Álgebra
Algunos Ejercicios Resueltos

Departamento de Matemáticas
Universidad de Castilla - La Mancha
E. I. I. Albacete

Septiembre de 2011

Índice general

Tema 1

Números Complejos

5. Determinar dos números complejos z_1 y z_2 que verifiquen simultáneamente:

   a) La suma de sus cuadrados es 3.
   b) El cociente z_1/z_2 es un número imaginario puro.
   c) El módulo de dicho cociente es 2.

Solución: Del enunciado se desprende que deben verificarse simultáneamente las igualdades

$$z_1^2 + z_2^2 = 3, \qquad \frac{z_1}{z_2} = ki, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2,$$

y, puesto que $|ki| = |k| = 2$ debe ser $k = \pm 2$.

Por tanto, o bien $\dfrac{z_1}{z_2} = 2i$ o bien $\dfrac{z_1}{z_2} = -2i$. Se presentan así dos casos:

- Si $\frac{z_1}{z_2} = 2i$, entonces $z_1 = 2iz_2$; de la ecuación $z_1^2 + z_2^2 = 3$ se obtiene

  $$z_1^2 + z_2^2 = 3 \;\Rightarrow\; (2iz_2)^2 + z_2^2 = 3 \;\Rightarrow\; -4z_2^2 + z_2^2 = 3 \;\Rightarrow\; z_2^2 = -1 \;\Rightarrow\; z_2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

  Tomando $z_2 = i$ se obtiene $z_1 = -2$. Tomando $z_2 = -i$ se obtiene $z_1 = 2$.
- Si $\frac{z_1}{z_2} = -2i$ entonces $z_1 = -2iz_2$; igualmente se desprende que $z_2 = \pm i$, pero ahora, si $z_2 = i$ resulta $z_1 = 2$, mientras que si $z_2 = -i$ se obtiene $z_1 = -2$.

Por tanto, las cuatro soluciones del ejercicio son

$$z_1 = 2,\; z_2 = i, \qquad z_1 = -2,\; z_2 = i, \qquad z_1 = 2,\; z_2 = -i, \qquad z_1 = -2,\; z_2 = -i.$$

□

10. Determinar los complejos z tales que $z^4 - \overline{z} = 0$.

Solución: La ecuación propuesta puede escribirse como $z^4 = \overline{z}$. Trabajando en forma polar, si $z = (r, \theta)$ entonces $z^4 = (r^4, 4\theta)$ y $\overline{z} = (r, -\theta)$ y podemos expresar la ecuación propuesta como

$$(r^4, 4\theta) = (r, -\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = r \\ 4\theta = -\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por un lado,

$$r^4 = r \Rightarrow r^4 - r = 0 \Rightarrow r(r^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

Por otro,

$$4\theta + \theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5\theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Por tanto, las soluciones son, en forma polar,

$$\begin{array}{lll} z_1 = (0,0) = 0, & z_2 = (1,0) = 1, & z_3 = \left(1, \frac{2\pi}{5}\right), \\ z_4 = \left(1, \frac{4\pi}{5}\right), & z_5 = \left(1, \frac{6\pi}{5}\right), & z_6 = \left(1, \frac{8\pi}{5}\right). \end{array}$$

□

15. Sean $z_1 = -1 + i$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

   a) Sabiendo que z_1 es raíz de la ecuación

   $$z^2 + (-1 + 2i)z + \alpha = 0$$

   hallar la otra raíz z_2 y el número complejo α.

   b) Hallar los complejos ω tales que z_1, z_2 y ω sean los vértices de un triángulo equilátero. ¿Cuántas soluciones hay?

   c) Hallar el área de cada uno de los triángulos anteriores. Calcular la suma de dichas áreas.

Solución:

a) Como $z_1 = -1 + i$ es raíz de la ecuación $z^2 + (-1 + 2i)z + \alpha = 0$, se verifica la igualdad $z_1^2 + (-1 + 2i)z_1 + \alpha = 0$, de donde se obtiene

$$(-1 + i)^2 + (-1 + 2i)(-1 + i) + \alpha = 0$$

y operando resulta

$$-2i - 1 - 3i + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1 + 5i.$$

Ahora que ya conocemos la ecuación completa, $z^2 + (-1 + 2i)z + (1 + 5i) = 0$, podemos resolverla para obtener la otra raíz. Así,

$$z = \frac{-(-1 + 2i) \pm \sqrt{(-1 + 2i)^2 - 4(1 + 5i)}}{2} = \frac{(1 - 2i) \pm \sqrt{-7 - 24i}}{2}$$

Calculamos $\sqrt{-7-24i} = a+bi$. Elevando al cuadrado, se obtiene la igualdad $-7-24i = (a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2bi$, de donde resulta el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -7 & = & a^2-b^2 \\ -24 & = & 2ab \end{array}\right.$$

Despejando $a = \frac{-12}{b}$ se llega a la ecuación bicuadrada $b^4 - 7b^2 - 144 = 0$, de donde se obtiene $b^2 = 16$ o bien $b^2 = -9$.

Esta última solución no tiene sentido en $\mathbb{R}$, mientras que de la igualdad $b^2 = 16$ se deduce que $b = \pm 4$ y entonces $a = \mp 3$.

Por tanto, las raíces buscadas son $-3+4i$ y $3-4i$. Por último, sustituímos en la expresión anterior para obtener las soluciones

$$z = \frac{(1-2i)\pm\sqrt{-7-24i}}{2} = \frac{(1-2i)\pm(-3+4i)}{2} \begin{array}{lrcl} \nearrow & -1+i & = & z_1 \\ \searrow & 2-3i & = & z_2 \end{array}$$

Así, las soluciones de la ecuación propuesta son $z_1 = -1+i$ (como decía el enunciado) y $z_2 = 2-3i$ (la que queríamos hallar).

También podíamos haber aplicado la regla de Ruffini para factorizar el polinomio, puesto que conocemos una raíz.

b) Hay dos posibles soluciones para w, como se desprende del siguiente dibujo.

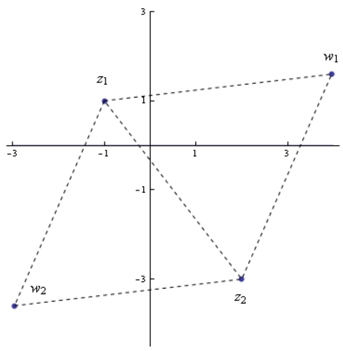

Figura 1.1:

Puesto que $|z_2 - z_1| = 5$ y el triángulo debe ser equilátero, ambas verifican las condiciones

$$|w - z_1| = 5, \qquad |w - z_2| = 5.$$

Si hacemos $w = x + yi$, las condiciones anteriores pueden escribirse como

$$|w - z_1| = |(x+1)+(y-1)i| = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = 5,$$
$$|w - z_2| = |(x-2)+(y+3)i| = \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = 5,$$

de donde resulta el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (x+1)^2+(y-1)^2 = 25 \\ (x-2)^2+(y+3)^2 = 25 \end{array}\right.$$

Operando, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+2x-2y = 23 \\ x^2+y^2-4x+6y = 12 \end{array}\right.$$

y sustituyendo la segunda ecuación por el resultado de restar dicha ecuación menos la primera, resulta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12 \\ 6x - 8y = 11 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene

$$y = \frac{6x - 11}{8}$$

y sustituyendo en la primera y operando se llega a la ecuación

$$100x^2 - 100x - 1175 = 0, \qquad \text{o bien} \qquad 4x^2 - 4x - 47 = 0.$$

Entonces

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 752}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{768}}{8} = \frac{4 \pm 16\sqrt{3}}{8} = \frac{1 \pm 4\sqrt{3}}{2},$$

$$y = \frac{6 \cdot \frac{1 \pm 4\sqrt{3}}{2} - 11}{8} = \frac{3 \pm 12\sqrt{3} - 11}{8} = \frac{-8 \pm 12\sqrt{3}}{8} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto los números buscados son

$$w_1 = \frac{1 + 4\sqrt{3}}{2} + \frac{-2 + 3\sqrt{3}}{2}\, i, \qquad w_2 = \frac{1 - 4\sqrt{3}}{2} + \frac{-2 - 3\sqrt{3}}{2}\, i.$$

Otra posibilidad de obtener w_1 y w_2 es (ver figura) hacer un giro con centro en z_1. Si giramos z_2 un ángulo de 60° con centro en z_1 (multiplicando por 1_{60° después de hacer la traslación del origen a z_1), se obtiene w_1, y si giramos -60° (multiplicando por 1_{-60°), se obtiene w_2.

c) La suma de dichas áreas es el área del rombo de vértices z_1, z_2, w_1, w_2. El área de un rombo es

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

donde $D = |w_2 - w_1|$ es la diagonal mayor, y $d = |z_2 - z_1|$ es la diagonal menor.

$$\begin{aligned} D &= |w_2 - w_1| = |4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i| = 5\sqrt{3} \\ d &= |z_2 - z_1| = |3 - 4i| = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

Como ambos triángulos son iguales, cada uno de ellos tendrá un área igual a $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. Podíamos haber calculado el área de cada uno de los triángulos independientemente, pues la base de ambos es $|z_2 - z_1| = 5$ y la altura es $|w_1 - w^*| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, siendo $w^* = \frac{1}{2} - i$ el punto medio del segmento determinado por los afijos de z_1 y z_2.

