Capítulo 1

Nociones de lógica

Al utilizar un lenguaje natural podemos comunicarnos con otras personas mediante expresiones constituidas por palabras, que son agrupadas adecuadamente para construir el mensaje que se desea comunicar. Cada expresión debe estar construida de acuerdo a las reglas sintácticas del lenguaje. Esto es necesario para que la información correspondiente a cada expresión pueda ser entendida por un receptor.

Sin duda, una expresión debe ser correcta sintácticamente para facilitar su comprensión. Una expresión como *eléctrica ordenador el máquina es una* no es sintácticamente correcta y puede ocurrir que no se entienda lo que significa. Una nueva ordenación de esas palabras determina la expresión *el ordenador es una máquina eléctrica*, que es sintácticamente correcta y no hay dificultad para entenderla.

A la hora de comunicarnos, además de la sintaxis de lo escrito, se debe tener en cuenta la componente semántica, es decir, el significado. Sería deseable que nos encontráramos con que cada expresión tuviera un único significado a la hora de aprender un nuevo lenguaje pero esto no es así. Se puede comprobar en todos los lenguajes naturales la existencia de expresiones cuyo significado varía en función del contexto. Si el valor semántico de una expresión fuese único, entonces la expresión podría ser calificada de verdadera, falsa, ni verdadera ni falsa, o de cualquier otra forma, con independencia del contexto.

En el lenguaje natural que empleamos en Matemáticas, existen expresiones que poseen significados distintos dependiendo del contexto donde se ubican, por ejemplo $a + b$ representa la suma de dos elementos pero no es lo mismo sumar números que sumar matrices. El lector debe estar atento al marco contextual para entender el significado de cada expresión contenida en este libro. Si en todas las expresiones que se escriben en Matemáticas, se añade explícitamente el contexto donde la expresión tiene sentido, puede ocurrir que el contenido esencialmente interesante sea difícil de recordar: puede ocurrir que la información relevante quede oculta por la información relativa al contexto. Un ejemplo es la expresión $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ dentro de algún marco de estructuras algebraicas donde el producto es conmutativo, es un caso donde el contexto no hace falta describirlo explícitamente de forma completa, desde los elementos a las leyes de composición y la descripción de todas sus propiedades.

En este capítulo estudiamos las expresiones sintácticamente correctas de las que no hay duda sobre su significado y que pueden de ser catalogadas de verdaderas o de falsas con certeza absoluta. Esencialmente, se tratan expresiones de las cuales tan sólo interesa su valor de verdad. Únicamente se otorgan dos posibles significados semánticos; verdadero y falso. Por ejemplo, *La vaca es un animal* es una expresión sintácticamente correcta de valor semántico *verdadero*. También la expresión *Una piedra es un animal* es sintácticamente correcta pero su valor semántico es *falso*.

Tradicionalmente, la pareja de valores semánticos (*Verdad, Falso*) se suele representar con los símbolos (V,F) en la lógica tradicional en español, con los símbolos (T,F) en la lógica tradicional en inglés y con los símbolos $(1, 0)$ en Matemáticas y en Computación.

A la hora de leer este capítulo suponemos que el lector posee suficiente dominio de los significados de palabras y frases del idioma español. Se usa el lenguaje natural, que no está libre de expresiones ambiguas, para introducir con la menor ambigüedad posible los elementos básicos de lógica, el vocabulario, los símbolos y las reglas elementales de uso.

1.1. Expresiones matemáticas: Proposiciones

El lenguaje empleado en Matemáticas sirve para hacer referencia a características o propiedades de los objetos tratados, y se utiliza construyendo sentencias sintácticamente correctas para describir esas características.

Ejemplos de algunas expresiones sencillas en Matemáticas son: *El número natural cuatro es un número par*, *El número natural elegido es un número par* o *El número natural elegido en primer lugar es menor que el número natural elegido en segundo lugar*. Coloquialmente, éstas se expresan de una forma reducida como: *El cuatro es par*, *El número natural elegido es par* o *El primer número natural es menor que el segundo*.

De la primera expresión simple anterior, *El cuatro es par*, podemos decir que describe una propiedad del número cuatro, es decir, es una sentencia verdadera. De esta expresión se dice que es una proposición lógica, y para hacer referencia a dicha expresión se suele utilizar una simple letra minúscula, por ejemplo p, y para hacer referencia a su valor semántico se escribe $p = 1$, o simplemente se dice que la proposición p es verdadera.

- **Proposición lógica simple:** Una proposición simple describe una propiedad de un objeto concreto y se le puede atribuir sin ambigüedad el valor de verdadero o falso.

Como ya hemos dicho, para hacer referencia sintáctica a una proposición simple, se suele emplear una letra minúscula, por ejemplo $p, q, r, s, \ldots$ Cada letra (proposición) posee un único valor semántico, verdadero o falso, que se expresa igualando la letra a 1 o a 0.

Ejemplo 1.1 Las expresiones: *Esta frase es una proposición*, *El Sol es una estrella*, *La hipotenusa es el mayor de los tres lados de un triángulo rectángulo* y *2 es un número primo* son proposiciones simples que tienen el valor verdad.

Las expresiones, *9 es el cubo de 3*, *La función derivada de la función* $f(x) = x^2$ *es la función nula* y *La Luna es una planeta* son proposiciones simples que son falsas.

También son proposiciones simples las sentencias siguientes: *Está lloviendo* y *No entiendo lo que es una proposición*, pero en estos casos el valor que toma la proposición lo asigna el lector en el momento de la lectura.

Al disponer de una colección de expresiones sencillas o simples como las anteriores, se pueden construir expresiones compuestas, combinando esas expresiones simples mediante palabras de conexión propias del lenguaje, como pueden ser las conjunciones y otras más. Por ejemplo, al combinar la conjunción copulativa *y* con las expresiones *Doce es divisible por dos*, *Doce es divisible por tres*, se puede construir la expresión compuesta *Doce es divisible por dos y por tres*. De esta forma, se incrementa la colección de expresiones disponibles, que a su vez pueden volverse a combinar. Con proposiciones simples se construyen **proposiciones compuestas**. Por ejemplo, la expresión condicional *Si llueve el suelo se moja*, es una proposición compuesta por las proposiciones simples *Llueve* y *El suelo se moja*.
Tanto si las proposiciones son simples como si son compuestas, nos referiremos a ellas empleando únicamente la palabra "proposición".

Ejemplo 1.2 La expresión *El número natural elegido es un número par*, que describe la propiedad "ser número par", no es una proposición: el número aludido es desconocido, y puede ser cualquier número de toda una familia de números. Esto impide atribuir claramente el valor semántico, puesto que hay números para los cuales la expresión es verdadera y números para los que es falsa. Este tipo de expresiones son denominadas predicados lógicos y son introducidos en el capítulo 2.

La expresión *El número natural elegido en primer lugar es menor que el número natural elegido en segundo lugar*, que describe la propiedad "ser menor que", tampoco es una proposición. De nuevo el motivo de no considerarla proposición es que los números aludidos son desconocidos y pueden ser cualquier número de toda una familia de números. No se puede atribuir claramente el valor semántico, puesto que hay números para los cuales la expresión es verdadera y números para los que es falsa. Este tipo de expresiones son denominadas relaciones lógicas, o predicados de dos argumentos, y también serán introducidas en el capítulo 2.

