24-25

GRADO EN MATEMÁTICAS
PRIMER CURSO

GUÍA DE ESTUDIO COMPLETA

ÁLGEBRA LINEAL I

CÓDIGO 61021016

UNED

24-25

ÁLGEBRA LINEAL I

CÓDIGO 61021016

ÍNDICE

Nombre de la asignatura	ÁLGEBRA LINEAL I
Código	61021016
Curso académico	2024/2025
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
Título en que se imparte	GRADO EN MATEMÁTICAS
Curso	PRIMER CURSO
Periodo	SEMESTRE 1
Tipo	FORMACIÓN BÁSICA
Nº ETCS	6
Horas	150.0
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

Álgebra Lineal I es una asignatura del primer cuatrimestre, del primer curso, del grado en Matemáticas. Consta de 6 créditos ECTS y es de carácter básico. Dentro de su plan formativo se presentan contenidos y resultados básicos del Álgebra Lineal que, a grandes rasgos, pueden resumirse en: sistemas de ecuaciones lineales, matrices, espacios vectoriales y aplicaciones lineales u homomorfismos vectoriales. Ésta es una rama de las matemáticas que presenta gran cantidad de aplicaciones en todas las Ciencias, Ingenierías y Ciencias Sociales.

Álgebra Lineal I es una de las cuatro asignaturas del grado en Matemáticas que conforman la materia *Álgebra y Estructuras*. Las otras tres son:

Álgebra Lineal II (1er curso, 2º cuatrimestre),

Estructuras Algebraicas (2º curso, 1er cuatrimestre) y

Álgebra (2º curso, 2º cuatrimestre).

Las asignaturas Álgebra Lineal I y II trabajan fundamentalmente sobre la estructura algebraica de espacio vectorial, estudiando sus propiedades, elementos y procesos intrínsecos a ella. Posteriormente, en las asignaturas de segundo curso, se estudiarán otras estructuras algebraicas: grupos, anillos y cuerpos, que requieren un nivel mayor de abstracción.

Es muy importante, de cara a la matriculación de asignaturas, tener en cuenta que no se podrá abordar el estudio de Álgebra Lineal II sin dominar los contenidos de Álgebra Lineal I, ya que aquélla es una continuidad en el estudio de los conceptos de ésta.

En relación con el perfil profesional, el Álgebra contribuye al desarrollo de la habilidad para formular problemas de un entorno profesional, en el lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Los conocimientos previos necesarios para afrontar el estudio de la asignatura son los propios del Bachillerato Científico-Tecnológico o los de la asignatura Matemáticas del Curso de Acceso para Mayores de 25 años. Si se lleva mucho tiempo sin estudiar matemáticas, se recomienda ponerse al día utilizando la bibliografía recomendada para el mencionado Curso de Acceso o un libro de texto de Bachillerato. También dispone de los materiales gratuitos del Curso Cero de libre acceso en el portal de la UNED.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	BEATRIZ ESTRADA LOPEZ (Coordinador de asignatura)
Correo Electrónico	bestra@mat.uned.es
Teléfono	91398-7248
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Nombre y Apellidos	ROBERTO CANOGAR MCKENZIE
Correo Electrónico	rcanogar@mat.uned.es
Teléfono	91398-8775
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

El **Equipo Docente** realizará la tutorización y el seguimiento de los estudiantes fundamentalmente a través del curso virtual de la asignatura. En él se habilitarán foros temáticos en los que el alumno podrá plantear sus dudas y trabajar junto con sus compañeros. Así mismo, los alumnos podrán contactar con el Equipo Docente telefónicamente o de manera presencial en el siguiente horario:
Profesora Beatriz Estrada López
Martes de 10:30 a 14:30
Teléfono: 91 398 7248
email: bestra@mat.uned.es
Departamento de Matemáticas Fundamentales, Facultad de Ciencias
Juan del Rosal, 10, 28040 Madrid.
Tutores presenciales: en algunos casos dispondrá de un tutor en su Centro Asociado, al que podrá consultar sus dudas personalmente de manera más cercana. Consulte en su Centro.

