Examen Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- Sistemas compatibles arbitrarios. (1.5 puntos)

2.- Sea $T : V \to W$, una aplicación lineal donde $dim(V) = 5$, $dim(W) = 3$ y $dim(ker(T)) = 2$, entonces T es suprayectiva. (Justificar razonadamente la veracidad o la falsedad).
(1 punto)

3.- Discutir el sistema en función del valor de a y k. Calcular las soluciones para los valores de a y k que hacen el sistema compatible

$$\begin{cases} x - y = a \\ y - z = 1 \\ z + kx = 1 \end{cases}$$

(3 puntos)

4.- a) Sea V el espacio vectorial real de las matrices de tamaño 2x2, en el que se considera la base formada por las matrices

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se considera la aplicación lineal f de V en V, definida por

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & 0 \\ 0 & b-c \end{pmatrix}$. Calcular las bases de los subespacios vectoriales $\ker(f)$ e $im(f)$.(1,5 puntos).

b) Sea φ una aplicación lineal de R^3 en R^4, definida por

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 - 2x_2 - 2x_3)$$

Se pide hallar la matriz A, respecto a la base canónica de R^4, de la aplicación lineal $f : R^4 \to R^4$ del que se sabe que

i) $f.\varphi$ es la aplicación nula (envía todos los vectores al vector cero).

ii) $f(2,-1,0,0) = (4,8,-6,2)$ y $f(1,-2,0,0) = (2,-2,-6,4)$.

(3 puntos) (Base canónica o estandar de R^4 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$)