Marco lógico: Cualquier estudiante que intenta aprender un nuevo idioma es consciente de que debe aprender una colección grande de palabras, unas reglas sintácticas para combinar esas palabras en frases y los significados tanto de las palabras como de las frases. De forma análoga, a como se intenta aprender un lenguaje, se debe aprender lógica, es decir, se deben conocer las "palabras empleadas", las reglas de combinarlas, y los significados de éstas y de las posibles combinaciones.

- **Lógica proposicional**

  Las "palabras básicas"son las proposiciones y los valores de las proposiciones son sólo dos: verdadero o falso. Todas las reglas sintácticas para combinar proposiciones utilizan la negación de una proposición, la conjunción y disyunción de dos proposiciones, el condicional de una proposición respecto a otra y el bicondicional de dos proposiciones.

Al escribir una proposición, se escribe una letra minúscula, o una combinación de letras minúsculas conectadas con determinados símbolos que se denominan **conectores lógicos** que corresponden a la forma de combinar proposiciones.

1.2. Conectores lógicos básicos

A continuación se presentan los elementos conectores de proposiciones en el marco de la lógica proposicional.

Negación

Dada la proposición p, *El cuatro es un número par*, la negación de esta proposición es la proposición *El cuatro no es un número par*, y se representa con alguna de las notaciones siguientes: $-p$, $\neg p$, $\overline{p}$ y p'.
En este caso p toma el valor 1 (verdad), mientras que $\neg p$ toma el valor 0.

En general, la **negación de una proposición** p es otra proposición $\neg p$ que es cierta si p es falsa, y falsa si p es cierta. La tabla 1.1 indica el valor de la proposición $\neg p$ en función del valor de la proposición p.

Disyunción

Dadas las proposiciones p, *El cuatro es un número par*, y q, *El cuatro es un número impar*, la proposición disyunción de p y q, "p o q", es la proposición *El cuatro es*

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tabla 1.1: Tabla de verdad de $\neg p$

un número par o un número impar, y se representa con alguna de las notaciones siguientes: $p \vee q$, $p + q$ y $p \cup q$.
En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 0 (falso), y a $p \vee q$ se le asigna el valor 1.

En general, la **proposición disyunción** $p \vee q$ es verdadera si alguna de las dos proposiciones es verdadera. La tabla 1.2 recoge los valores que toma la proposición $p \vee q$ en relación a los valores tomados por p y q.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabla 1.2: Tabla de verdad de $p \vee q$

Observación: La proposición $p \vee q$ es falsa únicamente si p y q son falsas.

En lenguaje natural, la disyunción "o" tiene un doble significado que usualmente se deduce por el contexto. Por ejemplo en las frases, *El medicamento está indicado para el dolor de cabeza o la fiebre* y *Compraré el regalo hoy o mañana*, el significado de la palabra "o" es diferente. En la primera frase se indica que se debe tomar el medicamento si se cumple al menos uno de los dos prerequisitos "tener dolor de cabeza" o "tener fiebre", pudiendo tener ambas cosas. En la segunda frase parece que el "o" es excluyente, en el sentido de que si compro el regalo hoy, ya no lo compro mañana. El significado del conector disyunción $\vee$ está en la línea de la primera frase.

Conjunción

Dadas las proposiciones p, *El cuatro es un número par*, y q, *El nueve es un número impar*, la **proposición conjunción** de p y q, "p y q", es la proposición *El cuatro es un número par y el nueve es un número impar*, y se representa con alguna de las escrituras siguientes: $p \wedge q$, $p \times q$ y $p \cap q$.
En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 1 (verdad), y $p \wedge q$ toma el valor 1.

En general, la proposición conjunción $p \wedge q$ es falsa si alguna de las dos proposiciones es falsa. La tabla 1.3 presenta los valores que toma la proposición $p \wedge q$ en relación a los valores tomados por p y q.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.3: Tabla de verdad de $p \wedge q$

Observación: La proposición $p \wedge q$ es verdadera sólo si p y q son verdaderas.

Condicional

Dadas las proposiciones p, *Ocho es un número par*, y q, *Ocho es suma de dos números iguales*, la proposición condicional "si p entonces q", es la proposición *Si ocho es un número par, entonces ocho es suma de dos números iguales*, y se representa con alguna de las notaciones siguientes: $p \rightarrow q$ o $p \Rightarrow q$.
En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 1 (verdad), y a $p \rightarrow q$ se le asigna el valor 1.
La tabla 1.4 recoge los valores que toma la **proposición condicional** $p \rightarrow q$ en relación a los valores tomados por las proposiciones p y q.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.4: Tabla de verdad de $p \rightarrow q$

De la proposición $p \rightarrow q$ se suele decir que la primera proposición p es la proposición antecedente y que la segunda q es la proposición consecuente. Además, si la primera proposición es falsa, entonces la proposición condicional es verdadera. Esto suele indicarse coloquialmente diciendo que de un antecedente falso se deduce cualquier cosa o que una proposición falsa implica cualquier otra.

Observación: La proposición $p \to q$ es falsa únicamente si p es verdadera y q es falsa.

Bicondicional

Dadas las proposiciones p, *Ocho es un número par* , y q, *Ocho es divisible por dos*, la proposición "p si y sólo si q", es la proposición *Ocho es un número par si y sólo si ocho es divisible por dos*, y se representa con alguna de las escrituras siguientes: $p \leftrightarrow q$ y $p \Leftrightarrow q$.

En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 1 (verdad), y a $p \leftrightarrow q$ se le asigna el valor 1.
La tabla 1.5 recoge los valores que toma la **proposición bicondicional** $p \leftrightarrow q$ en relación a los valores tomados por las proposiciones p y q.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.5: Tabla de verdad de $p \leftrightarrow q$

Si se elige cualquier par de proposiciones falsas, entonces la proposición bicondicional entre ellas siempre es verdadera.

Observación: La proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera sólo si p y q toman el mismo valor.

Ejemplo 1.3 Dentro del contexto matemático podemos encontrar proposiciones con los conectores anteriores:

La función $f(x) = 1/x$ *no está definida para* $x = 0$. Se trata de una proposición negación verdadera $\neg p$, donde la proposición p es *La función* $f(x) = 1/x$ *está definida para* $x = 0$.

El punto $(1,1)$ *está contenido en la región del plano* $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Se puede ver como una proposición disyunción verdadera $p \vee q$ donde la proposición p es *El punto* $(1,1)$ *está contenido en la región del plano* $x^2 + y^2 < 4$, que es verdadera, y la proposición q es *El punto* $(1,1)$ *está contenido en la región del plano* $x^2 + y^2 = 4$, que es falsa.

La función $f(x) = x^2$ *es continua en* $[0,1]$ *y derivable en* $(0,1)$. Se puede ver como una proposición conjunción verdadera $p \wedge q$. La proposición p es *La función* $f(x) = x^2$ *es continua en* $[0,1]$, que es verdadera, y la proposición q es *La función* $f(x) = x^2$ *es derivable en* $(0,1)$ que es verdadera igualmente.

