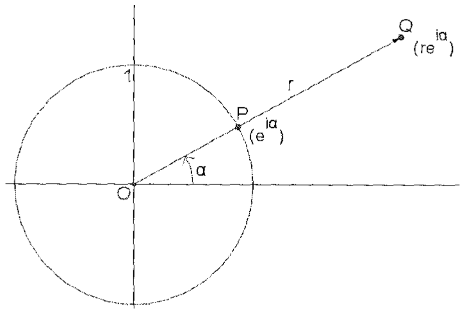

Figura 7.7: Representación exponencial

Las propiedades enunciadas en las secciones anteriores se traducen a la notación exponencial en las reglas de cálculo siguientes:

Sean α y α' dos números reales cualesquiera y sean r, r' dos números reales tales que $r > 0$ y $r' > 0$.

- $re^{i\alpha} = r'e^{i\alpha'}$ si y sólo si $r = r'$ y $\alpha = \alpha' \quad [\text{mod } 2\pi]$
- $\overline{re^{i\alpha}} = re^{-i\alpha}$
- $-(re^{i\alpha}) = re^{i(\alpha+\pi)}$
- $(re^{i\alpha})(r'e^{i\alpha'}) = (rr')e^{i(\alpha+\alpha')}$
- $\dfrac{1}{re^{i\alpha}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\alpha}$ y $\dfrac{r'e^{i\alpha'}}{re^{i\alpha}} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\alpha'-\alpha)}$
- $\left(re^{i\alpha}\right)^n = r^n e^{in\alpha}$

De las fórmulas

$$\begin{cases} e^{i\alpha} & = & \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \\ e^{-i\alpha} & = & \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

sumándolas y restándolas se obtienen las **fórmulas de Euler**:

$$\boxed{\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \text{sen}\,\alpha}$$

Ejemplo 7.8 Las fórmulas de Euler permiten expresar $\cos^n\alpha$ y $\operatorname{sen}^n\alpha$ como polinomio trigonométrico. Para ello hay que desarrollar $\left(\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^n$ o $\left(\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^n$ y simplificar. Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\cos^3\alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i\,3\alpha}+3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}+e^{-i\,3\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{i\,3\alpha}+e^{-i\,3\alpha}+3\big(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\big)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha\right)\end{aligned}$$

Las formas trigonométrica, polar y exponencial no son adecuadas para efectuar sumas de números complejos.

Ejemplo 7.9 Sean $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z'=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. Se obtiene:

$$\begin{aligned}z+z' &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\Big)+2\sqrt{3}\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\Big)\\ &= (1+i)+(3+i\sqrt{3}) = 4+i(1+\sqrt{3})\end{aligned}$$

7.5. Raíces n-ésimas de un número complejo

Sea $w\neq 0$ un número complejo y $n\in\mathbb{N}^*$. Buscamos las **raíces n-ésimas**, que por definición son las soluciones, en la variable $z\in\mathbb{C}$, de la ecuación:

$$z^n = w$$

Sea $w=\rho_\beta$, con $\rho=|w|>0$, la forma polar del número complejo dado. Para que el número complejo $z=r_\alpha$ sea solución de la ecuación dada, se debe verificar

$$r^n_{n\alpha}=\rho_\beta$$

o equivalentemente,

$$\left\{\begin{array}{lcll} r^n &=& \rho & (\text{ecuación en } \mathbb{R}_+)\\ n\alpha &=& \beta & [\text{mod } 2\pi]\end{array}\right. \text{, es decir: } \left\{\begin{array}{lcll} r &=& \sqrt[n]{\rho} & (\text{en } \mathbb{R}_+)\\ \alpha &=& \dfrac{\beta}{n} & [\text{mod } \dfrac{2\pi}{n}]\end{array}\right.$$

De $\alpha=\dfrac{\beta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}$ con $k\in\mathbb{Z}$ se obtienen todas las soluciones $z_0,\ z_1,\ \ldots,z_{n-1}$:

