Álgebra Lineal I

Nota importante: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envian más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema1

a) Demostrar que un sistema lineal $Ax^t = b^t$ en n incógnitas es compatible si y sólo si $rg(A) = rg(\widetilde{A})$. En tal caso, el sistema es determinado si y sólo si $rg(A) = n$. (1,5 puntos)

b) Se considera el sistema de ecuaciones $Ax^t = y^t$ con $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Sea S es el conjunto de soluciones del sistema.

Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y explicar razonadamente el motivo:

i) Si $rg(A) = rg(\widetilde{A})$, donde $\widetilde{A}$ es la matriz ampliada del sistema, entonces S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

ii) Si $Ax^t = 0^t$ es compatible indeterminado entonces si $y \in \mathbb{R}^n$ $Ax^t = y^t$ es también compatible indeterminado. (2 puntos)

Problema 2

Sea $K_3[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en el cuerpo K.

a) Probar que $\{(1+T)^3, T(1+T), T^2(1+T), T^3\}$ forman una base de $K_3[T]$, y hallar respecto a esta base las coordenadas de los polinomios, $1, T, T^2, T^3$. (1,5 puntos)

b) Hallar las matrices de los cambios de base correspondientes, respecto a la base estándar $\{1, T, T^2, T^3\}$. (1,5 puntos)

Problema 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y las bases

$B_1 = \{(2,1,0), (-1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,-2)(0,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Determinar las ecuaciones implícitas del núcleo e imagen de la aplicación lineal $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, representada por la matriz A, al considerar en los espacios de partida y de llegada las bases canónicas o estándar. (1,5 puntos)

b) Hallar la aplicación lineal f_2 representada por A si en $\mathbb{R}^3$ se considera la base B_1 y en $\mathbb{R}^2$ se considera la base B_2.(2 puntos)