□

Tema 2

Matrices y Determinantes

4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestra las siguientes implicaciones, siendo O la matriz nula e I la matriz identidad, ambas de orden n.

   a) Si $A^2 = 0$ entonces $(I + A)^5 = I + 5A$.

   b) Si $A^2 = I$ entonces $(I + A)^5 = 16(I + A)$.

   c) Si $A^2 = A$ entonces $(I - A)^4 \cdot A = O$.

   Solución: Hay que observar que, en general, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$, pues el producto de matrices no es conmutativo. Entonces,

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

   Sin embargo, como $A \cdot I = I \cdot A = A$, en ese caso podemos escribir

$$\begin{aligned}
(I + A)^2 &= I^2 + 2I \cdot A + A^2 = I + 2A + A^2 \\
(I + A)^3 &= I^3 + 3I^2 \cdot A + 3I \cdot A^2 + A^3 = I + 3A + 3A^2 + A^3 \\
(I + A)^4 &= I + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4 \\
(I + A)^5 &= I + 5A + 10A^2 + 10A^3 + 5A^4 + A^5
\end{aligned}$$

   a) Si $A^2 = O$ entonces también es $A^n = O$ para cualquier $n \geq 2$, por lo que

$$(I + A)^5 = I + 5A + 10A^2 + 10A^3 + 5A^4 + A^5 = I + 5A.$$

   b) Si $A^2 = I$ entonces $A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$, $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$ y, en general, $A^{2n} = I$, $A^{2n+1} = A$, por lo que

$$\begin{aligned}
(I + A)^5 &= I + 5A + 10A^2 + 10A^3 + 5A^4 + A^5 \\
&= I + 5A + 10I + 10A + 5I + A = 16I + 16A = 16(I + A).
\end{aligned}$$

c) Si $A^2 = A$ entonces $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A^2 = A$ y, en general, $A^n = A$ con $n \geq 2$. Se verifica que

$$(I - A)^4 = I - 4A + 6A^2 - 4A^3 + A^4 = I - 4A + 6A - 4A + A = I - A$$

por lo que $(I - A)^4 \cdot A = (I - A) \cdot A = A - A^2 = A - A = O$.

□

10. Se considera el conjunto de matrices de la forma

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a + c & b + c \\ c & b & a + c \end{pmatrix},$$

con a, b, c números racionales. Se designará este conjunto por $N_3(\mathbb{Q})$. Se pide:

a) Demostrar que toda matriz de $N_3(\mathbb{Q})$ se escribe de manera única en la forma

$$M(a, b, c) = aI + bJ + cK,$$

donde I es la matriz identidad de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ y las matrices J y K son independientes de a, b, c.

b) Demostrar que $N_3(\mathbb{Q})$ con las operaciones usuales de suma de matrices y producto por un escalar, es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$. Hallar la dimensión de este subespacio.

c) Hallar los productos J^2, $J \cdot K$, $K \cdot J$, K^2 y comprobar que $J^3 = J + I$.

Solución:

a) Se puede escribir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a + c & b + c \\ c & b & a + c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & c & c \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, si llamamos

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos escribir la igualdad

$$M(a, b, c) = AI + bJ + cK$$

donde las matrices J y K son constantes (no dependen de a, b y c) y linealmente independientes, pues no son proporcionales. I es la matriz identidad, también linealmente independiente de las otras.

b) Que el conjunto $N_3(\mathbb{Q})$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de matrices y producto por un escalar se deduce del hecho de que la suma y el producto por un escalar son operaciones internas en $N_3(\mathbb{Q})$ y de que en el conjunto de matrices $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ se verifican las propiedades de espacio vectorial. Este segundo hecho es evidente y el primero también, pues

$$M(a,b,c) + M(a',b',c') = M(a+a', b+b', c+c')$$
$$\lambda \cdot M(a,b,c) = M(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

La dimensión de este subespacio es 3, pues cada matriz de él es combinación lineal de los elementos de $\{I, J, K\}$ que, por consiguiente, forman una base de él.

c) Hagamos los cálculos pertinentes.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = K$$

$$J \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I + J$$

$$K \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I + J$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J + K$$

Se verifica

$$J^3 = J \cdot J^2 = J \cdot K = I + J = J + I$$

□

14. Determina para qué valores de a son invertibles las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & a \end{pmatrix}$$

Solución: Para que una matriz sea invertible (tenga inversa) su determinante debe ser distinto de 0. Entonces,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2 + 4a - 2a - 2 - 2a^2 = a(2-a)$$

de modo que si $a = 0$ o $a = 2$ el determinante de A vale 0 y la matriz A no tiene inversa, mientras que si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ la inversa existe, ya que $|A| \neq 0$.

Para la matriz B, análogamente, se verifica que

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -2a & 1 & -1-2a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a-2 & 3 & a-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2a & 1 & -1-2a \\ -3 & 2 & 0 \\ a-2 & 3 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2a & 1 & -1-2a \\ 3 & -2 & 0 \\ a-2 & 3 & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-2a \\ 0 & -5 & 3+6a \\ 0 & 3 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$= -5(a-2) - 3(3+6a) = -5a + 10 - 9 - 18a = -23a + 1$$

de manera que debe ser $a \neq \frac{1}{23}$ para que $|B| \neq 0$ y exista B^{-1}. $\square$

Tema 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

4. Discútase el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & + & 2v & = & 3 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & u & - & 2v & = & -4 \\ 3x & - & y & - & 3z & - & 4u & + & 4v & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución: Calculemos el rango de la matriz ampliada $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -6 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 + 4F_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & -18 & -36 \end{array}\right)$$

Como $\operatorname{rang}(A|B) = 3 = \operatorname{rang}(A)$, el sistema es compatible indeterminado y equivalente al de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & + & 2v & = & 3 \\ & & y & - & 3z & + & u & - & 4v & = & -7 \\ & & & & z & & & + & v & = & 2 \end{array}\right.$$

cuya solución es

$$z = 2 - v, \quad y = -1 - u + v, \quad x = 2 + u - 2v,$$

o bien, haciendo $u = \lambda$, $v = \mu$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & + & \lambda & - & 2\mu \\ y & = & -1 & - & \lambda & + & \mu \\ z & = & 2 & & & - & \mu \\ u & = & & & \lambda & & \\ v & = & & & & & \mu \end{array}\right.$$

□

8. Discútase, en función de los valores reales del parámetro a, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & + & az & = & a^2+4 \\ ax & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Solución: Calculemos primero el determinante de la matriz A de coeficientes, para estudiar su rango

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & a \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 4 + 4 + a = a^2 + a = a(a+1)$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, como $\det(A) \neq 0$ la matriz A tiene rango 3 y el sistema es compatible determinado (pues debe ser $\text{rang}(A|B) = 3$). En este caso podemos obtener la solución por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ a^2+4 & 0 & a \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & a^2+4 & a \\ a & -2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(-a^2+2a-2)}{a(a+1)} = \frac{-a^2+2a-2}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & a^2+4 \\ a & -1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(a^2+a+4)}{a(a+1)} = \frac{a^2+a+4}{a+1}$$

- Si $a = 0$, el sistema es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & & & = & 4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Mediante operaciones elementales sobre la matriz $(A|B)$ obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{F_2 - 4F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

y como las dos últimas filas son proporcionales, el sistema es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$ resulta

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & & \\ y & = & 2 & - & \lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Si $a = -1$, el sistema resultante es

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 4x & & & - & z & = & 5 \\ -x & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

que es incompatible, a la vista de la primera y tercera ecuaciones. □

12. Discútase, en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & az & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ bx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & by & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Solución: El sistema es homogéneo, por lo que es compatible. Veamos para qué valores de los parámetros es compatible determinado (y por tanto tiene solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), y para cuáles es compatible indeterminado.

