Examen de Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- A) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Encontrar $det(A^{-1}.A^t.A)$ (A^t es la matriz traspuesta de A). (1 punto)

B) Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = 0$. Demostrar que $I_n + A$ es invertible (I_n matriz identidad de orden n). (1,5 puntos)

2.-Sean $a, b \in R$ y sea $f : R^3 \to R^3 : x \to y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y consideremos el vector $u = (b, 1+b, 4)$.

A) Determinar a y b para que $u \in im(f) \neq R^3$. Obtener las ecuaciones implícitas y paramétricas de $im(f)$ y $\ker(f)$. (3 puntos)

B) Encontrar un subespacio $L \subset R^3$ de dimensión mínima entre los que cumplen que $f(L) = im(f)$. (1 puntos)

3.- Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un espacio vectorial E y sean: i) U el subespacio con ecuaciones $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$ respecto de B. ii) W el subespacio de E generado por los vectores $\omega_1 = u_1 + u_2, \omega_2 = u_1 - u_3, \omega_3 = u_1 + u_4$.

A) Calcular las dimensiones de U y W. (1,5 puntos)

B) Calcular las dimensiones de $U \cap W$ y $U + W$. (2 puntos)