Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua, curso 2017/18

Matrices, Sistemas lineales y Espacios Vectoriales

Ejercicio 1: (2.5 puntos)
Demuestre que si A es una matriz de tamaño 3×1 y B es una matriz de tamaño 1×3, entonces la matriz AB no es invertible. Determine el rango de AB si A y B no son nulas.

Solución: Si A o B son nulas, entonces $AB = 0$ no es invertible, y en particular su rango es 0.

Supongamos $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ y $B = (b_1 \ b_2 \ b_3)$ no nulas. La matriz AB es

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

se puede ver que todas sus filas y columnas son proporcionales:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} a_1B \\ \hline a_2B \\ \hline a_3B \end{array} \right).$$

Sabiendo que AB es invertible si y sólo si $\operatorname{rg}(AB) = 3$, entonces podemos afirmar que AB no es invertible pues su rango, que es igual al número de filas (o de columnas) independientes, es igual a 1.

Otro modo de demostrar que AB no es invertible es comprobando que $\det AB = 0$.

Ejercicio 2: (1.5 puntos)
Sin desarrollar el siguiente determinante, demuestre que es igual a 0.

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix}.$$

Solución: Si aplicamos las siguientes operaciones elementales de columnas $c_4 \longrightarrow c_4 + c_3 + c_2 + c_1$ tenemos:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1+a+b+c+d \\ 1 & b & c & 1+a+b+c+d \\ 1 & c & d & 1+a+b+c+d \\ 1 & d & a & 1+a+b+c+d \end{pmatrix}.$$

y al tener dos columnas proporcionales (o linealmente dependientes) $C_4 = (1+a+b+c+d)C_1$ entonces el determinante es 0.

Ejercicio 3: (3 puntos)
Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$ formado por las soluciones de siguiente sistema lineal homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & a\,y & + & z & + & t=0 \\ 2x & + & (1+2a)\,y & + & 2z & + & (a+2)\,t=0 \\ x & + & a\,y & + & az & + & t=0 \end{array}\right.$$

Determine el valor de $a \in \mathbb{K}$ sabiendo que U es un plano de $\mathbb{K}^4$ y encuentre una base de U resolviendo el sistema.

Solución: Si escribimos el sistema lineal de forma abreviada como $AX = 0$, entonces, por el Teorema 3.55, pág. 127, sabemos que el conjunto de soluciones determina un subespacio vectorial U, de $\mathbb{K}^4$, de dimensión $4 - \operatorname{rg}(A)$. El subespacio U es un plano si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = 2$. Así que determinamos los valores a tales que $\operatorname{rg}(A) = 2$. Escalonamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & (1+2a) & 2 & (a+2) \\ 1 & a & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Así, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') = 2$ si y sólo si $a = 1$.

Siendo $a = 1$, resolvemos el sistema equivalente $A'X = 0$ para encontrar una base de U:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t=0 \\ & & y & + & & + & t=0 \end{array}\right.$$

Llamando $z = \lambda$, $t = \mu$ y despejando las incógnitas restantes se tienen las soluciones que determinan las ecuaciones paramétricas de U

$$\left\{\begin{array}{rrr} x = & -\lambda & \\ y = & & -\mu \\ z = & \lambda & \\ t = & & \mu \end{array}\right.$$

o lo que es lo mismo

$$(x, y, z, t) = \lambda(-1, 0, 1, 0) + \mu(0, -1, 0, 1)$$

Una base de U está formada por los vectores $(-1, 0, 1, 0)$ y $(0, -1, 0, 1)$.

Ejercicio 4: (3 puntos)
En $\mathbb{K}_4[x]$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 4 con coeficientes en $\mathbb{K}$, determine:

(a) Una base que no contenga polinomios de grado 3 y grado 2.
(b) Si existe alguna base que no contenga polinomios de grado 4.
(c) Un subespacio suplementario del subespacio generado por los polinomios

$$p(x) = -1 + 2x + x^2 \text{ y } \; q(x) = 1 + x + x^2$$

Sugerencia: utilice matrices de coordenadas por filas (o columnas)

Solución: En primer lugar, recordamos que la dimensión de $\mathbb{K}_4[x]$ es 5, y que la base canónica es $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Para determinar una base formada por 5 polinomios linealmente independientes, lo más sencillo es trabajar con matrices de coordenadas, tal y como se sugiere. Si la matriz de coordenadas de un conjunto de 5 polinomios tiene rango 5, o equivalentemente determinante distinto de 0, entonces los polinomios formarán una base (Proposición 3.34, pág. 112) .

(a) Una base que no contenga polinomios de grado 3 y grado 2 podría ser

$$\mathcal{B}' = \{1,\ x,\ x^2 + x^4,\ x^3 + x^4,\ x^4\}$$

pues su matriz de coordenadas por filas respecto de $\mathcal{B}$ tiene rango 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) No existe ninguna base que no contenga polinomios de grado 4. Basta razonar que cualesquiera polinomios de grado menor o igual que 3, nunca generarán por combinaciones lineales un polinomio de grado 4, luego nunca serían un sistema generador, y en particular una base, de $\mathbb{K}_4[x]$.

Otro modo de justificar que no existen bases de $\mathbb{K}_4[x]$ que no contengan polinomios de grado 4 es argumentando que la matriz de coordenadas por filas (respecto de $\mathcal{B}$) siempre tendría la última columna nula, y por tanto no tendría rango 5.

(c) Representamos los polinomios mediante coordenadas $p(x) = (-1, 2, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ y $q(x) = (1, 1, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$. Si $U = L(p(x), q(x))$, como p y q son linealmente independientes, entonces $\dim U = 2$ y un suplementario de U tendrá dimensión 3 y estará generado por tres polinomios $r_1(x), r_2(x)$ y $r_3(x)$ tales que $\{p(x), q(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x)\}$ formen una base de $\mathbb{K}_4[x]$. Véase la Proposición 3.66, pág. 133. Para determinar estos polinomios basta con tomarlos de modo que la matriz de coordenadas por filas (o columnas) tenga rango 5. Nos sirven

$$r_1(x) = x^2,\ r_2(x) = x^3,\ r_3(x) = x^4$$

ya que

$$\det \mathfrak{M}_{\mathcal{B}} \left\{ \begin{array}{c} p(x) \\ \hline q(x) \\ \hline r_1(x) \\ \hline r_2(x) \\ \hline r_3(x) \end{array} \right\} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

Nótese que la matriz no es escalonada, pero al ser triangular por bloques su determinante es muy fácil de calcular, y es distinto de 0, luego los vectores fila son linealmente independientes y determinan una base. Un suplementario de U es el subespacio $W = L(x^2, x^3, x^4)$.