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\beta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{para } k=0,1,2,\ldots,n-1$$

Ejemplo 7.10 Para hallar las raíces cúbicas de -1, se escribe -1 en forma polar, $-1 = 1_\pi$, y se plantea la ecuación $r^3_{3\alpha} = 1_\pi$ y se obtiene:

$$\begin{cases} r^3 = 1 & \text{(ecuación en } \mathbb{R}_+) \\ 3\alpha = \pi & [\text{mod } 2\pi] \end{cases}, \text{ y por tanto: } \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{3} & [\text{mod } \dfrac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

Las raíces cúbicas de -1, que expresamos también en forma binómica, son:

$$\text{si } k = 0, \quad z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{si } k = 1, \quad z_1 = e^{i\pi} = -1$$
$$\text{si } k = 2, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 7.11 **Raíces n-ésimas de la unidad**
Son las soluciones de la ecuación $z^n = 1$. Procediendo como en el caso general se obtiene para $z = r_\alpha$ y $w = 1_0$ las soluciones $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Si $\mathfrak{U}_n$ designa al conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad, para $n = 3$, se obtiene $\mathfrak{U}_3 = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (véanse las figuras 7.8 y 7.9).

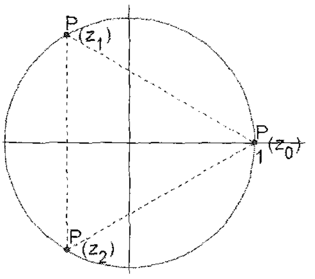

Figura 7.8: Raíces cúbicas de la unidad

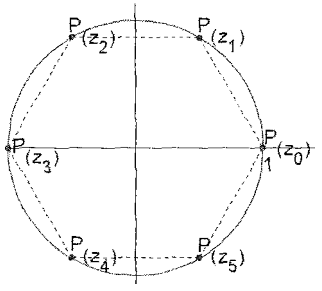

Figura 7.9: Raíces sextas de la unidad

Ecuación de segundo grado en $\mathbb{C}$

La ecuación de segundo grado $z^2 = w$ sabemos resolverla cuando el número complejo viene dado en forma polar. Cuando el número complejo w viene dado en forma binómica y no resulta cómodo hallar el argumento β de w, se pueden hallar directamente las raíces cuadradas en forma binómica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7.12 **Raíces cuadradas en forma binómica**
Supongamos $w = 5 + 12i$ y sea $z = x + iy$ tal que $z^2 = w$. Sustituyendo se obtiene,

$$(x+iy)^2 = 5 + 12i, \text{ y en consecuencia: } \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 5 \\ 2xy & = & 12 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta que $|z|^2 = |w|$, resulta:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Al despejar $y^2 = 13 - x^2$ y sustituir y^2 en el sistema se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 13 + x^2 & = & 5 \\ 2xy & = & 12 \end{array} \right. \text{ es decir, } \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 9 \\ xy & = & 6 \end{array} \right.$$

y se obtienen las soluciones $z_0 = 3 + 2i$ y $z_1 = -3 - 2i$.

Veamos un ejemplo de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales.

Ejemplo 7.13 La ecuación $x^2 + 2x + 5 = 0$, de coeficientes $a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$, no tiene solución en $\mathbb{R}$, pues el discriminante de la ecuación, $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, es estrictamente negativo.
Consideremos la misma ecuación en $\mathbb{C}$, $z^2 + 2z + 5 = 0$. Como $z^2 + 2z = (z+1)^2 - 1$, al sustituir en la ecuación se obtiene $(z+1)^2 + 4 = 0$, es decir $(z+1)^2 = -4$. Por tanto, las soluciones z_1 y z_2 cumplen que $z_1 + 1$ y $z_2 + 1$ son las raíces cuadradas de -4, es decir $z_1 + 1 = 2i$ y $z_2 + 1 = -2i$ y obtenemos:

$$z_1 = -1 + 2i \quad \text{y} \quad z_2 = -1 - 2i$$

Obsérvese que una raíz cuadrada del discriminante es $\epsilon = 4i$ y si calculamos los números $\dfrac{-b+\epsilon}{2a}$ y $\dfrac{-b-\epsilon}{2a}$ se obtienen precisamente z_1 y z_2.

