

# Breve historia del álgebra matricial

Estas breves notas pretenden mostrar cómo han surgido en la historia algunos conceptos propios del álgebra matricial. Se ha pretendido dar más énfasis a las ideas que a las biografías de los matemáticos creadores de la teoría. En la siguiente dirección

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk> se halla una colección de biografías de los matemáticos más famosos.

La mayor parte de estas notas históricas están sacadas de [1].

## 1. Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Los antecedentes históricos del estudio de la geometría plana y espacial se remontan a la introducción por Descartes (1596–1650) en el siglo XVII de la geometría analítica que lleva su nombre. La idea de vector entró en las matemáticas calladamente. Stevin (1548–1620) empleó la ley del paralelogramo en problemas de estática y Galileo (1564–1642) enunció esta ley de forma explícita.

Después de la representación geométrica de los números complejos proporcionada por Wessel (1745–1818), Argand (1768–1822) y Gauss (1777–1855) fuera algo familiar, los matemáticos se percataron de que los números complejos podían usarse para trabajar los vectores en el plano. Sin embargo, la utilidad de los números complejos está limitada a problemas planos. La creación de un análogo tridimensional útil de los números complejos se debe a Hamilton (1805–1865) cuando descubrió los cuaterniones en 1843.

Mientras Hamilton trabajaba con sus cuaterniones, Grassmann (1809–1877) estaba desarrollando la idea moderna de vector. En este sentido, Grassmann definió de forma moderna la suma y el producto por escalares de vectores de  $\mathbb{R}^n$  e introdujo dos clases de pro-

ductos: el interior (véase la sección 6) y el exterior. Aplicó estos productos para resolver problemas geométricos concretos (el producto exterior de vectores no es hoy una herramienta estándar en la matemática moderna).

La formulación final se debe a Gibbs (1839–1903) en un panfleto de circulación privada entre sus alumnos y por Heaviside (1850–1925) en el libro *Electromagnetic Theory* publicado en 1893. En ambos libros se introdujeron el producto escalar y el vectorial de forma moderna.

## 2. Matrices

Los determinantes surgieron cuando se empezaron a resolver los sistemas de ecuaciones lineales. En 1693, Leibniz (1646–1716) usó un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas obteniendo un determinante.

La solución de ecuaciones lineales de dos, tres y cuatro incógnitas fue obtenida por Maclaurin (1698–1746) publicada en 1748 en su *Treatise of algebra*. Cramer (1704–1752) publicó en 1750 el libro *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* la regla para determinar los coeficientes de una cónica general pasando por 5 puntos dados utilizando determinantes. En 1776 Bezout (1730–1783) demostró que la anulación del determinante de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas homogéneo es una condición necesaria y suficiente para que haya soluciones no nulas.

Vandermonde (1735–1796), en 1776, fue el primero en dar una exposición coherente y lógica de la teoría de los determinantes como tales, aplicándolos a los sistemas de ecuaciones lineales. Proporcionó una regla para

calcular determinantes por medio de submatrices de orden 2. En un ensayo de 1772 “Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde”, Laplace generalizó el método de Vandermonde.

Como hemos visto, los determinantes surgieron en la solución de los sistemas de ecuaciones lineales; pero pronto surgieron en los siguientes problemas: Transformación de coordenadas, solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, o cambios de variables en las integrales dobles y triples, por citar sólo algunos.

La palabra *determinante*, usada por primera vez por Gauss, la aplicó Cauchy (1789–1857) a los determinantes ya aparecidos en el siglo XVIII en un artículo publicado en 1815. La disposición de los elementos en tabla y la notación de subíndices dobles se le debe a él. Binet (1786–1856), en 1812, enunció el teorema de multiplicación, demostrado correctamente por Cauchy, que en notación moderna es  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

Heinrich Scherk (1798–1885) en su “Mathematische Abhandlungen” aportó nuevas reglas para de los determinantes, por ejemplo, si una fila es combinación lineal de otras, el determinante es nulo; o la regla para calcular determinantes triangulares.

