Ejercicios propuestos

1. Consideramos las operaciones y orden de $\mathbb{Q}$ restringidas al conjunto de los números decimales $\mathbb{D}$. Demuestre que $(\mathbb{D}, +, \cdot, \leqslant)$ es un anillo unitario, integro y ordenado. Justifique por qué $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

2. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, el número $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ no es un número decimal.

3. Sea el grupo multiplicativo $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$, y sea $H = \{a/b \in \mathbb{Q}^*_+ \mid a \leqslant b\}$. Se define en $\mathbb{Q}^*_+$ la relación $\ll$ por: $\alpha \ll \beta$ si y sólo si $\alpha\beta^{-1} \in H$.
Demuestre que la relación $\ll$ es una relación de orden total en $\mathbb{Q}^*_+$ compatible con el producto $\cdot$ de números racionales.

4. Sea la fracción irreducible a/b con $a, b \in \mathbb{N}^*$. Estudie si las fracciones
$$\frac{a+b}{a}, \quad \frac{a-b}{ab}, \quad \frac{a^2+b^2}{a+b}, \quad \frac{a^2+b^2}{ab}$$
son irreducibles.

5. Sean a y $b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí y tales que $b < a$. Se trata de ver que que existen enteros naturales $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ no nulos tales que
$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$
El desarrollo anterior se denomina **fracción continua** y se escribe abreviadamente $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.
Ejemplo: Supongamos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{217}{52}$, que es una fracción irreducible. Hágase las divisiones enteras de 217 entre 52, de 52 entre 9, de 9 entre 7 y de 7 entre 2. Deduzca los valores de $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ tales que
$$\frac{217}{52} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

En general, dado $\frac{a}{b}$ fracción irreducible con $a, b \in \mathbb{N}^*$, para demostrar la existencia de la fracción continua $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \frac{a}{b}$, utilice el algoritmo de Euclides para hallar el $\mathrm{mcd}(a, b)$ y tenga en cuenta que, para todo $p, q \in \mathbb{N}^*$ tales que $p > q$,

$$\begin{array}{lll} \text{si} & p = cq + r & \text{con} \quad 0 < r < q \\ \text{entonces} & \dfrac{p}{q} = c + \dfrac{r}{q} = c + \dfrac{1}{\dfrac{q}{r}}. & \end{array}$$

6. Explicite el conjunto de los números reales que verifican cada una de las siguientes desigualdades:

   a) $|x+1| < 2$
   b) $|x| > |x+1|$
   c) $|x+2| + |x-2| < 12$
   d) $x < x^2 - 12 < 4x$
   e) $(x+1)/(x-1) \geqslant 0$
   f) $x^2 < |1-x| + 1$
   g) $|x(1-x)| \leqslant 1/2$
   h) $\big|\, |x+1| - |x-1| \,\big| < 1$

7. Determine el supremo y el ínfimo en $\mathbb{R}$, si existen, de los siguientes conjuntos, indicando si son máximos o mínimos.

   a) $A = \{x^2 \mid -2 \leq x < 1\}$
   b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 4 < 0\}$
   c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 > 0\}$
   d) $A = \{(n+1)/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
   e) $A = \left\{ \dfrac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

8. a) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$, existe un número natural n tal que:
$$\frac{2n+2}{3n+1} - \frac{2}{3} < x$$
   b) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que:
$$\frac{n^2+n}{n-1} > x$$

9. Exprese $1/7$ y $7/6$ como decimales periódicos.

10. Escriba en forma de fracción los números racionales representados por las expresiones decimales periódicas siguientes:

$$1,222222\ldots \qquad 1,212121\ldots \qquad 1,21210210\ldots$$

11. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demuestre que existen $\sup A$ e $\text{ínf}\, B$ y que, además, $\sup A \leqslant \text{ínf}\, B$. ¿Se puede asegurar que $\sup A \neq \text{ínf}\, B$?

12. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y sea el conjunto:

$$C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Demuestre que si A y B están acotados superiormente (resp. inferiormente) entonces C está acotado superiormente (resp. inferiormente) y $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$ (resp. $\text{ínf}(C) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$).

13. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}_+$ y sea el conjunto:

$$D = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

Demuestre que si A y B están acotados superiormente (resp. inferiormente) entonces D está acotado superiormente (resp. inferiormente) y $\sup(D) = \sup(A)\sup(B)$ (resp. $\text{ínf}(D) = \text{ínf}(A)\,\text{ínf}(B)$). ¿Se puede asegurar que la propiedad es cierta si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$?

14. Sean I un conjunto no vacío y $\{[a_i, b_i] \mid i \in I\}$ una familia de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ tal que dos intervalos cualesquiera de la familia tienen al menos un punto en común. Demuestre que los conjuntos $\{a_i \mid i \in I\}$ y $\{b_i \mid i \in I\}$ están respectivamente acotados superior e inferiormente. Deduzca que $\bigcap_{i \in I}[a_i, b_i] \neq \emptyset$.

15. Se considera el subconjunto de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

dotado con las restricciones a $\mathbb{K}$ de la suma y del producto en $\mathbb{R}$. Demuestre que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

16. Demuestre que los conjuntos $(0, 1]$ y $[0, 1]$ son equipotentes. Lo mismo con $[0, 1)$ y $[0, 1]$.

17. Demuestre que los conjuntos $(0, 1)$ y $[0, 1]$ son equipotentes.

18. Demuestre que la aplicación $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ para todo $x \in (-1,1)$, es una biyección.

19. Ponga un ejemplo de aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ en (a,b).

20. Se dice que un número real es **algebraico** si es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros. En caso contrario se denomina **trascendente**.

    a) Demuestre que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

    b) Deduzca que el conjunto de los números trascendentes no es numerable.