Comentario: En contexto matemático, usualmente sólo se escriben proposiciones que sean verdaderas. En particular, en los enunciados de tipo condicional, la proposición $p \to q$ tiene usualmente el sentido de "la proposición $p \to q$ es verdadera". Para distinguir un sentido del otro, usaremos el símbolo $\Longrightarrow$ en este último caso. Es decir, la notación $p \Longrightarrow q$, que se lee "p implica q", se usará exclusivamente para indicar que la proposición $p \to q$ es verdadera.

$$p \Longrightarrow q \quad \text{significa que la proposición } p \to q \text{ es verdadera.}$$

Cuando se conoce una implicación concreta, tan sólo hay que estudiar si el antecedente es verdadero para concluir que el consecuente es verdadero, o que el consecuente es falso para concluir la falsedad del antecedente.

La base del conocimiento matemático contiene numerosos enunciados proposicionales de tipo bicondicional $p \leftrightarrow q$ que son verdaderos. Análogamente al condicional, el bicondicional $p \leftrightarrow q$ se usa en matemáticas en el sentido de "la proposición $p \leftrightarrow q$" es verdadera. Para distinguir una de la otra, usaremos el símbolo $\Longleftrightarrow$ en este caso. Es decir, la notación $p \Longleftrightarrow q$, que se lee "p es equivalente a q"se usará exclusivamente para indicar que la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

$$p \Longleftrightarrow q \quad \text{significa que la proposición } p \leftrightarrow q \text{ es verdadera.}$$

Cuando se conoce la verdad del bicondicional de dos proposiciones, tan sólo hay que estudiar si alguna de las proposiciones es verdadera, respectivamente falsa, para concluir que la otra también es verdadera, respectivamente falsa.
Otras formas frecuentes de expresar esta equivalencia entre proposiciones en la literatura matemática son: p si y sólo si q, que se resume en la expresión "p sii q", "p iff q", según se trate de literatura en español o en inglés.
Teniendo en cuenta la observación anterior se establece:

> Dos proposiciones p y q son **equivalentes** si p y q toman el mismo valor.

Ejemplo 1.4 Dentro del contexto matemático podemos encontrar proposiciones con conectores condicionales como:

Al ser $f(x) = 3x^3+2x^2+x$ *una función derivable en* $\mathbb{R}$, *entonces* $f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$. Se trata de una proposición condicional verdadera $p \to q$ donde la proposición p es *La función* $f(x) = 3x^3+2x^2+x$ *es una función derivable en* $\mathbb{R}$, que es verdadera,

y la proposición q es *La función* $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ *es una función continua en* $\mathbb{R}$, que es igualmente verdadera.
En este caso decimos que la derivabilidad de la función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ en $\mathbb{R}$ implica la continuidad de ésta en todo $\mathbb{R}$.

La dimensión de $\mathbb{R}^2$ *es dos si y sólo si el conjunto* $\{(1,0),(0,1)\}$ *constituye una base de* $\mathbb{R}^2$. Se trata de una proposición bicondicional verdadera, $p \leftrightarrow q$ donde la proposición p es *La dimensión de* $\mathbb{R}^2$ *es dos*, que es verdadera, y la proposición q es *El conjunto* $\{(1,0),(0,1)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$, que también es verdadera.

A la proposición condicional $p \to q$ se le asocian tres nuevas proposiciones condicionales:

El condicional $q \to p$ se denomina **condicional recíproco**.
El condicional $\neg p \to \neg q$ se denomina **condicional contrario**.
El condicional $\neg q \to \neg p$ se denomina **condicional contrarrecíproco**.

Conectores que actúan sobre una proposición

¿Cuántos conectores, que actúen sobre una única proposición, pueden ser definidos?

Hay tantos conectores como tablas de verdad distintas se pueden construir con una única proposición p. Véanse en la tabla 1.6 todas las tablas posibles, y los conectores representados con los símbolos C_0, C_1, C_2 y C_3, que se corresponden con las expresiones de los números del cero al tres en notación binaria; $00, 01, 10, 11$.

p	C_0p	C_1p	C_2p	C_3p
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Tabla 1.6: Tablas de verdad posibles con p

La conectiva C_1 es el conector identidad, $C_1p \iff p$, mientras que la conectiva C_2 es la conectiva negación, es decir, $C_2p \iff \neg p$.

Conectores que actúan sobre dos proposiciones

¿Cuántos conectores, que actúen sobre dos proposiciones, pueden ser definidos?

Si se analizan las tablas de verdad distintas para dos proposiciones p y q, se comprueba que hay dieciséis tablas que presentamos en la tabla 1.7. Por tanto, se pueden definir dieciséis conectores distintos, uno por cada tabla, y los representamos con los símbolos C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} y

p	q	pC_0q	pC_1q	pC_2q	pC_3q	pC_4q	pC_5q	pC_6q	pC_7q
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	pC_8q	pC_9q	$pC_{10}q$	$pC_{11}q$	$pC_{12}q$	$pC_{13}q$	$pC_{14}q$	$pC_{15}q$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabla 1.7: Tablas de verdad con p y q

C_{15}, que se corresponden con los números del cero al quince en notación binaria; $0000, 0001, 0010, \ldots, 1101, 1110, 1111$.
La conectiva C_1 es el conector conjunción, $p\,C_1\,q \iff p \wedge q$, la conectiva C_7 es el conector disyunción, $p\,C_7\,q \iff p \vee q$, la conectiva C_9 es el conector bicondicional, $p\,C_9\,q \iff p \leftrightarrow q$, que la conectiva C_{13} es el conector condicional, $p\,C_{13}\,q \iff p \rightarrow q$.

Ejemplo 1.5 **Disyunción excluyente**

La conectiva C_6 se denomina disyunción excluyente. Si p es *Bebo agua*, q es *Bebo horchata*, entonces la proposición $p\,C_6\,q$ es verdadera cuando bebo agua o horchata, pero no ambas cosas. Se denota $p \otimes q$.

p	q	$p \otimes q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabla 1.8: Tabla de verdad de $p \otimes q$

1.3. Construcción de nuevas proposiciones

Exponemos ahora la forma de crear nuevas proposiciones haciendo uso de varias proposiciones y de varios conectores lógicos. Hasta ahora sólo se han empleado proposiciones simples en la definición de los conectores lógicos para poder construir proposiciones compuestas. Los conectores descritos sólo actúan sobre una o dos proposiciones. Cuando se dispone de más de dos proposiciones hay que emplear paréntesis, corchetes o llaves para indicar las proposiciones que son afectadas por cada conector.

Ejemplo 1.6 La conectiva negación $\neg$ afecta únicamente a la proposición que le sucede, así pues $\neg p$ sólo afecta a p, y cuando se escribe $\neg p \wedge q$, la proposición afectada es p. Para negar la proposición $p \wedge q$, se escribe $\neg(p \wedge q)$. Es decir, en la proposición $\neg p \wedge q$ la negación afecta sólo a la proposición p, mientras que en la proposición $\neg(p \wedge q)$ la negación afecta a la proposición $p \wedge q$. Estas proposiciones no son equivalentes, como se muestra en la tabla 1.9.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0

Tabla 1.9: Tablas de verdad de $\neg p \wedge q$ y de $\neg(p \wedge q)$

Ejemplo 1.7 La expresión escrita $p \wedge q \vee r$ no es una proposición correctamente expresada, puesto que podría admitir dos interpretaciones distintas: una como $(p \wedge q) \vee r$ y otra como $p \wedge (q \vee r)$. Éstas últimas sí son proposiciones correctamente escritas.