Para ello calculamos el rango de la matriz de coeficientes A cambiando previamente el orden de las ecuaciones

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ b & 1 & 1 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - bF_1 \\ F_4 - F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & a+3 \\ 0 & 1+b & 1+b \\ 0 & b+1 & 0 \end{pmatrix}$$

A la vista de dicha matriz podemos decir que si $b = -1$ entonces $\text{rang}(A) = 2$ para cualquier valor de a, mientras que si $b \neq -1$ entonces $\text{rang}(A) = 3$ para todo a ya que las filas primera, tercera y cuarta son independientes.

Por tanto, si $b \neq -1$ el sistema tiene solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y si $b = -1$ es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 4y & + & (a+3)z & = & 0 \end{array}\right.$$

cuya solución es, tomando z como variable independiente

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & (1-a)\lambda \\ y & = & -(3+a)\lambda \\ z & = & 4\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Tema 4

La estructura de Espacio vectorial

8. Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,1)$ y $v_3 = (0,0,1,0)$,

   a) Demuestra que son linealmente independientes.

   b) Amplía el sistema $\{v_1, v_2, v_3\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$ y halla las coordenadas del vector $u = (2,1,-1,0)$ respecto de dicha base.

Solución:

a) Consideremos los vectores $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,1)$ y $v_3 = (0,0,1,0)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Serán linealmente independientes si, y sólo si, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que forman tiene rango 3 y eso es obvio, pues el menor formado por las tres primeras columnas de dicha matriz verifica que

$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

b) El vector $v_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ es linealmente independiente de los tres vectores dados, pues desarrollando por la última fila el determinante de la matriz cuyas filas son v_i con $1 \leq i \leq 4$ resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |M_{33}| = -1 \neq 0.$$

Dada la base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, el vector $u = (2, 1, -1, 0)$ tiene unas coordenadas que se obtienen resolviendo el sistema que resulta de la igualdad

$$\begin{aligned}(2,1,-1,0) &= av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4\\ &= a(1,1,0,0) + b(1,0,1,1) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)\\ &= (a+b, a, b+c, b+d)\end{aligned}$$

es decir,

$$\left\{\begin{array}{ccc} a+b & = & 2\\ a & = & 1\\ b+c & = & -1\\ b+d & = & 0\end{array}\right.$$

y son $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = -1$.

□

15. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(2,1,3), (1,1,0), (-1,0,0)\}$.

 a) Si el vector v tiene coordenadas $(3, 1, -1)$ en esta base, ¿cuáles son sus coordenadas en la base canónica?

 b) Si el vector w tiene coordenadas $(2, -1, 3)$ en la base canónica, ¿cuáles son sus coordenadas en la base B?

Solución: Llamamos $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(2,1,3), (1,1,0), (-1,0,0)\}$$

la base dada. Entonces,

- La expresión de v en la base C es inmediata:

$$v = 3u_1 + u_2 - u_3 = 3(2,1,3) + (1,1,0) - (-1,0,0) = (8,4,9)_C.$$

- La expresión de w en B es menos directa; por hipótesis,

$$w = (2,-1,3)_C = 2e_1 - e_2 + 3e_3.$$

 Por otra parte, w debe expresarse también en la base B,

$$\begin{aligned}w &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3\\ &= \lambda_1(2e_1 + e_2 + 3e_3) + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(-e_1)\\ &= (2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + 3\lambda_1 e_3\end{aligned}$$

 Igualando ambas expresiones resulta el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 2\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & -1\\ 3\lambda_1 & & & & & = & 3\end{array}\right.$$

 cuya solución es $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$.
 Por tanto, $w = (1, -2, -2)_B$.

Podíamos haber hecho el ejercicio utilizando matrices. Si llamamos P a la matriz de paso de la base B a la base C entonces P^{-1} es la matriz de paso de C a B. La matriz P se obtiene directamente, pues sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base B expresados en la base C. Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $X_C = P \cdot X_B$ nos da las coordenadas en C cuando conocemos las coordenadas en B (apartado *a*) del ejercicio). La ecuación $X_B = P^{-1} \cdot X_C$ da las coordenadas en B cuando conocemos las coordenadas en C (apartado *b*)). $\square$

21. Hallar una base, la dimensión, unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas de M, N, $M \cap N$ y $M + N$, siendo M y N los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\begin{aligned} M = \{&(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \\ &(x, y, z, t) = (\alpha + 3\beta + 2\gamma, 3\alpha - \beta + \gamma,\ \alpha + \beta + \gamma, -5\beta + 2\gamma),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0,\ y - z - t = 0,\ x + 4y - 2z - 2t = 0\}$$

Solución: El subespacio M está definido por sus ecuaciones paramétricas. Se obtiene de inmediato un sistema de generadores de M. Es

$$\{(1, 3, 1, 0), (3, -1, 1, -5), (2, 1, 1, 2)\}$$

Estudiando el rango de la matriz que forman se deduce que los vectores son linealmente independientes, por lo que $\dim(M) = 3$ y dichos vectores son una base de M, por lo que podemos escribir $M = \langle(1, 3, 1, 0), (3, -1, 1, -5), (2, 1, 1, 2)\rangle$.

Para hallar una base de N tenemos que resolver el sistema que forman las ecuaciones implícitas que definen dicho subespacio.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - z - t = 0 \\ x + 4y - 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado. Si a la segunda ecuación se le resta la primera se obtiene el triple de la tercera, por lo que equivale a

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad y - z - t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = -z - t \\ \quad y = z + t \end{cases}$$

Haciendo $z = \alpha$, $t = \beta$ se obtiene $y = \alpha + \beta$, $x = -2\alpha - 2\beta$, por lo que $\dim(N) = 2$ y $\{(-2, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$ es una base de N. Por tanto, $N = \langle(-2, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\rangle$.

Ya tenemos todo lo necesario para hacer el problema.

- Para el subespacio M:
  - Base y dimensión:
    Ya las hemos calculado antes. La dimensión es $\dim(M) = 3$ y una base de M es $B_M = \{(1, 3, 1, 0), (3, -1, 1, -5), (2, 1, 1, 2)\}$.

- Ecuaciones paramétricas:

  Son las que da el enunciado, $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha+3\beta+2\gamma \\ y=3\alpha-\beta+\gamma \\ z=\alpha+\beta+\gamma \\ t=-5\beta+2\gamma \end{array}\right.$.

- Ecuaciones implícitas: Se obtienen de las paramétricas eliminando los parámetros (una vez que sabemos que son independientes, pues $\dim(M)=3$). Entonces, debemos resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} \alpha+3\beta+2\gamma=x \\ 3\alpha-\beta+\gamma=y \\ \alpha+\beta+\gamma=z \\ -5\beta+2\gamma=t \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 3 & 2 & x \\ 3 & -1 & 1 & y \\ 0 & -5 & 2 & t \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ F_3-3F_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 2 & 1 & x-z \\ 0 & -4 & -2 & y-3z \\ 0 & -5 & 2 & t \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3+2F_2 \\ F_4-2F_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 2 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & 0 & 2x+y-5z \\ 0 & -9 & 0 & t-2x+2z \end{array}\right)$$

  Por tanto, la ecuación implícita de M es $2x+y-5z=0$, es decir,

$$M=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x+y-5z=0\}.$$

- Para el subespacio N:
  - Base y dimensión:
    Como sabemos, $\dim(N)=2$ y $B_N=\{(-2,1,1,0),(-2,1,0,1)\}$ es una base de N.
  - Ecuaciones paramétricas:

    A partir de la base se obtienen unas ecuaciones paramétricas, $\left\{\begin{array}{l} x=-2\alpha-2\beta \\ y=\alpha+\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{array}\right.$
  - Ecuaciones implícitas:
    Se dan en el enunciado. Son $x+y+z+t=0, y-z-t=0$, que permiten escribir $N=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0,\ y-z-t=0\}$ (Hemos comprobado que la última ecuación del enunciado depende de las otras dos, por lo que no es necesaria).
- Para el subespacio $M\cap N$:
  - Ecuaciones implícitas: Se obtienen a partir de las de los subespacios M y N. Son

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y-5z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ y-z-t=0 \end{array}\right.$$

    Si resolvemos el sistema se obtendrán unas ecuaciones paramétricas de $M\cap N$.
  - Ecuaciones paramétricas: Como el sistema es homogéneo, no hace falta escribir la matriz ampliada, que tendrá, seguro, el mismo rango que la de los coeficientes.