En general, consideremos la ecuación

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{7.3}$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Dividimos por a la ecuación:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

Como $z^2 + \dfrac{b}{a}z = \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$, obtenemos la ecuación equivalente:

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Si $w = z + \dfrac{b}{2a}$ y ϵ es una raíz cuadrada de $\Delta = b^2 - 4ac$, siendo $-\epsilon$ la otra raíz cuadrada, la ecuación se puede escribir como:

$$w^2 - \left(\frac{\epsilon}{2a}\right)^2 = 0 \text{ , es decir, } \left(w - \frac{\epsilon}{2a}\right)\left(w + \frac{\epsilon}{2a}\right) = 0$$

En consecuencia, $w_1 = \dfrac{\epsilon}{2a}$ y $w_2 = -\dfrac{\epsilon}{2a}$, por lo que las soluciones de la ecuación (7.3) son

$$z_1 = \frac{-b+\epsilon}{2a} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{-b-\epsilon}{2a}$$

siendo ϵ una raíz cuadrada de $\Delta = b^2 - 4ac$.
En definitiva, para resolver la ecuación de segundo grado, $az^2 + bz + c = 0$, en $\mathbb{C}$, el proceso a seguir es el siguiente:

1. Se calcula el discriminante de la ecuación, $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Se calcula una raíz cuadrada ϵ de Δ.
   a) Si $\Delta \in \mathbb{R}$ y $\Delta \geqslant 0$, se puede tomar $\epsilon = \sqrt{\Delta}$.
   b) Si $\Delta \in \mathbb{R}$ y $\Delta < 0$, se puede tomar $\epsilon = i\sqrt{-\Delta}$.
   c) Si $\Delta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, para calcular una raíz cuadrada de Δ, se puede proceder como en el ejemplo 7.12, o en forma polar, si se puede calcular cómodamente el argumento de Δ.
3. Las soluciones son $\dfrac{-b+\epsilon}{2a}$ y $\dfrac{-b-\epsilon}{2a}$.

Ejemplo 7.14 Resuélvase la ecuación $z^2 + 2z + 1 - 2i = 0$.
Solución: En este caso, $\Delta = 4 - 4(1-2i) = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Hallamos una raíz de Δ, planteando la ecuación $r^2e^{i2\alpha} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ y obtenemos por ejemplo, $\epsilon = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 + 2i$.
Las soluciones de la ecuación son $z_1 = \dfrac{-2+2+2i}{2} = i$ y $z_2 = \dfrac{-2-2-2i}{2} = -2-i$. □

7.6. Aplicaciones geométricas

La correspondencia biunívoca que existe entre el conjunto de los números complejos y los puntos del plano, o entre el conjunto de los números complejos y los vectores del plano (véase la sección 7.3), una vez establecido en el plano un sistema de referencia ortonormal, así como las fórmulas que permiten calcular suma, productos, cocientes, etc., de números complejos hacen que éstos constituyan una herramienta de gran utilidad en diversas aplicaciones geométricas. Veamos algunas de ellas.

En todo lo que sigue, consideramos en el conjunto de los puntos del plano un sistema de referencia ortonormal $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ y en el plano vectorial euclideo asociado, la base ortonormal $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$.

