Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2018, Segunda Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.

Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

(a) Matriz escalonada reducida.

(b) Suma de subespacios vectoriales.

(c) Sistema generador y base de un espacio vectorial

(d) Aplicación lineal inyectiva (o monomorfismo) y sobreyectiva (o epimorfismo).

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demuestre que el rango de A es igual a n si y sólo si A es igual al producto de matrices elementales.

Ejercicio 2: (2.5 puntos)

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{K}^4$ respecto de la cual se dan los subespacios vectoriales U, W y R siguientes

$$W = L(v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 - 2v_2,\ -v_1 + 8v_2 + 2v_3), \quad R = L(v_2 + v_3)$$

$$U \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Justifique si U y W son suplementarios en $\mathbb{K}^4$.

(b) Determine el subespacio $R + U$.

Ejercicio 3: (3.5 puntos)

Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que cumple las siguientes condiciones:

(1) Es una proyección, es decir $p \circ p = p$,

(2) $p(2, 1, 1) = (3, 0, 0)$ y $p(1, 2, 1) = (3, 0, -1)$.

(a) Determine su matriz en la base canónica.

(b) Obtenga unas ecuaciones implícitas de los subespacios base y dirección de dicha proyección.

Ejercicio 1: Es el Teorema 1.46, página 32.

Ejercicio 2: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{K}^4$ respecto de la cual se dan los subespacios vectoriales U, W y R siguientes

$$W = L(v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 - 2v_2,\ -v_1 + 8v_2 + 2v_3), \quad R = L(v_2 + v_3)$$

$$U \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Justifique si U y W son suplementarios en $\mathbb{K}^4$.
(b) Determine el subespacio $R + U$.

Solución:

(a) Primero calculamos las dimensiones y una base de cada subespacio

$$\dim W = \operatorname{rg}(v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 - 2v_2,\ -v_1 + 8v_2 + 2v_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde usamos la matriz de coordenadas por filas respecto de la base $\mathcal{B}$. Podemos estudiar el rango de diferentes formas. Vamos a hacer operaciones elementales de filas que transformarán el conjunto de vectores en otro equivalente y determinaremos a la vez la dimensión y una base de W.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Entonces, $\dim W = 2$ y una base de W es

$$\mathcal{B}_W = \{\, v_1 + v_2 + v_3 = (1,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ -3v_2 - v_3 = (0,-3,-1,0)_{\mathcal{B}}\}$$

Seguimos con el subespacio U: $\dim U = \dim \mathbb{K}^4 - (\text{n}^{\text{o}}\ .\ \text{ecs. implícitas}) = 4 - 2 = 2$ y para determinar una base de este plano hay que resolver el sistema de ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \quad -3\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = 0 \end{cases}$$

Llamando $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$ y despejando las incógnitas principales x_1 y x_2 obtenemos la solución que determina unas ecuaciones paramétricas de U:

$$\begin{cases} x_1 = \quad + \frac{1}{3}\,\mu \\ x_2 = \lambda + \frac{2}{3}\,\mu \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \quad \mu \end{cases}$$

dando a (λ, μ) los valores $(1,0)$ y $(0,3)$ obtenemos la base de U:

$$\mathcal{B}_U = \{\, v_2 + v_3 = (0,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ v_1 + 2v_2 + 3v_4 = (1,2,0,3)_{\mathcal{B}}\}$$

Los subespacios U y W son suplementarios si y sólo si

$$\mathbb{K}^4 = U + W \quad \text{y} \quad U \cap W = \{0\}$$

o equivalentemente si uniendo una base de U y una base de W obtenemos una base de $\mathbb{K}^4$:

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(0,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ (1,2,0,3)_{\mathcal{B}}, (1,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ (0,-3,-1,0)_{\mathcal{B}}\}$$

$\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{K}^4$ si y sólo si los 4 vectores son linealmente independientes, es decir si la matriz de coordenadas (por filas o columnas) tiene rango 4 o determinante distinto de 0.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 6$$

(b) En primer lugar, conviene hacer una simple comprobación para ver si la recta R está contenida, o no, en el plano U; pues si estuviera contenida, entonces $R + U = U$ y habríamos terminado. El vector generador de R es $v_2 + v_3 = (0,1,1,0)_{\mathcal{B}}$ que ya hemos visto que pertenece a U, pues lo hemos obtenido como uno de los vectores de la base de U. Si no lo hubiéramos obtenido directamente, bastaría comprobar que sus coordenadas son solución de las ecuaciones implícitas de U. Entonces, $R \subset U$ y como $R + U$ es el menor subespacio vectorial que contiene a R y a U, se tiene que $R + U = U$.

Ejercicio 3: Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que cumple las siguientes condiciones:

(1) Es una proyección, es decir $p \circ p = p$,

(2) $p(2,1,1) = (3,0,0)$ y $p(1,2,1) = (3,0,-1)$.

(a) Determine su matriz en la base canónica.

(b) Obtenga unas ecuaciones implícitas de los subespacios base y dirección de dicha proyección.