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

Competencias Generales:
CG4: Análisis y síntesis.
CG5: Aplicación de los conocimientos a la práctica.
CG13: Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica.
CG14: Competencia en el uso de las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación).
Competencias Específicas:
CED1: Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio del Álgebra Lineal.
CEP4: Resolución de problemas.
CEA1: Destreza en el razonamiento y capacidad para utilizar sus distintos tipos, fundamentalmente por deducción, inducción y analogía.
CEA2: Capacidad para tratar problemas matemáticos desde diferentes planteamientos y su formulación correcta en lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución. Incluyendo la representación gráfica y la aproximación geométrica.
CEA3: Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicos, con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones.
CEA4: Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento, ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos.
CEA7: Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- Manejar matrices, calcular determinantes, y estudiar y resolver, en su caso, sistemas de ecuaciones lineales. Utilizar el Teorema de Rouché-Frobenius.
- Manejar espacios vectoriales de dimensión finita. Manejar conceptos relacionados con subespacios vectoriales o variedades lineales de un espacio vectorial de dimensión finita.
- Manejar bases de un espacio vectorial y coordenadas de vectores respecto de una base. Conocer y manejar las ecuaciones de cambio de coordenadas entre dos bases distintas de un mismo espacio vectorial. Resolver problemas con bases.
- Manejar las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. Conocer sus operaciones.
- Manejar las distintas matrices de una aplicación lineal al fijar bases de los espacios vectoriales entre los que está definida dicha aplicación lineal. Resolver problemas con aplicaciones lineales y sus matrices.

CONTENIDOS

1. Matrices

1.1 Operaciones con matrices.
1.2 Escalonamiento de Matrices (Método de Gauss).
1.3 Rango de una matriz.
1.4 Inversa de una matriz.
1.5 Determinante de una matriz cuadrada

Una matriz de orden o tamaño m por n, con elementos en un cuerpo K, es un conjunto de $m \times n$ escalares (o elementos del cuerpo) ordenados en m filas y n columnas. Comenzamos estudiando distintos tipos de matrices y en la Sección 1.1 se presentan las operaciones básicas: suma de matrices y producto de un escalar por una matriz. Estas dos operaciones cumplen una serie de propiedades con las que estamos familiarizados ya que son propiedades (pág. 6) de los cuerpos de números reales y complejos, que confieren al conjunto de matrices estructura de espacio vectorial. También se estudia el producto de matrices, de tamaño adecuado, una operación que no cumple algunas de las propiedades "buenas" de las operaciones anteriores. Por ejemplo, el producto no es conmutativo: ABBA, en general. A veces, para simplificar el producto de matrices resulta interesante contemplar las matrices por "trozos": a esto lo llamamos división por cajas o bloques de una matriz.
La Sección 1.2 se dedica al conocido como **Método de Gauss** que sirve para transformar una matriz A en otra más sencilla B manteniendo ambas propiedades similares más fáciles de estudiar en B que en A. El método consiste en cambiar las filas de una matriz mediante la aplicación de **operaciones elementales** (pág. 16) que consisten en:
(1) Intercambiar dos filas.
(2) Sumarle a una fila otra multiplicada por un escalar.
(3) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
Cada operación elemental tiene asociada una **matriz elemental** que es el resultado de aplicar a la matriz identidad dicha operación elemental. De modo que, aplicarle a una matriz una operación elemental en sus filas es equivalente a multiplicarla por la izquierda por la matriz elemental asociada (pág. 19).
Cuando mediante un número finito e operaciones elementales de filas podemos transformar una matriz A en otra matriz B, decimos que A y B son **equivalentes por filas**. De entre todas las matrices equivalentes por filas a una matriz A nos interesan dos: las **matrices escalonadas** y la matriz **escalonada reducida** (esta última es única). Llamamos Método de Gauss al algoritmo que transforma una matriz en una escalonada (Teorema 1.24), y Método de Gauss-Jordan al que transforma una matriz en su matriz escalonada reducida equivalente (forma de Hermite por filas, pág. 26).

En la Sección 1.3 se estudia el **rango** de una matriz, que es el número de filas independientes que tiene. Resulta que el rango de dos matrices equivalentes por filas es igual, y que el rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas. Por lo que el rango de una matriz es igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente (Corolario 1.44) y esta caracterización es el método más eficiente de cálculo del rango. En esta sección se estudia también el comportamiento del rango respecto a las operaciones con matrices (Teorema 1.53).

Todo lo hecho por filas, puede hacerse también por columnas y se cumplen las mismas propiedades, de modo que se puede definir una equivalencia entre matrices si podemos pasar de una a otra utilizando operaciones elementales de filas y/o de columnas.

En la Sección 1.4 se estudian los casos de existencia de elemento inverso para el producto entre matrices cuadradas. Una matriz A se dice que es **invertible** o **regular** si tiene elemento inverso para el producto, es decir si existe otra matriz A^{-1} tal que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Entre los ejemplos de matrices invertibles están las matrices elementales. Se tienen distintas caracterizaciones de las matrices inversas (Teoremas 1.60 y 1.61) y un método de cálculo eficiente de la inversa utilizando operaciones elementales por filas o por columnas (pág. 50). Terminamos la sección con el concepto de **inversas laterales** para matrices no cuadradas.

