Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2023, primera semana.

En cada pregunta hay una única opción correcta. Cada pregunta acertada: 1 punto; cada pregunta incorrecta: $-0,5$ puntos. Las preguntas sin contestar no suman ni restan puntos. Entregue únicamente la hoja de respuestas.

Material permitido: un único libro de teoría de Álgebra Lineal.

1. Si A es una matriz no nula de orden n idempotente, es decir $A^2 = A$, entonces

   (a) La matriz $A + I_n$ es idempotente.

   (b) $(I_n + A)^2 - 2A^2 = \lambda I_n$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$.

   (c) $I_n - A$ es idempotente.

2. Sea A una matriz de orden $m \times n$ escalonada reducida por filas y con $r < \min\{m, n\}$ pivotes. Entonces,

   (a) A es equivalente por filas a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ de orden $m \times n$.

   (b) A es equivalente por columnas a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ de orden $m \times n$.

   (c) A no es equivalente a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ de orden $m \times n$.

3. Sea $AX = B$ un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas. Si la forma de Hermite por filas de la matriz ampliada $(A|B)$ tiene la última fila nula, entonces

   (a) el sistema no puede ser incompatible.

   (b) si $m = n$, el sistema es compatible indeterminado.

   (c) existe al menos una ecuación en el sistema $AX = B$ que puede ser eliminada obteniendo un sistema equivalente.

4. Dado el plano P de $\mathbb{K}^4$ de ecuaciones implícitas $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 2x_3 + x_4 = 0\}$ y el espacio cociente $\mathbb{K}^4/P$, se cumple que:

   (a) $(a, -a + b, -b, 2b) + P = P$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$.

   (b) una base de $\mathbb{K}^4/P$ es $\{(0, 1, -1, 0) + P,\ (0, 0, 0, 1) + P\}$.

   (c) $(1, 1, 0, 0) + P = (0, 0, 2, 3) + P$.

5. Sea $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_6[x]$ la aplicación definida por $f(p(x)) = x^3 p(x) + p'(x)$ donde $p'(x)$ denota la derivada del polinomio $p(x)$ de $\mathbb{K}_3[x]$. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (a) f no es lineal.

   (b) f es lineal e inyectiva.

   (c) f es lineal y no inyectiva.

6. Sea $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de f respecto a las bases $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,0,2),\ (1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (0,0,0,1)\}$ es

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere las preguntas 7, 8, 9 y 10 en conjunto.

7. Sean a un número real y A la siguiente matriz real $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, entonces

   (a) $\det(A) = 3a^4 - 2a^2 + 1$
   (b) $\det(A)$ es un múltiplo de $1 - 3a^2$
   (c) $\det(A) = a^5 + 3a^4 + 4a^2 + 1$

8. Sean $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz de la pregunta anterior, entonces

   (a) Si $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, A es invertible.
   (b) El rango de A es menor que 4 exactamente para cuatro valores distintos de a.
   (c) Si $a = 1$, existe una matriz $B \neq 0$ tal que $BA = 0$.

9. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base de $\mathbb{K}^5$ y considérense los vectores

   $$u_1 = v_1 + av_2,\ u_2 = av_1 + v_2 + av_3,\ u_3 = av_2 + v_3 + av_4,\ u_4 = av_3 + v_4 + av_5,\ u_5 = av_4 + v_5$$

   (a) Si $a = 2$, los subespacios $L(u_1, u_2, u_3)$ y $L(u_4, u_5)$ son suplementarios en $\mathbb{K}^5$.
   (b) Si $a = 1$, entonces $\{u_1, \dots, u_5\}$ es una base de $\mathbb{K}^5$.
   (c) Los vectores $\{u_1, \dots, u_5\}$ generan un hiperplano de $\mathbb{K}^5$ sólo si $a^2 = 1$.

10. Considere $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_5\}$ y $\{u_1, \dots, u_5\}$, los vectores de la pregunta anterior, y los subespacios $U = L(u_1, u_2)$ y $W = L(u_4, u_5)$. Si $a = 1$, entonces

    (a) El subespacio suma $U + W$ no contiene a las rectas $L(v_1)$ ni $L(v_5)$.
    (b) Una base del subespacio suma $U + W$ está formada por los vectores $\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$.
    (c) El subespacio intersección $U \cap W$ tiene ecuaciones implícitas $x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = x_4 = x_5 = 0$ respecto de $\mathcal{B}$.

