Álgebra Lineal I

Nota importante: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros. En todos los problemas no sirve poner la solución correcta, es necesario para obtener la nota correspondiente el justificar la respuesta.

Problema 1

Consideremos las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Existe alguna matriz no nula X que cumpla $XA = BX^t$ (siendo X^t la matriz traspuesta de X) ?

(3 puntos).

Problema 2

Sea $f : R^4 \rightarrow R^4$ una aplicación lineal y a un número real que cumple las siguientes propiedades: i) $f(0,0,0,1) = (0,0,1,1)$ y $f(0,0,1,0) = (a,1,1,1)$. ii) $ker(f)$ contiene al subespacio vectorial $H = \{(x,y,z,t) \mid t = y + z = 0\}$.

A) Calcular la dimensión del núcleo y una base de la imagen de f. (2 puntos)

B) Calcular el rango en función de a de la matriz M de f respecto a la base estándar. (2 puntos)

Problema 3

Dados tres vectores linealmente independientes u_1, u_2, u_3 en un espacio vectorial E, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, se considera los subespacios $V = L(u_1 - u_2, u_2 - u_3)$ y $W = L(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3)$.

A) ¿Cuál es la dimensión de $V \cap W$ y $V + W$? (2 puntos)

B) Encontrar una base de $V \cap W$. (1 punto)