En la Sección 1.5 se estudia el concepto de **determinante** de una matriz cuadrada, así como distintas reglas de cálculo: bien sea recurriendo al método de escalonamiento de Gauss o bien utilizando el desarrollo por una fila o columna a lo que llamamos Método de Laplace. El determinante de una matriz triangular se calcula trivialmente como el producto de los elementos de la diagonal, y el método de escalonamiento simplificará el cálculo del determinante convirtiendo una matriz cuadrada en escalonada (en particular triangular). Esto se puede hacer porque las operaciones elementales se comportan bien respecto al determinante (Proposiciones 1.75, 1.77 y 1.80). Mediante el determinante se obtiene la siguiente caracterización de las matrices invertibles: A tiene inversa si y sólo si det(A)0 (Teorema 1.84). El determinante se comporta bien respecto al producto y trasposición de matrices:

$$\det(A\,B)=\det(A)\,\det(B) \quad \text{y} \quad \det(A)=\det(A^t)\,.$$

Dos aplicaciones directas del determinante son:

- El cálculo (poco eficiente) de la inversa según la fórmula $A^{-1}=\mathrm{Adj}(A)^t/\det(A)$ (pág. 66).
- El estudio del rango de una matriz por menores (pág. 67).

2. Sistemas Lineales

2.1 Representación matricial

2.2 Resolución de sistemas lineales por escalonamiento.

2.3 Teorema de Rouché-Frobenius.

En este tema se estudian métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, o simplemente sistemas lineales.

Una ecuación lineal en *n* incógnitas $x_1,\ldots,x_n$ tiene una expresión de la forma $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$ donde los $a_1,\ldots,a_n$ se llaman coeficientes y son escalares (números) o elementos de un cuerpo K que será el de los números reales R, o el de los complejos C. El término b es un escalar del mismo cuerpo y se denomina término independiente. Cuando $b=0$ la ecuación se dice que es homogénea. Una solución de la ecuación anterior es una lista ordenada de n escalares $(c_1,\ldots,c_n)$ que son valores que sustituidos en las n incógnitas $x_1,\ldots,x_n$ cumplen la ecuación.

Un sistema lineal es un conjunto de varias ecuaciones lineales, en las mismas incógnitas, que tienen que cumplirse a la vez y dos sistemas se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

El objetivo de esta Unidad Didáctica es encontrar métodos para decidir si un sistema lineal tiene o no soluciones (discusión de un sistema), y en caso afirmativo encontrarlas todas (resolución de un sistema). Para ello, vamos a utilizar representaciones matriciales de los sistemas que se escriben de forma abreviada como

$$AX=B$$

Siendo A la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y B la matriz de términos independientes. A la matriz que resulta de añadir a A la columna B se la denomina matriz ampliada y se denota por $(A|B)$. Cada fila de la matriz $(A|B)$ representa una ecuación del sistema. Los resultados de este capítulo ya son de sobra conocidos de cursos preuniversitarios. Ahora, simplemente formalizamos y demostramos los resultados teóricos que se aplican en la práctica.

Un sistema lineal se dice que es **escalonado** si la matriz ampliada $(A|B)$ es escalonada. Estos sistemas se resuelven con gran facilidad (Teorema 2.8).

El método que emplearemos para discutir y resolver un sistema $AX=B$ será el de transformarlo en otro escalonado equivalente $A'X = B'$. Esto podremos hacerlo aplicando el método de Gauss a la matriz $(A|B)$ hasta obtener otra escalonada equivalente $(A' \mid B')$. El Teorema 2.3, pág. 78, nos dice que si las matrices ampliadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los sistemas lineales son equivalentes, es decir tienen las mismas soluciones. Las operaciones elementales se hacen sólo en filas (que representan las ecuaciones), ¡ojo! aquí no se pueden utilizar operaciones por columnas.

Con los resultados conocidos sobre el rango de matrices y sabiendo que éste se conserva por operaciones elementales, se tiene como consecuencia directa el **Teorema de Rouché-Frobenius** (pág. 85) que permite discutir un sistema $AX=B$ comparando los rangos de las matrices A y $(A|B)$.

El capítulo 2 del libro de texto incluye una sección sobre la conocida como factorización LU. Método que se aplica para resolver de forma eficiente, o bien sistemas con un número grande de variables, o bien baterías de sistemas lineales de la forma AX=B , con *B* variando y *A* fija. Se recomienda la lectura de esta sección, aunque no será materia de examen.

