Capítulo 3

Relaciones y aplicaciones entre conjuntos

En este capítulo, nos centraremos en primer lugar, en las relaciones en un conjunto, estudiando las propiedades que se les pueden atribuir. Tratamos, en particular, las relaciones de equivalencia y las de orden. Las relaciones de equivalencia en un conjunto permiten clasificar los elementos del conjunto, creando una partición del propio conjunto. La identificación de los elementos de una misma clase genera un nuevo conjunto, el conjunto cociente. Este concepto es de gran utilidad en casi todas las ramas de las Matemáticas. Las relaciones de orden también aparecen en todas partes: desde la ordenación de números hasta la ordenación de palabras para disponerlas en un diccionario (orden lexicográfico). Estudiaremos los elementos más importantes que se definen en todo conjunto ordenado con el ánimo de que el lector se familiarice con la manipulación de conjuntos ordenados.

Por otro lado y dentro del marco de las relaciones binarias, estudiaremos las aplicaciones entre conjuntos. Son las relaciones para las que la imagen de cada elemento del conjunto inicial es un único elemento del conjunto final. Estudiaremos la composición de aplicaciones y los conceptos de aplicación inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. La noción de biyección conduce de manera natural al concepto de cardinal.

3.1. Propiedades básicas de una relación

Una relación $\mathcal{R}$ definida en un conjunto U, $\mathcal{R} \subset U \times U$, puede tener las propiedades:

- **Propiedad reflexiva:** La relación $\mathcal{R}$ es reflexiva si y sólo si $\{(x,x) \mid x \in U\} \subset \mathcal{R}$, es decir:

$$\forall x \in U \text{ se verifica que } x\mathcal{R}x$$

- **Propiedad simétrica:** La relación $\mathcal{R}$ es simétrica si y sólo si $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$, es decir:
$$\forall x, y \in U \text{ se verifica que si } x\mathcal{R}y, \text{ entonces } y\mathcal{R}x$$
- **Propiedad antisimétrica:** La relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica si y sólo si $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R} \subset \{(x, x) \mid x \in U\}$, es decir:
$$\forall x, y \in U \text{ se verifica que si } x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}x, \text{ entonces } x = y$$
- **Propiedad transitiva:** La relación $\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$, es decir:
$$\forall x, y, z \in U \text{ se verifica que si } x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z, \text{ entonces } x\mathcal{R}z$$

Observaciones: La relación del ejemplo 2.42 no es reflexiva. Para que una relación en $\mathbb{R}$ sea reflexiva, la representación del grafo de la relación debe contener a la diagonal, $y = x$.
La relación del ejemplo 2.43 es simétrica, pero no la relación del ejemplo 2.42. Para que una relación en $\mathbb{R}$ sea simétrica, la representación del grafo de la relación debe ser simétrica respecto a la recta diagonal del primer cuadrante.

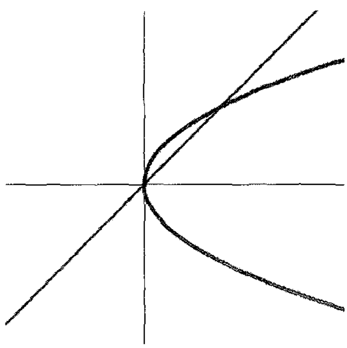

Figura 3.1: No es reflexiva

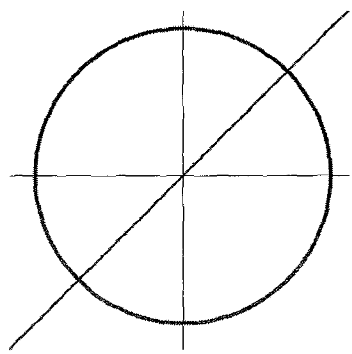

Figura 3.2: Es simétrica

3.2. Relación de equivalencia

Las relaciones de equivalencia en un conjunto sirven fundamentalmente para obtener clasificaciones de los elementos del conjunto. Estas clasificaciones se hacen mediante las clases de equivalencia. La identificación de todos los elementos de una clase de equivalencia conduce al concepto de conjunto cociente. Este concepto de conjunto cociente es de gran utilidad para definir nuevos conjuntos partiendo de uno determinado, como haremos en los ejemplos 3.8 y 3.9.

Definición 3.1 Relación de equivalencia
Una relación $\mathcal{E}$ en el conjunto U se denomina **relación de equivalencia** si posee las propiedades:

1. P. Reflexiva: $\forall x \in U \quad x\mathcal{E}x$.
2. P. Simétrica: $\forall x, y \in U \quad$ si $x\mathcal{E}y$, entonces $y\mathcal{E}x$.
3. P. Transitiva: $\forall x, y, z \in U \quad$ si $x\mathcal{E}y$ e $y\mathcal{E}z$, entonces $x\mathcal{E}z$.

Ejemplo 3.2 **Relación de equipolencia entre vectores**
En el conjunto de vectores fijos del plano, o del espacio, la relación de equipolencia es una relación de equivalencia. Recuérdese que un vector fijo es un segmento orientado, o dirigido, y que está compuesto por un punto origen del segmento, una recta dirección sobre la que se dibuja el segmento, la longitud del segmento y el sentido. El vector $\overrightarrow{v}$ es equipolente al vector $\overrightarrow{w}$ si y sólo si las rectas directrices son la misma o paralelas, y los módulos y sentidos son iguales.
Además, cada uno de los conjuntos constituidos por todos los vectores que son equipolentes entre sí, es denominado **vector libre**.

Definimos a continuación el concepto introducido implícitamente al hablar de vector libre en el plano o en el espacio.

Definición 3.3 Clase de equivalencia
Dada una relación de equivalencia $\mathcal{E}$ en el conjunto U, se denomina **clase de equivalencia** del elemento $x \in U$ al conjunto imagen de x, que denotamos $x\mathcal{E}$ o $[x]$, es decir,

$$[x] = \{y \in U \mid x\mathcal{E}y\}.$$

- Si $x\mathcal{E}y$, entonces $[x] = [y]$.

  Veámoslo por deducción. Para cada $z \in [x]$ se tiene que $x\mathcal{E}z$, y $z\mathcal{E}x$ por la propiedad simétrica. Dado que $z\mathcal{E}x$ y $x\mathcal{E}y$, entonces $z\mathcal{E}y$ por la propiedad transitiva, e $y\mathcal{E}z$. Por tanto $z \in [y]$, es decir, $[x] \subset [y]$. De forma análoga se comprueba $[y] \subset [x]$.

  Cualquier $y \in [x]$ es denominado **representante de la clase** $[x]$.

- Si x no está relacionado con y, $x\not\mathcal{E}y$, entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$, es decir, son clases disjuntas.

Veámoslo por reducción al absurdo. Supuesto que existe $z \in [x] \cap [y]$, se tiene que $x\mathcal{E}z$ e $y\mathcal{E}z$. Al aplicar las propiedades simétrica y transitiva se obtiene que $x\mathcal{E}y$. Esto contradice la hipótesis $x\not\mathcal{E}y$.

Ejemplo 3.4 **Ecuaciones de la recta en el plano euclídeo**

En el conjunto $E = \{ax + by + c = 0 \mid |a| + |b| \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de las ecuaciones con coeficientes reales en dos incógnitas, se define la relación de equivalencia siguiente: $(ax + by + c = 0)\mathcal{E}(ex + fy + g = 0)$ si y sólo si los coeficientes de las ecuaciones son proporcionales, es decir:

$$\exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0 \text{ tal que } a = pe, \; b = pf \text{ y } c = pg$$

Cada clase de equivalencia se corresponde con una recta en el plano euclídeo dotado de un sistema de referencia, es decir, si las ecuaciones tienen los coeficientes proporcionales, entonces esas ecuaciones representan la misma recta. De esta forma a clases de equivalencia distintas le corresponden rectas distintas. A la hora de trabajar con una recta, se elige la ecuación representante de la clase de equivalencia que más interese, de esta forma, en lugar de trabajar con un elemento geométrico, se trabaja con un elemento algebraico.

Ejemplo 3.5 **Dirección en el plano euclídeo**

Se supone que el plano está dotado de un sistema de referencia. En el conjunto de rectas del plano se define una relación de equivalencia: Dos rectas r, r' son paralelas, $r||r'$, si y sólo si los coeficientes de las incógnitas de sus ecuaciones son proporcionales. Al emplear una ecuación de cada recta $r \equiv ax + by + c = 0$, $r' \equiv ex + fy + g = 0$

$$r||r' \iff \exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0 \text{ tal que } a = pe \text{ y } b = pf$$

A cada clase de equivalencia le corresponde, lo que se llama, una **dirección en el plano euclídeo**, es decir, una dirección es el conjunto de una recta y todas sus paralelas.

Ejemplo 3.6 **Vector libre del plano euclídeo**

Cada vector libre del plano, o del espacio, es una clase de equivalencia de la relación de equipolencia del ejemplo 3.2 en el conjunto de los vectores fijos del plano, o del espacio. Cuando se interpretan geométricamente resultados con vectores libres, se utilizan vectores fijos escogiendo representantes adecuados.

Definición 3.7 Conjunto cociente
Dada una relación de equivalencia $\mathcal{E}$ en el conjunto U, se denomina **conjunto cociente**, y se denota por $U/\mathcal{E}$, al conjunto de todas las clases que genera la relación de equivalencia $\mathcal{E}$.