Ejemplo 1.8 En general, el orden de escritura de las proposiciones es importante. Así, $p \to q$ y $q \to p$ son dos proposiciones no equivalentes, véase la tabla 1.10.

p	q	$p \to q$	$q \to p$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabla 1.10: Comparación de $p \to q$ y $q \to p$

El valor de cualquier proposición simple, verdadera o falsa, se obtiene directamente de su enunciado. A veces, no resulta evidente la determinación del valor de una proposición compuesta, puesto que este valor depende de los valores que tomen las proposiciones simples que la componen. De entre todas las posibles tablas que se pueden obtener para una proposición compuesta, destacamos las siguientes:

- **Contradicción:** Es la proposición que sólo toma el valor 0, y la notaremos **0**.
- **Tautología:** Es la proposición que sólo toma el valor 1, y la notaremos **1**.

Es decir, una proposición p es una contradicción si es equivalente a la proposición $\mathbf{0}$ ($p \iff \mathbf{0}$). En la tabla de verdad de p sólo aparece el valor 0.
Análogamente, una proposición p es una tautología si es equivalente a la proposición $\mathbf{1}$ ($p \iff \mathbf{1}$), es decir, en la tabla de verdad de p sólo aparece el valor 1.
En particular, recordemos que dos proposiciones son equivalentes si y sólo si el bicondicional de ambas, $p \leftrightarrow q$, es una tautología ($p \leftrightarrow q \iff \mathbf{1}$).

Si dos proposiciones p y q son equivalentes y p forma parte de una tercera proposición r, entonces puede sustituirse p por q en la expresión de r, pues la nueva proposición obtenida es equivalente a r. Desde el punto de vista lógico, p y q pueden sustituirse el uno al otro, por eso coloquialmente se expresa diciendo que p y q son proposiciones iguales.

1.4. Leyes lógicas

Para simplificar las notaciones, existe el convenio que cuando se escribe una equivalencia entre proposiciones con un único símbolo $\iff$, las expresiones situadas a la derecha e izquierda del símbolo constituyen las proposiciones equivalentes aunque vayan sin paréntesis. Por ejemplo se escribe $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ para indicar que las proposiciones $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ son equivalentes aunque también escribiremos la notación completa $[p \vee (q \wedge r)] \iff [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

Leyes lógicas equivalentes con una proposición

▷ **Con una única proposición atómica p y el conector negación** $\neg$ se pueden escribir aparentemente muchas proposiciones nuevas, por ejemplo $\neg p$, $\neg(\neg p)$, $\neg(\neg(\neg p))$, ... que denotaremos simplemente como $\neg p$, $\neg\neg p$, $\neg\neg\neg p$, etc. Sin embargo, en esta lista de escrituras sólo hay dos tablas de verdad distintas, correspondientes a p y $\neg p$. Las proposiciones $\neg\neg p$ y p toman los mismos valores como se aprecia en la tabla 1.11.

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
0	1	0
1	0	1

Tabla 1.11: Tabla de la doble negación

- **Ley de la doble negación:** Las proposiciones $\neg\neg p$ y p son equivalentes.

$$\neg\neg p \iff p$$

Coloquialmente, esta ley se expresa diciendo que una doble negación afirma. Podemos sustituir $\neg\neg p$ por p o viceversa allí donde aparezcan. Lo mismo ocurre con las proposiciones $\neg p$ y $\neg\neg\neg p$, son dos proposiciones equivalentes. En general se emplea la expresión más corta, aunque algunas veces pueda interesar una expresión más larga.

Observemos que con una única proposición p, sólo hay cuatro posibles tablas de verdad, luego sólo se pueden expresar cuatro proposiciones esencialmente distintas, es decir que no sean equivalentes entre sí, como se aprecia en la tabla 1.12.

p	**0**	p	$\neg p$	**1**
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Tabla 1.12: Proposiciones distintas

En consecuencia, cuando utilicemos una única proposición y los conectores que deseemos necesariamente obtendremos una de las cuatro proposiciones posibles.

$\triangleright$ **Con una única proposición p y un conector distinto de** $\neg$ se pueden escribir aparentemente muchas proposiciones nuevas, por ejemplo $p \vee p$, $(p \vee p) \vee p$, $((p \vee p) \vee p) \vee p$, $p \to p$, etc. Sin embargo, en esta lista sólo hay dos proposiciones distintas.

- **Leyes de simplificación:**

  1. $p \vee p \iff p$
  2. $p \wedge p \iff p$
  3. $p \to p \iff \mathbf{1}$
  4. $p \leftrightarrow p \iff \mathbf{1}$

$\triangleright$ **Con una única proposición p y varios conectores distintos** se pueden escribir proposiciones nuevas, por ejemplo $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p, \ldots$

- **Ley del tercio excluso:** La proposición $p \vee \neg p$ es una tautología.

$$p \vee \neg p \iff \mathbf{1}$$

Esta ley se expresa coloquialmente diciendo que siempre se verifica una proposición o su negación, por ejemplo, *El número π es racional o irracional (no racional).*

- **Ley de contradicción:** La proposición $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

$$p \wedge \neg p \iff \mathbf{0}$$

Coloquialmente, esta ley se expresa diciendo que nunca se cumple una proposición y su negación, por ejemplo, *El número 3 es primo y compuesto (no primo)* es una proposición falsa.

Leyes lógicas equivalentes con dos proposiciones

Con dos proposiciones p y q, y cualquier conjunto de conectores tan sólo se pueden construir dieciséis proposiciones esencialmente distintas una de otra, es decir, dieciséis proposiciones que no son equivalentes entre sí. Esto se debe a que sólo hay dieciséis tablas de verdad distintas como se puede comprobar en la tabla 1.13.

p	q	$\mathbf{0}$															$\mathbf{1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabla 1.13: Tabla de dos proposiciones distintas

Si bien es cierto que se puede generar una expresión sintácticamente correcta tan grande como se desee, pues para ello basta combinar esas dos proposiciones empleando los conectores y los paréntesis necesarios, no cabe la menor duda que esta expresión escrita debe tener una de las tablas de verdad contenidas en el tabla 1.13. De esta forma se entiende que se pueden escribir muchas proposiciones, pero necesariamente deben ser equivalentes a otras proposiciones que tienen una escritura más corta. Con el fin de disponer de expresiones más cortas, conviene mostrar las siguientes equivalencias que son presentadas como leyes lógicas.

- **Leyes de identidad:**

  1. $p \vee \mathbf{0} \iff p$ $\qquad p \vee \mathbf{1} \iff \mathbf{1}$
  2. $p \wedge \mathbf{1} \iff p$ $\qquad p \wedge \mathbf{0} \iff \mathbf{0}$
  3. $\mathbf{1} \to p \iff p$

- **Leyes conmutativas:** El orden de las proposiciones no varía el valor.

  1. $p \vee q \iff q \vee p$
  2. $p \wedge q \iff q \wedge p$
  3. $p \leftrightarrow q \iff q \leftrightarrow p$

Recordemos que la actuación del conector condicional no es conmutativa, véase la tabla 1.10.