3. Espacios vectoriales

3.1 Espacios vectoriales reales y complejos
3.2 Dependencia e independencia lineal de vectores. Rango. Sistema generador, base y dimensión.
3.3 Coordenadas y matrices de cambio de base.
3.4 Subespacios vectoriales. Ecuaciones paramétricas e implícitas.
3.5 Suma e intersección de subespacios.
3.6 Espacio vectorial cociente módulo un subespacio.

El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo, así como el conjunto de las matrices de un orden dado, tienen propiedades comunes: la combinación lineal de dos soluciones de un sistema es otra solución del sistema, y la combinación lineal de dos matrices del mismo orden es otra matriz del mismo orden. Estas "combinaciones lineales" son la base del Método de Gauss que ha impregnado hasta ahora -y lo seguirá haciendo- todo lo visto.
Generalizando lo que ha pasado con los sistemas lineales y las matrices, aparece la estructura abstracta de **espacio vectorial**. Las combinaciones lineales de los elementos de un espacio vectorial, a los que llamaremos **vectores**, producen nuevos elementos de dicho espacio, nuevos vectores. Así, los conjuntos de matrices o de soluciones de sistemas lineales homogéneos son ejemplos de espacios vectoriales.

Comenzamos con el concepto abstracto de espacio vectorial *V* , que es una estructura algebraica ligada a un cuerpo de números *K* que será el de los reales: *R*, o el de los complejos *C* . En el espacio vectorial se podrán operar sus elementos entre sí (la operación normalmente se denotará como "+") y se podrán multiplicar por los elementos del cuerpo, a los que se llamará **escalares**; de modo que las operaciones cumplan las 8 propiedades enunciadas en la pág. 99.
A los elementos del espacio vectorial *V* se les suele denotar por letras latinas como *u, v, w…* o también *x, y, z…* ; mientras que se suelen utilizar las letras griegas *, ,* o también (lambda), (mu)..., para denotar a los escalares.
Un espacio vectorial que jugará un papel importante será $K^n = R^n$ *o* C^n formado por secuencias ordenadas de *n* elementos de *K* , también llamadas *n* -uplas. Esto es K^n={ (x_1 ,…,x_n) : x_iK} .

En la Sección 3.1 conoceremos los conceptos más importantes del espacio vectorial: combinación lineal, dependencia e independencia lineal de vectores. Será importantísimo tenerlos muy claros.

Desde la Sección 3.2 centraremos el estudio en los espacios vectoriales de tipo finito o de **dimensión finita**, que son los únicos que trabajaremos en este curso. En un espacio vectorial de dimensión finita se puede encontrar un conjunto finito de vectores *{v1,…,vk}* , de modo que podamos obtener todos los vectores del espacio mediante combinaciones lineales de ellos. A un conjunto de vectores tal se le denomina **sistema generador** o sistema de generadores. Estaremos interesados en encontrar sistemas generadores que tengan el número mínimo de vectores, a los que llamaremos **bases**, y que estarán caracterizados por el hecho de que los vectores sean linealmente independientes. Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos al que se denomina **dimensión** (Teorema 3.18, pág. 112), y todo conjunto de vectores linealmente independiente se puede ampliar hasta obtener una base (**Teorema de ampliación a una base**, pág. 115).

Dada una base $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ de un *K* -espacio vectorial *V* de dimensión *n* , se cumple que cualquier vector *v* de *V* se puede escribir de modo único como combinación lineal de los elementos de la base

$$v=x_1v_1+\ldots+x_nv_n ,$$

con $x_1,\ldots,x_n$ escalares, a los que se denomina **coordenadas** de *v* en la base *B*. Este hecho es importantísimo pues permite, fijada una base *B* , identificar todo vector con sus coordenadas respecto a dicha base, lo que expresaremos del siguiente modo:

$$v = (x_1,\ldots,x_n)_B$$

"*v* es el vector de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ respecto de la base *B* ". Así, se representan los vectores de un espacio vectorial mediante elementos de K^n , facilitando su manipulación y el uso de matrices para el estudio de espacios y subespacios.

La Sección 3.4 se dedica al rango de un conjunto de vectores que es el mayor número de vectores linealmente independientes que contiene. Una forma muy cómoda de estudiar el rango es representar los vectores mediante coordenadas, disponerlos en las filas de una matriz, y estudiar el rango de la matriz.