Ejemplo 3.8 **Números enteros: $\mathbb{Z}$**
En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se pueden plantear preguntas del estilo: ¿Qué número natural al sumarle 3 da como resultado 5? Es decir, se plantea la ecuación $x + 3 = 5$, que tiene solución. Pero si se plantea la ecuación $x + 5 = 3$ ocurre que no existe solución.
En general, una ecuación de la forma $x + b = a$ donde a y b son números naturales no siempre posee solución en el conjunto $\mathbb{N}$. Buscar un marco donde esta ecuación genérica posea solución es lo que obliga a introducir el conjunto de los números enteros, denotado $\mathbb{Z}$.
La ecuación $x+b = a$ tiene solución en $\mathbb{N}$ dependiendo del par de números (a, b). Esto nos induce a pensar en definir los números enteros partiendo de pares de números naturales. Además, los pares $(3, 5)$, $(6, 8)$ y $(1, 3)$ inducen ecuaciones que tienen la misma solución, esto lleva a considerar el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y la relación de equivalencia siguiente:

$$(a, b)\mathcal{E}(c, d) \text{ si y sólo si } a + d = b + c$$

El conjunto cociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{E}$, denotado $\mathbb{Z}$, está compuesto por las clases

$$[\ (0,0)\ ], [\ (1,0)\ ], [\ (0,1)\ ], [\ (2,0)\ ], [\ (0,2)\ ], \ldots$$

que se designan también por $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$. Así pues, el conjunto $\mathbb{Z}$ se escribe:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Observación: Al igual que en $\mathbb{N}$, la notación $\mathbb{Z}^*$ designa a $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 3.9 **Números racionales: $\mathbb{Q}$**
En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se pueden plantear preguntas del estilo: ¿Qué número entero multiplicado por 2 da como resultado 6? Es decir, se plantea la ecuación $2x = 6$, que tiene solución. Pero si se plantea la ecuación $6x = 2$ ocurre que no existe solución.
En general, una ecuación de la forma $bx = a$ donde $b \neq 0$ y a son números enteros no siempre posee solución en el conjunto $\mathbb{Z}$. Buscar un marco donde esta ecuación

genérica posea solución es lo que obliga a introducir el conjunto de los números racionales, denotado $\mathbb{Q}$.
La ecuación $bx = a$ tiene solución en $\mathbb{Z}$ dependiendo del par de números (a, b), lo que nos induce a pensar en definir los números racionales partiendo de pares de números enteros. Además, observamos que los pares $(3, 1), (6, 2)$ y $(15, 5)$ conducen a la misma solución de la correspondiente ecuación. Esto nos lleva a considerar en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la siguiente relación de equivalencia:

$$(a, b)\mathcal{E}(c, d) \text{ si y sólo si } ad = bc$$

El conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{E}$, que denotamos $\mathbb{Q}$, está compuesto por las clases

$$[\ (1,1)\ ], [\ (1,2)\ ], [\ (1,3)\ ], \ldots, [\ (1,-1)\ ], [\ (1,-2)\ ], [\ (1,-3)\ ], \ldots,$$
$$[\ (2,1)\ ], [\ (2,3)\ ], [\ (2,5)\ ], \ldots, [\ (2,-1)\ ], [\ (2,-3)\ ], [\ (2,-5)\ ], \ldots,$$
$$\vdots$$

de manera que la clase a la que pertenece el par (a, b) se escribe como $\dfrac{a}{b}$. Así pues, el conjunto $\mathbb{Q}$ se escribe como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ \Big|\ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Observación: Como en $\mathbb{Z}$, la notación $\mathbb{Q}^*$ designa a $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 3.10 **Enteros módulo p:** $\mathbb{Z}/p$
En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se define la relación de equivalencia $a \equiv b \mod p$ si y sólo si $a - b$ es divisible por p, es decir,

$$a \equiv b \mod p \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a - b = kp$$

o lo que es lo mismo, los restos de la división entera de a y b entre p coinciden. Esta relación $a \equiv b \mod p$ se lee como a es congruente con b módulo p.
El conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$, que denotamos por alguna de las expresiones siguientes; $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(p)$ o $\mathbb{Z}/p$, está compuesto por las clases $[0], [1], [2], \ldots, [p-1]$, que denominamos simplemente:

$$\mathbb{Z}/p = \{0, 1, 2, \ldots, (p-1)\}$$

La clase $0 = [0]$ está constituida por todos los números enteros múltiplos de p, y se representa por $p\mathbb{Z} = \{kp \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo 3.11 **Reales módulo** 2π: $\mathbb{R}/2\pi$

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se define la relación de equivalencia $a \equiv b \mod 2\pi$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2k\pi$, es decir:

$$a \equiv b \mod 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = b + 2k\pi$$

El conjunto cociente $\mathbb{R}/\equiv$, que denotamos por alguna de las expresiones siguientes; $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/(2\pi)$ o $\mathbb{R}/2\pi$, está compuesto por las clases $[r]$ donde $r \in [0, 2\pi)$. Las medidas de los ángulos en radianes son una buena interpretación de este conjunto cociente. Las funciones periódicas de periodo 2π tan sólo se estudian en el intervalo $[0, 2\pi]$, o en el intervalo $[-\pi, \pi]$, puesto que la gráfica en el intervalo $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ es la misma que en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Definición 3.12 Partición de un conjunto
Una partición de un conjunto U es una familia P de subconjuntos de U disjuntos dos a dos y cuya unión es el conjunto U. Es decir:

$$\text{Para cualquier } A, B \in P \text{ se tiene que } A \cap B = \emptyset \text{ y } \bigcup_{A \in P} A = U$$

- Toda relación de equivalencia $\mathcal{E}$ en un conjunto U genera una partición en ese conjunto, puesto que las clases de $U/\mathcal{E}$ son subconjuntos de U disjuntos dos a dos y la unión de estos es el conjunto U.
- Recíprocamente, toda partición P del conjunto U permite definir una relación de equivalencia $\mathcal{E}$ en el conjunto U mediante:

$$x\mathcal{E}y \text{ si y sólo si existe algún } A \in P \text{ tal que } \{x, y\} \subset A$$

Ejemplo 3.13 **Gráficas de superficies por ordenador**
Al intentar representar una superficie definida por una ecuación en un ordenador, por ejemplo el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$, se debe determinar el dominio en el que se dibujará. Generalmente se trata de un dominio rectangular, por ejemplo $[0, 1] \times [0, 1]$. El programa con opciones gráficas establece una partición del dominio en cuadradillos de lados paralelos a los lados del dominio rectangular, a modo de rejilla rectangular. Entonces, el programa establece su "grid" (rejilla) o nube de puntos del dominio, que suele ser algún vértice de cada cuadradillo (x_i, y_i), para proceder al cálculo de los valores z_i correspondientes, y construye la nube de puntos del espacio (x_i, y_i, z_i). Esencialmente, este proceso establece el conjunto cociente correspondiente a la relación definida por la partición del dominio, y se elige un representante de cada clase para valorar la altura de la superficie en esos representantes, en general, un vértice del cuadradillo. Es decir, se pasa de un dominio continuo a un dominio discreto de

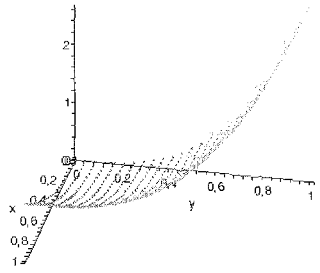

Figura 3.3: Nube de puntos

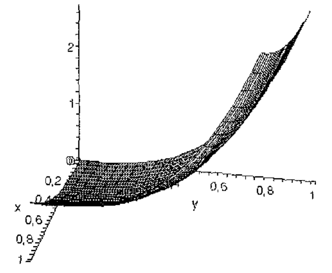

Figura 3.4: Rejilla de una superficie

clases y se considera la altura de cualquier elemento de una clase como la altura del elemento seleccionado de esa clase. La construcción "continua" que muestran los ordenadores es una cuestión que no abordamos.

Ejemplo 3.14 Al considerar la partición $P = \{[i-1, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ de intervalos en $\mathbb{R}$, se define la relación de equivalencia entre números reales $x\mathcal{R}y$ si y sólo si existe un intervalo $[i-1, i)$ tal que $x, y \in [i-1, i)$. Es decir, dos números reales están relacionados si y sólo si tienen la misma parte entera.

3.3. Relación de orden

En el ejemplo 2.5 se define el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$, donde el siguiente de 0 es $s(0) = 1$, el siguiente de 1 es $s(1) = 2$, y así sucesivamente. De esta forma cada número natural distinto del cero es definido como el siguiente de otro número natural, y esto nos permite realizar la siguiente representación de $\mathbb{N}$

$$0 \to s(0) \to s(s(0)) \to s(s(s(0))) \to \ldots, \text{ es decir, } 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots,$$

y describir la relación $\leqslant$ en $\mathbb{N}$ mediante: $n \leqslant m$ si y sólo si hay un camino de flechas $\to$ entre n y m en esa representación o si m y n son iguales. En esencia, lo que se establece es la ordenación de los números naturales:

$$0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant \ldots$$

A continuación presentamos el tipo de relación en un conjunto cualquiera que define una ordenación de los objetos del conjunto.

Definición 3.15 Relación de orden
Una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto U se denomina **relación de orden** si posee las propiedades:

1. P. Reflexiva; $\forall x \in U \quad x\mathcal{R}x$.
2. P. Antisimétrica; $\forall x, y \in U \quad$ si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ entonces $x = y$.
3. P. Transitiva; $\forall x, y, z \in U \quad$ si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ entonces $x\mathcal{R}z$.

- La relación de orden $\mathcal{R}$ se dice que es una **relación de orden total** si posee la propiedad $\mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{R} = U \times U$, es decir:

$$\forall x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \ \text{ o } \ y\mathcal{R}x$$

Para subrayar que una relación de orden no es total se indica con el término parcial: **relación de orden parcial**.

Ejemplo 3.16 **Orden entre subconjuntos**
La relación contenido, $\subset$, en el conjunto de las partes $\mathcal{P}(U)$ de un conjunto U satisface las propiedades (reflexiva) $A \subset A$, (antisimétrica) si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$, y (transitiva) si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.
La relación $\subset$ entre los conjuntos de las partes de un conjunto es una relación de orden. Es claro que no se trata de un orden total, pues por ejemplo, sean el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y los subconjuntos $A_1 = \{a\}$ y $A_2 = \{b\}$, es evidente que ni $A_1 \subset A_2$, ni $A_2 \subset A_1$.

Ejemplo 3.17 **Orden en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$**
En cada uno de estos conjuntos de números está definida la relación de orden habitual, $\leqslant$, *menor o igual* que es una relación de orden total. La definición del orden en cada uno de estos conjuntos se verá en capítulos posteriores.
Cabe observar que una vez establecida la relación orden $\leqslant$ se pueden definir las relaciones habituales $<$, *estrictamente menor*, y $>$, *estrictamente mayor*, que no son relaciones de orden, puesto que no son reflexivas, aunque sí son transitivas.

- El par formado por un conjunto y una relación de orden definida sobre él se denomina **conjunto ordenado**.

A menudo las relaciones de orden se denotan por $\preceq$, de manera que la expresión $a \preceq b$ se lee como *a precede a b* o *a antecede a b*. También se utiliza indistintamente la notación $b \succeq a$ para indicar $a \preceq b$ y se lee b *sucede a* a o b *es posterior a* a. La notación $a \prec b$ o $b \succ a$ se utiliza para indicar que $a \preceq b$ y $a \neq b$.

Definición 3.18 Intervalos en un conjunto ordenado
Dados un conjunto ordenado $(U, \preceq)$, y $a, b \in U$ tales que $a \preceq b$, se denomina:

- **Intervalo abierto** (a, b): Es el conjunto $(a, b) = \{x \in U \mid a \prec x \prec b\}$.
- **Intervalo cerrado** $[a, b]$: Es el conjunto $[a, b] = \{x \in U \mid a \preceq x \preceq b\}$.
- **Intervalo semiabierto :** Es cada uno de los siguientes conjuntos:
  1. $(a, b] = \{x \in U \mid a \prec x \preceq b\}$.
  2. $[a, b) = \{x \in U \mid a \preceq x \prec b\}$.