- **Leyes de Morgan:** La negación de una disyunción es la conjunción de negaciones, y la negación de una conjunción es la disyunción de negaciones.

  1. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
  2. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$

- **Leyes del condicional:**

  1. $p \to q \iff \neg p \vee q$
  2. $p \to q \iff \neg(p \wedge \neg q)$
  3. $p \to q \iff p \leftrightarrow (p \wedge q)$
  4. $p \to q \iff q \leftrightarrow (p \vee q)$

De estas cuatro leyes del condicional la más utilizada es la primera; es la forma de expresar una proposición condicional como una disyunción. Las leyes tercera y cuarta del condicional son llamadas **leyes de expansión** del condicional

- **Ley del bicondicional:**

$$p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Si se verifican las dos posibles proposiciones condicionales entre dos proposiciones p y q, entonces p y q son equivalentes.
Esta ley se utiliza a menudo en las demostraciones en Matemáticas para demostrar que dos supuestos son equivalentes. Se demuestra que si el supuesto primero es cierto, entonces el supuesto segundo también lo es, y que si el supuesto segundo es cierto, entonces el supuesto primero lo es.

- **Ley de reducción al absurdo:** La proposición p es equivalente a la proposición $\neg p \to (q \wedge \neg q)$.

$$\neg p \to (q \wedge \neg q) \iff p$$

Esta ley se usa frecuentemente en algunas demostraciones en Matemáticas. Para demostrar que un enunciado es cierto, se niega dicho enunciado y se demuestra que de tal negación se deduce una proposición y su negación, lo cual conduce a una contradicción. Esta contradicción se ha producido por asumir que el enunciado es falso, luego el enunciado es verdadero.

Ejemplo 1.9 **$\sqrt{2}$ es un número irracional**

Por reducción al absurdo, se supone que $\sqrt{2}$ no es un número irracional, es decir es racional. Entonces existe una fracción $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$, con $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Al elevar al cuadrado la igualdad se obtiene $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$, luego $a^2 = 2b^2$. Por lo tanto, a es un número par, es decir, $a = 2k$, y en consecuencia $a^2 = 4k^2$.
En este caso, la igualdad $a^2 = 2b^2$ se transforma en $4k^2 = 2b^2$, y de ésta se obtiene que $b^2 = 2k^2$. Por lo tanto, el número b es par. Luego $\text{mcd}(a, b) \neq 1$ pues 2 es un divisor común de a y b. Contradicción.

Ejercicio 1.10 Demuestre que existen infinitos números primos.

Solución: Por reducción al absurdo, se supone que sólo hay un número finito de números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y se considera el número $r = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$. Como r es distinto de cada uno de los números primos anteriores, entonces r no es un número primo. Pero r no es divisible por ninguno de los números p_i, pues el resto de la división por cada p_i es 1. En consecuencia, r es un nuevo número primo. Es una contradicción pues r no es primo. Luego existen infinitos números primos. □

- **Leyes de transposición:**

  1. $p \to q \iff \neg q \to \neg p$
  2. $p \leftrightarrow q \iff \neg p \leftrightarrow \neg q$

Esta ley se emplea en algunas demostraciones en Matemáticas. Para demostrar que de un supuesto se deduce otro, entonces se niega este segundo supuesto y se demuestra la negación del supuesto inicial. Obsérvese que la primera ley indica la equivalencia entre el condicional y su contrarrecíproco.

Ejemplo 1.11 **El límite de una sucesión de números reales, si existe, es único.**
Recordemos que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge al número r cuando para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ que cumple:

$$|r - x_n| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_\varepsilon$$

Supongamos que el límite no es único: existe un número s, con $r \neq s$, al cual también converge la sucesión $\{x_n\}$. Se considera el valor $\varepsilon = \dfrac{|r-s|}{2}$ y el correspondiente $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_\varepsilon$ se cumple que $|s - x_n| < \varepsilon$.
Ahora bien, para ese ε en particular y para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_\varepsilon$, se cumple:

$$|r - x_n| = |r - s + s - x_n| \geqslant |r - s| - |s - x_n| \geqslant |r - s| - \frac{|r-s|}{2} = \frac{|r-s|}{2}$$

Por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ no puede converger a r.

Leyes lógicas equivalentes con tres proposiciones

Con tres proposiciones p, q y r, y cualquier conjunto de conectores sólo se pueden construir 256 proposiciones que no son equivalentes entre sí. Esto se debe a que sólo hay 256 tablas de verdad distintas.
En la tabla 1.14 se intuyen las doscientas cincuenta y seis tablas cuyos valores de verdad o falsedad se corresponden con las expresiones de los números del 0 al 255 en notación binaria: $00000000, 00000001, 00000010, \ldots, 11111110$ y 11111111.

p	q	r	**0**														**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	$\cdots$	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	$\cdots$	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	$\cdots$	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabla 1.14: Tabla de tres proposiciones distintas

Como ya se ha indicado anteriormente, se puede generar una expresión sintácticamente correcta tan grande como se desee, al combinar esas tres proposiciones empleando conectores y los paréntesis necesarios. Cada expresión escrita se corresponde con alguna de las 256 tablas de verdad contenidas en la tabla 1.14.
Con el fin de disponer de las expresiones más cortas, se enuncian las siguientes leyes lógicas.

- **Leyes asociativas:**

    1. $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$
    2. $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$
    3. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \iff p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

Cada ley asociativa establece la forma de operar con más de dos proposiciones y una misma conectiva. Estas leyes permiten dotar de significado a las expresiones:

$$p \vee q \vee r \qquad p \wedge q \wedge r \qquad p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$$

La ley asociativa establece que la forma de agrupar de dos en dos no varía el valor semántico de la proposición inicial.

- **Leyes distributivas:**

    1. $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
    2. $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
    3. $p \rightarrow (q \vee r) \iff (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
    4. $p \rightarrow (q \wedge r) \iff (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Las leyes distributivas establecen la forma de operar con dos conectores distintos del conector negación.

Leyes lógicas condicionales

Las leyes lógicas expuestas en los apartados anteriores son leyes donde se muestra la equivalencia de dos proposiciones, y por lo tanto, una puede ser sustituida por la otra allí donde sea necesario

En este apartado se presentan nuevas tautologías compuestas por un condicional entre dos proposiciones. Usualmente, a estas tautologías también se les llama leyes. Recordemos que para indicar que un condicional es una tautología escribimos el símbolo $\Longrightarrow$ y al igual que con las proposiciones equivalentes, cuando se escribe una implicación entre proposiciones con un único símbolo $\Longrightarrow$, las expresiones situadas a la izquierda y derecha del símbolo constituyen las proposiciones de la implicación, aunque vayan sin paréntesis

$\triangleright$**Con dos proposiciones** p y q se tienen las siguientes leyes lógicas:

- **Leyes de simplificación condicional**
  1. $p \wedge q \Longrightarrow p$
  2. $p \Longrightarrow p \vee q$
- **Leyes de inferencia**
  1. $\neg p \wedge (p \vee q) \Longrightarrow q$
  2. $p \wedge (\neg p \vee \neg q) \Longrightarrow \neg q$

Estas leyes de inferencia se denominan habitualmente silogismos disyuntivos. La primera ley, o silogismo, puede ser interpretada de la forma siguiente: Si $p \vee q$ es cierto, y se sabe que p es falso, entonces q debe ser cierto.