Soluciones

1. Si A es una matriz no nula de orden n idempotente, es decir $A^2 = A$, la matriz $A + I_n$ no tiene por qué ser idempotente. Por ejemplo, si $A = I_n$, se tiene que $A + I_n = 2I_n$ que no lo es. La matriz $I_n - A$ sí es idempotente ya que

$$(I_n - A)^2 = I_n - A - A + A^2 = I_n - A - A + A = I_n - A$$

   La matriz $(I_n + A)^2 - 2A^2 = I_n + A + A + A^2 - 2A^2 = I_n + A$ que no tiene por qué ser de la forma λI_n, pues para ello A tendría que ser una matriz escalar, es decir de la forma μI_n. Un contraejemplo: $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sea A una matriz de orden $m \times n$ escalonada reducida por filas y con $r < \min\{m, n\}$ pivotes. Entonces, $A = H_f(A)$ y tiene $m - r$ filas nulas. Los r pivotes de A no tienen por qué estar en las r primeras columnas, por lo que (a) es falsa. Si los r pivotes de A están en las columnas $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$, podemos hacer intercambios de columnas para situarlos en las columnas $C_1, \ldots, C_r$, por lo que A es equivalente por columnas a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, lo que hace que (b) sea la opción correcta.

3. Sea $AX = B$ un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas. Si la forma de Hermite por filas de la matriz ampliada $(A|B)$ tiene la última fila nula, entonces el rango de $(A|B)$ es menor que el número de ecuaciones, es decir, que al menos una de las ecuaciones es combinación lineal de las demás, es decir es redundante y se puede eliminar obteniendo un sistema equivalente. Entonces, (c) es la opción correcta.

   El sistema puede ser incompatible si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$, por lo que (a) es incorrecta. Si $m = n$, el sistema será compatible indeterminado si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$, y será incompatible si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$, lo que hace (b) incorrecta.

4. Dado el plano P de $\mathbb{K}^4$ de ecuaciones implícitas $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_3 + x_4 = 0\}$ y el espacio cociente $\mathbb{K}^4/P$, se cumple que $(a, -a+b, -b, 2b) + P = P$ si y sólo si $(a, -a+b, -b, 2b) \in P$, lo que se comprueba fácilmente sin más que sistiuir las componentes de los vectores $(a, -a+b, -b, 2b)$ en las ecuaciones de P.

5. La aplicación $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_6[x]$ definida por$f(p(x)) = x^3p(x) + p'(x)$ es lineal ya que para todo $p(x), q(x) \in \mathbb{K}_3[x]$ y todo $a, b \in \mathbb{K}$ se cumple

$$\begin{aligned} f(ap(x) + bq(x)) &= x^3(ap(x) + bq(x)) + (ap(x) + bq(x))' \\ &= x^3(ap(x) + bq(x)) + ap'(x) + bq'(x) \\ &= a(x^3p(x) + p'(x)) + b(x^3q(x) + q'(x)) \\ &= af(p(x)) + bf(q(x)) \end{aligned}$$

   Y es inyectiva ya que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{p(x) : f(p(x)) = 0\} = \{p(x) : x^3p(x) = -p'(x)\} = \{0\}$$

   pues si $p(x) \neq 0$, los polinomios $x^3p(x)$ y $p'(x)$ tienen distinto grado.

6. Sea $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathcal{B} = \{(1,0,0,2),\, (1,1,1,0),\, (1,1,0,0),\, (0,0,0,1)\}$ otra base de $\mathbb{K}^4$. Las columnas de la matriz de f en las bases $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{B}$ está formada por las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de los vectores

$$f(1,0,0) = (1,0,0,2),\;\; f(0,1,0) = (1,1,1,0),\;\; f(0,0,1) = (1,1,0,0)$$

como estos vectores pertenecen a $\mathcal{B}$, sus coordenadas se calculan trivialmente

$$f(1,0,0) = (1,0,0,2) = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}},\;\; f(0,1,0) = (0,1,0,0)_{\mathcal{B}},\;\; f(0,0,1) = (1,1,0,0) = (0,0,1,0)_{\mathcal{B}}$$

por lo que la opción correcta es la (b)

Considere los ejercicios 7, 8, 9 y 10 en conjunto.

La matriz A es la matriz de coordenadas por filas de los vectores $\{u_1, \dots, u_5\}$ respecto de $\mathcal{B}$. Sobre ella tenemos que calcular el determinante y rango, y nos interesa también manejar conjuntos de vectores equivalentes, por lo que si sólo aplicamos operaciones elementales de filas para estudiar estos conceptos, los cálculos nos sirven para responder a las 4 preguntas.