Obsérvese que si $a = b$, entonces los intervalos (a, b), $(a, b]$ y $[a, b)$ son el conjunto vacío, mientras que el intervalo $[a, b]$ se reduce a un punto.

Ejemplo 3.19 Sea $(\mathbb{R}, \leqslant)$ donde $\leqslant$ es el orden usual de $\mathbb{R}$.
La forma habitual de representar el conjunto de los números reales es mediante los puntos de una recta. El lector está familiarizado con los intervalos y semirrectas en la recta real que se ven como segmentos continuos en dicha recta. La expresión $a \leqslant b$ se traduce gráficamente en *a está a la izquierda de b* en la recta.

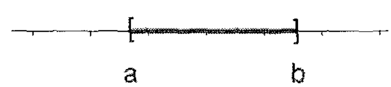

Figura 3.5: Intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$

Sin embargo los intervalos pueden ser entendidos en el marco de los otros conjuntos numéricos ordenados aunque se representen dentro de la recta real.

El intervalo $[3, 6]$ en los números naturales $\mathbb{N}$ es $[3, 6]_{\mathbb{N}} = \{3, 4, 5, 6\}$ y el intervalo $(1, 2)_{\mathbb{N}} = \emptyset$.

El intervalo $(-3, 5]$ en los números enteros $\mathbb{Z}$ es $(-3, 5]_{\mathbb{Z}} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y el intervalo $(3, 4)_{\mathbb{Z}} = \emptyset$. En general, los intervalos de $\mathbb{N}$ y los de $\mathbb{Z}$ son puntos aislados en la recta real $\mathbb{R}$.

Cuando se desea hacer referencia al intervalo $(-3, 4]_{\mathbb{Q}}$ en los números racionales $\mathbb{Q}$ se emplea ese mismo intervalo en la recta real y se expresa como $(-3, 4]_{\mathbb{Q}} = (-3, 4] \cap \mathbb{Q}$.

Figura 3.6: Intervalo cerrado $[-2, 3]_{\mathbb{Z}}$

Definición 3.20 Intervalos iniciales y finales
Dado un conjunto ordenado $(U, \preceq)$, se denominan intervalos a cada uno de los siguientes conjuntos:

1. **Intervalo inicial abierto** $(\leftarrow, a) = \{x \in U | x \prec a\}$.
2. **Intervalo final abierto** $(a, \rightarrow) = \{x \in U | a \prec x\}$.
3. **Intervalo inicial cerrado** $(\leftarrow, a] = \{x \in U | x \preceq a\}$.
4. **Intervalo final cerrado** $[a, \rightarrow) = \{x \in U | a \preceq x\}$.

Ejemplo 3.21 El lector está familiarizado con los intervalos iniciales y finales (las semirrectas) en la recta real del ejemplo 3.19.
Sin embargo, un intervalo inicial o final puede ser entendido en el marco de los otros conjuntos numéricos ordenados.

El intervalo inicial $(\leftarrow, 5)_{\mathbb{N}} = [0, 4]_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en los números naturales, y el intervalo final $[3, \rightarrow)_{\mathbb{N}} = \{3, 4, 5, \ldots\}$.

El intervalo inicial $(\leftarrow, 2)_{\mathbb{Z}} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1\}$ en los números enteros, y el intervalo final $[3, \rightarrow)_{\mathbb{Z}} = \{3, 4, 5, \ldots\}$.

Los intervalos iniciales y finales en los números racionales se escriben en función de los correspondientes intervalos en $\mathbb{R}$, $(\leftarrow, 2)_{\mathbb{Q}} = (\leftarrow, 2) \cap \mathbb{Q}$ y $[3, \rightarrow)_{\mathbb{Q}} = [3, \rightarrow) \cap \mathbb{Q}$.

Ejemplo 3.22 **Orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$**
Con el orden usual de $\mathbb{R}$ se define la siguiente relación de orden en $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \leqslant_L (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad (a < c) \text{ o } (a = c \text{ y } b \leqslant d)$$

Es una relación de orden total. Al observar la figura 3.7 se puede comprobar que dado un punto (a, b), entonces $(\leftarrow, (a, b)]_{\leqslant_L} \cup [(a, b), \rightarrow)_{\leqslant_L} = \mathbb{R}^2$, y por tanto cualquier punto (x, y) del plano está relacionado con un punto cualquiera (a, b), es decir, $(x, y) \leqslant_L (a, b)$ o $(a, b) \leqslant_L (x, y)$.

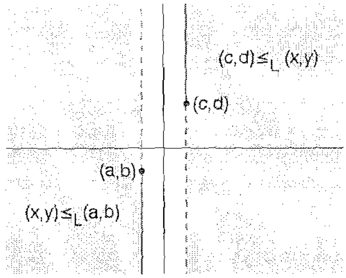

Figura 3.7: Intervalos $(\leftarrow,(a,b)]_{\leqslant_L}$ y $[(c,d),\rightarrow)_{\leqslant_L}$

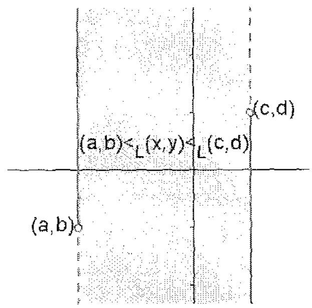

Figura 3.8: Intervalo $((a,b),(c,d))_{\leqslant_L}$

El término lexicográfico proviene de que el orden es análogo al que se utiliza para disponer las palabras en un diccionario.

Ejemplo 3.23 **Orden producto en $\mathbb{R}^2$**

Se define en $\mathbb{R}^2$ componente a componente el siguiente orden:

$$(a,b) \leqslant_P (c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad a \leqslant c \quad \text{y} \quad b \leqslant d$$

Esta relación de orden es un orden parcial en $\mathbb{R}^2$ que en Economía se denomina **orden de Pareto**. En general, cuando se tienen dos espacios ordenados, el orden producto es el orden que se define en el producto cartesiano componente a componente.

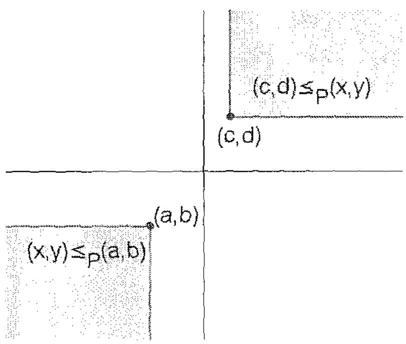

Figura 3.9: Intervalos $(\leftarrow,(a,b)]_{\leqslant_P}$ y $[(c,d),\rightarrow)_{\leqslant_P}$

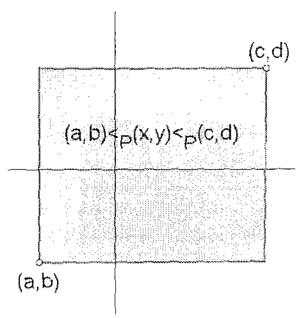

Figura 3.10: Intervalo $((a,b),(c,d))_{\leqslant_P}$

Al observar la figura 3.9 se puede comprobar que dado un punto (a,b), entonces $\mathbb{R}^2 \neq (\leftarrow,(a,b)]_{\leqslant_P} \cup [(a,b),\rightarrow)_{\leqslant_P}$ y por tanto la relación de orden no es total. De hecho, si $a \neq b$, los puntos (a,b) y (b,a) no son comparables, es decir, ni $(b,a) \leqslant_P (a,b)$ ni $(a,b) \leqslant_P (b,a)$. Luego, la relación es una relación de orden parcial.

Definición 3.24 Conjunto acotado
Dados un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto $A \subset U$, se denomina:

- **Cota superior del conjunto A:** una cota superior de A es cualquier elemento $u \in U$ que verifica que $\forall x \in A \quad x \preceq u$.
- **Cota inferior del conjunto A:** una cota inferior de A es cualquier elemento $d \in U$ que verifica que $\forall x \in A \quad d \preceq x$.
- **A conjunto acotado superiormente:** el conjunto A es acotado superiormente si existe una cota superior de A.
- **A conjunto acotado inferiormente:** el conjunto A es acotado inferiormente si existe una cota inferior de A.
- **A conjunto acotado:** el conjunto A es acotado si lo es tanto superiormente como inferiormente.

Observación: En un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ se tiene que un conjunto A es acotado si y sólo si existen dos elementos $a, b \in U$ tales que A está contenido en el intervalo $[a, b]_{\preceq}$.

Definición 3.25 Dados un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto $A \subset U$, se denomina:

- **Máximo del conjunto A:** es un elemento $M \in A$ tal que $\forall x \in A \quad x \preceq M$ y se denota $\text{máx}(A)$.
- **Mínimo del conjunto A:** es un elemento $m \in A$ tal que $\forall x \in A \quad m \preceq x$ y se denota $\text{mín}(A)$.
- **Supremo del conjunto A:** es una cota superior $s \in U$ tal que $s \preceq u$ para toda cota superior u de A y se denota $\sup(A)$.
- **Ínfimo del conjunto A:** es una cota inferior $i \in U$ tal que $d \preceq i$ para toda cota inferior d de A y se denota $\inf(A)$.

Observaciones: En un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ se tiene que el ínfimo de un conjunto A es el máximo del conjunto de las cotas inferiores de A, y el supremo de A es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de A.

De la definición se deduce directamente que si un conjunto posee máximo, entonces posee supremo, y $\sup(A) = \text{máx}(A)$. Análogamente, si un conjunto posee mínimo, entonces posee ínfimo, e $\inf(A) = \min(A)$.

Proposición 3.26 Dados un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto $A \subset U$, se tiene:

1. Si existe el máximo, o el mínimo, del conjunto A, entonces éste es único.
2. Si existe el supremo, o el ínfimo, del conjunto A, entonces éste es único.
3. Si existe el supremo s del conjunto A y $s \in A$, entonces s es el máximo de A.
4. Si existe el ínfimo i del conjunto A e $i \in A$, entonces i es el mínimo de A.

Demostración:
1. Supuesto que existen $M, M' \in A$ tales que para cualquier $x \in A$ se verifica que $x \preceq M$ y $x \preceq M'$. En particular, se verifica que $M' \preceq M$ y $M \preceq M'$, luego se obtiene $M = M'$ directamente de la propiedad antisimétrica. Lo mismo ocurre con el mínimo.

2. Como el supremo de A es el mínimo de las cotas superiores, entonces es único al aplicar la primera propiedad. Análogo razonamiento puede hacerse con el ínfimo.