- **Ley modus ponendo ponens:** Supuesto cierto el condicional $p \rightarrow q$, si se afirma el antecedente p necesariamente se afirma el consecuente q.

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$$

Ejemplo 1.12 Si llueve entonces el suelo se moja. Llueve. Luego el suelo se moja.

Si una determinada función f es continua en el intervalo $[0,1]$, entonces alcanza un valor máximo en un punto de $[0,1]$. Basta verificar que esta función es continua en $[0,1]$ para deducir que alcanza el valor máximo en dicho intervalo.

- **Ley modus tollendo tollens:** Supuesto cierto el condicional $p \rightarrow q$, si no se cumple el consecuente q necesariamente no se cumple el antecedente p.

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Longrightarrow \neg p$$

Ejemplo 1.13 Si llueve entonces el suelo se moja. El suelo no se moja, luego no llueve.
Si la función $f(x) = -x^2$ tiene un máximo local en el punto x_0, entonces $f'(x_0) = 0$. Resulta que $f'(x_0) > 0$, luego esta función no tiene un máximo local en x_0.

▷**Con tres o más proposiciones** p, q y r se tienen varias leyes que el lector puede encontrar entre los enunciados de los ejercicios propuestos.

1.5. Validación de proposiciones

Una vez que se ha construido una proposición a partir de otras respetando las reglas sintácticas, veamos como determinar el valor que toma tal proposición en función del valor que toma cada proposición componente. Las leyes, que se han presentado con anterioridad son tautologías y se emplean, en la medida en que se pueda, para modificar y reducir una expresión antes del estudio de verdad.

▷**Validación mediante la tabla de verdad:** Esta forma de validar consiste en construir la tabla de verdad de la proposición, para lo cual se construye la tabla de cada una de la proposiciones componentes de la proposición. Este proceso es sencillo. El número de casos que se deben valorar depende del número de proposiciones simples que se emplean, por lo que validar puede ser un proceso largo.

Ejemplo 1.14 Comprobamos que $p \to q \iff \neg p \vee q$, la primera ley del condicional, mediante la validación por tabla de verdad, construyendo su tabla de verdad.

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Tabla 1.15: Tabla de verdad de la primera ley del condicional

La tabla de verdad de una proposición compuesta por dos proposiciones simples tiene 4 filas, como puede observarse en la tabla 1.15.

Ejemplo 1.15 Comprobamos que $[(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee r)$ es una tautología, ley de resolución, construyendo su tabla de verdad.

La tabla de verdad de una proposición compuesta por tres proposiciones simples tiene 8 filas, como puede observarse en la tabla 1.16.

p	q	r	$\neg p$	$p \vee r$	$q \vee r$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)$	L.Resolución
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1

Tabla 1.16: Tabla de verdad de la ley de resolución

Al tratar de construir la tabla de verdad de una proposición compuesta por $4, 5, \ldots, n$ proposiciones simples, se tienen $16, 32, \ldots, 2^n$ filas. Así pues, se hace inviable construir manualmente esas tablas de verdad cuando el número de proposiciones simples es grande.

$\triangleright$**Validación mediante refutación:** Esta forma de validar consiste en aplicar la ley de reducción al absurdo (véase la sección 1.4), es decir, para demostrar la validez de una proposición, se debe suponer que la proposición es falsa y comprobar que aparece una contradicción.

Ejemplo 1.16 Comprobamos que $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ es una tautología, **ley del silogismo**, aplicando el método de refutación; .

Paso 1: Se supone que la proposición $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ es falsa.

Paso 2: Como un condicional sólo es falso si el antecedente es cierto y el consecuente es falso, se tiene que $(p \to q)$ es cierto y $(q \to r) \to (p \to r)$ es falso.

Paso 3: De la falsedad de $(q \to r) \to (p \to r)$ se tiene que $q \to r$ es cierto y que $p \to r$ es falso por la misma razón que en el paso 2.

Paso 4: De la falsedad de $p \to r$ se tiene que p es cierto y r es falso por análoga razón.

Paso 5: Como $p \to q$ es cierto por el paso 2 y p es cierto por el paso 4, se tiene que q es cierto, puesto que un antecedente cierto sólo puede tener un consecuente cierto.

Paso 6: Como $q \to r$ es cierto por el paso 3 y q es cierto por el paso 5, se tiene que r es cierto.

Paso 7: La proposición r es cierta por el paso 6, y falsa por el paso 4, luego se produce una contradicción.

Conclusión: La proposición $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ es verdadera pues suponer que es falsa ha producido una contradicción.

En la tabla 1.17 se presenta un esquema de los pasos dados en este proceso de refutación. Obsérvese que los valores 0 y 1 aparecen debajo de la conectiva que define la proposición que se valora en cada paso, o de la proposición simple correspondiente. Por ejemplo, para indicar en el paso 2 que $p \to q$ es cierta se sitúa un 1 debajo del símbolo $\to$.

Paso	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$[(q$	$\to$	$r)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)]$
1º				0							
2º		1						0			
3º						1				0	
4º									1		0
5º			1								
6º							1				
7º											$0 \wedge 1$
8º				1							

Tabla 1.17: Esquema de los pasos de validación por refutación

1.6. Forma clausulada de proposiciones

Dada una proposición compuesta por un conjunto de proposiciones simples $p, q, r, \ldots$, se trata de encontrar una proposición equivalente a la primera, que esté escrita únicamente como conjunción ($\wedge$) de proposiciones disyuntivas ($\vee$). En estas disyunciones sólo pueden aparecer las proposiciones simples o sus negaciones, es decir, sólo aparecen algunas de las proposiciones: $p, \neg p, q, \neg q, r, \neg r, \ldots$, por ejemplo, $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$.

A esta proposición que es una conjunción de disyunciones se le llama **forma clausulada** de la proposición inicial, o **forma normal conjuntiva**, y cada una de esas disyunciones se denomina cláusula lógica.

Disponer de la forma clausulada de una proposición, facilita saber si la proposición es verdadera puesto que tan sólo ha de comprobarse que todas las cláusulas son verdaderas.

Ejemplo 1.17 La primera ley del condicional, $p \to q \iff (\neg p \vee q)$, establece la forma clausulada de un condicional. La forma clausulada de $p \to q$ está formada por una única cláusula $\neg p \vee q$.
La segunda ley del condicional, $p \to q \iff \neg(p \wedge \neg q)$, no presenta una forma clausulada con dos cláusulas puesto que existe una negación que afecta a la conjunción.

Ejemplo 1.18 La ley del bicondicional establece que $p \leftrightarrow q$ se puede expresar como $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

Al aplicar la primera ley del condicional a cada uno de los paréntesis se establece la forma clausulada de un bicondicional. La forma clausulada de la proposición $p \leftrightarrow q$ es la proposición $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$, compuesta por dos cláusulas.

A continuación establecemos los pasos recomendados para extraer la forma clausulada de una proposición:
Paso 1: Sustitución de los conectores bicondicionales: Se transforma cada bicondicional en una conjunción de condicionales. Esto es:

Se sustituye $p \leftrightarrow q$ por la conjunción $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Paso 2: Sustitución de los conectores condicionales: Se utiliza la primera ley del condicional. Esto es:

Se sustituye $p \rightarrow q$ por la disyunción $\neg p \vee q$.