Diríamos que el campo de las matrices estuvo bien formado aún antes de crearse. Los determinantes fueron estudiados a mediados del siglo XVIII. Un determinante contiene un cuadro de números y parecía deducirse de la inmensa cantidad de trabajos sobre los determinantes que el cuadro podía ser estudiado en sí mismo y manipulado para muchos propósitos. Quedaba por reconocer que al cuadro como tal se le podía proporcionar una identidad independiente de la del determinante. El cuadro por sí mismo es llamado *matriz*. La palabra matriz fue usada por primer vez por Sylvester (1814–1897) en 1850.

Es cierto, como dice Cayley (1821–1895),

que la idea de matriz es lógicamente anterior a la de determinante, pero históricamente el orden fue el inverso. Cayley fue el primero en desarrollar de modo independiente el concepto de matriz en un artículo publicado en 1855, *A memoir on the theory of matrices*. Definió las matrices nula y unidad, la suma de matrices y señala que esta operación es asociativa y conmutativa. Cayley toma directamente de la representación del efecto de dos transformaciones sucesivas la definición de multiplicación de dos matrices. Cayley señala que una matriz  $m \times n$  puede ser multiplicada solamente por una matriz  $n \times p$ . En este mismo artículo establece que una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es nulo. Además prueba

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A^t). \quad (1)$$

Cayley aseguró que el producto de dos matrices puede ser la matriz nula siendo las dos matrices invertibles. En realidad Cayley se equivocó: Si  $AB = 0$ , entonces  $A$  ó  $B$  no tienen inversa (¿por qué?)

A partir de este momento los trabajos sobre matrices se disparan. Debemos citar los trabajos de Jordan (1838–1922), Rouché (1832–1910) y a Frobenius (1849–1917). En el siglo XX es rara la rama de la matemática aplicada que no use la teoría de matrices. Podemos citar una afirmación profética hecha por el físico Tait (1831–1901) a mediados del siglo XIX: “*Cayley está forjando las armas para las futuras generaciones de físicos*”.

### 3. Sistemas de ecuaciones lineales

Como ya mencionamos en la sección 2, los sistemas de ecuaciones lineales comenzaron a ser estudiados sistemáticamente por Leibniz y Cramer a mediados del siglo XVIII. Este último matemático, expuso lo que hoy conocemos como regla de Cramer para los sistemas de orden 3. A mediados del siglo XIX fue Cayley, al

estudiar las matrices, quien dedujo la fórmula general de la regla de Cramer y quien expuso claramente la condición necesaria y suficiente para que un sistema cuadrado de ecuaciones lineales tuviera solución única, a saber, que la matriz de los coeficientes del sistema fuera invertible.

Frobenius introdujo la noción de rango de una matriz en 1879, aunque en relación con los determinantes. Esta definición permitió generalizar el teorema que hoy conocemos como teorema de Rouché-Frobenius.

Gauss dedujo a principios del siglo XIX un método que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. Este método cayó en el olvido pues es más engorroso que la presentación matricial hecha por Cayley y por Frobenius. Jordan<sup>1</sup> dedujo un algoritmo alternativo a la fórmula (1) presentada por Cayley para calcular la inversa de una matriz. Hoy conocemos este método como el algoritmo de Gauss-Jordan.

A medida que en otras disciplinas científicas se iba encontrando que los problemas se podían plantear en términos de sistemas de ecuaciones lineales los matemáticos se empezaron a preocupar de aspectos como el número de operaciones en un algoritmo. Pronto se dieron cuenta que la fórmula (1) para el cálculo de la inversa es muy costosa por el número de operaciones, mientras que el método de Gauss exigía un número considerablemente menor.

Un problema muy complicado es el siguiente: ¿De qué forma contribuyen los errores de redondeo individuales al error total? Fue atacado por primera vez por Von Neumann, si bien sólo encontró estimaciones muy complicadas. Actualmente se utiliza el método de

<sup>1</sup>Aunque ha habido confusión sobre qué Jordan debe recibir el mérito por este algoritmo, ahora parece claro que este método fue introducido por Wilhem Jordan (1842–1899) y no por el más conocido Marie Ennemond Camille Jordan.

la pivotación parcial, una ligera variante del método de Gauss, para intentar que los errores parciales sean los menores posibles. En 1948, el matemático inglés Alan Turing desarrolló la factorización LU.

