Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sea $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la aplicación definida por

$$f(A) = \left\{ \frac{n-1}{2} \,\middle|\, n \in A \ \wedge \ n \text{ es impar} \right\}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se tiene:
a) f es una aplicación sobreyectiva.
b) f es una aplicación inyectiva.
c) $f^{-1}(\emptyset) = 2\,\mathbb{N}$.

Ejercicio 2

Sea $U = \mathbb{N}$ el universo de las variables x e y. Consideramos las proposiciones:
p; $\forall x\, \exists y$ tal que $x = 2y \ \vee \ x = 2y+1$.
q; $\exists x\, \forall y$ tal que $x = 2y \ \vee \ x = 2y+1$.
s; $\exists x\, \forall y$ tal que $x < y < x+2$.
r; $\forall x\, \exists y$ tal que $x < y < x+2$.
Se tiene:
a) p, q y s son falsas.
b) s y r son verdaderas.
c) p es verdadera y s es falsa.

Ejercicio 3

En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se considera la siguiente relación:

$$(n,m)\,\mathcal{R}\,(p,q) \quad \text{si y sólo si} \quad (n \leqslant p) \ \wedge \ (n^2 + m^2 \leqslant p^2 + q^2)$$

a) $\mathcal{R}$ no es una relación de orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
b) $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
c) $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio 4

Sean E un conjunto finito no vacío, C un subconjunto arbitrario de E y

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \cap C = \emptyset\}\,.$$

Si $n = \operatorname{card}(E)$ y $p = \operatorname{card}(C)$, entonces el cardinal de $\mathcal{H}$ es
a) $n - p$.
b) $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.
c) 2^{n-p}.

Ejercicio 5

Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario, I un ideal de A y (a) el ideal principal generado por un elemento $a \in A$. Consideramos los enunciados siguientes:
1) $I = A$ si y sólo si I contiene al elemento unidad.
2) $A = (a)$ si y sólo si a no es divisor de cero.
3) $A = (a)$ si y sólo si a es inversible.

Se tiene:
a) El enunciado de 1) es falso.
b) El enunciado de 2) es falso.
c) El enunciado de 3) es falso.

Soluciones

Ejercicio 1
La opción correcta es la a). En efecto, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sea el conjunto $A = \{2n+1 \mid n \in B\}$. Se cumple que $f(A) = B$. En consecuencia, f es una aplicación sobreyectiva.
f no es inyectiva pues por ejemplo $f\big(\{3\}\big) = f\big(\{2,3,4\}\big) = \{1\}$ y sin embargo $\{3\} \neq \{2,3,4\}$.
Como $f^{-1}(\emptyset) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid f(A) = \emptyset\}$ resulta que si $A \in f^{-1}(\emptyset)$ entonces $A \subset 2\mathbb{N}$ pues si A tuviera algún número impar n entonces $\frac{n-1}{2} \in f(A)$ y $f(A) \neq \emptyset$. Inversamente, si $A \subset 2\,\mathbb{N}$ entonces $f(A) = \emptyset$. En consecuencia, $f^{-1}(\emptyset) = \mathcal{P}(2\,\mathbb{N})$.

Ejercicio 2
La proposición p es verdadera pues $\forall x \in \mathbb{N}$, x es un número par o x es un número impar. En el primer caso existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2y$, mientras que en el segundo caso existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2y+1$.
La proposición q es falsa pues no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in \mathbb{N}$ se tenga una de las dos igualdades $x = 2y$ o $x = 2y+1$. No hay un x válido para todos los posibles $y \in \mathbb{N}$.
La proposición r es verdadera pues si x es cualquier número natural, existe $y \in \mathbb{N}$, basta tomar $y = x+1$, tal que $x < y < x+2$.
La proposición s es falsa pues no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in \mathbb{N}$ se tengan las desigualdades tal que $x < y < x+2$. Como en el caso de q, no hay un x válido para todos los posibles $y \in \mathbb{N}$.
La opción correcta es la c).

Ejercicio 3
La opción correcta es la b).
Veamos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En efecto:
Reflexiva: $(n,m)\,\mathcal{R}\,(n,m)$ pues $(n \leqslant m) \ \wedge \ (n^2+m^2 \leqslant n^2+m^2)$.
Antisimétrica: Para todo $(n,m),(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
si $(n,m)\,\mathcal{R}\,(p,q)$ y $(p,q)\,\mathcal{R}\,(n,m)$ entonces $(n \leqslant p) \ \wedge \ (n^2+m^2 \leqslant p^2+q^2) \ \wedge \ (p \leqslant n) \ \wedge \ (p^2+q^2 \leqslant n^2+m^2)$.
En consecuencia, $n = p \ \wedge \ m^2 = q^2$, y por tanto $(n,m) = (p,q)$.
Transitiva : Para todo $(n,m),(p,q),(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
si $(n,m)\,\mathcal{R}\,(p,q)$ y $(p,q)\,\mathcal{R}\,(r,s)$ entonces $(n \leqslant p) \ \wedge \ (n^2+m^2 \leqslant p^2+q^2) \ \wedge \ (p \leqslant r) \ \wedge \ (p^2+q^2 \leqslant r^2+s^2)$.
En consecuencia, $(n \leqslant r) \ \wedge \ (n^2+m^2 \leqslant r^2+s^2)$. Por tanto, $(n,m)\,\mathcal{R}\,(r,s)$.
El orden es parcial. En efecto, tomamos los pares $(1,4)$ y $(2,2)$. Se cumple que $1 \leqslant 2$ pero sin embargo no es cierto que $1^2+4^2 = 17$ sea menor o igual a $2^2+2^2 = 8$. Por tanto los pares $(1,4)$ y $(2,2)$ no son comparables.

Ejercicio 4
La opción correcta es la c). Basta observar que $\mathcal{H} = \mathcal{P}(E \setminus C)$.
De la proposición 5.15 se deduce que $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(C) + \mathrm{card}(E \setminus C)$ y en consecuencia $\mathrm{card}(E \setminus C) = n - p$.
Aplicando la proposición 5.20 se obtiene que $\mathrm{card}(\mathcal{H}) = 2^{n-p}$.

Ejercicio 5
La opción correcta es la b).
El enunciado de 1) es verdadero. En efecto, si $I = A$ entonces $1 \in I$. Recíprocamente si $1 \in I$, como I es ideal de A, entonces para todo $c \in A$ se cumple que $1 \cdot c = c \in I$. Por tanto, $A \subset I$ y como de partida $I \subset A$, resulta que $A = I$.
El enunciado de 2) es falso. Por ejemplo, para $A = \mathbb{Z}$ con la suma y producto habitual, tenemos que 2 no es divisor de cero y sin embargo $(2) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$.
El enunciado de 3) es verdadero. En efecto, si $A = (a)$ entonces $1 \in (a)$, es decir, existe $c \in A$ tal que $1 = ac$. Por tanto a es inversible. Recíprocamente si a es inversible, entonces existe $c \in A$ tal que $1 = ac$, y en consecuencia $1 \in (a)$. Del enunciado de 1) se deduce que $(a) = A$.