Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sean A, B y C subconjuntos arbitrarios no vacíos de un conjunto X. Consideramos las igualdades:
a) $(A \times B) \cap (\overline{A} \times B) = \emptyset$.
b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Se tiene:

Las tres igualdades son siempre verdaderas.
Sólo dos igualdades son siempre verdaderas.
Sólo hay una igualdad siempre verdadera.

Ejercicio 2

Sea $U = \mathbb{N}$ el universo de las variables x e y. Consideramos las proposiciones:
p; $\forall x\, \exists y$ tal que $y^2 = x$.
q; $\forall y\, \exists x$ tal que $y^2 = x$.
s; $\exists x\, \forall y$ tal que $\big[(y > x) \Rightarrow (y > 12)\big]$.
r; $\forall x\, \exists y$ tal que $y - 2x = 1$.
Se tiene:

a) p, q y s son verdaderas.
b) s y r son verdaderas.
c) p es verdadera y r es verdadera.

Ejercicio 3

En el conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 0,\ y > 0\}$, se considera la siguiente relación de orden:

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \quad \text{si y sólo si} \quad (xy < x'y') \ \vee\ \big[(xy = x'y') \wedge (x \leqslant x')\big]$$

Sea el conjunto $J = \big\{(x, y) \in H \mid x + y = 4\big\}$. Respecto de la relación de orden $\mathcal{R}$, se tiene:

a) J está acotado inferiormente.
b) J tiene elemento mínimo.
c) J tiene elemento máximo.

Ejercicio 4

Sean E un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una relación en E reflexiva y transitiva que no es ni simétrica ni antisimétrica. Se define la relación $\mathcal{R}$ en E mediante:

$$x\, \mathcal{R}\, y \quad \text{si y sólo si} \quad (x\, \mathcal{S}\, y) \wedge (y\, \mathcal{S}\, x)$$

a) $\mathcal{R}$ no es simétrica ni antisimétrica.
b) $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
c) $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

Ejercicio 5

Consideremos el grupo formado por el conjunto $G = \{a, b, c, e\}$ con la operación interna $*$ dada por la tabla:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

¿Cuántos subgrupos distintos tiene G?

a) 5.
b) 4.
c) 3.

Soluciones

Ejercicio 1

Las tres igualdades son siempre verdaderas. Veamos la demostración.
a) Basta observar que aplicando la propiedad distributiva (p.57 del texto base)

$$(A \times B) \cap (\overline{A} \times B) = (A \cap \overline{A}) \times B = \emptyset \times B = \emptyset$$

b)

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \wedge (x \notin B \cup C) \iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\iff x \in A \wedge (x \notin B \cap C) \iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

Ejercicio 2

La proposición p es falsa pues para $x = 3$ no existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $y^2 = 3$.
La proposición q es verdadera pues si y es cualquier número natural entonces $x = y^2$ es también un número natural.
La proposición s es verdadera pues existe x, por ejemplo $x = 20$, tal que $\forall y \ \big[(y > 20) \Rightarrow (y > 12)\big]$.
La proposición r es verdadera si x es cualquier número natural entonces $y = 2x + 1$ es también un número natural.

Ejercicio 3

La opción correcta es la afirma que J tiene elemento máximo.
En efecto, observemos que $J = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 4, 0 < x, y < 4\big\}$ y que el máximo y mínimo de la función $h(x, y) = xy$ en J coincide con el máximo y mínimo de función $g(x) = x(4 - x)$ en el intervalo $(0, 4)$. El máximo se alcanza en $x = 2$ y el mínimo no existe (el valor ínfimo es 0 y no se alcanza en $(0, 4)$).
Así pues $\forall (x, y) \in J$ se tiene que $(x, y) \,\mathcal{R}\, (2, 2)$ pues $xy < 2 \cdot 2 = 4$ o si $xy = 4$ entonces $x = y = 2$ y por tanto $x \leqslant 2$. En consecuencia, $(2, 2)$ es el máximo (respecto de $\mathcal{R}$) de J.
Veamos que J no está acotado inferiormente. O equivalentemente, que $\forall (a, b) \in H$, (a, b) no es cota inferior de J. Si $(a, b) \in H$ entonces $ab > 0$ y como el ínfimo de $h(x, y) = xy$ en J es 0, existe $(x, y) \in J$ tal que $xy < ab$, esto es, $(x, y) \,\mathcal{R}\, (a, b)$. En consecuencia (a, b) no es cota inferior de J.
En consecuencia J no tiene elemento mínimo.

Ejercicio 4

La relación $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en E.
Reflexiva: Para todo $a \in E$ $a\mathcal{R}a$ pues $a\mathcal{S}a$ al ser $\mathcal{S}$ una relación reflexiva.
Simétrica: Para todo $a, b \in E$, si $a\mathcal{R}b$ entonces $a\mathcal{S}b$ y $b\mathcal{S}a$ y en consecuencia $b\mathcal{R}a$.
Transitiva: Para todo $a, b, c \in E$, si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{S}b$, $b\mathcal{S}a$, $b\mathcal{S}c$ y $c\mathcal{S}b$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{S}$ es transitiva, se deduce que $a\mathcal{S}c$ y $c\mathcal{S}a$. Por tanto, $a\mathcal{R}c$.
Falta comprobar que la relación $\mathcal{R}$ no es antisimétrica. En efecto, como $\mathcal{S}$ no lo es, existen $a, b \in E$, $a \neq b$, tales que $a\mathcal{S}b$ y $b\mathcal{S}a$. Por tanto, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ y $b \neq a$.

Ejercicio 5

Tenemos que $\mathrm{card}(G) = 4$ y sabemos que cualquier subgrupo H de G cumple que $\mathrm{card}(H)$ es un divisor de $\mathrm{card}(G)$ (veáse p.132 del texto base). Por tanto los subgrupos de G tienen 1, 2 o 4 elementos. Los subgrupos $\{e\}$ y el propio G son, respectivamente, los subgrupos de G con 1 y 4 elementos. Veamos cuántos subgrupos de 2 elementos hay. Los posibles subgrupos son $\{e, a\}$, $\{e, b\}$ y $\{e, c\}$. Para comprobar si son subgrupos, por la proposición 4.14, hay que ver que si x y son elementos del subgrupo también lo es $x * y^{-1}$, hecho que se comprueba fácilmente en los tres casos (obsérvese que se cumple $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$ y $c^{-1} = c$).