#### 4. Espacios vectoriales

Como ya se vió en la sección 1, la idea de vector de  $\mathbb{R}^n$  entró en las matemáticas de forma callada. Más aún, podemos decir que la idea de vector abstracto fue introducida por Euler (1707–1783) sin que éste se diera cuenta: al resolver la ecuación diferencial que hoy llamamos lineal de orden  $n$  homogénea de coeficientes constantes, Euler indica que la solución general ha de contener  $n$  constantes arbitrarias y que dicha solución vendría dada por combinaciones de  $n$  soluciones particulares *independientes*. De un modo más preciso, si  $y = y(t)$  es la solución, entonces

$$y(t) = C_1 y_1(t) + \cdots + C_n y_n(t),$$

donde  $C_1, \dots, C_n$  son constantes arbitrarias e  $y_1, \dots, y_n$  son soluciones *independientes*. Euler no aclara lo que para él son funciones independientes. En trabajos posteriores, Lagrange (1736–1813) extendió este resultado a ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes variables. Fue Cauchy quien aisló la noción de *independencia lineal* y la aplicó al estudio de ecuaciones diferenciales. Curiosamente se desarrollaron los conceptos básicos en el espacio de las funciones continuas antes que en  $\mathbb{R}^n$ .

En 1844, Grassmann, en el libro *Die lineale ausdehnungslehre*, axiomatizó el concepto de independencia lineal aplicándolo a los elementos de  $\mathbb{R}^n$ . La exposición de Grassmann estaba ligada con ideas geométricas, pero a él se le deben los conceptos claves de la teoría de espacios vectoriales. El primero en dar la definición axiomática actual de espacio vectorial fue Peano (1858–1932) en su libro *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di*

*H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* publicado en 1888.

## 5. Aplicaciones lineales

Descartes, en uno de sus intentos por algebrizar la geometría plana estudió la relación entre  $(x, y)$  y  $(x', y')$  si el segundo se obtiene girando un ángulo  $\alpha$  el primer punto. Jean Bernouilli (1667–1748) en una carta a Leibniz en 1715 introdujo los planos coordenados en  $\mathbb{R}^3$  tal como los conocemos hoy en día. Rápidamente se empezaron a estudiar las ecuaciones de las principales transformaciones geométricas en el espacio: proyecciones, simetrías y giros.

Los siguientes pasos los dieron Euler y Lagrange desde dos puntos de vista: el geométrico y el analítico. Euler, al estudiar la ecuación general de segundo grado en tres coordenadas cambió los ejes para que la expresión resulte lo más sencilla posible, de esta manera, fue capaz de clasificar todas las cuádricas<sup>2</sup>. Lagrange, en un ensayo sobre la atracción de los esferoides, proporcionó la forma general de los movimientos que conservan distancias:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned} \quad (2)$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  verifican

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

y

$$\left. \begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

<sup>2</sup>Al hacer esta clasificación Euler descubrió el paraboloides hiperbólico, superficie desconocida para los griegos.

En lenguaje moderno, (2) equivale a escribir  $\mathbf{x} = A\mathbf{x}'$ , donde  $A = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$  y  $\mathbf{x}' = (x', y', z')^t$ . Mientras que las condiciones (3) y (4) equivalen a  $AA^t = I$ .

La relación entre matriz y aplicación lineal se hizo más patente cuando Cayley escribió de forma matricial las ecuaciones de los diferentes tipos de transformaciones geométricas. También escribió de forma matricial las ecuaciones obtenidas por Lagrange obteniendo un tipo particular de matrices: las ortogonales ( $AA^t = I$ ). El concepto de aplicación lineal en su forma actual se le debe a Peano cuando axiomatizó la definición de espacio vectorial.

Hoy en día las aplicaciones lineales son importantes en las matemáticas y en las ciencias aplicadas. Las aplicaciones lineales modelan las transformaciones geométricas así como las ecuaciones lineales. Muchos problemas de la ingeniería se plantean usando matrices, y por tanto, con aplicaciones lineales. Muchos problemas complicados se aproximan mediante la linealización prefiriendo estudiar los problemas lineales que surgen. Incluso en la mecánica cuántica un observable es cierto operador lineal en un espacio vectorial complejo.

