Examen de Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.-A) Encontrar el valor del número real m para que exista alguna matriz cuadrada 2x2 no nula $B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, tal que $AB = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & m \end{pmatrix}$. (1 punto)

B) Para dicho valor de m se considera $H = \{B \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : AB = 0\}$. Probar que H es un subespacio de la matrices 2x2 sobre $\mathbb{R}$, $M_{2x2}(\mathbb{R})$, y obtener una de sus bases y su dimensión. (1,5 puntos)

2.- A) Sean V, W dos subespacios de un espacio vectorial E. Demostrar que $dim(V+W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W)$. (2 puntos)

B) Sean a y b números reales y consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por las ecuaciones siguientes (respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^4$)

$$V: \begin{cases} x_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad W: \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Encontrar para qué valores de a y b se tiene que $V = W$. (2 puntos)

3.- Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual a 2, sean:

$$p(x) = 1 + x + x^2, \quad q(x) = 1 + 2x^2, \quad r(x) = x + x^2$$

$a = (2,0,1)$, $b = (3,1,0)$, $c = (1,-2,3)$ pertenecientes a $\mathbb{R}^3$.

Considérese la aplicación líneal $f : V \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(p(x)) = a$, $f(q(x)) = b$, $f(r(x)) = c$.

A) Hallar la matriz de f respecto a las bases $(1, x, x^2)$ de V y la canónica de $\mathbb{R}^3$. (1,5 puntos)

B) Hallar una base B en V, tal que respecto a ella y la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz identidad I es la matriz asociada a f. (2 puntos)