Unidad didáctica 4: Aplicaciones lineales

4.1 Introducción

En esta unidad didáctica se estudiarán la aplicaciones propias entre espacios vectoriales. Dados dos espacios vectoriales de dimensión finita U y V definidos sobre el mismo cuerpo K, una aplicación $f: U \to V$ es **lineal** si transforma combinaciones lineales de vectores del espacio de partida U en combinaciones lineales del espacio V de llegada:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)\ , \text{ para todo } u, v \in U;\ \alpha, \beta \in K.$$

Se dice que f respeta la estructura de los espacios vectoriales. A las aplicaciones lineales también se les llama **homomorfismos vectoriales**. Una de las características de estas aplicaciones es que transforman el cero del espacio vectorial de partida en el cero del espacio vectorial de llegada: $f(0_U) = 0_V$, aunque, igual que en el texto base, cuando no se produzca ambigüedad prescindiremos de la notación con subíndices y llamaremos 0 al elemento neutro de todo espacio vectorial, ya sea una matriz, un polinomio, una aplicación o un elemento de K_n.

Por cómo se comportan las aplicaciones lineales respecto a las combinaciones lineales de vectores, ocurre que conservan la dependencia lineal: si $u_1, \dots, u_n$ son vectores linealmente dependientes en U, entonces sus imágenes $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son vectores linealmente dependientes en V (eso no ocurre con la independencia lineal en general), y como consecuencia una aplicación lineal queda completamente determinada conocidas las imágenes de los vectores de una base del espacio de partida (pág. 147).

El conjunto formado por todas las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales U y V de denota por $\mathcal{L}(U, V)$ y tiene estructura de espacio vectorial para la suma de aplicaciones y el producto de una aplicación por un escalar.

Existen dos subespacios vectoriales asociados a una aplicación lineal dada $f: U \to V$ denominados núcleo e imagen. El **núcleo de f** es el conjunto de vectores de U cuya imagen es el 0 de V:

$$\ker(f) = \{u \in U: f(u) = 0\} \subset U$$

(ker viene de kernel, núcleo en inglés). Y la **imagen de f** es el subespacio vectorial de V generado por todas las imágenes de los vectores de U:

$$\operatorname{im}(f) = \{f(v):\ v \in U\} \subset V$$

Las dimensiones de estos subespacios guardan la siguiente relación (pág. 152):

$$\text{Fórmula de dimensiones:}\quad \dim\ker(f) + \dim im(f) = \dim(U)\,.$$

El estudio de estos subespacios vectoriales permite clasificar las aplicaciones en los siguientes tipos:

- Inyectivas o monomorfismos: si $\ker(f) = \{0\}$.
- Suprayectivas (o sobreyectivas) o epimorfismos: si $\operatorname{im}(f) = V$.
- Biyectivas o isomorfismos: inyectivas y sobreyectivas a la vez.

Cuando los espacios de partida y de llegada coinciden, esto es $f: V \to V$ entonces se dice que f es un endomorfismo y cuando es biyectivo se le llama automorfismo.

Otra de las operaciones entre aplicaciones lineales es la composición. Para realizar la **composición de dos aplicaciones lineales** f y g tenemos que tener espacios vectoriales U, V y W (no necesariamente distintos) definidos sobre el mismo cuerpo K. Si $f: U \to V$ y $g: V \to W$ entonces podemos definir la aplicación f compuesta con g, que se denota por $g \circ f$ del siguiente modo $g \circ f: U \to W,\ \ g \circ f(v) := g(f(v))$, para todo $v \in U$.

El **Primer Teorema de Isomorfía** (pág. 158) nos dice que toda aplicación lineal *f* se puede descomponer como la composición de 3 aplicaciones canónicamente asociadas a ella: una suprayectiva, una biyectiva y una tercera inyectiva.

En la Sección 4.3 se describen las aplicaciones lineales $f: U \to V$ mediante ecuaciones y matrices que relacionan las coordenadas de vectores respecto a bases fijadas B y B' en los espacios de partida y de llegada, respectivamente. Si $u \in U$, con coordenadas $u = (x_1, \dots, x_n)_B$ y su imagen es el vector $f(u) = (y_1, \dots, y_m)_{B'} \in V$, entonces existe una única matriz $\mathbf{M_{BB'}}$ de orden $m \times n$ que cumple:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_m} \end{pmatrix} = \mathbf{M_{BB'}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} \;\to\; \text{de forma abreviada } \mathbf{Y = MX}$$

para todo $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$. A esta expresión la denominaremos ecuaciones de *f* respecto de las bases $\boldsymbol{B}$ *y* $\boldsymbol{B'}$, y $\mathbf{M_{BB'}(f)}$ es la matriz de *f* respecto de las bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$. Las columnas de dicha matriz están formadas por las coordenadas en $\boldsymbol{B'}$ de las imágenes de los vectores de $\boldsymbol{B}$. Estaremos interesados en obtener matrices de una misma aplicación en distintas bases, y veremos cómo se relacionan dichas matrices con las matrices de cambio de base o de cambio de coordenadas.

Se dedica la Sección 4.4 al estudio de los endomorfismos o aplicaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo. En estos casos se considera la misma base en el espacio de partida y de llegada, que son el mismo Las matrices de un endomorfismo en distintas bases son matrices semejantes (. En la Sección 4.5 se estudian dos tipos de endomorfismos que tienen especial interés: las **proyecciones y las simetrías**.

La última Sección, la 4.6, se dedica al estudio del **espacio dual** V^* asociado a un K-espacio vectorial V. El dual está formado por todas las aplicaciones lineales $f: V \to K$, llamadas **formas lineales**. La dimensión de V y V^* coincide, y a partir de una base B de V se puede obtener una base de V^*, canónicamente asociada , denominada base dual. También se estudiará la relación existente entre los elementos de V^* y los hiperplanos de V.

4.2 Conceptos más importantes

- Aplicaciones lineales: Definición y propiedades.
- Las aplicaciones: identidad y nula. Homotecias.
- Imagen e imagen inversa de un conjunto.
- Subespacios núcleo e imagen.
- Fórmula de dimensiones.
- Aplicación inyectiva, suprayectiva (o sobreyectiva) y biyetiva.
- Homomorfismo, monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo (caracterizaciones).
- Isomorfismo de coordenadas (pág. 158).
- Primer Teorema de Isomorfía (pág. 158).
- Matriz de una aplicación lineal.
- Rango de una aplicación lineal.
- Ecuaciones o expresión analítica de una aplicación lineal.
- Semejanza de matrices.
- Endomorfismo. Grupo general lineal $GL(V)$.
- Proyección y simetría.
- Forma lineal.
- Espacio dual. Base dual.

4.3 Resultados del aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con precisión y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) más importantes.

Se desarrollarán las siguientes habilidades:

- Comprobar si una aplicación entre dos espacios vectoriales es lineal.
- Calcular la imagen de un vector cualquiera, conocidas las imágenes de los vectores de una base.
- Calcular la imagen y la imagen inversa de un conjunto por una aplicación lineal.
- Obtener ecuaciones, base y dimensión de los subespacios núcleo e imagen.
- Determinar el rango de una aplicación lineal.
- Clasificar una aplicación lineal: determinar si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.
- Obtener la matriz de una aplicación lineal en distintas bases.
- Determinar si una aplicación dada es una simetría o una proyección.
- Obtener la base dual de una base dada.