## 6. Espacio vectorial euclídeo

Cuando los matemáticos posteriores a Descartes desarrollaron la geometría analítica no se dieron cuenta que el concepto de perpendicularidad era independiente del concepto de paralelismo. Los desarrollos obtenidos por los matemáticos en los siglos XVIII y principios del XIX los consideraron como parte del mismo tipo de geometría.

Fue a principios del siglo XIX, con el estudio de la geometría proyectiva y las geometrías no euclídeas cuando se observó que las ideas de paralelismo e incidencia son conceptos independientes de la métrica del espa-

cio. El desarrollo de la teoría que hoy conocemos como producto interno vino de dos caminos diferentes: el álgebra y el análisis.

Grassmann definió en su libro *Die lineale ausdehnungslehre* lo que llamó cantidad extensiva (un tipo de hipernúmero con  $n$  componentes). Para Grassmann un hipernúmero es una expresión del tipo

$$\alpha = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n,$$

donde los  $\alpha_i$  son números reales y donde  $\mathbf{e}_i$  son unidades cualitativas representadas geométricamente por segmentos de línea dirigidos (de una unidad de longitud) trazados desde un origen común determinando un sistema de ejes ortogonal. Las  $\alpha_i \mathbf{e}_i$  son múltiplos de las unidades primarias y están representadas por longitudes  $\alpha_i$  a lo largo de los ejes respectivos, mientras que  $\alpha$  está representado por un segmento de línea dirigido en el espacio cuyas proyecciones sobre los ejes son las longitudes  $\alpha_i$ . Grassmann define la suma y el producto por escalares

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) + (\beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n) \\ = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) \\ = (\lambda \alpha_1) \mathbf{e}_1 + \cdots + (\lambda \alpha_n) \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Grassmann introdujo dos clases de productos, el interno y el externo. Para el primero Grassmann postuló

$$\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

la propiedad distributiva con respecto a la suma, la conmutativa y  $(\alpha \mathbf{e}) | \mathbf{f} = \alpha(\mathbf{e} | \mathbf{f})$ , siendo  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{f}$  dos hipernúmeros. Grassmann define el valor numérico de un hipernúmero (lo que hoy llamamos norma) y ángulo entre dos hipernúmeros.

Desde el punto de vista del análisis, ya Euler se dio cuenta, al estudiar el desarrollo de una función en serie trigonométrica, la relación

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx = 0, \quad i \neq j,$$

siendo  $f_i, f_j$  cualesquiera funciones del llamado sistema trigonométrico:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}.$$

Legendre (1752–1833) obtuvo, al estudiar la ecuación diferencial que hoy lleva su nombre, una serie de polinomios  $p_i$  que satisfacen

$$\int_{-1}^1 p_i(x) p_j(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Sturm (1803–1855) y Liouville (1809–1882) generalizaron este tipo de funciones y establecieron una clara analogía del comportamiento de todas estas funciones con el desarrollo hecho por Grassmann. La teoría tuvo que esperar a los trabajos de Hilbert (1862–1943) sobre las ecuaciones integrales definiendo con claridad un producto interno en el espacio de las funciones que generaliza al producto de Grassmann.

Aunque Hilbert no desarrolló un lenguaje geométrico puso los fundamentos para el desarrollo de la teoría general que fue hecha por Schmidt (1876–1959) a principios del siglo XX. Consideraba las funciones como elementos de un espacio de dimensión infinita, introdujo la notación que hoy utilizamos, definió el concepto de perpendicularidad, norma y dedujo los principales teoremas: Pitágoras, desigualdad de Bessel, desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular.

En 1958, J. H. Wilkinson desarrolló la factorización QR a partir del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Al matemático danés Jorgen Pedersen Gram (1850-1916) se

le recuerda sobre todo por este proceso de ortogonalización que construye un conjunto ortogonal de vectores a partir de un conjunto independiente. Sin embargo, él no fue el primero en usar este método. Parece ser que fue descubierto por Laplace y fue usado esencialmente por Cauchy in 1836.