Paso 3: Sustitución de los conectores que actúan sobre una proposición conjunción o disyunción: Se utiliza la ley de Morgan correspondiente para transformar cada negación en una disyunción o conjunción de proposiciones simples o de sus negaciones. Esto es:

Se sustituye $\neg(p \wedge q)$ por la disyunción $\neg p \vee \neg q$.
Se sustituye $\neg(p \vee q)$ por la conjunción $\neg p \wedge \neg q$.

Paso 4: Utilización de las leyes distributivas, asociativas y conmutativas para generar las cláusulas, y por lo tanto, la forma clausulada.

Ejercicio 1.19 Determine la forma clausulada de la proposición $p \rightarrow (p \wedge q)$.
Solución: La forma clausulada de la proposición $p \rightarrow (p \wedge q)$ es $\neg p \vee q$. Veámoslo paso a paso.
De $p \rightarrow (p \wedge q)$, al eliminar el condicional, se obtiene $\neg p \vee (p \wedge q)$. Al aplicarle la ley distributiva, se tiene $(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$.
Dado que $(\neg p \vee p) \iff \mathbf{1}$, ley del tercio excluso, y $\mathbf{1} \wedge (\neg p \vee q) \iff \neg p \vee q$, se obtiene la forma clausulada $\neg p \vee q$.
Además, como $p \rightarrow (p \wedge q)$ posee la misma forma clausulada que $p \rightarrow q$, véase el ejemplo 1.17, entonces $p \rightarrow q$ y $p \rightarrow (p \wedge q)$ son proposiciones equivalentes. □

Observación: Si dos proposiciones tienen la misma forma clausulada, entonces ambas son equivalentes.

Ejemplo 1.20 **Comprobación de una tautología mediante su forma clausulada**

Construyamos paso a paso la forma clausulada de la proposición:

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

Al quitar los condicionales $[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$ se obtiene la proposición:

$$\neg[(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)] \lor (\neg p \lor r)$$

Aplicando la segunda ley de Morgan a $\neg[(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)]$, sustituyendo en la proposición anterior se obtiene:

$$[\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor r)] \lor (\neg p \lor r)$$

Se aplica la primera ley de Morgan a las proposiciones $\neg(\neg p \lor q)$ y $\neg(\neg q \lor r)$ para obtener:

$$[(\neg\neg p \land \neg q) \lor (\neg\neg q \land \neg r)] \lor (\neg p \lor r)$$

Al simplificar las dobles negaciones se tiene:

$$[(p \land \neg q) \lor (q \land \neg r)] \lor (\neg p \lor r)$$

Si se aplica la ley distributiva al corchete de $[(p \land \neg q) \lor (q \land \neg r)]$ se tiene:

$$[\{(p \land \neg q) \lor q\} \land \{(p \land \neg q) \lor \neg r\}] \lor (\neg p \lor r)$$

Al aplicarle nuevamente la ley distributiva a las proposiciones entre llaves, se obtiene:

$$[\{(p \lor q) \land (\neg q \lor q)\} \land \{(p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r)\}] \lor (\neg p \lor r)$$

Por la ley del tercio excluso:

$$[\{(p \lor q) \land \mathbf{1}\} \land \{(p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r)\}] \lor (\neg p \lor r)$$

Por las leyes de simplificación:

$$[(p \lor q) \land (p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r)] \lor (\neg p \lor r)$$

Una nueva utilización de las leyes distributivas transforman esta expresión en:

$$[(p \lor q) \lor (\neg p \lor r)] \land [(p \lor \neg r) \lor (\neg p \lor r)] \land [(\neg q \lor \neg r) \lor (\neg p \lor r)]$$

Se aplica la ley asociativa:

$$[p \lor q \lor \neg p \lor r] \land [p \lor \neg r \lor \neg p \lor r] \land [\neg q \lor \neg r \lor \neg p \lor r]$$

De las leyes conmutativas:

$$[p \lor \neg p \lor q \lor r] \land [p \lor \neg p \lor \neg r \lor r] \land [\neg q \lor \neg p \lor \neg r \lor r]$$

Finalmente, la ley del tercio excluso y las leyes de simplificación conducen a:

$$[\mathbf{1} \vee q \vee r] \wedge [\mathbf{1} \vee \mathbf{1}] \wedge [\neg q \vee \neg p \vee \mathbf{1}]$$

$$\mathbf{1} \wedge \mathbf{1} \wedge \mathbf{1}, \text{ es decir, } \mathbf{1}$$

En consecuencia, la proposición inicial es una *tautología*.

Ejemplo 1.21 **Tabla de verdad mediante la forma clausulada**
La forma clausulada de la proposición $[(p \to q) \wedge (\neg p \to r)] \to (q \to r)$, que en la tabla 1.18 se reseña con la letra f, es la proposición $(\neg q \vee \neg p \vee r)$.
Basta comparar las tablas de verdad de las dos proposiciones en las tablas 1.18 y 1.19 para comprobar que son dos proposiciones equivalentes.

p	q	r	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to r$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$	f
0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1

Tabla 1.18: Tabla de la proposición $[(p \to q) \wedge (\neg p \to r)] \to (q \to r)$

Resulta más fácil construir la tabla de verdad de la forma clausulada (véase la tabla 1.19) que la de la proposición inicial (veáse la tabla 1.18).

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Tabla 1.19: Tabla de la forma clausulada

Ejemplo 1.22 Dada la proposición $[(p \to q) \wedge (\neg p \to r)] \to (q \to r)$ construimos su forma clausulada paso a paso.

- *Paso 1:* Quitar condicionales:

  1. $\neg[(p \to q) \wedge (\neg p \to r)] \vee (q \to r)$
  2. $\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee r)] \vee (\neg q \vee r)$
  3. $\neg[(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)] \vee (\neg q \vee r)$

- *Paso 2:* Quitar negaciones de proposiciones compuestas:

  1. $[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee r)] \vee (\neg q \vee r)$
  2. $[(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)] \vee (\neg q \vee r)$
  3. $[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)] \vee (\neg q \vee r)$

- *Paso 3:* Aplicar las leyes distributiva, asociativa y conmutativa:

  1. $[(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \wedge [(p \wedge \neg q) \vee \neg r)] \vee (\neg q \vee r)$
  2. $[(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \wedge [(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg q \vee r)$
  3. $[\mathbf{1} \wedge (\neg q \vee \neg p)] \wedge [(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg q \vee r)$
  4. $[(\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg q \vee r)$
  5. $[(\neg q \vee \neg p) \vee (\neg q \vee r)] \wedge [(p \vee \neg r) \vee (\neg q \vee r)] \wedge [(\neg q \vee \neg r) \vee (\neg q \vee r)]$
  6. $(\neg q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg q \vee r)$
  7. $(\neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee r)$
  8. $(\neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \mathbf{1}) \wedge (\neg q \vee \mathbf{1})$
  9. $(\neg q \vee \neg p \vee r)$

Comentarios

Sistema axiomático PM de A.N. Whitehead y B. Russell

Otra forma de introducir la lógica proposicional es mediante un **sistema axiomático**. Se establece un alfabeto (símbolos alfabéticos), una lista de reglas de formación (partículas conectivas y paréntesis), una lista de sentencias verdaderas (axiomas) y una lista de reglas de transformación (reglas de deducción).