Dicha matriz de coeficientes es (reordenando las ecuaciones)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3-2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_3+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

por lo que el sistema precedente equivale a

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-z-t=0 \\ -8z-3t=0 \end{cases}$$

y su solución, haciendo $t=\lambda$, es $x=\frac{-10}{8}\lambda$, $y=\frac{5}{8}\lambda$, $z=\frac{-3}{8}\lambda$, $t=\lambda$. Si utilizamos como parámetro $8\mu=\lambda$ podemos expresar las ecuaciones paramétricas como

$$\begin{cases} x=-10\mu \\ y=5\mu \\ z=-3\mu \\ t=8\mu \end{cases}$$

- Base y dimensión:
  Como las ecuaciones paramétricas se expresan con sólo un parámetro, la dimensión del subespacio es $\dim(M\cap N)=1$ y una base es $\{(-10,5,-3,8)\}$.

- Para el subespacio $M+N$:

  El subespacio $M+N$ puede hallarse directamente, pues está generado por el sistema formado por una base de M junto con una de N, es decir, está generado por $\{(1,3,1,0),(3,-1,1,-5),(2,1,1,2),(-2,1,1,0),(-2,1,0,1)\}$. Sólo faltaría ver cuál es el rango de este sistema.

  Sin embargo es más fácil tener en cuenta la fórmula de las dimensiones, pues

$$\dim(M+N)+\dim(M\cap N)=\dim(M)+\dim(N)$$

  de donde se deduce que $\dim(M+N)=4$ y por tanto, $M+N=\mathbb{R}^4$. Entonces, si tomamos la bsae $\{1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ para $M+N$ se sigue que:

  - Ecuaciones paramétricas:
    Son $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, $t=\delta$.
  - Ecuaciones implícitas:
    No tiene sentido. (Al subespacio $M+N$ pertenecen todos los vectores del espacio vectorial).
  - Base y dimensión:
    Como $\dim(M+N)=4$, cualquier base de $\mathbb{R}^4$ es base de $M+N$.

□

32. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$U=\{(x,y,z):z=0\} \qquad V=\langle(0,1,1),(2,0,1),(2,1,2)\rangle$$

Halla la dimensión y una base de los subespacios U, V, $U+V$ y $U\cap V$.

Solución: El subespacio U tiene dimensión 2. Una base de U es $B_U = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, formada por dos vectores linealmente independientes que verifican la ecuación de U.

Por otra parte, como $(0,1,1)$ y $(2,0,1)$ no son proporcionales, son linealmente independientes, y $(2,1,2) = (0,1,1)+(2,0,1)$, de manera que $V = \langle(0,1,1),(2,0,1)\rangle$ tiene dimensión 2 y $B_V = \{(0,1,1),(2,0,1)\}$ es una base de V.

Puesto que tenemos bases de ambos subespacios, podemos escribir que

$$U + V = \langle(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(2,0,1)\rangle$$

Los tres primeros vectores que generan $U + V$ son linealmente independientes, luego $\dim(U + V) = 3$. Una base de $U + V$ es $B_{U+V} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$.

Puesto que estamos en $\mathbb{R}^3$ y $\dim(U+V) = 3$ podemos deducir que $U+V = \mathbb{R}^3$ y podríamos haber tomado la base canónica también.

De la fórmula de las dimensiones, que podemos escribir como

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V)$$

podemos deducir que $\dim(U \cap V) = 1$.

Tenemos una ecuación implícita de U. Unas ecuaciones paramétricas de V son

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \alpha + \beta \end{array}\right.$$

de donde se obtiene $\beta = \frac{x}{2}$, $\alpha = y$ y por tanto $z = y + \frac{x}{2}$, o bien $x + 2y - 2z = 0$.

Entonces las ecuaciones $z = 0$, $x + 2y - 2z = 0$ son unas ecuaciones implícitas de $U \cap V$. Resolviendo el sistema que forman, se obtienen unas ecuaciones paramétricas de $U \cap V$, que son

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$$

de modo que $\dim(U \cap V) = 1$ como sabíamos y $B_{U\cap V} = \{(-2,1,0)\}$ es una base de $U \cap V$.

□

Tema 5

Aplicaciones Lineales

4. Sean E_3 y E_4 dos espacios vectoriales de dimensiones 3 y 4 y con bases respectivas $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Sea f una aplicación lineal de E_3 en E_4 de la que se sabe que

$$f(e_1 - e_3) = u_1; \qquad f(e_2 - e_3) = u_1 - u_2; \qquad f(2e_3) = 2u_1 + 2u_3.$$

Se pide:

a) Matriz de f en las bases B y B'.

b) Ecuaciones implícitas y paramétricas de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Núcleo de f.

d) Ampliando una base del núcleo a una de E_3, hallar la matriz de f en dicha base y en la base B' de E_4.

Solución:

a) Las condiciones del enunciado, teniendo en cuenta que f es lineal, pueden escribirse como

$$f(e_1) - f(e_3) = u_1; \qquad f(e_2) - f(e_3) = u_1 - u_2; \qquad 2f(e_3) = 2u_1 + 2u_3.$$

De ellas se deduce de inmediato que

$$f(e_3) = u_1 + u_3, \qquad f(e_2) = 2u_1 - u_2 + u_3, \qquad f(e_1) = 2u_1 + u_3,$$

luego la matriz de f en las bases B y B' es

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sabemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle = \langle 2u_1 + u_3, 2u_1 - u_2 + u_3, u_1 + u_3\rangle \\ &= \langle (2,0,1,0)_{B'}, (2,-1,1,0)_{B'}, (1,0,1,0)_{B'}\rangle\end{aligned}$$

y, puesto que

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

se deduce que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Unas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcr} x &=& 2a &+& 2b &+& c \\ y &=& & & -b & & \\ z &=& a &+& b &+& c \\ t &=& 0 & & & & \end{array}\right.$$

de donde se obtiene la ecuación implícita, $t = 0$. Así,

$$\mathrm{Im}(f) = \{xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 : t = 0\}$$

c) De la igualdad $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E_3) = 3$ se deduce que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$$

y por tanto $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

d) Puesto que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, la cuestión no tiene sentido.

$\square$

8. Se consideran los espacios vectoriales E, F y G siendo E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1, F las matrices simétricas de orden 2 y $G = \mathbb{R}^3$. Se definen las aplicaciones

$$f : E \longrightarrow F \qquad\qquad g : F \longrightarrow G$$

$$f(ax+b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a, c, a+c)$$

Sean $B = \{x, 1\}$, $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B'' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ las bases canónicas de E, F y G.

a) Demostrar que f y g son lineales.

b) Hallar las matrices de los homomorfismos f, g y $g \circ f$ en las bases anteriores.

c) Calcular el subespacio $(g \circ f)(V)$ siendo V el subespacio de E

$$V = \{ax + a : a \in \mathbb{R}\}$$

d) Si en F utilizamos la base $B'_* = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, hallar las matrices de f, g y $g \circ f$ en las bases B, B'_* y B''.

e) Utilizando la expresión matricial del cambio de coordenadas de B' a B'_* hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ en la base B'_*.

f) Hallar $g^{-1}(2,2,4)$, $\quad g^{-1}(1,3,0)$, $\quad f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Se deja como ejercicio. Basta aplicar la correspondiente caracterización.

b) Puesto que

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1)_{B'} \qquad f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0)_{B'}$$

la matriz de f respecto de las bases B y B' es

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente,

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1)_{B''} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0)_{B''} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1,1)_{B''}$$

de donde resulta que la matriz de g respecto de las bases B' y B'' es

$$M_{B'B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g) \cdot M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $M_{BB''}(g \circ f)$ puede hallarse también directamente, calculando y expresando adecuadamente los elementos $(g \circ f)(x)$ y $(g \circ f)(1)$.

c) $V = \{ax + a : a \in \mathbb{R}\} = \langle x + 1 \rangle$. Por tanto,

$$(f \circ g)(V) = \langle (f \circ g)(x+1) \rangle = \langle f(g(x+1)) \rangle = \langle (1,1,2) \rangle$$

d) Para hallar la matriz de f en las bases B y B'_*, debemos observar que

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,0)_{B'_*} \qquad f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0)_{B'_*}$$

de modo que

$$M_{BB'_*}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, para hallar la matriz de g en las bases B'_* y B'' hemos de observar que

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,2)_{B''} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0)_{B''} \quad g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,-1,0)_{B''}$$

de donde se sigue que

$$M_{B'_*B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de $g \circ f$ no cambia, aunque la calculemos a partir de la base intermedia B'_*, pues las bases del espacio vectorial inicial y del final no han cambiado; es

