Ejercicios propuestos

1. Complete la tabla siguiente sabiendo que $(G, \star)$, es un grupo de elemento neutro e, siendo $G = \{e, a, b\}$. ¿Cuántas soluciones existen?

$\star$	e	a	b
e			
a			
b			

2. Sean H_1 y H_2 subgrupos de un grupo $(G, \star)$. Demuestre que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de $(G, \star)$.

3. Sea $(G, \star)$ un grupo conmutativo y H un subgrupo de G. Consideramos la congruencia módulo H, $\mathcal{R}_H$, y el conjunto cociente G/H.

   i) Demuestre que si $a, a', b, b' \in G$ son tales que $a\mathcal{R}_H a'$ y $b\mathcal{R}_H b'$ entonces $a \star b \ \mathcal{R}_H \ a' \star b'$.

   ii) Se define en G/H la operación, que denotaremos también por $\star$, mediante

$$[a] \star [b] = [a \star b]$$

   para todo $[a], [b] \in G/H$. Demuestre que $(G/H, \star)$ es un grupo.

4. Sea $(G, \star)$ un grupo conmutativo y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre G que cumple si $a, a', b, b' \in G$ son tales que $a\,\mathcal{R}\,a'$ y $b\,\mathcal{R}\,b'$ entonces $a \star b \ \mathcal{R} \ a' \star b'$. Sea $H = \{h \in G \mid h\,\mathcal{R}\,e\}$, siendo e el elemento neutro de $(G, \star)$. Demuestre que H es un subgrupo de $(G, \star)$ y que la relación $\mathcal{R}$ es precisamente la relación de congruencia módulo H.

5. Sean $(G, +)$ un grupo y $f\colon G \longrightarrow G$ la aplicación definida mediante $f(a) = 2a$ para todo $a \in G$. Demuestre que f es un homomorfismo si y sólo si $(G, +)$ es un grupo conmutativo.

6. Se define en $\mathbb{R}^2$ la operación $\star$ por

$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + b)$$

   Sea $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\}$.

   a) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \star)$ un grupo?

   b) Demuestre que $(G, \star)$ es un grupo y determine el elemento neutro y el elemento simétrico de (a, b). ¿Es conmutativo?

c) Dados los siguientes subconjuntos de G determine si son o no son subgrupos de $(G, \star)$.

$H = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}$
$F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 1\}$
$K = \{(a, b) \in G \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
$J = \{(a, b) \in G \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

d) Si $(a, b) \in G$ se define $f_{ab} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_{ab}(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sean $\mathcal{G}$ el subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definido por $\mathcal{G} = \{f_{ab} \mid (a, b) \in G\}$ y la operación $\circ$, la composición de aplicaciones. Demuestre que $(\mathcal{G}, \circ)$ es un grupo isomorfo a $(G, \star)$.

7. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo unitario. Demuestre que el conjunto $\mathcal{U}$ de todos los elementos de A que son inversibles forman un grupo multiplicativo.

8. Sean H_1 y H_2 subanillos de un anillo $(A, +, \cdot)$. Demuestre que $H_1 \cap H_2$ es un subanillo de $(A, +, \cdot)$.

9. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo e I un ideal de A. Asociada al subgrupo $(I, +)$ consideramos la congruencia módulo I, esto es,

$$a\, \mathcal{R}_I\, b \quad \text{si y sólo si} \quad a - b \in I$$

para todo $a, b \in A$.

i) Demuestre que si $a, a', b, b' \in A$ son tales que $a\, \mathcal{R}_I\, a'$ y $b\, \mathcal{R}_I\, b'$ entonces $ab\; \mathcal{R}_I\; a'b'$.

ii) Si definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en A/I, como en el ejercicio 3, mediante

$$[a] + [b] = [a + b] \quad \text{y} \quad [a]\,[b] = [ab]$$

para todo $[a], [b] \in A/I$. Demuestre que $(A/I, +, \cdot)$ es un anillo.

10. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre A que cumple si $a, a', b, b' \in A$ son tales que $a\, \mathcal{R}\, a'$ y $b\, \mathcal{R}\, b'$ entonces $a+b\, \mathcal{R}\, a'+b'$ y $ab\; \mathcal{R}\; a'b'$. Sea $I = \{h \in A \mid h\, \mathcal{R}\, 0\}$. Demuestre que I es un ideal del anillo $(A, +, \cdot)$ y que la relación $\mathcal{R}$ es precisamente la relación de congruencia módulo I del ejercicio 9.

11. En el conjunto cociente de los enteros módulo n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ siendo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, se consideran las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas mediante

$$[a] + [b] = [a + b] \quad \text{y} \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Véanse los ejemplos 3.10, 4.17, y 4.31 y el ejercicio 9. Del ejercicio 9 se deduce que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo, que además es conmutativo y unitario. Se trata de ver que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si n es un número primo.

i) Demuestre que si n no es un número primo, entonces existen divisores de cero en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y en consecuencia, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

ii) Recíprocamente, demuestre que si $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo y $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es inversible, entonces $[a]$ es un divisor de cero en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Deduzca que n no es un número primo.

12. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario íntegro. Demuestre que si el conjunto A tiene un número finito de elementos, entonces $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo.

13. Se definen sobre $\mathbb{R}^2$ las operaciones

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{y} \quad (a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + ba')$$

para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ es un anillo conmutativo unitario no íntegro.

14. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo y sean I y J dos ideales de A. Estudie si los siguientes subconjuntos de A son ideales de A.

i) La intersección $I \cap J$ y la unión $I \cup J$.

ii) La suma $I + J$ y el producto $I\,J$ definidos por:

$$I + J = \{a + b \mid a \in I \text{ y } b \in J\}$$

$$I\,J = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in I,\ b_i \in J,\ i = 1, 2 \ldots, n \text{ y } n \in \mathbb{N}^*\}$$

15. Demuestre que en un anillo totalmente ordenado A se verifica para todo $a, b \in A$:

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \preceq |a - b|$$

16. Demuestre que en un anillo totalmente ordenado A se verifica para todo $a, b \in A$:

$$2\max(a, b) = a + b + |a - b| \quad \text{y} \quad 2\min(a, b) = a + b - |a - b|$$

17. Demuestre que si $a \neq 0$ es un elemento de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, entonces $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

18. Demuestre que cualesquiera que sean los elementos a y b de un cuerpo ordenado $(\mathbb{K}, +\cdot, \preceq)$ se cumple $|ab| \preceq a^2 + b^2$.

Sugerencia: Téngase en cuenta que $(a + b)^2 \succeq 0$ y $(a - b)^2 \succeq 0$.

19. Usando la fórmula del binomio de Newton, demuestre que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

20. Sea f una aplicación creciente de $(U, \preceq)$ en $(V, \leqslant)$. Sea A un subconjunto no vacío de U, $\emptyset \neq A \subset U$, y sea $A' = f(A)$. Estudie si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   a) Si m es una cota superior de A entonces $m' = f(m)$ es una cota superior de A'.

   b) Si m es el máximo de A entonces $m' = f(m)$ es el máximo de A'.

   c) Si m es el supremo de A entonces $m' = f(m)$ es el supremo de A'.