□

Ejemplo 3.27 En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}^*$, véase el ejemplo 2.5, se define la relación *divide* mediante:

$$n|m \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } m = kn$$

Es una relación de orden. En efecto:
Es reflexiva pues $n = 1n$.
Es antisimétrica pues si $m = kn$ y $n = k'm$, entonces $n = k'kn$. Luego $k'k = 1$, de donde $k = k' = 1$.
Es transitiva pues si $n|m$ y $m|h$ entonces $m = kn$ y $h = k'm$, y por tanto $h = k'kn$.
Esta relación no es de orden total, pues los números 2 y 3 no están relacionados.

El conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ tiene como cota superior cualquier número que sea divisible por 4 y 6. De hecho, $\sup(A) = 12$ pues el mínimo común múltiplo de esos dos números es 12. Además no existe máximo, puesto si existiese debería ser 12, pero $12 \notin A$. Las cotas inferiores son los números 1 y 2. Además, $\min(A) = 2 = \inf(A)$.

Ejemplo 3.28 En el conjunto ordenado de los números racionales $\mathbb{Q}$ se considera el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

Una cota inferior de A en $\mathbb{Q}$ es -2, mientras que una cota superior en $\mathbb{Q}$ es 2. Ahora bien, no existe ni supremo ni ínfimo de A en el conjunto $\mathbb{Q}$. Esto se verá en detalle posteriormente, véase el ejemplo 6.7.

Este mismo conjunto al ser considerado como subconjunto del conjunto ordenado de los números reales, $\mathbb{R}$, se puede expresar como $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.
Su supremo es $\sup(A) = \sqrt{2}$ y su ínfimo es $\text{ínf}(A) = -\sqrt{2}$. No existe $\text{máx}(A)$ ni $\text{mín}(A)$.

Propiedad del buen orden
Se dice que un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ es un conjunto bien ordenado, o que la relación $\preceq$ es una buena ordenación, si cualquier subconjunto no vacío posee mínimo. El elemento mínimo de cada subconjunto A también se denomina primer elemento de A.

La propiedad del buen orden es una propiedad característica del orden de los números naturales. El **principio de la buena ordenación de** $\mathbb{N}$ se enuncia como: Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

En un conjunto ordenado, un subconjunto acotado puede no tener supremo ni ínfimo.

Ejemplo 3.29 El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ está acotado superiormente por $(3, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ dotado del orden lexicográfico, pero no existe supremo de A. También A está acotado inferiormente por $(0, 0)$, pero no posee ínfimo.

Propiedad del supremo
Se dice que un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ verifica la propiedad del supremo si y sólo si cualquier subconjunto no vacío A acotado superiormente posee supremo.

La propiedad del supremo es una propiedad característica del orden de los números reales, orden continuo, que se conoce como **axioma del supremo de** $\mathbb{R}$: Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo.

Ejercicio 3.30 Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\, 1 \leqslant y < 2\}$ en el conjunto ordenado $\mathbb{R}^2$ dotado del orden lexicográfico. Determine, cotas supremo, ínfimo, máximo y mínimo de A.

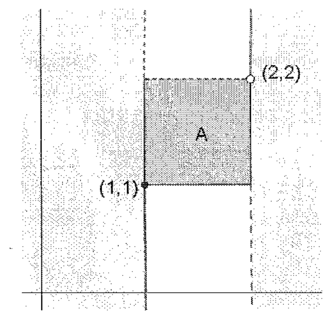

Figura 3.11: Cotas lexicográficas del conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

Solución: Una cota superior de A es cualquier punto del intervalo final $[(2,2),\to)_L$, es decir, cualquier (x,y) con $2 < x$ o $(2,y)$ con $2 \leqslant y$. El supremo de A es $\sup_L(A) = (2,2)$. El conjunto A no posee máximo.
Una cota inferior de A es cualquier punto de intervalo inicial $(\leftarrow,(1,1)]_L$, es decir, cualquier (x,y) con $x < 1$ o $(1,y)$ con $y \leqslant 1$. El ínfimo de A es $\text{ínf}_L(A) = (1,1)$. Como el conjunto A contiene al punto $(1,1)$, entonces $\text{mín}_L(A) = (1,1)$. Véase la figura 3.11. □

Ejercicio 3.31 Sea el conjunto del ejercicio 3.30 en el conjunto ordenado $\mathbb{R}^2$ dotado del orden producto. Determine, cotas supremo, ínfimo, máximo y mínimo de A.

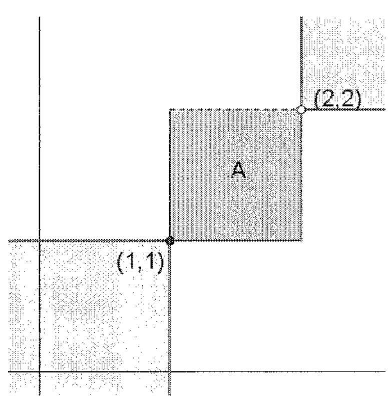

Figura 3.12: Cotas del orden producto del conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

Solución: Una cota superior de A es cualquier punto del intervalo final $[(2,2), \rightarrow)_P$, es decir, cualquier (x, y) con $2 \leqslant x$ y $2 \leqslant y$. El supremo de A es $\sup_P(A) = (2,2)$. El conjunto A no posee máximo, puesto que $(2,2) \notin A$.
Una cota inferior de A es cualquier punto del intervalo inicial $(\leftarrow, (1,1)]_P$, es decir, cualquier (x, y) con $x \leqslant 1$ y $y \leqslant 1$. El infimo de A es $\text{ínf}_P(A) = (1,1)$. Como el conjunto A contiene al punto $(1,1)$, entonces $\text{mín}_P(A) = (1,1)$. Véase la figura 3.12. □

Ejemplo 3.32 Sea el conjunto B constituido por la arista inferior y la arista izquierda del cuadrado que representa al conjunto A del ejercicio 3.30:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, y = 1 \quad \text{o} \quad x = 1, 1 \leqslant y < 2\}$$

Resulta que el conjunto de cotas superiores del conjunto B es el el conjunto de cotas superiores de A, y el conjunto de cotas inferiores de B es el conjunto de cotas inferiores de A con el orden producto.

El supremo de B es $\sup_P(B) = (2,2)$, y no existe $\text{máx}_P(B)$. Además, $\text{ínf}_P(B) = (1,1) = \text{mín}_P(B)$.

Respecto del orden lexicográfico, el supremo de B es $\sup_L(B) = (2,1)$, y como $(2,1) \in B$ resulta que es máximo. El ínfimo de B es $\text{ínf}_L(A) = (1,1)$ y, además, $\text{mín}_L(B) = (1,1)$.

Definición 3.33 Dados un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ y un subconjunto A de U se define:

- **Maximal del conjunto A:** es un elemento $M \in A$ tal que

$$\nexists x \in A,\ x \neq M, \text{ que cumpla } M \preceq x.$$

- **Minimal del conjunto A:** es un elemento $m \in A$ tal que

$$\nexists x \in A,\ x \neq m, \text{ que cumpla } x \preceq m.$$

Observación: Si el orden de U es total, los conceptos de maximal y máximo, respectivamente minimal y mínimo, coinciden. En general, los elementos maximales y los minimales de un conjunto no tienen porque ser únicos, veáse el siguiente ejemplo. Sin embargo, si un conjunto tiene elemento máximo, respectivamente mínimo, entonces sólo hay un elemento maximal, respectivamente minimal, que coincide con el máximo, respectivamente mínimo.

Ejemplo 3.34 En el conjunto ordenado del ejemplo 3.27, $(\mathbb{N}^*, \mid)$, se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, que no tiene ni máximo ni mínimo. En cambio, los números $2, 3, 5, 7$ son minimales de A, y los números $6, 7, 8, 9, 10$ son máximales de A.

Ejercicio 3.35 Determine cotas, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales del conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x + y \leqslant 1\}$, para el orden lexicográfico y el orden producto.

Solución: El conjunto A es el conjunto de puntos del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y de su interior.

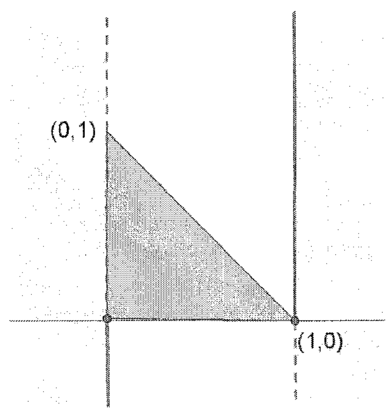

Figura 3.13: Cotas lexicográficas del conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

Con $\mathbb{R}^2$ dotado del orden lexicográfico tenemos que:
Una cota superior de A es cualquier punto (x, y) tal que $1 < x$ o un punto $(1, y)$ con $0 \leqslant y$, es decir, un punto del intervalo final $[\ (1, 0), \rightarrow\ )_L$.
Además, $\sup_L(A) = (1, 0) \in A$, luego $\max_L(A) = (1, 0)$.

Una cota inferior de A es cualquier punto (x, y) tal que $x < 0$ o un punto $(0, y)$ con $y \leqslant 0$, es decir, un punto del intervalo inicial $(\ \leftarrow, (0, 0)]_L$. Además, $\inf_L(A) = (0, 0) \in A$, luego $\min_L(A) = (0, 0)$.
Con $\mathbb{R}^2$ dotado del orden producto tenemos que:
Una cota superior de A es cualquier punto (a, b) tal que $1 \leqslant a$ y $1 \leqslant b$, es decir, cualquier punto del intervalo final $[(1, 1), \rightarrow)_P$.
Además, se observa que $\sup_P(A) = \big(\sup\{x \mid (x, y) \in A\}\ , \sup\{y \mid (x, y) \in A\}\big) = (1, 1)$.
El conjunto A no posee máximo, y cada punto $(x, y) \in A$ que satisface la ecuación $x + y - 1 = 0$ es un punto maximal de A. Puede comprobarse visualmente en la figura 3.14, donde se ha dibujado un intervalo final $[(x, y), \rightarrow)_P$ siendo $(x, y) \in A$

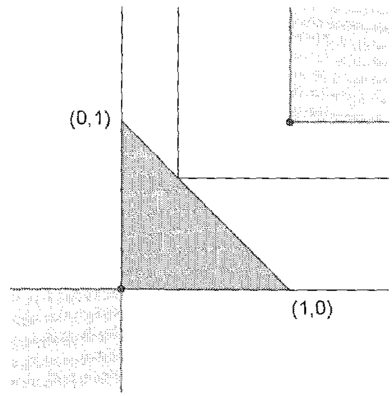

Figura 3.14: Cotas del orden producto del conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

tal que $x + y = 1$, que cualquier intervalo de este tipo sólo contiene al propio punto (x, y).
Una cota inferior de A es cualquier punto del intervalo inicial $(\leftarrow, (0,0)]_P$. Además, $\text{ínf}_P(A) = (0,0) \in A$, luego $\text{mín}_P(A) = (0,0)$. $\square$