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'_*B''}(g) \cdot M_{BB'_*}(f) = M_{B'B''}(g) \cdot M_{BB'}(f)$$

e) Para hallar la matriz $M_{B'B'_*}$ de cambio de base de B' a B'_* necesitamos obtener las coordenadas de los elementos de la base B' expresados en función de la base B'_*. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)_{B'_*}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 1,\ 0)_{B'_*}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)_{B'_*}$$

Por tanto, $\quad M_{B'B'_*} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$

La expresión matricial del cambio de base viene dada por la expresión

$$M_{B'B'_*} \cdot X_{B'} = X_{B'_*},$$

donde $X_{B'}$ es la matriz columna de las coordenadas de un vector de F en la base B' y $X_{B'_*}$ es la matriz columna de las coordenadas del mismo vector en la base B'_*. Puesto que se verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = (2, -3, 5)_{B'},$$

las coordenadas en la base B'_* se obtienen a partir de la anterior expresión matricial, y resulta

$$M_{B'B'_*} \cdot X_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = (2, -3, 5)_{B'} = \left(\frac{7}{2},\ -3,\ -\frac{3}{2}\right)_{B'_*}$$

f) Para hallar $g^{-1}(2, 2, 4)$ hay que resolver el sistema que matricialmente se expresa por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & & = 2 \\ & z & = 2 \\ x & + \ z & = 4 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Por tanto,

$$g^{-1}(2, 2, 4) = \{(2, \lambda, 2)_{B'} : \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Obsérvese que $g^{-1}(2,2,4)$ no es un subespacio vectorial.

Del mismo modo, para hallar $g^{-1}(1,3,0)$ hay que resolver el sistema que se obtiene de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dicho sistema es incompatible, de modo que $g^{-1}(1,3,0) = \varnothing$.

Por último, para hallar $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = f^{-1}((1,2,1)_{B'})$ hay que resolver el sistema que matricialmente se expresa como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 1 \\ & & y & = & 2 \\ x & & & = & 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto, $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \{x+2\}$, es un conjunto unitario.

$\square$

1. Sea $P_3(x) = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$, y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de tamaño 2 definidas sobre $\mathbb{R}$.

   Consideremos la aplicación $f : P_3(x) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por

   $$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} d & c+b \\ c-b & a \end{pmatrix}$$

   a) Comprobar que es lineal.

   b) Demostrar que $B = \{1, 1+x, 1+x^3, x+x^2\}$ es una base de $P_3(x)$.

   c) Obtener una base B' del subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ siguiente:

   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} d & c+b \\ c-b & a \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

   ¿Es B' una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

   d) En caso de ser afirmativa la respuesta al apartado anterior, hallar la expresión matricial de f referida a las bases B y B'.

   e) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

   f) Clasificar f.

Solución:

a) Dados $a + bx + cx^2 + dx^3, a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 \in P_3(x)$, se verifica que

$$\begin{aligned}
& f((a + bx + cx^2 + dx^3) + (a' + b'x + c'x^2 + d'x^3)) \\
&\quad = f((a + a') + (b + b')x + (c + c')x^2 + (d + d')x^3) \\
&\quad = \begin{pmatrix} d + d' & c + c' + b + b' \\ c + c' - (b + b') & a + a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c + b \\ c - b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d' & c' + b' \\ c' - b' & a' \end{pmatrix} \\
&\quad = f(a + bx + cx^2 + dx^3) + f(a' + b'x + c'x^2 + d'x^3)
\end{aligned}$$

de modo que f es lineal para la suma.
Dados $a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, resulta

$$\begin{aligned}
& f(\lambda(a + bx + cx^2 + dx^3)) = f(\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2 + \lambda dx^3) \\
&\quad = \begin{pmatrix} \lambda d & \lambda c + \lambda b \\ \lambda c - \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d & c + b \\ c - b & a \end{pmatrix} = \lambda f(a + bx + cx^2 + dx^3)
\end{aligned}$$

y f es lineal también para el producto por un escalar; ambas propiedades demuestran que f es lineal.

b) Como $\dim(P_3(x)) = 4$, para comprobar que B es base basta observar que los vectores de B son linealmente independientes y eso es inmediato, ya que en B hay un polinomio de cada grado; concretando más, si consideramos la base $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $P_3(x)$ e identificamos cada vector de B con sus coordenadas en C, resulta que

$$\begin{aligned}
1 &\equiv (1, 0, 0, 0)_C & 1 + x &\equiv (1, 1, 0, 0)_C \\
1 + x^3 &\equiv (1, 0, 0, 1)_C & x + x^2 &\equiv (0, 1, 1, 0)_C
\end{aligned}$$

y como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

los vectores de B son, efectivamente, linealmente independientes y forman una base de $P_3(x)$.

c) Un sistema de generadores de H es trivialmente el sistema

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

que es además base, pues los vectores de B' son linealmente independientes.
Como $\dim(H) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, se deduce que $H = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y B' es también base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

d) Obtenemos las imágenes por f de los elementos de la base B.

$$\begin{aligned}
f(1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0)_{B'} & f(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0, 0)_{B'} \\
f(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0)_{B'} & f(x^3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_{B'}
\end{aligned}$$

Así, la matriz de f respecto de las bases B y B' es

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

e) Puesto que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(M_{BB'}(f)) = 4$, se sigue que

$$\mathrm{Im}(f) = H = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

De la fórmula de las dimensiones se deduce que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

f) f es un isomorfismo, pues es un homomorfismo biyectivo ya que, como vimos en el apartado anterior, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

□

Tema 6

Diagonalización de endomorfismos y matrices

6. Consideremos el endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y, z) = (3x, x + 2y, 4x + 2z)$$

a) Hallar $A = (f)_C$ y $A' = (f)_B$, siendo C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y B la base

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

b) Hallar los valores y vectores propios de ambas matrices, comprobando que los valores propios coinciden, pero no los vectores propios.

c) Hallar los valores y vectores propios de f.

Solución:

a) Puesto que $f(1, 0, 0) = (3, 1, 4)$, $f(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ se tiene que

$$A = M_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La expresión matricial del endomorfismo es $Y = A \cdot X$. Desarrollando esta expresión se obtiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

siendo (x, y, z) las coordenadas de un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica y (x', y', z') las coordenadas de su imagen en la misma base.

Para hallar A' debemos considerar la base B:

$$\begin{array}{lll} f(1,1,1) & = (3,3,6) = 6(1,1,1) - 3(1,1,0) + 0(1,0,0) & = (6,-3,0)_B \\ f(1,1,0) & = (3,3,4) = 4(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0) & = (4,-1,0)_B \\ f(1,0,0) & = (3,1,4) = 4(1,1,1) - 3(1,1,0) + 2(1,0,0) & = (4,-3,2)_B \end{array}$$

Luego la matriz de f en la base B es

$$A' = M_B(f) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, la expresión matricial del endomorfismo en esta base es $Y = A' \cdot X$, y esta expresión en forma desarrollada resulta

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde (x, y, z) son las coordenadas de un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ en la base B y (x', y', z') las coordenadas de su imagen también en la base B.

b.1) Calculemos los valores propios de A.

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda)$$

Por tanto los valores propios de la matriz A son $\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = 3$ (simple).
Hallemos los vectores propios de A.
$V(2) = \{X : (A - 2I)X = 0\}$. Desarrollando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la ecuación $x = 0$, cuya solución se expresa como

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right.$$

Así, $V(2) = \{(0, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.
Del mismo modo, $V(3) = \{X : (A - 3I)X = 0\}$. La expresión

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da lugar al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ 4x & & & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

de solución

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4\lambda \end{array} \right.$$

Entonces $V(3) = \{(\lambda, \lambda, 4\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,4) \rangle$.

b.2) Los valores y vectores propios de A' se calculan de manera semejante.

$$\begin{aligned} |A' - \lambda \cdot I| &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 & 4 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 5\lambda - 6 + 12) \\ &= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \;=\; -(\lambda-2)^2\cdot(\lambda-3) \end{aligned}$$

Por tanto los valores propios de la matriz A' son, como los de A, $\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = 3$ (simple).

Hallemos los vectores propios de A'.

$V(2) = \{X : (A' - 2I)X = 0\}$. Desarrollando

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resulta la ecuación $x + y + z = 0$, cuya solución se expresa como

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Entonces $V(2) = \{(-\lambda - \mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,0), (-1,0,1)\rangle$.

