Unidad didáctica 2: Sistemas lineales

2.1 Introducción

En esta Unidad Didáctica se estudian métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, o simplemente sistemas lineales.

Una ecuación lineal en n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ tiene una expresión de la forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los $a_1, \dots, a_n$ se llaman coeficientes y son escalares (números) o elementos de un cuerpo K que será el de los números reales: $\mathbb{R}$, o el de los complejos $\mathbb{C}$. El término b es un escalar del mismo cuerpo y se denomina término independiente. Cuando $b = 0$ la ecuación se dice que es homogénea. Una solución de la ecuación anterior es una lista ordenada de n escalares $(c_1, \dots, c_n)$ que son valores que sustituidos en las n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ cumplen la ecuación.

Un sistema lineal es un conjunto de varias ecuaciones lineales, en las mismas incógnitas, que tienen que cumplirse a la vez y dos sistemas se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

El objetivo de esta Unidad Didáctica es encontrar métodos para decidir si un sistema lineal tiene o no soluciones (discusión de un sistema), y en caso afirmativo encontrarlas todas (resolución de un sistema). Para ello, vamos a utilizar representaciones matriciales de los sistemas que se escriben de forma abreviada como

$$AX = B$$

Siendo A la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y B la matriz de términos independientes. A la matriz que resulta de añadir a A la columna B se la denomina matriz ampliada y se denota por $(A|B)$. Cada fila de la matriz $(A|B)$ representa una ecuación del sistema. Los resultados de este capítulo ya son de sobra conocidos de cursos preuniversitarios. Ahora, simplemente formalizamos y demostramos los resultados teóricos que se aplican en la práctica.

Un sistema lineal se dice que es **escalonado** si la matriz ampliada $(A|B)$ es escalonada. Estos sistemas se resuelven con gran facilidad (pág. 75).

El método que emplearemos para discutir y resolver un sistema $AX = B$ será el de transformarlo en otro escalonado equivalente $A'X = B'$. Esto podremos hacerlo aplicando el método de Gauss a la matriz $(A|B)$ hasta obtener otra escalonada equivalente $(A'|B')$. El Teorema 2.5, pág. 73, nos dice que si las matrices ampliadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los sistemas lineales son equivalentes, es decir tienen las mismas soluciones. Las operaciones elementales se hacen sólo en filas (que representan las ecuaciones), ¡ojo! aquí no se pueden utilizar operaciones por columnas.

Con los resultados conocidos sobre el rango de matrices y sabiendo que éste se conserva por operaciones elementales, se tiene como consecuencia directa el **Teorema de Rouché-Frobenius** (pág. 81) que permite discutir un sistema $AX = B$ comparando los rangos de las matrices A y $(A|B)$.

El capítulo 2 del libro de texto incluye una sección sobre la conocida como factorización LU. Método que se aplica para resolver de forma eficiente, o bien sistemas con un número grande de variables, o bien baterías de sistemas lineales de la forma $AX = B$, con B variando y A fija. Se recomienda la lectura de esta sección, aunque no será materia de examen.

2.2 Conceptos más importantes

Ecuación lineal y sistema lineal. Ecuación incompatible. Ecuación tribial
Solución de un sistema lineal.
Tipos de sistemas lineales: compatible (determinado o indeterminado), incompatible.

Sistemas equivalentes. Sistema homogéneo. Sistema de Cramer.
Matriz de coeficientes, de incógnitas, de términos independientes y ampliada.
Discusión y resolución de un sistema.
Teorema de Rouché-Fröbenius.

2.3 Resultados de aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con precisión y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) más importantes.

Se desarrollarán las siguientes **habilidades**:

- Obtener la representación matricial de un sistema.
- Transformar un sistema lineal en uno escalonado o escalonado reducido equivalente aplicando el Método de Gauss o Gauss-Jordan.
- Discutir y resolver un sistema escalonado.
- Utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius para discutir un sistema.