Un mismo vector *v* tiene distintas coordenadas respecto de distintas bases *B* y *B′*, y podemos obtener una matriz que nos permita obtener las coordenadas de un vector en una base dada *B’* , conocidas sus coordenadas en otra base B, se hace a utilizando una matriz que se denomina **matriz de cambio de base** de *B* a *B’* (pág. 125). Esto se hará en la Sección 3.5.

En la sección 3.6 nos interesaremos por los subconjuntos no vacíos U de un espacio vectorial V que, en sí mismos, tienen estructura de espacio vectorial, a los que llamaremos **subespacios vectoriales**. Todos ellos contienen al vector 0. Si $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es un sistema generador de un subespacio *U* , lo denotaremos por $U=L(u_1,\ldots,u_m)$. De un subespacio

vectorial nos interesará determinar un sistema generador, una base y su dimensión.
La representación de vectores mediante coordenadas respecto de una *B* , permite también definir cualquier subespacio vectorial *U*, de un espacio vectorial *V*, como el conjunto de vectores cuyas coordenadas son el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, al que llamaremos **ecuaciones implícitas o cartesianas** del subespacio respecto de *B* . Las ecuaciones son condiciones que tienen que cumplir las coordenadas de un vector para que pertenezca al subespacio. El conjunto de soluciones de las ecuaciones implícitas se denominan **ecuaciones paramétricas** del subespacio y a partir de ellas se puede determinar fácilmente una base.
Una vez que se tiene una representación de los subespacios vectoriales mediante ecuaciones y de los vectores mediante coordenadas - todo ello relativo a una base fijada-, en las Secciones 3.8 y 3.9 se construyen nuevos subespacios vectoriales haciendo distintos tipos de operaciones con ellos:
- Intersección de subespacios
- Suma de subespacios
- Cociente módulo un subespacio.

4. Aplicaciones lineales

4.1 Aplicación lineal. Subespacios Núcleo e Imagen.
4.2 Tipos de aplicaciones lineales.
4.3 Representación matricial.
4.4 Endomorfismos.
4.5 Proyecciones y Simetrías.
4.6 Espacio dual.

En esta unidad didáctica se estudiarán la aplicaciones propias entre espacios vectoriales. Dados dos espacios vectoriales de dimensión finita U y V definidos sobre el mismo cuerpo *K* , una aplicación f:UV es **lineal** si transforma combinaciones lineales de vectores del espacio de partida *U* en combinaciones lineales del espacio *V* de llegada:

f(u+v)=f(u)+f(v) , para todo u, vU; ,K .

Se dice que *f* respeta la estructura de los espacios vectoriales. A las aplicaciones lineales también se les llama **homomorfismos vectoriales**. Una de las características de estas aplicaciones es que transforman el cero del espacio vectorial de partida en el cero del espacio vectorial de llegada: $f(0_U)=0_V$, aunque, igual que en el texto base, cuando no se produzca ambigüedad prescindiremos de la notación con subíndices y llamaremos 0 al elemento neutro de todo espacio vectorial, ya sea una matriz, un polinomio, una aplicación o un elemento de K^n .

Por cómo se comportan las aplicaciones lineales respecto a las combinaciones lineales de vectores, ocurre que conservan la dependencia lineal: si $u_1,\ldots,u_n$ son vectores linealmente dependientes en *U* , entonces sus imágenes $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ son vectores linealmente dependientes en *V* (eso no ocurre con la independencia lineal en general), y como consecuencia una aplicación lineal queda completamente determinada conocidas las imágenes de los vectores de una base del espacio de partida (Proposición 4.6, pág. 162).
El conjunto formado por todas las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales *U* y *V* de denota por L(U,V) y tiene estructura de espacio vectorial para la suma de aplicaciones y el producto de una aplicación por un escalar.
Existen dos subespacios vectoriales asociados a una aplicación lineal dada f:UV denominados núcleo e imagen. El **núcleo de *f*** es el conjunto de vectores de *U* cuya imagen es el 0 de *V* y se suele denotar por Ker f={ uU: f(u)=0}U. "Ker" viene de kernel, núcleo en inglés. Y **la imagen de f** que es el subespacio vectorial de V formado por todas las imágenes de los vectores de U:

