Ejercicios propuestos

1. Escriba en forma de predicado con cuantificadores las expresiones siguientes:

   a) Existe al menos un número natural que es un múltiplo de cinco y tal que su último dígito no es cinco.

   b) Una función polinómica es una función continua, derivable e integrable.

   c) Ser un animal racional no implica dejar de ser animal.

2. Compruebe:

   a) $\forall x P_x \wedge \forall x Q_x \iff \forall x(P_x \wedge Q_x)$.

   b) $\exists x P_x \vee \exists x Q_x \iff \exists x(P_x \vee Q_x)$.

   c) $\forall x P_x \vee \forall x Q_x \Longrightarrow \forall x(P_x \vee Q_x)$.

   d) $\exists x(P_x \wedge Q_x) \Longrightarrow \exists x P_x \wedge \exists x Q_x$.

   e) El recíproco en los apartados *c*) y *d*) es falso.

3. Dado el universo $U = \{1, 2, 3\}$ y los predicados simples P_x, cierto para $\{1, 2\}$, Q_x, cierto para $\{1, 2\}$ y R_x, cierto para $\{2, 3\}$, determine el valor de las siguientes proposiciones:

   a) $\forall x\,(P_x \rightarrow \neg Q_x)$ *b*) $\neg[\forall x\,(\neg P_x \vee \neg R_x)]$ *c*) $\forall x\,(\neg R_x \rightarrow P_x)$

4. Determine la forma clausulada del predicado $\neg[\neg R_x \rightarrow \neg(P_x \wedge Q_x)]$.

5. Dadas las proposiciones $\forall x(P_x \rightarrow \neg Q_x)$ y $\neg[\forall x(\neg P_x \vee \neg R_x)]$, compruebe si de estas dos proposiciones se deducen algunas de las siguientes proposiciones:

   a)$\exists x\, R_x \vee \exists x\, Q_x$ *b*) $\neg[\exists z\,(P_z \wedge R_z)]$ *c*) $\forall x\, R_x \wedge \forall x \neg P_x$ *d*) $\forall x\,(R_x \vee \neg P_x)$

6. Determine en cada apartado las respuestas correctas.

   a) Sean los conjuntos $A = \{x \in U \mid P_x\}$ y $B = \{x \in U \mid Q_x\}$. Si la proposición $\exists x \neg(P_x \wedge \neg Q_x)$ es verdadera, entonces:
   i) $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ *ii*) $\overline{A} \cup B \neq \emptyset$ *iii*) $\exists x \in \overline{A \cup B}$

   b) Si $A \neq B$, entonces:
   i) $A \subset B$ *ii*) $A \cap B \neq \emptyset$ *iii*) $\exists x \in A \cup B$ tal que $x \notin A \cap B$

7. Estudie si a cada una de las siguientes preguntas se le contesta si o no. Razone la respuesta.

   a) Si $A \cup B \subset A \cup C$ entonces, ¿$B \subset C$?

   b) Si $A \cap B \subset A \cap C$ entonces, ¿$B \subset C$?

c) Si $A \cup B \subset A \cup C$ y $A \cap B \subset A \cap C$ entonces, ¿$B \subset C$?

d) Si $A \cup B = B \cap C$, ¿se puede deducir alguna inclusión entre algunos de los conjuntos?

8. Simplifique la expresión de los siguientes conjuntos:

a) $A \cup \overline{\overline{B} \cap C}$ b) $A \cup \overline{\overline{B} \cup C}$ c) $\overline{A - B}$ d) $A \cap (B \cup \overline{A})$ e) $\overline{A \triangle B}$

9. Demuéstrese que, cualesquiera que sean A, B, C y $D \in \mathcal{P}(U)$, las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si $A \subset B$, entonces $\overline{B} \subset \overline{A}$.

b) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

c) Si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \cup B \subset C \cup D$.

d) Si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \cap B \subset C \cap D$.

10. Demuestre que, para cada tres conjuntos A, B y $C \in \mathcal{P}(U)$, se satisfacen las siguientes igualdades:

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

e) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

11. Estudie las propiedades del álgebra de las partes de un conjunto dotado de la unión, intersección y complementario que se mantienen al cambiar la unión por la diferencia simétrica.