Ejemplo 3.36 **Orden inducido por un pseudo-grafo dirigido**

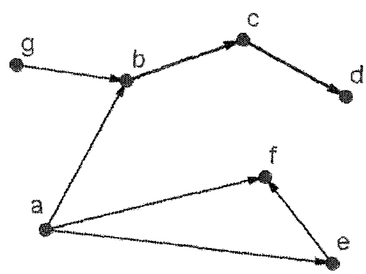

Figura 3.15: Grafo dirigido G

Dado el grafo dirigido de la figura 3.15, (V, G) donde $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $G = \{ab, ae, af, bc, cd, ef, gb\}$, se considera el pseudo-grafo obtenido al añadir las aristas que unen cada punto con sí mismo. Es decir, el conjunto de vértices del pseudo-grafo son $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, y el conjunto de aristas:

$$E = \{aa, ab, ae, af, bb, bc, cc, cd, dd, ee, ef, ff, gb, gg\}$$

Este pseudo-grafo permite definir la relación $\mathcal{R} \subset V \times V$, que denotamos por $\leqslant_{\mathcal{R}}$ mediante:

$$x \leqslant_{\mathcal{R}} y \quad \text{si y sólo si existe un camino que empieza en } x \text{ y termina en } y$$

Esta relación es de orden parcial puesto que los vértices d y f no están relacionados. El conjunto de minimales de V es $\{a, g\}$ y el conjunto de elementos maximales de V es $\{d, f\}$.

3.4. Aplicaciones entre conjuntos

En este apartado se presenta un tipo de relación entre conjuntos muy empleado en todas las áreas matemáticas.

Definición 3.37 Aplicación entre conjuntos
Una relación entre los conjuntos A y B se denomina **aplicación**, o **función**, entre A y B si y sólo si cualquier elemento del conjunto inicial A está relacionado con un único elemento del conjunto final B.

Es decir, una aplicación F del conjunto A al conjunto B es un subconjunto de $F \subset A \times B$ tal que $\forall x \in A$ el conjunto $F(x)$ es un conjunto unitario. Se escribe simbólicamente, $F : A \longrightarrow B$:

$$\text{Para todo } x \in A, \text{ existe un único } y \in B \text{ tal que } F(x) = \{y\}$$

Además, se emplea la notación $F(x) = y$ en lugar de $F(x) = \{y\}$ Indistintamente se utilizan letras mayúsculas o minúsculas al referirnos a una aplicación. La terminología usualmente empleada para la aplicación $f : A \longrightarrow B$ es la siguiente:

- El conjunto A es el **conjunto inicial, conjunto original o dominio de definición** de f, y se denota $\mathrm{Orig}(f)$ o $\mathrm{Dom}(f)$.
- El conjunto B es el **conjunto final** de f.
- El conjunto $f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$ se denomina **conjunto imagen**, recorrido o rango de f. También se denota por $\mathrm{Im}(f)$.
- El elemento $f(x)$ se denomina **imagen** del elemento x o simplemente imagen de x.
- El conjunto original del elemento $y \in B$ mediante la aplicación f, o simplemente original de y, se representa como $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$, y se denomina **imagen inversa de y por f**.

- El conjunto de aplicaciones de A a B se denota por $\mathcal{F}(A, B)$, o B^A, y $\mathcal{F}(A)$ si $A = B$.

Observaciones: 1) Si el conjunto A es el conjunto vacío entonces el producto cartesiano $A \times B$ es también el conjunto vacío y sólo existe un subconjunto (una relación), que es el conjunto vacío, que es una aplicación, puesto que asocia a todo elemento de A, no hay ninguno, un único elemento de B. Se denomina aplicación vacía. Sin embargo, si $A \neq \emptyset$ y B es el conjunto vacío, entonces el producto cartesiano $A \times B$ es también el conjunto vacío y sólo existe un subconjunto (una relación) que es el conjunto vacío. En este caso esta relación no es una aplicación pues si $a \in A$, no existe $b \in B$ tal que a esté relacionado con b. Es decir, $\mathcal{F}(\emptyset, B) = \{\text{aplicación vacía}\}$ mientras que $\mathcal{F}(A, \emptyset) = \emptyset$ si $A \neq \emptyset$.

2) Aunque el significado de los términos función y aplicación es el mismo, estos términos no suelen usarse indistintamente. El término función se aplica, en general, cuando el conjunto final es un conjunto de números ($B \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{C}, \ldots$) o un conjunto producto de conjuntos numéricos ($B \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{C}^n, \ldots$). Esto no es una regla estricta, pues de hecho se encuentran con frecuencia expresiones del tipo *La función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x + 2y$ *es una aplicación lineal*, donde se usan los dos términos.
La razón es histórica: El término función se asoció a funciones con valores numéricos tales como la abscisa de un punto de una curva plana, o su curvatura, ... El término aplicación se utilizaba para expresar las diversas transformaciones de puntos o curvas en el espacio.

3) Una regla más estricta fue la propuesta por N. Bourbaki pero que no llegó a cundir entre la comunidad matemática. Define una función como aquella relación o correspondencia tal que la imagen de cualquier elemento es el conjunto vacío o un conjunto unitario. En este caso define el dominio de la función como el subconjunto de puntos del conjunto inicial cuya imagen es un conjunto unitario. El concepto de aplicación que propone es el mismo que hemos definido en este apartado.

Ejemplo 3.38 **Valor de una proposición**
Sea P el conjunto de todas las proposiciones que se pueden crear con tres proposiciones simples, y $\{0, 1\}$ el conjunto de valores lógicos. Se define la relación $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que a cada proposición le asocia su valor semántico. Esta relación es una aplicación.

Ejemplo 3.39 **Tablas de verdad**
Dada una proposición compuesta de tres proposiciones simples p, q y r, cualquier aplicación f del conjunto $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ al conjunto $\{0, 1\}$ constituye una tabla de verdad. Por ejemplo, el valor lógico de la proposición para $p = 1, q = 0$ y $r = 1$ queda determinado por $f(1, 0, 1)$.

Análogamente, cualquier aplicación entre $\{0,1\}^n$ y $\{0,1\}$ define una tabla de verdad de una proposición compuesta por n proposiciones simples.

Ejemplo 3.40 La relación $\mathcal{R}$, entre el conjunto $\mathcal{P}(U)$ de las partes de un conjunto y el propio conjunto $U = \{a,b,c,d,e\}$, definida por $A\mathcal{R}x \iff x \in A \subset U$ no es una aplicación, pues cada conjunto está relacionado con todos sus elementos, así pues el subconjunto $\{a,b\}$ está relacionado con dos elementos mientras que el conjunto vacío no está relacionado con ninguno.

Ejemplo 3.41 **Grafo de una aplicación**
Sean los conjuntos $A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la aplicación f definida por extensión por $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 6, f(d) = 3$ y $f(e) = 2$. Esta aplicación se suele representar en términos de diagramas de Venn como en la figura 3.16.

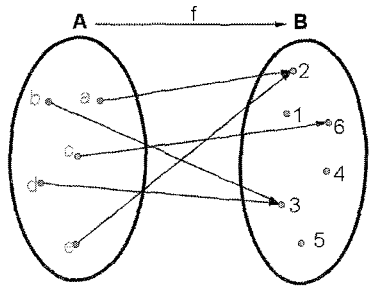

Figura 3.16: Diagrama de la aplicación f

Al representar la aplicación f en el conjunto producto $A \times B$ se construye el grafo de la aplicación contenido en la figura 3.17.

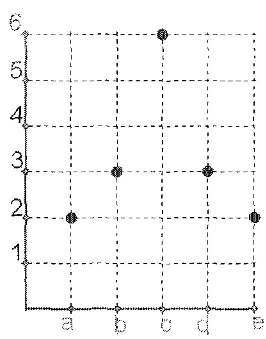

Figura 3.17: Grafo de la aplicación f

Dado el grafo de una función $\{(x, f(x))\}$ se denomina **representación gráfica de la función** f a la representación del grafo en el conjunto producto correspondiente.

Ejemplo 3.42 **Aplicación constante**
Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice constante si y sólo si la imagen de cada elemento de A es el mismo elemento de B.

$$f : A \longrightarrow B \text{ es constante } \Longleftrightarrow \forall x, x' \in A,\ f(x) = f(x')$$

Ejemplo 3.43 Una relación de equivalencia $\mathcal{E}$ definida sobre un conjunto A permite definir la aplicación p que asigna a cada elemento su clase de equivalencia:

$$\begin{aligned} p:\ & A && \longrightarrow A/\mathcal{E} \\ & x && \longmapsto p(x) = [x] \end{aligned}$$

Esta aplicación se denomina **proyección canónica** del conjunto A en el conjunto cociente.

Ejemplo 3.44 Una aplicación $f : A \to B$, permite definir la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{E}_f$ en A:

$$x\,\mathcal{E}_f\,y \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = f(y)$$

Podemos por un lado considerar la proyección canónica p del ejemplo anterior y también considerar la aplicación $\tilde{f}$ que asigna a cada clase de equivalencia la imagen mediante f de uno cualquiera de sus representantes:

$$\begin{aligned} \tilde{f}:\ & A/\mathcal{E}_f && \longrightarrow B \\ & [x] && \longmapsto \tilde{f}([x]) = f(x) \end{aligned}$$

La definición de la aplicación $\tilde{f}$ es consistente: no depende del representante de la clase de equivalencia puesto que si $[x] = [x']$, entonces $x\,\mathcal{E}_f\,x'$, es decir $f(x) = f(x')$.

Ejemplo 3.45 **Aplicación identidad**
Es la aplicación $I_A : A \longrightarrow A$ tal que la imagen de cada elemento de A es el propio elemento. También suele emplearse la notación 1_A o Id_A.

$$\begin{aligned} I_A:\ & A && \longrightarrow A \\ & x && \longmapsto I_A(x) = x \end{aligned}$$

Como caso particular, destacamos la función identidad de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ cuya representación gráfica es la recta $y = x$; la recta diagonal del tercer y primer cuadrante.

Observacion: Como una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es una relación, $f \subset A \times B$, entonces existe la relación inversa $f^{-1} \subset B \times A$, definida por:

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid f(x) = y\} = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$$

En general, la relación inversa f^{-1} correspondiente a una aplicación f, no es una aplicación. Si algún elemento del conjunto final B no es imagen de algún elemento del conjunto origen o si hay dos elementos distintos del conjunto original con la misma imagen, entonces la relación inversa no es una aplicación.