Im f = { f(u): uU }V

Las dimensiones de estos subespacios guardan la siguiente relación (pág. 167):
Fórmula de dimensiones: dim Ker f + dim Im f = dimU.
El estudio de estos subespacios vectoriales permite clasificar las aplicaciones en los siguientes tipos:
•Inyectivas o monomorfismos: si Ker f = {0} .
•Suprayectivas (o sobreyectivas) o epimorfismos: si Im *f*= V
•Biyectivas o isomorfismos: inyectivas y sobreyectivas a la vez.
Cuando los espacios de partida y de llegada coinciden, esto es *f:VV* entonces se dice que *f* es un endomorfismo y cuando es biyectivo se le llama automorfismo.
Otra de las operaciones entre aplicaciones lineales es la composición. Para realizar la **composición de dos aplicaciones lineales** *f* y *g* tenemos que tener espacios vectoriales *U* , *V* y *W* (no necesariamente distintos) definidos sobre el mismo cuerpo *K* . Si *f:UV* y *g:VW* entonces podemos definir la aplicación *f* compuesta con *g*, que se denota por $g_o f$ del siguiente modo $g_o f$*:UW* , ($g_o f)(u):=g(f(u))$, para todo uU .
El **Primer Teorema de Isomorfía** (pág. 174) nos dice que toda aplicación lineal *f* se puede descomponer como la composición de 3 aplicaciones canónicamente asociadas a ella: una sobreyectiva, una biyectiva y una tercera inyectiva.
En la Sección 4.3 se describen las aplicaciones lineales *f:UV* mediante ecuaciones y matrices que relacionan las coordenadas de vectores respecto a bases fijadas *B* y *B'* en los espacios de partida y de llegada, respectivamente. Si uU, con coordenadas $u = (x_1,\ldots,x_n)_B$ y su imagen es el vector $f(u) = (y_1,\ldots,y_n)_{B'}$ V , entonces existe una única matriz $M_{BB'}(f)$ de orden *m*×*n* que cumple:

$$(y_1 \dots y_n)^t = M_{BB'}(f)\ (x_1 \dots x_n)^t \quad \text{de forma abreviada } Y=MX$$

para todo *uU* . A esta expresión la denominaremos ecuaciones de *f* respecto de las bases *B y B'* , y $M_{BB'}$(f) es la matriz de *f* respecto de las bases *B* y *B'* . Las columnas de dicha matriz están formadas por las coordenadas en *B'* de las imágenes de los vectores de *B.* Estaremos interesados en obtener matrices de una misma aplicación en distintas bases, y veremos cómo se relacionan dichas matrices con las matrices de cambio de base o de cambio de coordenadas.

Se dedica la Sección 4.4 al estudio de los endomorfismos o aplicaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo. En estos casos se considera la misma base en el espacio de partida y de llegada, que son el mismo Las matrices de un endomorfismo en distintas bases son matrices semejantes. En la Sección 4.5 se estudian dos tipos de endomorfismos que tienen especial interés: las **proyecciones** y las **simetrías**.

La última Sección, la 4.6, se dedica al estudio del **espacio dual** *V** asociado a un *K* -espacio vectorial *V* . El dual está formado por todas las aplicaciones lineales *f:VK* , llamadas **formas lineales**. La dimensión de *V* y *V** coincide, y a partir de una base *B* de *V* se puede obtener una base de *V**, canónicamente asociada, denominada base dual. También se estudiará la relación existente entre los elementos de *V** y los hiperplanos de *V.*

METODOLOGÍA

En la modalidad de educación a distancia propia de la UNED, las actividades formativas se distribuyen entre el trabajo autónomo y el tiempo de interacción con los Equipos Docentes, estudiantes y tutores. Esta interacción se realiza, fundamentalmente, por dos medios:

1. **Las orientaciones y los materiales de estudio** diseñados por los Equipos Docentes. Todos los contenidos de la asignatura se siguen por un libro de texto al que denominamos Bibliografía Básica y sobre el que se trabaja en común en el curso virtual. Los contenidos de la asignatura se pueden seguir también por otros libros de álgebra lineal, con tal de asegurarse de cubrir todos los contenidos descritos en esta Guía; pero el material de trabajo común y de referencia será la Bibliografía Básica. Se tendrán en cuenta las orientaciones para el estudio el estudio dadas en esta guía, donde se destacan los conceptos fundamentales, las destrezas y objetivos que se persiguen. Además, en el Plan de Trabajo se incluye una propuesta de planificación temporal del estudio de la asignatura. Dispondrá también de materiales multimedia (vídeos y videoconferencias grabadas).
2. **La comunicación entre docentes y estudiantes** para la resolución de dudas, que se lleva a cabo de dos modos: por un lado podrá disponer de un tutor en su centro asociado -no en todos los centros-, con el que podrá asesorarse y resolver dudas personalmente. Por otro, podrá contactar con el equipo docente de la asignatura (y también con su tutor)

por medio del **curso virtual** (dispone de un curso virtual por cada asignatura), en el que se atienden dudas organizadas por temas. Con el Equipo Docente podrá contactar, además, por teléfono o personalmente en su horario de atención a estudiantes.