Análogamente, $V(3) = \{X : (A' - 3I)X = 0\}$. De

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{cases} 3x + 4y + 4z = 0 \\ -3x - 4y - 3z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x = -4/3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Entonces $V(3) = \{((-4/3)\lambda, \lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle(-4,3,0)\rangle$.

b) Los valores propios de f son los valores propios de cualquiera de las matrices de f en una base prefijada, por tanto son $\lambda = 2$ (doble), $\lambda = 3$ (simple).

c.1) Los vectores propios de la matriz A son las coordenadas de los vectores propios del endomorfismo f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Obviamente los vectores $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,1,4)$ son las coordenadas de los vectores $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,1,4)$ en la base canónica. Así los subespacios propios del endomorfismo f son

$$V(2) = \langle(0,1,0), (0,0,1)\rangle, \qquad V(3) = \langle(1,1,4)\rangle.$$

c.2) Si para hallar los vectores propios de f nos ayudamos de los resultados obtenidos en el apartado *b.2)*, razonaremos como sigue:
Los vectores propios de la matriz A' son las coordenadas, en la base B, de los vectores propios del endomorfismo f. Hallemos los vectores v_1, v_2 y v_3 cuyas coordenadas en la base B son $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ y $(-4,3,0)$.

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1,1,0)_B = -1\cdot(1,1,1)+1\cdot(1,1,0)+0\cdot(1,0,0) = (0,0,-1)_C \\ v_2 &= (-1,0,1)_B = -1\cdot(1,1,1)+0\cdot(1,1,0)+1\cdot(1,0,0) = (0,-1,-1)_C \\ v_3 &= (-4,3,0)_B = -4\cdot(1,1,1)+3\cdot(1,1,0)+0\cdot(1,0,0) = (-1,-1,-4)_C \end{aligned}$$

De este modo tenemos que los subespacios propios de f, expresados en la base C, son

$$V(2) = \langle (0,0,-1),(0,-1,-1)\rangle, \qquad V(3) = \langle(-1,-1,-4)\rangle.$$

De forma sencilla se comprueba que estos subespacios $V(2)$ y $V(3)$ coinciden con los obtenidos anteriormente en el apartado *c.1)*.
Por tanto los subespacios de vectores propios de f son

$$\begin{aligned} V(2) = \langle (0,1,0)_C,(0,0,1)_C\rangle &= \langle(-1,1,0)_B,(-1,0,1)_B\rangle, \\ V(3) = \langle(1,1,4)_C\rangle &= \langle(-4,3,0)_B\rangle. \end{aligned}$$

□

11. Diagonalizar el endomorfismo $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(e_1) = 2e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \qquad f(e_2) = \frac{5}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \qquad f(e_3) = e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{7}{3}e_3$$

donde $\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución: La matriz de f en la base dada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1/3 & 5/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico resulta

$$\begin{aligned} |A-\lambda\cdot I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1/3 & 5/3-\lambda & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 7/3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -2+\lambda & 5/3-\lambda & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 7/3-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{F_3+F_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5/3-\lambda & 4/3 \\ 0 & 2/3 & 7/3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5/3-\lambda & 4/3 \\ 2/3 & 7/3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left[\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)\left(\frac{7}{3}-\lambda\right)-\frac{8}{9}\right] = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) \end{aligned}$$

Como los valores propios son distintos, f es diagonalizable. La expresión diagonal de f viene dada, en una cierta base (la base no se pide; no obstante, puede comprobarse sin dificultad que es $\{(1,1,-1),(1,-1,0),(1,0,1)\}$; dicha base proporciona la matriz de paso P), por la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

23. Sea h un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ del que sabemos:

- El subespacio $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}$ es de vectores propios.
- El polinomio característico de h es $-x(x-1)^2$.
- $(0,1,0)$ es un vector propio.

Se pide:

a) Obtener la expresión matricial de h.

b) Hallar su polinomio mínimo.

c) ¿Es h inversible? En caso de serlo, calcular la inversa de la matriz de h, obtenida en el apartado *a*), usando el teorema de Cayley-Hamilton.

Solución:

a) Llamemos S al subespacio dado. Entonces

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\} = \langle (1,0,0),(0,1,-1) \rangle.$$

Los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,-1)$ son vectores propios asociados a un mismo valor propio. Como el polinomio característico de h es $p(x) = -x(x-1)^2$, los valores propios son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, doble.
Por tanto los vectores de S son vectores propios de valor propio $\lambda = 1$, por lo que

$$h(1,0,0) = (1,0,0) \qquad \text{y} \qquad h(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

Además, como $(0,1,0) \notin S$ y es un vector propio, debe ser

$$h(0,1,0) = 0 \cdot (0,1,0) = (0,0,0).$$

De esas igualdades se deduce que

$$h(1,0,0) = (1,0,0), \qquad h(0,1,0) = (0,0,0), \qquad h(0,0,1) = (0,-1,1).$$

La expresión matricial de h es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

es decir,

$$h(x,y,z) = (x',y',z') = (x,-z,z),$$

donde $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $(x',y',z') = h(x,y,z)$ es la imagen de (x,y,z).

b) Como $A^2 = A$, el polinomio mínimo de h es $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$.

c) Puesto que se verifica que $|A| = 0$, el endomorfismo h no es invertible. Igualmente se observa que h no es invertible pues su polinomio mínimo, $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, tiene nulo su término independiente, lo que significa que también es nulo el término independiente del polinomio característico que, como sabemos, coincide con el valor del determinante de la matriz.

$\square$

24 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,

a) Calcular su polinomio característico.

b) ¿Existe una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal?

- Si existe P, dar explícitamente esta matriz.
- Si no existe P, dar explícitamente, si es posible, la forma canónica de Jordan de A.

c) Calcular su polinomio mínimo.

d) Dar una base y la dimensión del espacio vectorial engendrado por $\{I, A, A^2, \dots, A^n, \dots\}$ (como subespacio vectorial del espacio vectorial real $(\mathcal{M}_4(\mathbb{R}), +)$).

Solución:

a) El polinomio característico de A es $p(\lambda) = |A - \lambda I|$. Desarrollando por los elementos de la tercera columna, resulta que

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda^3 + \lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$$

Así, el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

b) Puesto que $\text{rang}(A) = 3$ se deduce que $\dim(V(0)) = 4 - \text{rang}(A) = 1$. Por tanto, A no es diagonalizable y no existe ninguna matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal. Sin dificultad se comprueba que

$$V(0) = \langle (0, 0, 1, 0) \rangle, \quad V(1) = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle, \quad V(-1) = \langle (1, 1, -1, -1) \rangle,$$

que son los únicos vectores propios de A. Esto proporciona tres vectores propios linealmente independientes $v_1 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1, 1)$ y $v_4 = (1, 1, -1, -1)$. Puesto que 0 es valor propio doble, el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ t & = & 0 \\ 1/2x + 1/2y & = & 1 \\ x & = & 0 \end{array} \right.$$

cuya solución es $x = 0$, $y = 2$, $z = \alpha$, $t = 0$, proporciona un cuarto vector ($v_2 = (0, 2, 0, 0)$, haciendo $\alpha = 0$) que, junto con los tres vectores propios, permite obtener la matriz P de paso que da la forma canónica de Jordan de A. Para ello hemos tomado un valor de α tal que v_2 y los vectores propios forman un sistema linealmente independiente, de modo que P es regular.

Así, existe una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$ es la forma canónica de Jordan de A. Las matrices J y P son

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) A la vista del polinomio característico, se deduce que el polinomio mínimo de A puede ser $\varphi(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 1)$ o bien $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Pero si fuese éste último, la matriz sería diagonalizable; por tanto, se tiene que $\varphi(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$.

d) Puede comprobarse que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que $A^4 = A^6 = \cdots = A^{2k} = A^2$, $A^5 = A^7 = \cdots = A^{2k+1} = A^3$.

Entonces, el subespacio vectorial pedido está generado por $\{I, A, A^2, A^3\}$, y como estas cuatro matrices son linealmente independientes, forman base. Si llamamos H a dicho subespacio, se verifica por tanto que $\dim(H) = 4$ y $H = \langle I, A, A^2, A^3 \rangle$.