## 7. Aproximación mínimos-cuadrática

En el primer día del año 1801, un cuerpo, posteriormente identificado como un asteroide y llamado Ceres, fue descubierto mientras que se aproximaba al Sol. Los astrónomos fueron incapaces de calcular su órbita, a pesar de que pudieron observar este cuerpo durante 40 días seguidos hasta que lo perdieron de vista. Después de sólo tres observaciones Gauss desarrolló una técnica para calcular su órbita con tal precisión que los astrónomos a finales de 1801 y principios de 1802 pudieron localizar Ceres sin ninguna dificultad. Con este avance en astronomía, Gauss logró un rápido reconocimiento en el ámbito científico. Su método, que no fue descrito hasta 1809 en el libro *Theoria motus corporum coelestium*, todavía es usado hoy en día y sólo requiere unas pocas modificaciones para adaptarse a los ordenadores modernos.

Tres años antes y de modo independiente, Legendre en su *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, desarrolló el primer tratamiento del método de los mínimos cuadrados.

En esencia el método de Gauss fue como sigue. Si se obtiene una tabla de medidas entre las variables  $x$  y  $y$  ligadas por medio de la relación  $y = a + bx$ :

$x$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

Y se busca la recta  $y = a + bx$  que mejor se “ajusta” a esta tabla de puntos, se debe inten-

tar hacer mínima la función de dos variables

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2,$$

Para ello se iguala  $\partial f/\partial a$  y  $\partial f/\partial b$  a cero obteniendo un sistema de ecuaciones. Modernamente se prefiere deducir este sistema por métodos algebraicos, ya que si lo que se pretende es minimizar la norma de cierto vector de  $\mathbb{R}^n$ , parece claro que podemos utilizar técnicas de producto interior.

## 8. Teoría espectral

El tema de los valores propios apareció cuando Euler, en el primer tercio del siglo XVIII, estudió sistemáticamente la ecuación general de segundo grado en dos y tres variables en el plano y en el espacio respectivamente. Demuestra que existen unos ejes perpendiculares donde la expresión de la cónica o cuádrica es especialmente sencilla. Posteriormente en 1760 en su libro *Recherches sur la courbure des surfaces*, al estudiar las secciones normales de una superficie en un punto encuentra que hay dos planos mutuamente ortogonales cuyas secciones proporcionan las curvas de máxima y mínima curvatura. Posteriormente se vio que estas dos situaciones son casos particulares del hecho de que una matriz simétrica sea ortogonalmente diagonalizable. La noción de polinomio característico aparece explícitamente en el trabajo de Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales en 1774 y en el trabajo de Laplace (1749–1827) en 1775.

Cauchy reconoció el problema del valor propio en la obra de Euler, Lagrange y Laplace. En 1826 tomó el problema de la reducción de la forma cuadrática en tres variables y demostró que la ecuación característica es invariante para cualquier cambio en los ejes rectangulares, en lenguaje moderno, si  $A$  es una matriz cuadrada y si  $S$  es invertible, en-

tonces

$$\det(A - \lambda I) = \det(SAS^{-1} - \lambda I).$$

En 1829 Cauchy prueba que los valores propios de una matriz simétrica son reales. Las matrices hermíticas ( $A = \bar{A}^t$ ) fueron introducidas por Hermite (1822–1901). Frobenius en 1878 prueba la diagonalizabilidad de las matrices ortogonales, extendiendo en 1883 la demostración a matrices unitarias ( $A\bar{A}^t = I$ ). El teorema espectral para matrices normales ( $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A$ ) es debido a Toeplitz (1881–1940).

Jacobi (1804–1851) dio la solución del sistema de ecuaciones diferenciales  $Y' = AY$ , siendo  $A$  una matriz diagonalizable. Jordan resolvió el caso no diagonalizable usando los conceptos de matrices similares (dos matrices  $A$  y  $B$  se dicen *similares* si existe una matriz invertible  $S$  tal que  $A = SBS^{-1}$ ) y de ecuación característica. En el libro *Traité des substitutions* (1870) demostró que una matriz puede ser transformada a una forma canónica hoy llamada forma canónica de Jordan.