En el sistema axiomático PM (Principia Mathematica), se dota a los elementos del alfabeto (proposiciones) de un **valor semántico** $(0, 1)$ y se combinan estos elementos, haciendo un uso correcto de las reglas de formación (únicamente $\neg$, $\vee$ y paréntesis) para construir **sentencias bien formadas** (proposiciones sintácticamente correctas), que son valoradas sin ambigüedad. El resto de los conectores usuales se definen mediante:

$$\begin{aligned} p \wedge q &\iff \neg(\neg p \vee \neg q) \\ p \to q &\iff \neg p \vee q \\ p \leftrightarrow q &\iff (p \to q) \wedge (q \to p) \end{aligned}$$

Un **axioma** es una sentencia bien formada que se considera verdadera, es decir, una tautología primaria no deducible.

Un **teorema** es una sentencia bien formada que es cierta, es decir, una tautología. Los teoremas son tautologías deducibles a partir de otros teoremas o de axiomas. La secuencia de sentencias verdaderas necesarias para deducir un teorema se denomina **demostración** del teorema.

Los axiomas de PM son:

- $(A_1) : p \vee p \to p$
- $(A_2) : p \to (p \vee q)$
- $(A_3) : (p \vee q) \to (q \vee p)$
- $(A_4) : (p \to q) \to [(r \vee p) \to (r \vee q)]$

Las reglas de formación de PM son:

Regla de sustitución: El resultado de reemplazar un elemento alfabético en un teorema por una sentencia bien formada es un teorema.

Regla de separación: Si S y R son sentencias bien formadas, y, S y $S \to R$ son teoremas, entonces R es un teorema.

Presentación de resultados en Matemáticas

El conocimiento matemático se presenta empleando sentencias bien formadas que son valoradas sin ambigüedad.

El primer elemento básico es la **definición**. La forma habitual de definir algún elemento matemático es describirlo directamente por extensión, o indicando la propiedad o propiedades específicas. Una definición, como sentencia bien formada, es verdadera.

$\boxed{\text{Ejemplo 1.23}}$ **Base de un espacio vectorial**

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Una base de V es un conjunto de vectores del espacio vectorial que forman un sistema de generadores linealmente independientes.

Muchos conceptos básicos, como el concepto de conjunto, no se definen explícitamente, si no que se definen a través de unas relaciones mutuas que se formulan en un sistema de axiomas apropiado.
Como ya se ha dicho con anterioridad en la axiomática PM, un teorema es una sentencia bien formada que es cierta, es decir, una tautología. Este concepto puede extenderse a cualquier sistema lógico, y en definitiva a cualquier lenguaje. Así pues, los **teoremas** son tautologías deducibles a partir de otros teoremas, de definiciones o de axiomas en el marco de una teoría. La secuencia de sentencias verdaderas necesarias para deducir un teorema se denomina, igualmente, **demostración** del teorema.

La base de conocimiento matemático está constituida por definiciones y teoremas, en el sentido anterior. Los teoremas aparecen en matemáticas bajo distintas denominaciones: lema, proposición, teorema o corolario. Aun siendo estas denominaciones subjetivas y no excluyentes, una posible clasificación sería:

- Un **teorema** es un enunciado con mucha utilidad tanto práctica como teórica y de uso en numerosas deducciones de nuevos teoremas. En el desarrollo de un tema o de una teoría, el término *teorema* se reserva para los resultados de mayor relevancia.

- Una **proposición** es un enunciado con utilidad práctica en numerosas deducciones de otros nuevos teoremas o proposiciones y en general, de menor relevancia que un teorema en el marco de una teoría.

- Un **lema** es un resultado intermedio en el proceso de una demostración de un teorema o de una proposición. En muchos casos, una demostración puede ser muy extensa y contener bloques de deducciones que pueden ser separados en lemas, facilitando el posterior proceso de comprensión de la demostración.

- Un **corolario** es un enunciado que se deduce con relativa facilidad del enunciado de un teorema. En muchos casos, los corolarios muestran distintas actuaciones prácticas de un teorema, y estos suelen ser de gran utilidad.

Estas distinciones son a veces arbitrarias. Por ejemplo, hay lemas, como el lema de Zorn, que su importancia no se corresponde con el atributo de lema. Pero ya se conoce universalmente de esta manera.
Finalmente existen afirmaciones matemáticas que se creen verdaderas pero que no han sido demostradas. Se denominan **conjeturas** o **hipótesis**, como la conjetura de Poincaré que ha sido demostrada recientemente o la conjetura de Goldbach, "Todo número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos números primos", que sigue sin demostrar.
En general, los teoremas, proposiciones, lemas y corolarios son de dos tipos:

1. **De caracterización:** Son teoremas del tipo $P \iff Q$.

2. **De condiciones suficientes o de condiciones necesarias:** Son teoremas del tipo $P \Longrightarrow Q$. En el caso de que se quieran emplear para comprobar la verdad de P, entonces se dice que las propiedades de Q son **condiciones necesarias**. Si se emplean para asegurar la verdad de Q, entonces se dice que la propiedades de P son **condiciones suficientes**.

Métodos de demostración empleados en Matemáticas

El *conocimiento matemático* se justifica empleando alguno de los dos métodos de demostración: un sistema lógico deductivo y un sistema lógico inductivo.

El método deductivo consiste grosso modo en la formación de un enunciado verdadero C partiendo de otro enunciado verdadero H, dentro del marco de una teoría. En lenguaje coloquial H es la *hipótesis* o *antecedente* y C la *conclusión* o *consecuente*.

- **Deducción directa:** Este método utiliza las leyes transitivas, o silogismo hipotético. Para demostrar que el antecedente es condición suficiente para asegurar la verdad del consecuente, se busca una condición intermedia tal que el antecedente sea condición suficiente de ésta, y que ésta sea condición suficiente del consecuente. Se basa pues en la implicación:

$$(P \to R) \wedge (R \to Q) \Longrightarrow P \to Q$$

  En muchos casos la búsqueda de esta condición intermedia requiere utilizar algunas leyes como las leyes modus ponendo ponens y modus tollendo tollens. Por la ley modus ponendo ponens, si sabemos que el condicional $R \to H$ es verdadero basta demostrar que R es verdadero para deducir que H es verdadero. La ley modus tollendo tollens en cambio nos asegura que si sabemos que el condicional $R \to H$ es verdadero basta demostrar que H es falso para deducir que R es falso.

- **Negación del consecuente:** Este método utiliza la primera ley de transposición:

$$P \to Q \iff \neg Q \to \neg P$$

  Para demostrar que el antecedente es condición suficiente para que se verifique el consecuente, se niega el consecuente, y de esta negación se deduce la negación del antecedente. Véase una demostración por negación del consecuente en el ejemplo 1.11.

- **Reducción al absurdo:** Este método utiliza la ley del tercio excluso. Se supone verdadera la negación de lo que se quiere demostrar, y de esta negación se llega a una contradicción. Véase una demostración por reducción al absurdo en el ejercicio 1.9.

El método inductivo lo comentaremos en el siguiente capítulo.