Ejemplo 3.46 El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es una aplicación f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$, pero la relación f^{-1} no es una aplicación.

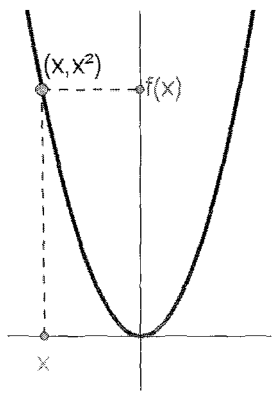

Figura 3.18: Representación gráfica de la aplicación $f(x) = x^2$

Igualdad de aplicaciones: Dos aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : A' \longrightarrow B'$ son aplicaciones iguales,

$$f = g \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} A &= A' \\ B &= B' \\ f(x) &= g(x) \qquad \forall x \in A \end{cases}$$

Ejemplo 3.47 **Determinación del dominio**

Cuando se da una función por comprensión, a menudo se indica una expresión de la imagen de un elemento genérico, por ejemplo, $f(x) = x^2$, pero no siempre se indica el conjunto inicial o el conjunto final.

Esto es muy importante puesto que las funciones

$$\begin{array}{rlll} g: & [0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rlll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

son distintas como puede comprobarse en las figuras 3.19-3.20, y tan sólo se diferencian en el dominio. De hecho, como el conjunto inicial de g está contenido en el conjunto inicial de f, y sobre la parte común a ambos las funciones coinciden, se dice que g es la **restricción** de f a $[0,\infty)$ o que f es una **extensión** de g a $\mathbb{R}$.

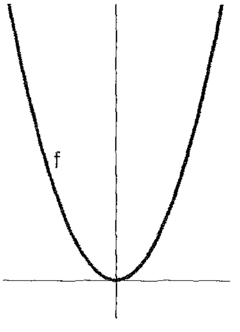

Figura 3.19: Gráfica de f

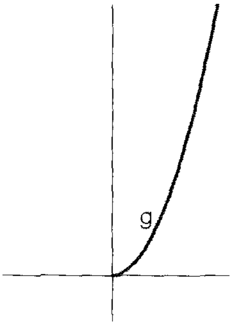

Figura 3.20: Gráfica de g

Observación: En general, si no se indica el dominio de una función de variable real como en el ejemplo, se considera que el dominio es el mayor (en el sentido de la inclusión de conjuntos) conjunto donde la expresión de la imagen posee sentido. Este conjunto es llamado **campo de existencia** o **dominio de definición**. En el caso particular del ejemplo, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Definición 3.48 Dadas las aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, se define la **composición de** f y g, o aplicación composición, a la aplicación de A a C, que denotamos $g \circ f$, y tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

En la notación $(g \circ f)(x)$, a menudo se eliminan los paréntesis:

$$(g \circ f)(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

En general $f \circ g \neq g \circ f$. En primer lugar, si $f \in \mathcal{F}(A, B)$ y $g \in \mathcal{F}(B, C)$, se tiene que $g \circ f \in \mathcal{F}(A, C)$, pero la expresión escrita $f \circ g$ carece de sentido si $A \neq C$. Incluso en el caso de dos aplicaciones $f, g \in \mathcal{F}(A)$, aun siendo las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ ambas elementos de $\mathcal{F}(A)$, en general, estas composiciones son aplicaciones distintas, es decir, la composición de aplicaciones no verifica la propiedad conmutativa en $\mathcal{F}(A)$, como puede comprobarse en el ejemplo 3.49.

Ejemplo 3.49 Sea la aplicación $f \in \mathcal{F}(A)$ definida para todo $x \in A$ por $f(x) = a$ y la aplicación $g \in \mathcal{F}(A)$ definida para todo $x \in A$ por $g(x) = b$, con $a \neq b$. Entonces se tiene:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a) = b, \text{ mientras que } f \circ g\,(x) = f(g(x)) = f(b) = a, \quad \forall x \in A$$

- Dadas tres aplicaciones $f \in \mathcal{F}(A, B)$, $g \in \mathcal{F}(B, C)$ y $h \in \mathcal{F}(C, D)$, entonces

  $$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

  En efecto:

  $$\begin{aligned} & [h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ \text{y} \quad & [(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

  Esta propiedad permite escribir la composición de más de dos aplicaciones sin tener que utilizar los paréntesis, por ejemplo $h \circ g \circ f$.

- Dada una aplicación $f \in \mathcal{F}(A, B)$, entonces

  $$f \circ I_A = f \text{ y } I_B \circ f = f.$$

Observación: Al restringir la composición de aplicaciones al conjunto de aplicaciones $\mathcal{F}(A)$, entonces la composición es una operación interna asociativa y con elemento neutro. Las notaciones $f^2, \ldots, f^n$ se utilizan para indicar las composiciones $f \circ f, \ldots, \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n \text{veces}}$.

Ejemplo 3.50 **Sucesiones de elementos de un conjunto**
Se denomina sucesión de elementos de un conjunto A a una aplicación cuyo conjunto inicial es el conjunto $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^*$, es decir, cualquier elemento $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, A)$ o $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, A)$. Por ejemplo, una sucesión de números naturales $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ definida por la expresión $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$; la sucesión de los cuadrados de cada número natural.
Frecuentemente, la sucesión f se presenta como una lista ilimitada de números

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

que son las imágenes de la lista de números naturales

$$f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

y al término n-ésimo, $f(n)$ o a_n, se le denomina término general de la sucesión. En este caso, la sucesión es $0, 1, 4, 9, 16, \ldots n^2, \ldots$.

Ejemplo 3.51 **Función característica de un conjunto**
Dado un subconjunto $A \subset U$, se llama función característica de A, y se denota χ_A, a la función $\chi_A : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

En el conjunto de aplicaciones $\mathcal{F}(A, B)$ destacamos algunas aplicaciones que poseen alguna característica de interés.

Definición 3.52 **Aplicación sobreyectiva o sobreyección**
Es una aplicación tal que todos los elementos del conjunto final están relacionados con alguno del conjunto inicial. Es decir, $f \in \mathcal{F}(A, B)$ tal que $\mathrm{Im}(f) = B$, o lo que es lo mismo:

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

Ejemplo 3.53 La representación gráfica (véase la figura 3.21) de la aplicación definida por $f(x) = x^3 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, confirma que es una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Basta observar que cualquier recta horizontal corta a la representación gráfica de f en al menos un punto. Para demostrar que es una aplicación sobreyectiva se comprueba que para todo $y \in \mathbb{R}$ la ecuación en x, $x^3 - x = y$, tiene al menos una solución. Esto se deduce del hecho de que toda ecuación polinómica de grado impar tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$.

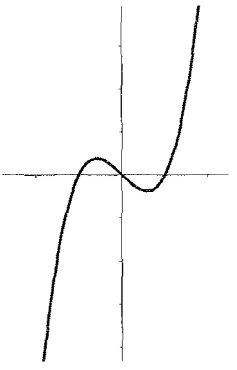

Figura 3.21: Representación gráfica de $f(x) = x^3 - x$

Definición 3.54 Aplicación inyectiva o inyección
Es una aplicación tal que no hay dos elementos del conjunto inicial que tengan la misma imagen. Es decir, $f \in \mathcal{F}(A, B)$ tal que:

$$\text{para todo } x, x' \in A, \text{ si } f(x) = f(x') \text{ entonces } x = x'.$$

O lo que es lo mismo:

$$\text{para todo } x, x' \in A, \text{ si } x \neq x' \text{ entonces } f(x) \neq f(x').$$

Ejemplo 3.55 La representación gráfica (véase la figura 3.22) de la aplicación definida por $f(x) = 2^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, confirma que es una aplicación inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Basta observar que cualquier recta horizontal corta a la representación gráfica de f a lo máximo en un punto. Para demostrar que es inyectiva, basta suponer que si dos números x y x' satisfacen la igualdad $f(x) = f(x')$, entonces $x = x'$, es decir, $2^x = 2^{x'} \Longrightarrow 2^{x-x'} = 1 \Longrightarrow x - x' = 0 \Longrightarrow x = x'$.

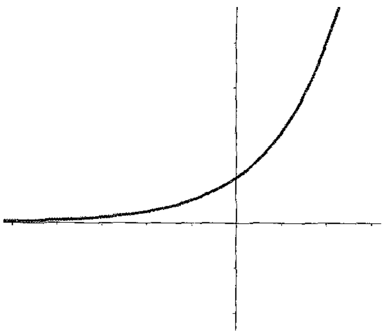

Figura 3.22: Gráfica de $f(x) = 2^x$

Proposición 3.56 Dadas las aplicaciones $f \in \mathcal{F}(A, B)$, $g \in \mathcal{F}(B, C)$ y $g \circ f \in \mathcal{F}(A, C)$, se tiene:

1. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
2. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

Demostración: 1) Como $f(A) = B$, por ser f sobreyectiva, y $g(B) = C$, por ser g sobreyectiva, se tiene que $g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$. Luego la composición es sobreyectiva.
2) Dados $x, y \in A$ tales que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, entonces $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g es inyectiva se verifica que $f(x) = f(y)$, y al ser f inyectiva se tiene que $x = y$. Luego la composición es una aplicación inyectiva.

□

Definición 3.57 Aplicación biyectiva o biyección
Es una aplicación que es sobreyectiva e inyectiva al mismo tiempo, es decir, tal que todos los elementos del conjunto final están relacionados con un único elemento del conjunto inicial. Es decir, una aplicación $f \in \mathcal{F}(A, B)$ tal que

para todo $y \in B$ existe un único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 3.58 Al observar la representación gráfica (véase la figura 3.23) de la aplicación definida por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se comprueba que es una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para demostrarlo, basta comprobar que para todo $y \in \mathbb{R}$, la ecuación $x^3 = y$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$. En este caso, $x = \sqrt[3]{y}$.

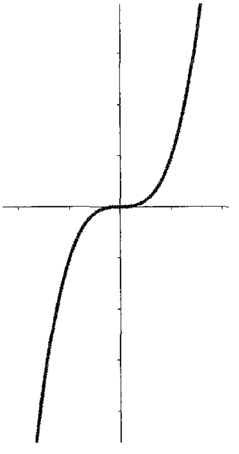

Figura 3.23: Gráfica de $f(x) = x^3$

Teorema 3.59 Caracterización de una aplicación biyectiva
Una aplicación $f \in \mathcal{F}(A, B)$ es biyectiva si y sólo si existe una aplicación $g \in \mathcal{F}(B, A)$ tal que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$.

Demostración: Si f es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es claramente una aplicación. Tomando $g = f^{-1}$ se cumple que $g \in \mathcal{F}(B, A)$ y que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$.