12. Sea I un conjunto no vacío y una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ tales que todos los conjuntos A_i son subconjuntos de un mismo conjunto U. Determine los conjuntos:

a) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ b) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$ c) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ d) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$

13. Si $B_n = [n, n+1] \subset \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, determine $B_5 \cup B_6$, $B_5 \cap B_6$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

14. Sean los intervalos de $\mathbb{R}$, $A_n = [0, 1/n]$, $B_n = [0, 1/n)$, $C_n = (0, 1/n)$ y $D_n = (-1/n, 1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n,\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n,\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C_n,\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n,\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n,\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n,\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n \text{ y } \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$$

15. Demuestre que dado un conjunto de índices I no vacío, se verifica:

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

16. Sea para todo $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ el conjunto:

$$B_{(n,m)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n \leqslant x \leqslant n+1 \,,\, m \leqslant y \leqslant m+1\}$$

Represente gráficamente en un plano los conjuntos:

$$B_{(1,2)}, \quad \bigcup_{n=0}^{2} \bigcup_{m=1}^{2} B_{(n,m)} \quad \text{y} \quad \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} B_{(n,m)}$$

17. Sea para todo $x \in \mathbb{R}$ el conjunto:

$$B_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leqslant y \leqslant x\}$$

Represente gráficamente en un plano los conjuntos:

$$B_1 \,, \quad \bigcup_{0 \leq x \leqslant 2} B_x \quad \text{y} \quad \bigcup_{x \in \mathbb{R}} B_x$$

18. Dado el universo $U = \{1, 2\}$ y las relaciones lógicas simples R_{xy}, que es cierta para $\{(1,1), (1,2)\}$, y S_{xy}, que es cierta para $\{(2,1), (2,2)\}$, estúdiese si las proposiciones siguientes son verdaderas.

a)$\forall x \, (\exists y \, S_{xy} \rightarrow \forall z \, \neg R_{xz})$ *b*)$\exists y \, \forall x \, (S_{yy} \wedge R_{xy})$ *c*)$\forall z \, (R_{zz} \vee S_{zz})$

d)$\exists \, z \exists y \, (S_{zy} \wedge R_{yz})$ *e*) $\forall x \, \forall y \, (S_{xy} \rightarrow \forall z \, \neg R_{xz})$ *f*) $\forall x \, \forall y \, S_{yx} \rightarrow \forall y \, \neg \exists z \, R_{yz}$

19. Dado el universo $U = \{1, 2, 3\}$ y las relaciones lógicas simples P_{xy} que es cierta para $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$, Q_{xy} que es cierta para $\{(1,2), (2,1)\}$ y R_{xy} que es cierta para $\{(1,3), (2,3), (3,3)\}$, estúdiese si las proposiciones siguientes son verdaderas.

a) $\forall x \, \forall y \, \exists z \, (P_{xy} \rightarrow \neg R_{xz})$ *b*) $\exists x \, \forall y \, \exists z \, (Q_{xy} \vee \neg R_{xz})$

c) $\forall x \, \forall y \, (P_{xy} \wedge Q_{yx} \wedge \neg R_{xy})$

20. Dado el universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine en cada caso el conjunto donde los siguientes predicados son verdaderos:

a) $P_y : \exists x \; (x + 2y < 7)$ *b*) $Q_x : \exists y \; (x + 2y < 7)$ *c*) $R_y : \forall x \; (x + 2y < 7)$

d) $S_x : \forall y \; (x + 2y < 7)$

21. Escriba la negación de las siguientes expresiones lógicas:

    a) $\forall x\,(P_x \to \exists y\, R_{xy})$ *b*) $\forall x\,\exists y\,(R_{yx} \vee R_{xy})$ *c*) $\exists x\,\forall z\,(S_{xz} \to \neg\exists y\, R_{zy})$

    d) $\exists x\,(\neg P_x \to \neg\forall y\, R_{xy})$

22. Compruebe la equivalencia de las relaciones lógicas de las parejas siguientes:

    a) $\neg[\exists x\,\exists y\,(Q_{yx} \wedge \neg P_{yx})]$ y $\forall x\,\forall y\,(P_{yx} \vee \neg Q_{yx})$

    b) $\neg[\forall x\,\forall y\,(P_{xy} \to \neg Q_{xy})]$ y $\exists x\,\exists y\,(P_{xy} \wedge Q_{xy})$

23. Especifique y represente gráficamente cada uno de los conjuntos siguientes:

    a) $\{0,1\}^2 = \{0,1\} \times \{0,1\}$ *b*) $\{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$

    c) $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *d*) $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *e*) $\mathbb{Z}^2$ *f*) $\mathbb{Z}^3$

24. Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ y las relaciones $\mathcal{R} = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c)\}$, $\mathcal{S} = \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\delta)(c,\gamma)\}$ y $\mathcal{T} = \{(\alpha,1),(\alpha,5),(\alpha,3),(\beta,1),(\beta,3),(\delta,4)(\gamma,4)\}$. Determine:

    a) La relación inversa de cada una de las tres relaciones.

    b) Las relaciones: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$, $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

    c) La imagen de cada uno de los elementos del conjunto inicial de cada relación.