Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1
Si $\otimes$ denota el conector disyunción excluyente, $\leftrightarrow$ denota el conector bicondicional, y p y q son dos proposiciones cualesquiera, entonces son equivalentes:
a)$\neg p \otimes \neg q$ y $p \leftrightarrow q$
b)$\neg(p \otimes q)$ y $\neg p \otimes q$
c)$\neg p \otimes \neg q$ y $\neg(p \otimes q)$

Ejercicio 2
Sean A, B, C y D cuatro conjuntos cualesquiera tales que $C \subset A$ y $D \subset B$. Sea una aplicación arbitraria $f\colon A \to B$ y sea f^{-1} la relación inversa de f. Se consideran las dos inclusiones:

$$\text{i) } C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$$
$$\text{ii) } D \subset f\big(f^{-1}(D)\big)$$

a) Las dos inclusiones son siempre verdaderas.
b) Las dos inclusiones son siempre falsas.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 3 En el conjunto ordenado $(\mathbb{N}^*, |)$, siendo $|$ la relación "divide", se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Se satisface:
a) 8 es el máximo de A.
b) No existe ningún elemento que sea a la vez maximal y minimal de A.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 4 Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí y sean $u = 2a + 5b$ y $v = 5a + 13b$. El valor de $\operatorname{mcd}(u, v)$ es:
a) 1.
b) 5.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 5 Sean un conjunto E y una operación interna $\circ$, definida sobre E, asociativa, conmutativa y tal que para todo $a \in E$ se satisface la igualdad $a \circ a = a$. Se define en E la relación $\mathcal{R}$ mediante:
Para todo $a, b \in E$

$$a \mathcal{R} b \quad \text{si y sólo si} \quad a \circ b = b.$$

Se puede asegurar que :
a) $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) $\mathcal{R}$ es una relación de orden.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Soluciones

Ejercicio 1

Construimos la tabla de verdad con las proposiciones implicadas

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \otimes q$	$\neg(p \otimes q)$	$\neg p \otimes \neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \otimes q$
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1

A la vista de la tabla se observa que las columnas de $\neg(p \otimes q)$ y $\neg p \otimes q$ coinciden mientras que las columnas de $\neg p \otimes \neg q$ y $p \leftrightarrow q$ no coinciden y tampoco las de $\neg p \otimes \neg q$ y $\neg(p \otimes q)$. La opción correcta es la b).

Ejercicio 2

La opción correcta es la c). En efecto, veamos que la inclusión de i) es siempre verdadera mientras que la inclusión de ii) puede ser falsa.
i) Para todo x, si $x \in C$ entonces $f(x) \in f(C)$. (*)
Ahora bien si $a \in A$ y $H \subset B$, $a \in f^{-1}(H)$ si y sólo si $f(a) \in H$, luego aplicando esto a $a = x$ y a $H = f(C)$ resulta que $x \in f^{-1}(f(C))$ si y sólo si $f(x) \in f(C)$. Combinando este resultado con (*), se obtiene que para todo x, si $x \in C$ entonces $x \in f^{-1}(f(C))$, es decir $C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$.
ii) Tomamos $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f\colon A \to B$ la aplicación tal que $f(1) = 3, f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1$ y sea el conjunto $D = \{1, 2\}$. En este caso $f^{-1}(D) = \{2, 3, 4, 5\}$ y $f(f^{-1}(D)) = \{1\}$ y por tanto no se verifica que $D \subset f\big(f^{-1}(D)\big)$.

Ejercicio 3

La opción correcta es la c).
En efecto, 8 no es máximo de A pues no es cota superior de todos los elementos de A. En concreto, 6, 3 ó 5 no dividen a 8.
El elemento 5 es a la vez maximal y minimal de A pues no existe en A ningún múltiplo de 5 ni ningún divisor de 5.

Ejercicio 4

Sea $d \in \mathbb{N}^*$ un divisor común de u y v. Entonces existen u' y $v' \in \mathbb{N}^*$ tales que $\begin{cases} u &= du' \\ v &= dv' \end{cases}$. Sustituyendo se obtiene $\begin{cases} 2a + 5b &= du' \\ 5a + 13b &= dv' \end{cases}$. Si multiplicamos la primera igualdad por 5 y restamos la segunda igualdad multiplicada por 2 se obtiene $-b = d(5u' - 2v')$ y en consecuencia d es un divisor de b. Análogamente si multiplicamos la primera igualdad por 13 y restamos la segunda igualdad multiplicada por 5 se obtiene $a = d(13u' - 5v')$ y en consecuencia d es también divisor de a. Como a y b son primos entre sí, resulta que $\text{mcd}(u, v) = 1$.

Ejercicio 5

Veamos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden:
Reflexiva: Para todo $a \in E$ $a\mathcal{R}a$ pues se satisface la igualdad $a \circ a = a$.
Antisimétrica: Para todo $a, b \in E$, si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$, entonces $a \circ b = b$ y $b \circ a = a$. Pero $\circ$ es conmutativa y en consecuencia, $a \circ b = b \circ a$. Por tanto, $a = b$.
Transitiva : Para todo $a, b, c \in E$, si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, entonces $a \circ b = b$ y $b \circ c = c$. Pero $\circ$ es asociativa y en consecuencia, $a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$. Por tanto, $a\mathcal{R}c$. La relación no es en general simétrica pues si $a \neq b$ y $a\mathcal{R}b$ entonces $a \circ b = b$ y como la operación $\circ$ es conmutativa resulta que $b \circ a = b \neq a$. Por tanto, no es cierto que $b\mathcal{R}a$.
Nota: Operaciones conocidas que sean asociativas, conmutativas y tales que para todo $a \in E$ se satisface la igualdad $a \circ a = a$, son por ejemplo, la unión o intersección en el conjunto $E = \mathcal{P}(A)$ de las partes de un conjunto A, o el máximo común divisor y mínimo común múltiplo en $\mathbb{N}^*$. Por ejemplo en $\mathbb{N}^*$ si definimos $a \circ b = \text{mcd}(a, b)$, entonces la relación $\mathcal{R}$ sería :
Para todo $a, b \in E$

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b \quad &\text{si y sólo si} \quad \text{mcd}(a, b) = b, \\ &\text{si y sólo si} \quad b \text{ es un divisor de } a. \end{aligned}$$

Claramente $4\mathcal{R}2$ y sin embargo no es cierto que $2\mathcal{R}4$ pues $\text{mcd}(2, 4) \neq 4$.