Solución:

(a) En primer lugar, para determinar completamente la proyección, como aplicación lineal que es, hay que obtener las imágenes de los vectores de una base. Nos dan las imágenes de dos vectores linealmente independientes $u_1 = (2,1,1)$ y $u_2 = (1,2,1)$. La imagen de un tercero hemos de obtenerla de la condición $p \circ p = p$ a partir de la cual podemos deducir que

$$\begin{aligned} p(3,0,0) &= p(p(2,1,1)) = p^2(2,1,1) = p(2,1,1) = (3,0,0) \\ p(3,0,-1) &= p(p(1,2,1)) = p^2(1,2,1) = p(2,1,1) = (3,0,-1) \end{aligned}$$

Tomamos $u_3 = (3,0,0)$ y comprobamos que los vectores u_1, u_2 y u_3 son linealmente independientes, por lo que forman una base a la que llamamos $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$. Para determinar la matriz de la aplicación lineal en la base canónica

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

podemos resolver el problema por distintos métodos:

Método 1: Calculando las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de las imágenes $f(v_1)$, $f(v_2)$ y $f(v_3)$. Para ello hay que calcular previamente las coordenadas de los vectores v_1, v_2 y v_3 respecto de $\mathcal{B}'$ y aplicar la linealidad de f.

$$\begin{array}{rcl} v_1 = \frac{1}{3}u_3 = (0,0,\frac{1}{3})_{B'} & \Rightarrow & f(v_1) = \frac{1}{3}f(u_3) = \frac{1}{3}(3,0,0) = (1,0,0) \\ v_2 = -u_1 + u_2 + \frac{1}{3}u_3 = (-1,1,\frac{1}{3})_{B'} & \Rightarrow & f(v_2) = -f(u_1) + f(u_2) + \frac{1}{3}f(u_3) = (1,0,-1) \\ v_3 = 2u_1 - u_2 - u_3 = (2,-1,-1)_{B'} & \Rightarrow & f(v_3) = 2f(u_1) - f(u_2) - f(u_3) = (0,0,-1) \end{array}$$

Luego la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Método 2: Imponiendo las condiciones que tiene que cumplir la matriz de f en cuanto a la transformación de las coordenadas de los vectores en las de sus imágenes. Es decir, si la matriz de f en la base canónica $\mathcal{B}$ es $M_{\mathcal{B}}(f)$ entonces debe cumplir:

$$M_{\mathcal{B}}(f)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{B}}(f)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, d = 0, g = 0$$

Sustituímos los valores ya calculados de la matriz e imponemos otra de las condiciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + b + c = 3 \\ e + f = 0 \\ h + i = 0 \end{array} \right. \Rightarrow c = 1 - b, f = -e, i = -h$$

Simplificamos la matriz eliminando incógnitas e imponemos la tercera condición

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1-b \\ 0 & e & -e \\ 0 & h & -h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2b + 1 - b = 3 \\ 2e - e = 0 \\ 2h - h = -1 \end{array} \right. \Rightarrow b = 1, e = 0, h = -1$$

Método 3: Con matrices de cambio de base

Con los datos del ejercicio se determina de forma directa la matriz de p en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos piden la matriz de p en la base $\mathcal{B}$, es decir la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(p)$ y para obtenerla hay que hacer primero un cambio de base en el espacio de partida de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, utilizando la correspondiente matriz de cambio de base que denotamos por $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, y a continuación hacer actuar la matriz de p que conocemos: $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(p)$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(p) \quad = \quad \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(p) \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En todo caso, es bueno comprobar que la matriz que hemos obtenido es la de una proyección, es decir una matriz idempotente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **Método 1:** El subespacio vectorial base de la proyección p es el conjunto de vectores fijos por p, es decir

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ p(x, y, z) = (x, y, z)\}$$

matricialmente:

$$p(x, y, z) = (x, y, z) \ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde se obtienen unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial base de la proyección

$$B \equiv \{ \, y = 0 \, \}$$

El subespacio vectorial dirección de la proyección es el subespacio formado por los vectores cuya imagen por p es el vector 0, es decir, el núcleo de p:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ p(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

matricialmente:

$$p(x, y, z) = (0, 0, 0) \ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtienen unas ecuaciones implícitas del subespacio dirección de la proyección

$$D \equiv \{ \, x + y = 0, \ -y + z = 0 \, \}.$$

Método 2: Sin utilizar la matriz de p.

El subespacio B base de la simetría es el subespacio $\mathrm{Im}(p)$, a él pertenecen los vectores $(3, 0, 0)$ y $(3, 0, -1)$, por ser imágenes por p de vectores de $\mathbb{R}^3$. Este subespacio no puede tener dimensión mayor que 2, pues la dirección tiene que tener dimensión al menos 1. Luego $B = L((3, 0, 0), (3, 0, -1)$, y su ecuación implícita $x_2 = 0$. Por otro lado, un vector del subespacio dirección, que es el núcleo de la aplicación lo podemos obtener restando dos vectores con la misma imagen:

$$f(2, 1, 1) = f(3, 0, 0) = (3, 0, 0) \ \Rightarrow \ f((2, 1, 1) - (3, 0, 0)) = (0, 0, 0) \ \Rightarrow \ (-1, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(f) = D$$

Como B y D son suplementarios y $\dim B = 2$, entonces D es una recta y así $D = L(-1, 1, 1)$.