Ejemplo 7.15 **Afijo del vector $\overrightarrow{AB}$**

Si z_A es el afijo del punto A y z_B es el afijo del punto B (véase la figura 7.10), teniendo en cuenta que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

se obtiene: $$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$$

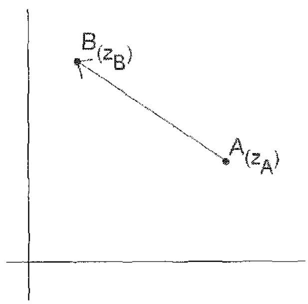

Figura 7.10: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

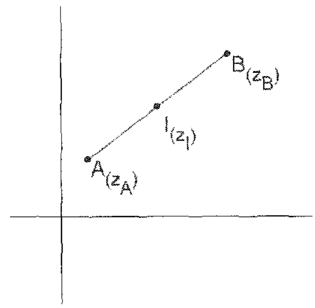

Figura 7.11: $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Ejemplo 7.16 **Afijo del punto medio de un segmento**

Sean I el punto medio del segmento de extremos los puntos A y B y respectivamente z_A, z_B y z_I los afijos de los puntos A, B e I (véase la figura 7.11). De

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

se deduce que: $$\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$$

Ejemplo 7.17 **Distancias y ángulos orientados**

1. Longitud del segmento de extremos los puntos A y B.
   Teniendo en cuenta el ejemplo 7.15, la longitud del segmento es el módulo de $z_{\overrightarrow{AB}}$, es decir, $|z_B - z_A|$.

2. Medida del ángulo $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}})$
En la hipótesis de $A \neq B$ y teniendo en cuenta la sección 7.3, la medida del ángulo $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}})$ es precisamente $\arg(z_B - z_A)$ $[\mathrm{mod}\ 2\pi]$ (véase la figura 7.12).

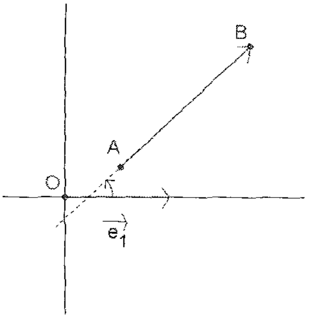

Figura 7.12: $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)$

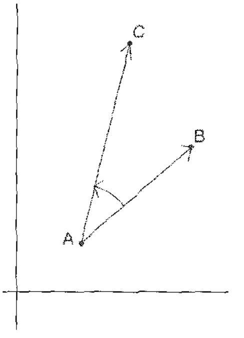

Figura 7.13: $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

3. Medida del ángulo $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$
Supongamos que los puntos A, B y C son distintos (véase la figura 7.13). Se tiene:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) &= (\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AC}}) - (\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}}) \\
&= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) \quad [\mathrm{mod}\ 2\pi] \\
&= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [\mathrm{mod}\ 2\pi]
\end{aligned}$$

En particular se obtiene:

a) Los puntos A, B y C están alineados si y sólo si

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\mathrm{mod}\ \pi]$$

o equivalentemente, el número complejo $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ es real.

b) Las rectas AC y AB son perpendiculares si y sólo si

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\mathrm{mod}\ \pi]$$

o equivalentemente, el número complejo $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ es imaginario puro.

Ejemplo 7.18 **Movimientos en el plano**

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Las fórmulas $|wz| = |w|\,|z|$ y $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z) \quad [\text{mod } 2\pi]$ permiten dar una interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos.

Consideramos la transformación del plano que asocia a todo punto P, de afijo z, el punto P', de afijo $z' = wz$, el producto de w por el afijo de P. Esta transformación, que se denomina **semejanza**, es exactamente la composición de una homotecia de centro O y de radio $r = |w|$ y de la rotación de centro O de ángulo $\arg(w)$.

Veamos como se interpretan algunos movimientos del plano mediante los números complejos.

1. **Traslación de vector** $\vec{v} = \overrightarrow{O\Omega}$.