PLAN DE TRABAJO

En el cómputo de horas se incluyen el tiempo dedicado a las horas lectivas, horas de estudio, tutorías, seminarios, trabajos, prácticas o proyectos, así como las exigidas para la preparación y realización de exámenes y evaluaciones.

PEC: Álgebra Lineal I - 6 Horas

Se realizarán dos pruebas.

Primera PEC: Matrices.

Segunda PEC: Sistemas Lineales y Espacios Vectoriales

BLOQUE: Matrices - 48 Horas

	Temas de estudio	**Ejercicios**
Semana 1 (12 horas)	Tipos de Matrices. Operaciones con Matrices. Método de Gauss: operaciones elementales de filas y matrices elementales. Equivalencia de matrices por filas. La forma escalonada reducida. Páginas 1 a 30.	1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.20
Semana2 (12 horas)	Operaciones elementales de columnas. Equivalencia de matrices por columnas. Equivalencia de matrices. El rango de una matriz. Páginas 31 a 41.	1.3, 1,6, 1.8, 1.9, 1.13, 1.14, 1.18
Semana 3 (12 horas)	La inversa de una matriz cuadrada. Propiedades. Páginas 42 a 52.	1.7, 1.15, 1.17, 1.19
Semana 4 (12 horas)	El determinante de una matriz cuadrada. Páginas 53 a 71.	1.11, 1.16, 1.18, 1.21

BLOQUE: Sistemas Lineales - 12 Horas

	Temas de estudio	**Ejercicios**
Semana 5 (12 horas)	Sistemas escalonados. Sistemas equivalentes. Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Factorización LU (Lectura recomendada, no es materia de examen) Páginas 75 a 96	2.1 al 2.11

BLOQUE: Espacios Vectoriales - 48 Horas

	Temas de estudio	**Ejercicios**
Semana 6 (12 horas)	Espacio vectorial. Dependencia e independencia lineal de vectores. Páginas 99 a 108.	Se trabajan estos conceptos de forma transversal en todos los ejercicios.
Semana 7 (12 horas)	Sistema generador, base y dimensión. Coordenadas de un vector respecto de una base. Rango. Matriz de cambio de base. Páginas 109 a 127.	3.1, 3.2, 3.6, 3.7, 3.9, 3.10, 3.13, 3.14
Semana 8 (12 horas)	Subespacios vectoriales. Ecuaciones paramétricas e implícitas. Páginas 128 a 140.	3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.11, 3.12(a)

Semana 9 (12 horas)	Intersección y suma de subespacios. Espacio cociente módulo un subespacio vectorial. Páginas 141 a 152.	3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.11, 3.12(b), 3.15, 3.16

BLOQUE: Aplicaciones Lineales - 34 Horas

	Temas de estudio	**Ejercicios**
Semana 10 (12 horas)	Concepto de aplicación lineal. Propiedades y operaciones con aplicaciones lineales. Subespacios imagen y núcleo de una aplicación lineal. Tipos de aplicaciones lineales. Páginas 157 a 175.	4.1 al 4.8, y 4.10.
Semana 11 (14 horas)	Matriz y ecuaciones de una aplicación lineal. Matrices de una aplicación lineal en distintas bases. Endomorfismos. Páginas 176 a 185.	4.1 al 4.8, y 4.10.
Semana 12 (11 horas)	Proyecciones y simetrías. Espacio dual. Páginas 186 a 195.	4.9 y 4.11 al 4.14

PRUEBA PRESENCIAL: 2 horas

Total Horas ECTS introducidas aquí : 150

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen tipo test
Preguntas test	10
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Un único libro de teoría de Álgebra Lineal

Criterios de evaluación

Cada respuesta acertada vale 1 punto, cada respuesta incorrecta -0,5 puntos. Las preguntas sin contestar no añaden ni restan puntos.

% del examen sobre la nota final	60
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	4,5

Comentarios y observaciones

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	Si

Descripción

Se realizarán dos pruebas de evaluación continua (PEC). Las dos PEC serán examenes de desarrollo con varios ejercicios que podrán ser de tipo teórico y práctico. El nivel de dificultad nunca superará a los que pueden consultarse en la bibliografía básica. Los ejercicios serán sobre los siguientes temas:

Primera PEC: Matrices (fecha provisional: 14 de noviembre)

Segunda PEC: Sistemas Lineales y Espacios vectoriales (fecha provisional: 19 de diciembre).