Supongamos que existe una aplicación $g \in \mathcal{F}(B, A)$ tal que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$. Para todo $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Basta tomar $x = g(y)$. Si para algún $y \in B$ existieran dos elementos $x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x') = y$, entonces $x = I_A(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(f(x')) = g \circ f(x') = I_A(x') = x'$. Luego para cada $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$\square$

Para cualquier aplicación biyectiva $f \in \mathcal{F}(A, B)$, la función $g = f^{-1}$ del teorema anterior es única y se denomina **aplicación inversa de la aplicación** f. Además, la aplicación $f^{-1} \in \mathcal{F}(B, A)$ es una aplicación biyectiva.

Teorema 3.60 Sean $f \in \mathcal{F}(A,B)$ y $g \in \mathcal{F}(B,C)$ dos aplicaciones biyectivas, entonces la aplicación $g \circ f \in \mathcal{F}(A,C)$ es biyectiva, y su inversa es:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Demostración: Veamos que la aplicación $f^{-1} \circ g^{-1}$ verifica las condiciones del teorema 3.59.

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ I_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_C$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ I_B \circ f = f^{-1} \circ f = I_A$$

□

Teorema 3.61 Sea una aplicación $f \in \mathcal{F}(A,B)$.

1. f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $h \in \mathcal{F}(B,A)$ tal que $f \circ h = I_B$.

2. f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación $g \in \mathcal{F}(B,A)$ tal que $g \circ f = I_A$.

Demostración: Veamos la equivalencia de ambos apartados mostrando las dos implicaciones.
1) Si f es sobreyectiva, entonces $\mathrm{Im}(f) = B$. En consecuencia, para todo $y \in \mathrm{Im}(f)$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es un conjunto no vacío. Sea c_y un elemento de $f^{-1}(y)$; por tanto, $f(c_y) = y$. Se define:

$$\begin{aligned} h: \ B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto h(y) = c_y \end{aligned}$$

Así pues, $f \circ h(y) = f(h(y)) = f(c_y) = y$ para cualquier $y \in B$.

Recíprocamente, si existe la aplicación $h \in \mathcal{F}(B,A)$ tal que $f \circ h = I_B$, entonces para cada $y \in B$, se tiene que $f(h(y)) = y$. Luego $y \in \mathrm{Im}(f)$ y, por tanto, $B \subset \mathrm{Im}(f)$. Así pues, f es sobreyectiva.

2) Si f es inyectiva entonces para todo $y \in \mathrm{Im}(f)$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es un conjunto unitario y denotando por a_y al único elemento de $f^{-1}(y)$ se cumple en particular

que $a_{f(x)} = x$. Sea un elemento $x_0 \in A$ fijo. Se define:

$$\begin{aligned} g: \ B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto g(y) = \begin{cases} a_y & \text{si} \quad y \in \mathrm{Im}(f) \\ x_0 & \text{si} \quad y \notin \mathrm{Im}(f) \end{cases} \end{aligned}$$

Así pues, $g \circ f(x) = g(f(x)) = a_{f(x)} = x$ para cualquier $x \in A$.

Recíprocamente, si existe la aplicación $g \in \mathcal{F}(B, A)$ tal que $g \circ f = I_A$, supuesto que existen x_1, x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$. Luego f es inyectiva.

Nota: Si f es sobreyectiva, la aplicación h que se define en el primer caso es inyectiva. Análogamente si f es inyectiva, la aplicación g que se define en el segundo caso es sobreyectiva.

□

Observación: Como consecuencia del teorema 3.61 se tiene que si $f \in \mathcal{F}(A, B)$ es una aplicación inyectiva, entonces la aplicación $\hat{f} \in \mathcal{F}(A, f(A))$ que coincide con f sobre A y que usualmente se denomina f, es una biyección. Es decir, una aplicación inyectiva de A a B da lugar a una aplicación biyectiva de A al conjunto imagen $\mathrm{Im}(f) = f(A)$.

Factorización canónica de una aplicación

Vimos en el ejemplo 3.44 como una aplicación $f\colon A \to B$ permite definir una relación de equivalencia $\mathcal{E}_f$ en el conjunto A mediante:

$$x \, \mathcal{E}_f \, x' \qquad \text{si y sólo si} \qquad f(x) = f(x')$$

y que ésta a su vez, permite definir una aplicación:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \ A/\mathcal{E}_f &\longrightarrow B \\ [x] &\longmapsto \tilde{f}([x]) = f(x) \end{aligned}$$

En el ejemplo 3.43 definimos la proyección canónica

$$\begin{aligned} p: \ A &\longrightarrow A/\mathcal{E}_f \\ x &\longmapsto p(x) = [x] \end{aligned}$$

que por la definición de conjunto cociente es una aplicación sobreyectiva. Consideremos el siguiente diagrama.

Se tiene; $f = \tilde{f} \circ p$
pues para todo $x \in A$,

$$\tilde{f} \circ p(x) = \tilde{f}(p(x)) = \tilde{f}([x]) = f(x)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \\ A/\mathcal{E}_f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos a introducir en el diagrama anterior el conjunto imagen $f(A) \subset B$, utilizando la aplicación

$$\begin{aligned} i:\ & f(A) \longrightarrow B \\ & y \longmapsto i(y) = y \end{aligned}$$

que es inyectiva y se denomina **inyección canónica** o **aplicación inclusión**. Si consideramos además la aplicación

$$\begin{aligned} b:\ & A/\mathcal{E}_f \longrightarrow f(A) \\ & [x] \longmapsto b([x]) = f(x) \end{aligned}$$

entonces b es una aplicación biyectiva. En efecto:
Sean $[x], [x'] \in A/\mathcal{E}_f$ arbitrarios. Si $b([x]) = b([x'])$ entonces $f(x) = f(x')$, o equivalentemente, $x \,\mathcal{E}_f\, x'$. En consecuencia, $[x] = [x']$. Por tanto, la aplicación b es inyectiva.
Sea $y \in f(A)$ arbitrario. Existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. En consecuencia $b([x]) = y$. Como $[x] \in A/\mathcal{E}_f$, se deduce que la aplicación b es sobreyectiva.
Finalmente, observemos que para todo $x \in A$ se verifica:

$$(i \circ b \circ p)(x) = i\Big(b\big(p(x)\big)\Big) = i\big(b([x])\big) = i\big(f(x)\big) = f(x)$$

En definitiva, la descomposición canónica de la aplicación f es:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \\ A/\mathcal{E}_f \arrow[r, "b"] & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$$f = i \circ b \circ p$$

p proyección canónica de A en $A/\mathcal{E}_f$
b biyección canónica de $A/\mathcal{E}_f$ en $f(A)$
i inyección canónica de $f(A)$ en B

Ejemplo 3.62 Veamos la descomposición canónica de la función

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

En este caso, $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ y la relación de equivalencia que define f es

$$x \,\mathcal{E}_f\, x' \qquad \text{si y sólo si} \qquad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x'$$

y en consecuencia:

$$[x] = \{x' \in \mathbb{R} \mid x' = x + 2k\pi \text{ o } x' = \pi - x + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

Obsérvese que siempre existe un único representante de cada clase en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$f = i \circ b \circ p$$

p proyección canónica de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}/\mathcal{E}_f$
b biyección canónica de $\mathbb{R}/\mathcal{E}_f$ en $[-1,1]$
i inyección canónica de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}/\mathcal{E}_f \arrow[r, "b"] & {[-1,1]} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Equipotencia de conjuntos

La existencia de una biyección entre dos conjuntos A y B permite emparejar cada elemento de A con un único elemento de B, y podemos decir de manera coloquial, que si A y B tienen un número finito de elementos, entonces el conjunto A tiene tantos elementos como el conjunto B.

Dos conjuntos A y B se dicen equipotentes si y sólo si existe una biyección entre ellos, y se denota $A \equiv B$.

La equipotencia de conjuntos satisface las propiedades siguientes:

1. *P. reflexiva:* $A \equiv A$ puesto que la aplicación identidad es una biyección.

2. *P. simétrica:* Si $A \equiv B$, entonces existe $f \in \mathcal{F}(A,B)$ biyección. Como la aplicación inversa $f^{-1} \in \mathcal{F}(B,A)$ es biyectiva, se deduce que $B \equiv A$.

3. *P. transitiva:* Si $A \equiv B$ y $B \equiv C$, entonces existen dos biyecciones $f \in \mathcal{F}(A,B)$ y $g \in \mathcal{F}(B,C)$. Entonces la aplicación $g \circ f \in \mathcal{F}(A,C)$ es una biyección, por tanto $A \equiv C$.

Diremos que es una "relación de equivalencia" entre conjuntos. Ponemos comillas porque en las relaciones de equivalencia definidas en la sección 3.2, el marco de la relación es un conjunto. En este caso el marco es la colección de todos los conjuntos que no es un conjunto.

Definición 3.63 Se denomina:

- **Cardinal 0**: es la colección de todos los conjuntos equipotentes con $\emptyset$, y se representa con el símbolo del número 0.
- **Cardinal n**: es la colección de todos los conjuntos que son equipotentes con $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^*$, y se representa con el símbolo del número n.
- **Cardinal de $\mathbb{N}$ o $\aleph_0$**: es la colección de todos los conjuntos equipotentes con $\mathbb{N}$, y se representa por el símbolo $\aleph_0$.
- **Cardinal de $\mathbb{R}$ o $\mathfrak{c}$**: es la colección de todos los conjuntos equipotentes con $\mathbb{R}$, y se representa con $\mathfrak{c}$.

En general, dado un conjunto A, llamaremos cardinal de A, $\mathrm{Card}(A)$, a la colección de todos los conjuntos equipotentes con el conjunto A. Se denomina también **número cardinal**.

Decimos que el conjunto A tiene n elementos siendo $n \in \mathbb{N}^*$ si y sólo si

$$\mathrm{card}(A) = n$$

En conjuntos finitos el concepto de número cardinal está intuitivamente asociado con el recuento del número de elementos del conjunto.

Sean un conjunto A que contiene n elementos, y un conjunto B que tiene m elementos. Las siguientes observaciones son intuitivas y posiblemente el lector ya las conoce. Se estudiarán con más rigor y precisión en el capítulo 5:

- Si $n < m$, entonces no existen aplicaciones sobreyectivas de A a B, puesto que siempre existirá un elemento de B que no estará relacionado con ningún elemento de A.
- Si $n \leqslant m$, entonces se pueden definir tantas aplicaciones inyectivas como variaciones sin repetición hay de m elementos tomados de n en n, es decir, el número de aplicaciones inyectivas distintas es $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.
- Si $n > m$, entonces no existen aplicaciones inyectivas de A a B, puesto que para definir la imagen de todos los elementos de A se tiene que repetir alguna imagen.