   Sea el punto Ω de afijo w. Se denomina traslación de vector $\vec{v}$ a la transformación $T_{\vec{v}}$ del plano que asocia a todo punto P, de afijo z, el punto P', de afijo $z' = z + w$.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P' = T_{\vec{v}}(P) \\ z & \longrightarrow & z' = z + w \end{array}$$

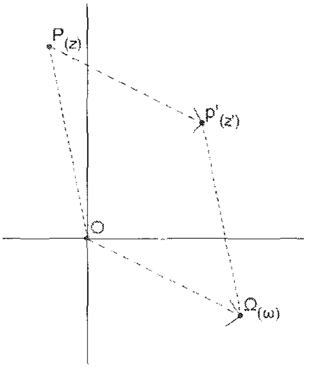

Figura 7.14: $z' = z + w$

2. **Rotaciones de centro** Ω **y ángulo** α

   Por definición la rotación de centro Ω y ángulo α transforma el punto P en un punto P', de manera que el ángulo $(\widehat{\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'}})$ sea α.

   En la rotación de centro O y ángulo α, se puede expresar fácilmente el afijo ζ' del punto transformado en función del afijo ζ del punto inicial utilizando la forma exponencial:

$$\zeta' = e^{i\alpha}\zeta$$

Sean el punto Ω de afijo w, P el punto de afijo z, y P' su transformado mediante la rotación de centro Ω y ángulo α. Para ejecutar esta rotación,

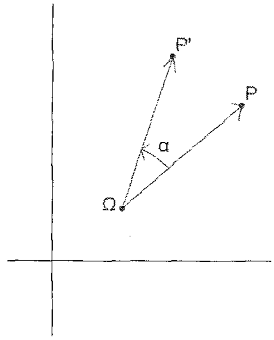

Figura 7.15: $z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$

primero trasladamos el centro de rotación Ω al punto O mediante la traslación de vector $\overrightarrow{\Omega O} = -\overrightarrow{O\Omega}$, efectuamos la rotación de centro O y de ángulo α, $R_{O,\alpha}$, y finalmente deshacemos la traslación inicial mediante la traslación de vector $\overrightarrow{O\Omega}$.

$$\begin{array}{ccccccc} P & T_{\overrightarrow{\Omega O}} & & R_{O,\alpha} & & T_{\overrightarrow{O\Omega}} & P' = R_{\Omega,\alpha}(P) \\ z & \longrightarrow & z - w & \longrightarrow & e^{i\alpha}(z - w) & \longrightarrow & z' = e^{i\alpha}(z - w) + w \end{array}$$

Es decir:

$$z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$$

Esta expresión se puede hallar directamente expresando que el ángulo $(\widehat{\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'}})$ es α.

3. **Homotecia de centro Ω y razón k**
Se supone que $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Por definición la homotecia de centro Ω y razón k transforma el punto P en un punto P', de manera que $\overrightarrow{\Omega P'} = k\overrightarrow{\Omega P}$. Pasando a los afijos, se obtiene:
$$z' - w = k(z - w)$$

4. **Simetría axial**
Dada una recta ρ del plano, una simetría axial de eje ρ es el movimiento S_ρ que transforma un punto P del plano en un punto P' (véase la figura 7.16) que satisface:
   i) la recta PP' es perpendicular a la recta ρ,
   ii) los puntos P y P' equidistan de la recta ρ.
Estudiamos dos casos sencillos.

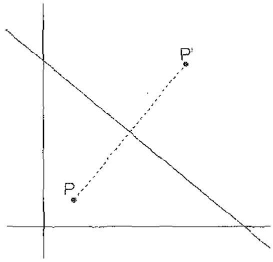

Figura 7.16: Simetría axial

- La recta ρ es el eje real. Si z, z' son respectivamente los afijos de P y P', se tiene:

$$z' = \overline{z}$$

- La recta ρ pasa por el origen (véase la figura 7.17).