Las PEC se realizan en línea, a través del curso virtual de Álgebra Lineal I, donde se darán instrucciones precisas para su realización. En el curso virtual de la asignatura puede consultar pruebas de años anteriores para hacerse una idea del tipo de preguntas.

La nota por evaluación continua será la media de las notas de las dos pruebas y será tenida en cuenta para la calificación final, tanto en la convocatoria de junio como en la de septiembre.

Criterios de evaluación

- Comprensión de los conceptos básicos.

- Resolución de problemas en los que se demuestren las habilidades adquiridas.

- Uso correcto del lenguaje matemático (claridad y precisión).

- Desarrollo de argumentos lógicos con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones.

Ponderación de la PEC en la nota final	40%
Fecha aproximada de entrega	14/11/2024 y 19/12/2024 (se confirmarán a través del curso virtual)

Comentarios y observaciones

La nota de la evaluación continua se conserva para la convocatoria de septiembre.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s? No

Descripción

No hay más actividades evaluables.

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final 0

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

La nota final (NF) será igual a la de la Prueba Presencial (PP) si no se han realizado las dos pruebas de evaluación contínua.

Cuando la nota de las dos pruebas de evaluación continua no sea inferior a 4 puntos, la nota por evaluación continua (PEC) será la media entre las notas de las dos pruebas. En tal caso, el cómputo de la nota final se hará según la fórmula:

NF = máximo { PP, (0.60) • PP + (0.40) • PEC }

Es decir, que se hará la ponderación de notas PP y PEC siempre que el valor obtenido no perjudique la nota de la Prueba Presencial.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Texto básico de teoría:

Título: Álgebra Lineal y Geometría Vectorial. Segunda edición (2019).

Autores: Alberto Borobia y Beatriz Estrada

Editorial: Sanz y Torres.

ISBN: 978-84-17765-04-0

En esta asignatura se estudiarán los capítulos 1 al 4. Los capítulos 5 al 9 se corresponden con los contenidos de la asignatura del segundo semestre Álgebra Lineal II.

Texto básico de ejercicios resueltos:

Título: Ejercicios resueltos de Álgebra Lineal. Volumen I. (2020).

Autora: Beatriz Estrada

Editorial: Sanz y Torres.

ISBN: 978-84-17765-76-7

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Libros de teoría:

Álgebra Lineal con métodos elementales. L. Merino y E. Santos. Ed. Paraninfo, 2006.

Álgebra Lineal (Vol .I). Fernando, J.F., Gamboa, J.M., Ruiz, J.M. Ed. Sanz y Torres, 2011.

Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana. J. Burgos. McGraw Hill, 3ª ed.

Álgebra Lineal y Geometría. Hernández, E., Vázquez, M.J., Zurro, M.A. 3ª edición. Pearson. 2012.

Teoría con aplicaciones:

Álgebra Lineal y sus aplicaciones. D. C. Lay. . Prentice Hall, 3ª ed, 2007.

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Curso virtual. Después de la Bibliografía Básica, las herramientas telemáticas son el recurso más importante para el estudio a distancia. A través del curso virtual de la asignatura podrá obtener materiales e informaciones importantes:

- **Guía de Estudio completa** en la que se orienta sobre los contenidos y objetivos de cada tema.
- **Exámenes** de años anteriores. De gran utilidad para saber el nivel de exigencia para superar la asignatura y como modelos de práctica.
- **Material audiovisual**: vídeos con resúmenes de los contenidos de la asignatura siguiendo la Bibliografía Básica.
- **Autoevaluaciones.**
- **Pruebas de evaluación continua** (se realizan en línea a través del curso virtual)
- **Herramientas de comunicación**. El curso virtual provee a los alumnos de espacios (foros) para la comunicación entre ellos, así como para comunicarse con los Tutores y el Equipo Docente, y resolver sus dudas. A dicho curso acceden todos los alumnos matriculados en España y en el extranjero, todos los Tutores y el Equipo Docente. El acceso a los cursos virtuales de cada asignatura se hace desde la página web de la UNED **www.uned.es** (identificándose con un nombre de usuario y contraseña que obtendrá al matricularse). El equipo docente utilizará este medio telemático para comunicar a los alumnos novedades y hechos relevantes relacionados con la preparación de la asignatura a través del Tablón de Anuncios. Su uso es indispensable.

Programas de cálculo simbólico que le servirán para la corrección de ejercicios y la experimentación:

MAPLE V se distribuye de forma gratuita a alumnos de la UNED.

wxMaxima: software libre.

GLOSARIO

El glosario está contenido en la Bibliografía Básica.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.