$\square$

Tema 7

El espacio vectorial euclídeo. Aplicaciones ortogonales

5. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, obtener el subespacio ortogonal a V, siendo éste:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0,\ 2x + y - z + 3t = 0\}$$

Solución: De las ecuaciones que definen V se obtiene, resolviendo el correspondiente sistema de dos ecuaciones y cuatro incógnitas, que

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ : x + y - z + t = 0,\ 2x + y - z + 3t = 0\} = \langle (0, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\rangle$$

Entonces $V^{\perp}$ es el subespacio formado por los vectores $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ que verifican las condiciones

$$\langle (0, 1, 1, 0), (x, y, z, t)\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle (-2, 1, 0, 1), (x, y, z, t)\rangle = 0$$

Desarrollando ambas expresiones se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 0 \\ -2x + y + t & = & 0 \end{array} \right.$$

Para resolverlo, basta llamar $x = \lambda$, $y = \mu$. Resulta entonces $z = -\mu$, $t = 2\lambda - \mu$, por lo que

$$V^{\perp} = \langle (1, 0, 0, 2), (0, 1, -1, -1)\rangle.$$

Otra forma de hacer el ejercicio consiste en observar que los vectores que verifican la ecuación $x + y - z + t = 0$ son ortogonales a $(1, 1, -1, 1)$, mientras que los vectores que verifican $2x + y - z + 3t = 0$ son ortogonales a $(2, 1, -1, 3)$. Como cualquier vector de V, por verificar ambas ecuaciones, es ortogonal a cualquier combinación lineal suya, se deduce que

$$V^{\perp} = \langle (1, 1, -1, 1), (2, 1, -1, 3)\rangle.$$

□

12. Sea S el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Se considera en S la aplicación

$$\begin{gathered} \langle , \rangle : S \times S \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A \cdot B), \quad \forall A, B \in S \end{gathered}$$

a) ¿Es $\langle , \rangle$ un producto escalar?

b) En caso de serlo, hallar el subespacio ortogonal del subespacio V, generado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Nótese en primer lugar que, dadas dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

su producto es

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + bc' \\ ba' + cb' & bb' + cc' \end{pmatrix}$$

con lo que $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A \cdot B) = aa' + 2bb' + cc'$.

a) La aplicación $\langle , \rangle$ si es un producto escalar sobre S, pues verifica las propiedades

$$\begin{array}{ll} \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle & \langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \\ \langle \lambda A, B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle & \langle A, A \rangle \geq 0 \\ \langle A, A \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0 & \end{array}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix} \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

En efecto,

$$\langle A, B \rangle = aa' + 2bb' + cc' = a'a + 2b'b + c'c = \langle B, A \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle A + B, C \rangle &= (a + a')a'' + 2(b + b')b'' + (c + c')c'' \\ &= aa'' + 2bb'' + cc'' + a'a'' + 2b'b'' + c'c'' = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \lambda A, B \rangle = \lambda aa' + 2\lambda bb' + \lambda cc' = \lambda(aa' + 2bb' + cc') = \lambda \langle A, B \rangle$$

$$\langle A, A \rangle = a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 0$$

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 + c^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = c = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$

b) El subespacio ortogonal buscado $V^{\perp}$ lo forman las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S$$

tales que

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a-b & -a \\ b-c & -b \end{pmatrix} = a - 2b = 0$$

es decir, tales que $a = 2b$.

Por tanto,

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S : a = 2b \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\square$

17. Sea $(\mathbb{R}_2[x], \langle , \rangle)$ el espacio vectorial euclídeo de los polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales y $\langle , \rangle$ el producto escalar definido por

$$\langle a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2 \rangle = aa' + bb' + cc' \qquad \forall a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$

Sea $B = \{1, x, x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ el endomorfismo definido por $f(a + bx + cx^2) = c + bx + ax^2$ y $A = (f)_B$ y sea $M = \{X : X = A^n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$.

a) Estudiar qué estructura presenta M con el producto usual de matrices.

b) Clasificar razonadamente f.

c) ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, hallar una base B' en la que se consiga dicha diagonalización.

d) Hallar la matriz del cambio de base de B a B'.

e) Hallar el polinomio mínimo de A y a partir de él obtener $(A^{-1})^2$, si existe.

f) Hallar la distancia del vector $1 + x + x^2$ al subespacio $H = \langle f(1 + x), f(x) \rangle$.

g) Hallar el subespacio ortogonal de H.

Solución:

a) Observemos en primer lugar que

$$M_B(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifican las igualdades

$$A^0 = I \qquad A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por tanto, $A^{2k+1} = A,\ A^{2k} = I,\ \forall k \in \mathbb{N}$, de donde $M = \{I, A\}$.

El producto de matrices sobre M da la siguiente tabla:

$\cdot$	I	A
I	I	A
A	A	$A^2 = I$

Sin dificultad se comprueba que $(M, \cdot)$ es un grupo abeliano.

b) Recuérdese que, si f es un endomorfismo de V y A la matriz de f respecto de una base cualquiera, se verifica que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(A)$.
Puesto que
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$
se deduce que $\mathrm{rang}(A) = 3 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Por tanto f es suprayectiva y debe ser biyectiva, es decir, es un isomorfismo.

c) Obtengamos el polinomio característico de f.
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$
Por tanto, los valores propios son $\lambda = -1$, simple y $\lambda = 1$, doble.
Puesto que
$$\dim(V(1)) = 3 - \mathrm{rang}(A - I) = 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$
se deduce que f es diagonalizable. Su forma diagonal es
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
La base en la que la matriz de f es D está formada por los vectores propios, que hallamos a continuación.
El subespacio
$$V(1) = \mathrm{Ker}(f - i) = \{X : (A - I)X = 0\}$$
se obtiene resolviendo el sistema
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Resulta la ecuación $-x_1 + x_3 = 0$ que puede escribirse como $x_1 = x_3$, de donde
$$V(1) = \{(x_1, x_2, x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1)_B, (0,1,0)_B \rangle = \langle 1 + x^2, x \rangle.$$
De forma similar, el subespacio
$$V(-1) = \mathrm{Ker}(f + i) = \{X : (A + I)X = 0\}$$
se obtiene resolviendo el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resultan las ecuaciones $x_1 + x_3 = 0$, $2x_2 = 0$, de donde se sigue que

$$V(-1) = \{(x_1, 0, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, -1)_B \rangle = \langle 1 - x^2 \rangle.$$

En la base $B' = \{1+x^2, x, 1-x^2\}$, la matriz de f es D. Se verifica que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) La matriz del cambio de base de B' a B es la matriz P del apartado anterior. La matriz pedida (de cambio de base de B a B') es P^{-1}; sin dificultad se comprueba que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $X_B = P \cdot X_{B'}$ y también que $X_{B'} = P^{-1} \cdot X_B$, donde X_B es la matriz columna de las coordenadas de un vector cualquiera en la base B y $X_{B'}$ es la matriz columna de las coordenadas del mismo vector en la base B'.

e) El polinomio característico de f es $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ y como es un endomorfismo diagonalizable, el polinomio mínimo es

$$\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 1.$$

En virtud del teorema de Cayley-Hamilton, podemos asegurar que el polinomio mínimo es un polinomio anulador de A; por tanto, se verifica que $\varphi(A) = A^2 - I = 0$, de modo que $A^2 = I$ y $A^{-1} = A$.
Por tanto, $(A^{-1})^2 = A^2 = I$.

f) Sea $v = 1 + x + x^2$ y $H = \langle f(1 + x), f(x) \rangle = \langle x + x^2, x \rangle$. Por definición, $d(v, H) = d(v, proy_H(v))$.
Hay que determinar, pues, $w = proy_H(v)$. Para ello, basta tener en cuenta que debe verificarse que $w \in H$ y $(v - w) \perp H$.

$$\begin{aligned} w &= \alpha(x + x^2) + \beta x = (\alpha + \beta)x + \alpha x^2 \\ v - w &= 1 + x + x^2 - (\alpha + \beta)x - \alpha x^2 = 1 + (1 - \alpha - \beta)x + (1 - \alpha)x^2 \end{aligned}$$

Como $(v-w) \perp H$ si, y sólo si, se verifican las relaciones $(v-w) \perp (x+x^2)$ y $(v-w) \perp x$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle v - w, x + x^2 \rangle &= \langle 1 + (1 - \alpha - \beta)x + (1 - \alpha)x^2, x + x^2 \rangle \\ &= 1 - \alpha - \beta + 1 - \alpha = 2 - 2\alpha - \beta = 0 \\ \langle v - w, x \rangle &= \langle 1 + (1 - \alpha - \beta)x + (1 - \alpha)x^2, x \rangle = 1 - \alpha - \beta = 0 \end{aligned}$$

El sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & \beta & = & 2 \\ \alpha & + & \beta & = & 1 \end{array} \right.$$

equivale, restando a la primera ecuación la segunda, a

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha & & & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & = & 1 \end{array} \right.$$

cuya solución es $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
Por tanto, $w = x + x^2$ y la distancia buscada es

$$\begin{aligned} d(v, H) &= d(v, w) = d(1 + x + x^2, x + x^2) \\ &= \|1 + x + x^2 - x - x^2\| = \|1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

g) Para determinar el subespacio

$$H^\perp = \{v \in \mathbb{R}_2[x] : v \perp H\} = \{v \in \mathbb{R}_2[x] : v \perp (x + x^2),\ v \perp x\}$$

hemos de calcular los vectores $v = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que

$$\langle a + bx + cx^2, x + x^2\rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad \langle a + bx + cx^2, x\rangle = 0.$$

Aplicando la definición, resulta que

$$\begin{aligned} \langle a + bx + cx^2, x + x^2\rangle &= b + c = 0 \\ \langle a + bx + cx^2, x\rangle &= b = 0 \end{aligned}$$

Se obtiene entonces que $b = c = 0$, de donde

$$\begin{aligned} H^\perp &= \{v \in \mathbb{R}_2[x] : v \perp H\} \\ &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : b = c = 0\} = \{a : a \in \mathbb{R}\} = \langle 1\rangle \end{aligned}$$

Una base de $H^\perp$ es $\{1\}$.
Observación: Conociendo previamente el subespacio $H^\perp$, hay otra forma de abordar el problema del cálculo de la proyección ortogonal.
Si $w = proy_H(v)$, entonces $w \in H$ y $(v - w) \in H^\perp$. De este modo resulta que $v - w = \gamma \cdot 1 = \gamma$, de donde $w = v - \gamma = (1 - \gamma) + x + x^2$ y como $w \perp H^\perp$, tendremos

$$\langle (1 - \gamma) + x + x^2, 1\rangle = 1 - \gamma = 0 \ \Rightarrow\ \gamma = 1$$

Sustituyendo ahora, resulta $w = (1 - 1) + x + x^2 = x + x^2$.

$\square$

21. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V. Definimos en V el siguiente producto escalar, donde $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle v, w\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 12x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$$

a) Hallar la matriz de Gram en la base B y dar la expresión matricial correspondiente.

b) Sea W el subespacio de V siguiente:

$$W = \{(\alpha + \beta)e_1 + (2\alpha - 4\beta)e_2 + 2\beta e_3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

1) Hallar una base ortogonal de W.
2) Hallar el subespacio $W^\perp$. ¿Son suplementarios W y $W^\perp$? ¿Son ortogonales?

c) Haciendo uso de *b*), dar una base ortogonal de V. Hallar la matriz de Gram en esta base. ¿Qué relación hay entre esta matriz y la obtenida en el apartado *a*)?

Solución:

a) La matriz de Gram respecto de la base B es

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \langle e_1, e_3\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \langle e_2, e_3\rangle \\ \langle e_3, e_1\rangle & \langle e_3, e_2\rangle & \langle e_3, e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Sus elementos se obtienen directamente a partir de la definición del producto escalar. Dados $v, w \in V$ dos vectores cualesquiera,

$$\langle v, w\rangle = X^t \cdot G \cdot Y = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

donde X e Y son las matrices columna de las coordenadas de v y w en la base B.

b) Debemos obtener una base de W a partir de la expresión dada.

$$\begin{aligned} W &= \{(\alpha+\beta)e_1 + (2\alpha - 4\beta)e_2 + 2\beta e_3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha+\beta, 2\alpha - 4\beta, \beta)_B : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 2, 0)_B, (1, -4, 2)_B\rangle = \langle e_1 + 2e_2, e_1 - 4e_2 + 2e_3\rangle \end{aligned}$$

Estos vectores son linealmente independientes y, por tanto, constituyen una base de W: $B_W = \{e_1 + 2e_2, e_1 - 4e_2 + 2e_3\}$.

b.1) Para hallar una base ortogonal de W, aplicamos el método de Gram-Schmidt a la base B_W. Tomamos los vectores

$$\begin{aligned} w_1 &= e_1 + 2e_2 \\ w_2 &= e_1 - 4e_2 + 2e_3 + \alpha(e_1 + 2e_2) = (1+\alpha)e_1 + (-4+2\alpha)e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

Puesto que debe ser $w_2 \perp w_1$, es decir $\langle w_1, w_2\rangle = 0$, se tendrá

$$(1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -4+2\alpha \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + 2\alpha = 0$$

de modo que $\alpha = -1$.
Por tanto, $w_2 = e_1 - 4e_2 + 2e_3 - (e_1 + 2e_2) = -6e_2 + 2e_3$.
Así pues, $B'_W = \{e_1 + 2e_2, -6e_2 + 2e_3\}$ es una base ortogonal de W.

b.2) El subespacio ortogonal de W es

$$W^\perp = \{v \in V : v \perp w,\ \forall w \in W\} = \{v \in V : v \perp w_1,\ v \perp w_2\}.$$

Si denotamos $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, como debe ser $v \perp w_1$ y $v \perp w_2$, es decir, $\langle w_1, v\rangle = 0$, $\langle w_2, v\rangle = 0$, tendremos:

$$\langle w_1, v\rangle = (1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + 3z = 0$$

$$\langle w_2, v\rangle = (0, -6, 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12x - 6y + 24z = 0$$

La solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 12x & - & 6y & + & 24z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

es

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -\frac{7}{2}\lambda \\ y & = & -3\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

Así pues,

$$W^{\perp} = \left\{ \left(-\frac{7}{2}\lambda,\ -3\lambda,\ \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-7, -6, 2)_B \rangle = \langle -7e_1 - 6e_2 + 2e_3 \rangle.$$

y $B_{W^{\perp}} = \{-7e_1 - 6e_2 + 2e_3\}$ es una base de $W^{\perp}$.
Los subespacios W y $W^{\perp}$ son suplementarios, pues, al tener W dimensión finita, se verifica siempre que W y su subespacio ortogonal son suplementarios. También son evidentemente ortogonales por definición.

c) Como B'_W es una base ortogonal de W y $B_{W^{\perp}}$ es base ortogonal de $W^{\perp}$, es evidente que $B'_W \cup B_{W^{\perp}} = \{e_1 + 2e_2, -6e_2 + 2e_3, -7e_1 - 6e_2 + 2e_3\}$ es una base ortogonal de V, pues como acabamos de decir, $W \perp W^{\perp}$ y $W \oplus W^{\perp} = V$.
Para hallar una base ortonormal de V basta normalizar los vectores de $B'_W \cup B_{W^{\perp}}$.
Si llamamos $u_1 = e_1 + 2e_2$, $u_2 = -6e_2 + 2e_3$ y $u_3 = -7e_1 - 6e_2 + 2e_3$, resulta:

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = (1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

por lo tanto $\|u_1\| = \sqrt{2}$.

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = (0, -6, 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 84$$

de modo que $\|u_2\| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3 \rangle = (-7, -6, 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

de donde $\|u_3\| = \sqrt{14}$.
Por tanto, tomando

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \sqrt{2} e_2 \\ w_2 &= \frac{1}{2\sqrt{21}} u_2 = \frac{\sqrt{21}}{42} u_2 = -\frac{\sqrt{21}}{7} e_2 + \frac{\sqrt{21}}{21} e_3 \\ w_3 &= \frac{1}{\sqrt{14}} u_3 = \frac{\sqrt{14}}{14} u_3 = -\frac{\sqrt{14}}{2} e_1 - \frac{3\sqrt{14}}{7} e_2 + \frac{\sqrt{14}}{7} e_3 \end{aligned}$$

se obtiene una base de V

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \sqrt{2} e_2,\ -\frac{\sqrt{21}}{7} e_2 + \frac{\sqrt{21}}{21} e_3,\ -\frac{\sqrt{14}}{2} e_1 - \frac{3\sqrt{14}}{7} e_2 + \frac{\sqrt{14}}{7} e_3 \right\}$$

que es ortonormal.

La matriz de Gram en esa base es la matriz identidad de orden 3,

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices G (inicial) y G' son congruentes, es decir, existe una matriz P ortogonal tal que $G' = P^t \cdot G \cdot P$. La matriz P es una matriz ortogonal de un cambio de base; más concretamente, es la matriz de cambio de la base ortonormal a la base inicial. En este caso,

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\dfrac{\sqrt{14}}{2} \\ \sqrt{2} & -\dfrac{\sqrt{21}}{7} & -\dfrac{3\sqrt{14}}{7} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{21}}{21} & \dfrac{\sqrt{14}}{7} \end{pmatrix}$$

$\square$