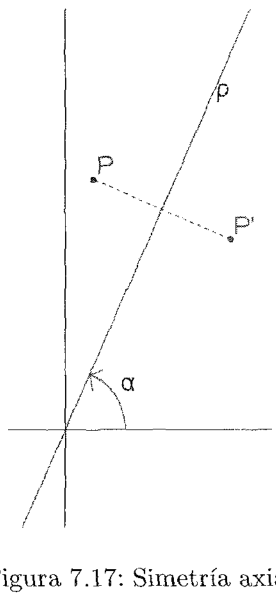

Figura 7.17: Simetría axial

Mediante una rotación nos remitimos al caso anterior. Sea α el ángulo que forma la recta ρ con el eje real. Efectuamos primero una rotación de centro O y ángulo $-\alpha$, $R_{O,-\alpha}$; de z se pasa a $e^{-i\alpha}z$. La recta ρ se ha transformado en el eje real. Aplicamos la simetría de eje real, S_{Ox}; de $e^{-i\alpha}z$ se pasa a $\overline{e^{-i\alpha}z} = e^{i\alpha}\overline{z}$. Finalmente deshacemos el giro inicial mediante una rotación de centro O y ángulo α, $R_{O,\alpha}$; de $e^{i\alpha}\overline{z}$ se pasa a $e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}\overline{z}\right) = e^{i2\alpha}\overline{z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} P & R_{O,-\alpha} & & S_{(Ox)} & & R_{O,\alpha} & P' = S_\rho(P) \\ z & \longrightarrow & e^{-i\alpha}z & \longrightarrow & e^{i\alpha}\overline{z} & \longrightarrow & z' = e^{i2\alpha}\overline{z} \end{array}$$

Comentarios

No existe en $\mathbb{C}$ ninguna relación de orden total $\preceq$ que sea compatible con las operaciones de $\mathbb{C}$. De hecho, si existiera dicha relación, por la propiedad 6 de la proposición 4.37 debería verificarse que $i^2 = -1 \succeq 0$ y $1^2 = 1 \succeq 0$, que es una contradicción.

Aunque hay referencias anteriores a raíces cuadradas de números negativos, los números complejos aparecen claramente en el siglo XVI para encontrar las fórmulas que resuelven las ecuaciones polinómicas de grado 2 y 3, establecidas por Tartaglia y Cardano. El símbolo i, sustituyendo a $\sqrt{-1}$ empieza a utilizarse en el siglo XVIII, lo introduce Gauss, para evitar confusiones como la siguiente: Se aplicaba incorrectamente la igualdad algebraica $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, válida únicamente para números reales positivos, en

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1})^2 &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \end{aligned}$$

llegando a la contradicción $1 = -1$. Gauss introduce también la notación $a + ib$.

Por último, exponemos uno de los resultados más importante sobre los números complejos, aunque su demostración sobrepasa los conocimientos aquí desarrollados. Hemos construido el cuerpo de los números complejos de manera que la ecuación

$$z^2 = d$$

tuviera solución incluso para los números reales negativos. Hemos comprobado que también tiene solución en $\mathbb{C}$ cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes en $\mathbb{C}$. Finalmente, cualquier ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado mayor o igual a 1 tiene solución en $\mathbb{C}$. Este resultado se conoce como teorema fundamental del Álgebra, aunque curiosamente no existe ninguna demostración del teorema que sea puramente algebraica. En todas las demostraciones hay que hacer uso de resultados analíticos o topológicos. El teorema dice así:

Teorema 7.19 Teorema Fundamental del Álgebra
Toda ecuación polinómica en una variable, de grado al menos uno y con coeficientes complejos, tiene al menos una solución compleja.

Como consecuencia de este teorema se establece que todo polinomio de coeficientes complejos de grado $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se descompone en el producto de polinomios de grado uno, del tipo

$$a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

donde los z_i son las raíces del polinomio, no necesariamente distintas entre sí.
La propia historia del teorema prueba la importancia que los matemáticos del siglo XVIII en adelante le han atribuido. Con más o menos acierto, han intentado su demostración entre otros, D'Alembert, Argand, Euler, Lagrange, Laplace, Cauchy y Gauss.