Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Primera Prueba de Evaluación Continua. Matrices.
21 de noviembre de 2022

En las preguntas 1 a 4 determine cuál es la opción correcta y justifique por qué. Todas las respuestas y resultados de los ejercicios tienen que estar suficientemente justificados.

1. (1 punto) Sean A y B dos matrices de orden n tales que $\mathrm{rg}(B) = n$. Entonces,
   (a) si $\mathrm{rg}(A) < n$, la matriz AB no es invertible.
   (b) si $\mathrm{rg}(A) = n$, la matriz AB puede no ser invertible.
   (c) puede ser AB invertible y A no invertible.

2. (1 punto) Si A y B son dos matrices no nulas, de orden n, idempotentes, entonces
   (a) la matriz $A + B$ no es idempotente.
   (b) la matriz $A - B$ no es idempotente.
   (c) la matriz AB es idempotente si A y B conmutan.

3. (1 punto) Sea A es una matriz de orden $m \times n$ escalonada reducida por filas y con $r < m$ pivotes. Entonces,
   (a) A es equivalente por filas a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ de orden $m \times n$.
   (b) Si $r = n$, entonces $A = \left(\begin{array}{c} I_r \\ \hline B \end{array}\right)$, con $B \neq 0$.
   (c) A contiene como submatriz a I_r.

4. (1 punto) Sean $A = E_1E_2BE_3E_4$ con E_i matrices elementales de orden n tales que $E_i \neq I_n$ para $i = 1, \ldots, 4$. Entonces,
   (a) las matrices A y B pueden ser semejantes.
   (b) las matrices A y B no son congruentes.
   (c) $\det(A) \neq \det(B)$.

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea $k \in \mathbb{K}$ un escalar fijo. Determine la potencia $n-$ésima de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Calcule la forma de Hermite por filas (forma escalonada reducida por filas) de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a \neq \pm b$$

Ejercicio 3. (2 puntos) Sean A y B dos matrices de orden n y M la matriz de orden $2n$ definida por bloques:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right)$$

Exprese el determinante de M en función de los determinantes de las matrices $A - B$ y $A + B$.

Soluciones

1. **(a) es verdadera**. Si $\mathrm{rg}(A) < n$ y $\mathrm{rg}(B) = n$, entonces $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\} < n$, por lo que AB no es invertible.

   (b) Es falsa pues si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n$, ambas matrices on invertibles, es decir tienen determinante distinto de 0. En tal caso, $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, por lo que AB es invertible.

   (c) Es falsa pues AB invertible es equivalente a $\det(AB) = \det(A)\det(B) =\neq 0$, y por ello, $\det(A)$ y $\det(B)$ son distintos de 0, en particular A es invertible.

2. Si $A^2 = A$ y $B^2 = B$, entonces

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A + B + AB + BA$$

$$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA = A + B - AB - BA$$

   por lo que, en general, no se cumple que $A+B$ o $A-B$ sean idempotentes, pero sí en casos concretos. Por ejemplo: si $A = B$ se tiene que $A - B$ es la matriz nula que sí es idempotente. Si A y B son matrices idempotentes tales que $AB = 0_n$, entonces $A+B$ es idempotente. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   POr tanto, (a) y (b) son falsas.

   La opción **(c) es correcta** pues si $AB = BA$, entonces $(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2 = AB$, por lo que AB es idempotente.

3. **(c) Verdadera.** Si A es una matriz de orden $m \times n$ escalonada reducida por filas y con $r < m$ pivotes, tiene rango r y contiene a I_r como submatriz: la que se obtiene al eliminar las filas y columnas en las que no hay pivotes.

   La opción (a) es falsa, pues la forma escalonada reducida de A no tiene por qué tener los pivotes colocados en las r primeras columnas. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de orden 3×3 y $r = 2$ pivotes.

   La opción (b) también es falsa porque si $B \neq 0$ la matriz $A = \left(\dfrac{I_r}{B}\right)$ no sería escalonada (por filas), ya que habría entradas no nulas debajo de los pivotes.

4. **(a) Verdadera.** Si $A = E_1E_2BE_3E_4$ con E_i matrices elementales de orden n, en particular A y B también son matrices de orden n, y pueden ser semejantes si $(E_1E_2)^{-1} = E_3E_4$. Para ello, basta con que se cumpla $E_3 = E_2^{-1}$ y $E_4 = E_1^{-1}$, y llamando $P = E_3E_4$, se tiene que

$$A = P^{-1}BP$$

   (b) Es falsa, las matrices A y B sí pueden ser congruentes. Basta encontrar un ejemplo en el que $A = P^tBP$ con P regular. Y es fácil elegir las matrices elementales teniendo en cuenta que si E es una matriz elemental E^t también. Es decir, basta tomar $(E_1E_2)^t = E_2^tE_1^t = E_3E_4$.

   (c) Es falsa. Por ejemplo, si las matrices elementales tienen determinante igual a 1, es decir, se corresponden con operaciones elementales de tipo II, se cumple $\det(A) = \det(B)$.

Ejercicio 1: Para deteminar la la potencia $n-$ésima de la matriz B la descomponemos como suma de dos matrices que conmuten (una matriz escalar y una nilpotente) y aplicamos la fórmula del binomio de Newton a la suma. En este caso $B = I_3 + N$ con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos las potencias de N:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0_3$$

por lo que $N^t = 0_3$ para todo $t \geq 3$.
Entonces, todos los sumandos del binomio son nulos salvo en los que aparecen $N^0 = I_3$, N y N^2, de donde

$$B^n = (N + I_3)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} N^j \, I_3^{n-j} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} N^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} N^2$$

Es decir

$$B^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & kn & \frac{k^2(n^2-n)-2n}{2} \\ 0 & 1 & kn \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: Suponiendo $a \neq \pm b$ y realizando operaciones elementales de filas se obtiene la misma forma escalonada reducida para todos los valores de a y b en las condiciones dadas:

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_f(M)$$

Nótese que no se puede dar el caso $a = b = 0$, es decir, al menos uno de los dos valores a o b es distinto de 0.

Ejercicio 3: La matriz M se transforma haciendo operaciones elementales de filas y columnas de tipo II, que no modifican el determinante

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B+A & A+B \end{array}\right) = M' \sim_c \left(\begin{array}{c|c} A-B & B \\ \hline 0 & A+B \end{array}\right) = M''$$

Las operaciones elementales de filas que se aplican suman las n primeras filas de M a las n siguientes

$$f_{n+i} \to f_{n+i} + f_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Las operaciones elementales de columnass que se aplican restan las n últimas columnas de M' a las n primeras

$$c_i \to c_i - c_{i+n}, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Ahora, el determinante de la matriz M'', triangular por bloques, que es igual al determinante de M, es (véase la Proposición 1.89, pág. 64) es

$$\det(M) = \det(M'') = \det(A-B)\det(A+B)$$

Ejercicio 2

$a \neq \pm b \iff a+b \neq 0$ y $a-b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 - f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_1}]{} \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ 0 & b-a & 0 & a-b \\ 0 & b-a & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_4 \to f_4 - f_3}]{} \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ 0 & b-a & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to \frac{1}{b-a} f_2 \\ f_3 \to \frac{1}{b-a} f_3}]{} \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \leftrightarrow f_2 \\ f_2 \leftrightarrow f_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & a & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 - a f_1 \\ f_3 \to f_3 - a f_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & b+a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b+a & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{b+a} f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1 \to f_1 + f_3]{\text{reducida}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$