7. Hacemos las operaciones elementales de filas: $f_2 \to f_2 - af_1$ y $f_4 \to f_4 - af_5$, que no alterna el rango ni el determinante. Después, desarrollamos el determinante según la fórmula de Laplace por la primera y última columnas:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-a^2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

desarrollando el determinante de orden 3 se tiene

$$\det(A) = (1-a^2)^2 - 2a^2(1-a^2) = (1-a^2)(1-a^2-2a^2) = (1-a^2)(1-3a^2)$$

por lo que la respuesta correcta es la (b). Haciendo el producto de factores comprobamos que $\det(A) = 3a^4 - 4a^2 + 1$, lo que hace incorrectas las opciones (a) y (c).

8. Los valores que hacen el determinante igual a 0 son: 1, -1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; y para estos valores A no es invertible, luego (a) es incorrecta. Por otro lado, que A sea invertible es una condición necesaria y suficiente para que $BA \neq 0$ para toda matriz $B \neq 0$; entonces, si $a = 1$, A no es invertible, y sí existe una matriz B, no nula, tal que $AB = 0$, lo que hace que (c) sea la opción correcta.

   Finalmente, el rango de A nunca es menor que 4. El rango de A es igual a 5 salvo para los valores que hacen el determinante igual a 0, que son: 1, -1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Para estos cuatro valores el rango de A es igual a 4.

9. Si $a=1$, entonces $\dim(L(u_1,\ldots,u_5)) = \mathrm{rg}(A) < 5$, por lo que $\{u_1,\ldots,u_5\}$ no es una base de $\mathbb{K}^5$.

   Los vectores $\{u_1,\ldots,u_5\}$ generan un hiperplano de $\mathbb{K}^5$ si $\dim(L(u_1,\ldots,u_n)) = \mathrm{rg}(A) = 4$, lo que ocurre cuando $a^2=1$ y también cuando $a^2=\frac{1}{3}$.

   Finalmente, los subespacios $L(u_1,u_2,u_3)$ y $L(u_4,u_5)$ son suplementarios en $\mathbb{K}^5$ si y sólo $\{u_1,\ldots,u_5\}$ es una base de $\mathbb{K}^5$; es decir, si $\dim(L(u_1,\ldots,u_5)) = \mathrm{rg}(A) = 5$, lo que se cumple para $a=2$, y hace que (a) sea la opción correcta.

10. Consideramos $a=1$ y los subespacios $U=L(u_1,u_2)$ y $W=L(u_4,u_5)$. Un sistema generador de $U+W$ es $\{u_1,u_2,u_4,u_5\}$ y $\dim U+W = \mathrm{rg}\{u_1,u_2,u_4,u_5\}$, lo que determinará la dimensión del subespacio $U\cap W$. Estudiamos el rango de estos vectores aprovechando las operaciones hechas a la matriz A anteriormente

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccccc||l} 1 & a & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & a & 1 & a & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & u_5 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccccc||l} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_2-u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_4-u_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & u_5 \end{array}\right)$$

   Vemos que $\mathrm{rg}\{u_1,u_2,u_4,u_5\}=3$, por lo que $\dim(U+W)=3$ y (b) es incorrecta. Usando la fórmula de dimensiones, deducimos que $\dim(U\cap W)=1$, y mirando la última matriz, vemos que $u_2-u_1=u_4-u_5$, por lo que ambos son vectores de la intersección. En concreto, $u_1-u_2=(0,0,1,0,0)_{\mathcal{B}}=v_3$ es una base de $U\cap W$, lo que hace (c) incorrecta.

   Finalmente, es fácil ver que el subespacio $U+W$ no contiene a las rectas $L(v_1)$ ni $L(v_5)$. Tomamos la base de $U+W$ que extraemos de la última matriz:

$$\mathcal{B}_{U+W} = \{u_1=(1,1,0,0,0)_{\mathcal{B}},\ u_2-u_1=(0,0,1,0,0)_{\mathcal{B}},\ u_5=(0,0,0,1,1)_{\mathcal{B}}\}$$

   y comprobamos fácilmente usando matrices de coordenadas que $\mathrm{rg}\{u_1,u_2-u_1,u_5,v_1\}=4$ y $\mathrm{rg}\{u_1,u_2-u_1,u_5,v_5\}=4$, por lo que $v_5\notin U+W$ y $v_1\notin U+W$.