- Si $n = m$, entonces se pueden definir tantas aplicaciones biyectivas como permutaciones de n elementos distintos hay, es decir, hay $n!$ biyecciones distintas de A a B.
- Si $n \neq m$, entonces no existen aplicaciones biyectivas entre A y B, puesto que $n < m$ o $n > m$ y esto impide ser sobreyectiva o ser inyectiva.

Una aplicación entre los conjuntos A y B queda determinada al precisar la imagen de cada elemento de A. Si el conjunto A tiene n elementos y el conjunto B tiene m elementos, entonces cada aplicación es una variación con repetición de los m elementos de B tomados de n en n. Por lo tanto, el conjunto de todas las aplicaciones de A a B, $\mathcal{F}(A, B)$, tiene m^n aplicaciones distintas.

Definición 3.64

- Un conjunto A es **finito** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{card}(A) = n$.
- Un conjunto A es **infinito** si no es un conjunto finito.
- Un conjunto A es un **conjunto numerable** si existe una biyección de los números naturales al conjunto, y se indica escribiendo $\operatorname{card}(A) = \aleph_0$.

Ejemplo 3.65 **Identificación de conjuntos**

Sean dos conjuntos A y B tales que existe una biyección f entre ambos, es decir $A \equiv B$. Entonces a cada subconjunto A_1 de A le corresponde un subconjunto $f(A_1)$ y sólo uno de B, puesto que $f^{-1} \circ f(A_1) = A_1$.

En este caso a cualquier operación de conjuntos que se realice en A, le corresponde la operación análoga en B con las imágenes de los elementos de A. En algunos casos operar en B resulta más cómodo que en A debido a la naturaleza de los elementos del conjunto B. En estos casos tan sólo ha de operarse en B y posteriormente aplicar la biyección f^{-1}.

Un ejemplo de biyección es la identificación que se produce entre los conjuntos $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ con el conjunto $\mathbb{R}^3$ con la biyección $f((x, y), z) = (x, y, z)$, o en general, entre los conjuntos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{n+m}$ mediante la aplicación:

$$f\big((x_1, \ldots, x_n), (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})\big) = (x_1, \ldots, x_m)$$

Otro ejemplo es la identificación del conjunto de vectores libres del plano o del espacio con el conjunto $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ mediante las coordenadas de un vector respecto a una base.

En general, este tipo de identificaciones es muy útil si la biyección conserva las estructuras algebraicas de los conjuntos, cuestión que excede los contenidos de este capítulo y que se tratará en capítulos posteriores.

Ejemplo 3.66 **Inmersión de conjuntos**
Dados dos conjuntos A y B tales que existe una inyección f entre ambos, entonces resulta que f es una biyección entre A y $f(A)$, es decir $A \equiv f(A)$. Entonces algunas veces se identifica el conjunto A con $f(A)$ y en lugar de considerar los elementos de A, se consideran los de $f(A)$.
Por ejemplo, la identificación entre el conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant z\}$ mediante la aplicación que al número natural n le corresponde el número entero (clase de equivalencia, véase el ejemplo 3.9) que contiene al par $(n, 0)$.
Otro ejemplo, es la identificación de $\mathbb{Z}$ con el subconjunto de números racionales:

$$\left\{\frac{z}{1} \mid z \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}$$

En general, este tipo de inmersiones es muy útil si la inyección conserva las estructuras algebraicas de los conjuntos, cuestión que excede los contenidos de este capítulo.

Comentarios

Axioma de elección y lema de Zorn

En Matemáticas es de mucha utilidad el denominado **axioma de elección**. Antes de enunciarlo, veamos que se entiende por función de elección. Sea I un conjunto no vacío y $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Se denomina función de elección a una aplicación

$$\begin{aligned} f: \quad \{F_i \mid i \in I\} &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} F_i \\ F_i &\longmapsto f(F_i) = f_i \end{aligned}$$

tal que $f_i \in F_i$ para todo $i \in I$. Informalmente, una función de elección es una función definida sobre una familia de conjuntos no vacíos que a cada conjunto le asocia un elemento del propio conjunto.
Uno de lo enunciados del axioma de elección es:

- Enunciado de E. Zermelo: Para toda $\mathcal{F}$, familia no vacía de conjuntos no vacíos $\{F_i \mid i \in I\}$, existe una función de elección f. Es decir, tal que $f(F_i) \in F_i$ para todo $i \in I$.

Enunciado en términos más informales:

- Enunciado tradicional: Para toda $\mathcal{F}$, familia no vacía de conjuntos no vacíos, se puede elegir un único elemento de cada conjunto de $\mathcal{F}$.

Nosotros ya hemos utilizado este axioma. Por ejemplo, en el teorema 3.61 cuando demostramos que si una aplicación $f \in \mathfrak{F}(A, B)$ es sobreyectiva, entonces existe $h \in \mathfrak{F}(B, A)$ tal que $f \circ h = I_B$, utilizamos el axioma de elección. Elegíamos, simultáneamente y arbitrariamente un número, que puede ser infinito, de elementos c_y. Es decir en ese caso, el conjunto I es el conjunto B, la familia $\{F_i \mid i \in I\}$ es precisamente $\{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$ y la función de elección correspondiente es la aplicación:

$$\begin{array}{rll} c: & \{f^{-1}(y) \mid y \in B\} & \longrightarrow \bigcup\limits_{y \in B} f^{-1}(y) \\ & f^{-1}(y) & \longmapsto c(f^{-1}(y)) = c_y \end{array}$$

El concepto de función de elección permite definir el producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos. En efecto, dada la familia de conjuntos no vacíos $\{F_i \mid i \in I\}$, el producto cartesiano de $\{F_i \mid i \in I\}$, que se denota

$$\Pi_{i \in I} F_i \,,$$

es el conjunto de todas las funciones de elección sobre la familia $\{F_i \mid i \in I\}$.

- Enunciado de B. Russell: Para toda $\mathcal{F}$, familia no vacía de conjuntos disjuntos, el producto cartesiano de los conjuntos de $\mathcal{F}$ es no vacío.

El axioma de elección forma parte de los fundamentos básicos de la teoría de conjuntos: no es deducible desde la axiomática ZF, es decir es independiente de los axiomas ZF. Además, es un axioma que unido a los axiomas ZF mantiene la consistencia de ZF (K. Gödel) y a esta unión se le denomina teoría de conjuntos ZFC.

E. Zermelo introdujo el axioma de elección para demostrar el **teorema de buena ordenación** que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado.

En realidad, el axioma de elección es equivalente tanto al teorema de buena ordenación como al **lema de Zorn** que se enuncia como:
Todo conjunto ordenado no vacío en el que todo subconjunto totalmente ordenado está acotado superiormente, contiene al menos un elemento maximal.
Este lema es muy útil. Por ejemplo, se emplea para poder demostrar que el teorema de la base, todo espacio vectoral tiene una base, es también equivalente al axioma de elección.

Muchos resultados en diversas disciplinas matemáticas son consecuencia del axioma de elección o incluso equivalentes al axioma de elección. Uno de los inconvenientes de utilizar el axioma de elección es que las demostraciones no son constructivas, pues se asegura la existencia pero no se construye. En la teoría del constructivismo, donde todas las demostraciones de existencia deben hacerse mediante una construcción explícita y canónica, el axioma de elección es rechazado. Otro inconveniente es que se deduce la existencia de objetos que rompen la intuición completamente (paradoja de Banach-Tarski), sin embargo, la negación del axioma de elección elimina muchos de los resultados establecidos. Algunos matemáticos trabajan en Teoría de Conjuntos sin imponer el axioma de elección o sin negarlo.

La mayoría de la comunidad matemática acepta el axioma de elección como principio válido para demostrar nuevos resultados. Todavía hoy aparecen muchos trabajos donde se establece la equivalencia entre determinados teoremas y el axioma de elección dentro de la teoría ZF.

Orden en los números cardinales

Hemos visto como el concepto de aplicación biyectiva entre conjuntos conduce de manera natural al concepto de número cardinal. Veamos como el concepto de aplicación inyectiva permite definir una "relación"de orden en la colección de los números cardinales.

Observación: El uso de las comillas es debido a que la colección de todos los números cardinales no es un conjunto y nosotros hemos utilizado el término relación únicamente en el marco de conjuntos.

Sean a y b dos números cardinales y sean A y B dos conjuntos tales que:

$$a = \operatorname{card}(A) \quad \text{y} \quad b = \operatorname{card}(B)$$

Se dice que a es menor o igual a b, y escribimos $a \leqslant b$, si existe una aplicación inyectiva de A a B.

Es fácil ver que la definición no depende de la elección de los conjuntos A y B pues si $A \equiv A'$, $B \equiv B'$ pues tomando,

$$i' = g \circ i \circ f^{-1}$$

i inyección de A en B
f biyección de A en A'
g biyección de B en B'

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$

resulta que i' también es inyectiva.
La relación $\leqslant$ es reflexiva, pues la aplicación identidad es inyectiva, es transitiva pues la composición de aplicaciones inyectivas es una aplicación inyectiva.

La propiedad antisimétrica se deriva de un teorema que no demostraremos aquí pero sí enunciamos:

Teorema 3.67 de Cantor-Berstein-Schroeder
Dados dos conjuntos A y B, si existen dos aplicaciones inyectivas $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$, entonces existe una aplicación biyectiva entre A y B.

Enunciado en términos de cardinales sería: Para todo par de números cardinales a y b se tiene:

$$\boxed{\text{Si } a \leqslant b \text{ y } b \leqslant a \text{ entonces } a = b.}$$

Tampoco demostraremos que la relación de orden es total, es decir, para todo par de números cardinales a y b se tiene:

$$\boxed{a \leqslant b \quad \text{o} \quad b \leqslant a}$$

que enunciado en términos de conjuntos sería, dados dos conjuntos A y B, existe una aplicación inyectiva de A a B o existe una aplicación inyectiva de B a A. Este resultado se conoce como **teorema de Cantor** y es un resultado equivalente al axioma de elección.

El concepto de cardinal de Cantor permitió comparar el "tamaño"de conjuntos "infinitos", y comprobar que el cardinal de $\mathbb{N}$, $\aleph_0$, es menor que cardinal de $\mathbb{R}$, $\mathfrak{c}$. La **hipótesis del continuo, HC,** dice que no existen conjuntos cuyo cardinal sea estrictamente mayor que $\aleph_0$ y estrictamente menor que el cardinal de $\mathbb{R}$.

En la teoría ZFC se tiene que existe un número cardinal $\aleph_1$, el inmediato superior a $\aleph_0$. La HC equivale a decir: $\aleph_1 = \mathfrak{c}$. No se puede demostrar la HC en ZFC, ni su negación, así pues HC es un enunciado no decidible en esta teoría de conjuntos.