Un paso simultáneo hacia el concepto de valor y vector propio en un espacio vectorial abstracto lo dieron Sturm y Liouville al estudiar las ecuaciones que hoy llevan su nombre. Observaron que si  $\phi$  es cierto operador diferencial, entonces existe una sucesión de valores  $\lambda_n$  tales que existen funciones  $y_n$  no nulas ortogonales entre sí verificando  $\phi(y_n) = \lambda_n y_n$ .

Desde 1904 hasta 1910, Hilbert estudió la ecuación integral  $u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y) dy$ . Supone que  $K$  es simétrico y define lo que es un operador autoadjunto para un espacio de funciones, lo que le permite hacer uso de las propiedades de las matrices simétricas en el caso finito. En concreto demuestra que el operador  $\phi(u)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy$  es autoadjunto. Las autofunciones asociadas a los distintos autovalores son perpendiculares dos a dos. Con estos resultados Hilbert puede demostrar lo que se conoce como el teorema de

los ejes principales generalizado en espacios de dimensión infinita. Hilbert llevó a cabo un proceso de paso al límite que le permitió generalizar resultados sobre sistemas finitos de ecuaciones lineales. Sobre esta base decidió que un tratamiento de las formas cuadráticas infinitas “*vendría a completar de una manera esencial la teoría bien conocida de las formas cuadráticas con un número finito de variables*”.

## 9. Aplicaciones de la teoría espectral

Como se vio en la sección anterior, Cauchy se dio cuenta de la estrecha relación entre los valores y vectores propios de una matriz simétrica con las direcciones principales y las longitudes de los ejes de la cónica asociada a esta matriz simétrica. El motivo de introducir el concepto de ortogonalmente diagonalizable fue precisamente éste.

Una de las primeras aplicaciones de la teoría de los valores y vectores propios fue el estudio de las sucesiones dadas por recurrencia lineales, por ejemplo la sucesión de Fibonacci.

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \geq 1.$$

La técnica que aún usamos hoy en día se reduce al cálculo de la potencia de una matriz.

Márkov (1856–1922) fue el primero en estudiar los procesos estocásticos no dependientes del tiempo, llamados hoy cadenas de Márkov. Una cadena de Márkov es una sucesión de variables dependientes  $X(t_i) = (x_1(t_i), \dots, x_n(t_i))$  identificadas por valores discretos crecientes de  $t_i$  (usualmente el tiempo) con la propiedad de que cualquier predicción de  $X(t_i)$  es sólo función de  $X(t_{i-1})$ . Esto es, el valor futuro de la variable  $X$  depende sólo del valor presente y no de los valores en el pasado. Utilizando la teoría de diagonalización de matrices Márkov pudo estudiar completamente las cadenas de Márkov donde

la relación entre  $X(t_i)$  y  $X(t_{i-1})$  es lineal. Su trabajo además ha sido aplicado a la biología. En 1945 Leslie, introdujo un cierto tipo de matrices (llamadas hoy en día *matrices de Leslie* con el fin de estudiar problemas de evolución de poblaciones de animales.

### Breve cronología

1693. Leibniz

1750. Cramer: resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Final del siglo XVIII. Lagrange: Formas bilineales para la optimización de una función real de dos o más variables

1800 Gauss: Eliminación gaussiana (en el siglo III se descubrió en China este método para sistemas  $3 \times 3$ ).

1844 Grassmann: Álgebra vectorial.

1848 Sylvester: Introdujo el término *matriz*.

1855 Cayley: Define la multiplicación matricial motivado por la composición de transformaciones. También introdujo las inversas.

1878 Frobenius: Introdujo el *rango* y provó el Teorema de Cayley-Hamilton.

1888 Peano: Dió la definición moderna de espacio vectorial.

1942 von Neumann: Definió el *número de condición* de una matriz que sirve para estudiar la sensibilidad de un sistema de ecuaciones lineales.

1948 Turing: Introdujo la factorización LU.

1958 Wilkinson: Introdujo la factorización QR.

*versity Press*, 1972. (Hay traducción castellana: El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días. *Alianza Universidad*.)

Julio Benítez López

Universidad Politécnica de Valencia

6 de Noviembre de 2007

### Referencias

- [1] M. Kline: Mathematical Thought From Ancient to Modern Times. *Oxford Uni-*