Ejercicios propuestos

1. Cada una de las relaciones lógicas siguientes define una relación en el conjunto $\mathbb{N}^*$. Estudie si cada una de las relaciones es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

   a) *x es distinto de y* *b*) *x es menor o igual a y* *c*) $x + y = 20$

   d) $x - y = 1$ *e*) *x divide a y*

   f) *xy es el cuadrado de un número natural*

2. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones en el conjunto A. Determine la validez de las siguientes proposiciones:

   a) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.

   b) Si $\mathcal{R}$ es simétrica entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.

   c) Si $\mathcal{R}$ es simétrica entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es simétrica.

   d) Si $\mathcal{R}$ es antisimétrica entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es antisimétrica.

   e) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es reflexiva.

   f) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es reflexiva.

   g) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son transitivas entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es transitiva.

   h) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son transitivas entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es transitiva.

   i) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son antisimétricas entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es antisimétrica.

   j) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son antisimétricas entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es antisimétrica.

3. Se define la relación $\mathcal{E}$ en $\mathbb{R}^*$:

$$x \mathcal{E} y \quad \text{si y sólo si} \quad xy > 0$$

   Demuestre que es una relación de equivalencia y determine el conjunto cociente.

4. Se denomina **bytes** a cada elemento del conjunto $\{0,1\}^8$ y se emplea la notación $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ para representar a $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \in \{0,1\}^8$. Estudie las propiedades que cumplen cada una de las siguientes relaciones.

   a) $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \ \mathcal{R} \ b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{7} a_n = \sum_{n=0}^{7} b_n$.

   b) $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \ \mathcal{R} \ b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{7} a_n 2^n \leqslant \sum_{n=0}^{7} b_n 2^n$.

   c) $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \ \mathcal{R} \ b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$ si y sólo si
   $\text{máx}\{a_1, a_3, a_5, a_7\} \leqslant \text{máx}\{b_1, b_3, b_5, b_7\}$.

d) $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \mathcal{R} b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$ si y sólo si
$$a_n2^n \leqslant b_n2^n \text{ para todo } n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}.$$

e) $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \mathcal{R} b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$ si y sólo si
$$b_7 < a_7 \quad \text{o} \quad \left(a_7 = b_7 \text{ y } \sum_{n=0}^{6} a_n2^n \leqslant \sum_{n=0}^{6} b_n2^n \right).$$

5. Estudie las propiedades que cumplen cada una de las siguientes relaciones definidas en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

   a) $(a_1,a_2,a_3)\mathfrak{R}(b_1,b_2,b_3)$ si y sólo si $a_3 \leqslant b_3$ o $(a_3 = b_3$ y $a_1 \leqslant b_1)$ o $(a_3 = b_3,\ a_1 = b_1$ y $a_2 \leqslant b_2)$.

   b) $(a_1,a_2,a_3)\mathfrak{R}(b_1,b_2,b_3)$ si y sólo si $a_1 \leqslant b_1$ y $a_2 \leqslant b_2$ y $a_3 \leqslant b_3$.

   c) En $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $(a_1,a_2,a_3)\mathfrak{R}(b_1,b_2,b_3)$ si y sólo si $b_1a_2 = a_1b_2$ y $b_1a_3 = a_1b_3$.

   d) $(a_1,a_2,a_3)\mathfrak{R}(b_1,b_2,b_3)$ si y sólo si hay un único subíndice $i \in \{1,2,3\}$ tal que $a_i \neq b_i$.

   e) $(a_1,a_2,a_3)\mathfrak{R}(b_1,b_2,b_3)$ si y sólo si $a_3 < b_3$ o $(a_3 = b_3$ y $a_1 < b_1)$ o $(a_3 = b_3,\ a_1 = b_1$ y $a_2 \leqslant b_2)$.

6. Se consideran el orden usual $\leqslant$ en $\mathbb{R}$ y el orden lexicográfico $\leqslant_L$ en $\mathbb{R}^2$.

   Se define la relación $\preccurlyeq$ en el conjunto $\mathbb{R}^3$ mediante:

$$(a_1,a_2,a_3) \preccurlyeq (b_1,b_2,b_3) \iff \begin{cases} a_1 < b_1 \\ \quad \text{o} \quad \big((a_2,a_3) \leqslant_L (b_2,b_3) \quad \text{y } a_1 = b_1 \big) \end{cases}$$

   Se define la relación $\ll$ en el conjunto $\mathbb{R}^3$ mediante :

$$(a_1,a_2,a_3) \ll (b_1,b_2,b_3) \iff \begin{cases} (a_1,a_2) <_L (b_1,b_2) \\ \quad \text{o} \quad \big(a_3 \leqslant b_3 \qquad \text{y} \quad (a_1,a_2) = (b_1,b_2) \big) \end{cases}$$

   Compruebe que las dos relaciones son iguales y que definen un orden total en $\mathbb{R}^3$. Exprese el intervalo final $[(1,1,1),\rightarrow)$ y el intervalo $[(0,0,0),(1,1,1)]$.

7. Defina un orden de tipo lexicográfico en $\mathbb{R}^3$ haciendo uso de lo estudiado en el problema 6. Generalice esa definición a $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Dados el orden usual $\leqslant$ en $\mathbb{R}$ y el orden producto $\leqslant_P$ en $\mathbb{R}^2$, se define la relación $\preccurlyeq$ en el conjunto $\mathbb{R}^3$ mediante:
$$(a_1,a_2,a_3) \preccurlyeq (b_1,b_2,b_3) \text{ si y sólo si } a_1 \leqslant b_1 \text{ y } (a_2,a_3) \leqslant_P (b_2,b_3).$$
   Compruebe que es una relación de orden parcial. Exprese el intervalo final $[(1,1,1),\rightarrow)$ y el intervalo $[(0,0,0),(2,1,1)]$.

9. Defina un orden producto en $\mathbb{R}^3$ haciendo uso de lo estudiado en el problema 8. Generalice esa definición a $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

10. En el plano real $\mathbb{R}^2$ dotado de un sistema de referencia se consideran los siguientes conjuntos:

    a) $A = \{(x,y) \mid 1 < x < 2, 3 \leqslant y \leqslant 4\}$ *b*) $B = \{(x,y) \mid 2 < x < 3\}$

    c) $C = \{(x,y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ *d*) $D = \{(x,y) \mid \max(x,y) = 1\}$

    e) $E = \{(x,y) \mid |x| + |y| = 1\}$ *f*) $F = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

    Estúdiese la existencia, y en su caso explicítelos, de cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales de cada uno de los conjuntos con el orden lexicográfico y posteriormente con el orden producto.

11. En el conjunto de las sucesiones de números reales, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se consideran las relaciones siguientes:

    a) $\{a_n\} \preccurlyeq \{b_n\}$ si y sólo si $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ salvo un número finito de subíndices.

    b) $\{a_n\} \backsimeq \{b_n\}$ si y sólo si $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ salvo un número finito de subíndices.

    c) $\{a_n\} \leqslant \{b_n\}$ si y sólo si $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    d) $\{a_n\} = \{b_n\}$ si y sólo si $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    Estudie si son relaciones de orden o de equivalencia. En este último caso, determine el conjunto cociente.

12. En el conjunto de las funciones reales de variable real, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, se considera las relaciones siguientes:

    a) $f \leqslant g$ si y sólo si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    b) $f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    c) $f \preccurlyeq g$ si y sólo si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ salvo un número finito de valores de x.

    d) $f \backsimeq g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ salvo un número finito de valores de x.

    Estudie si son relaciones de orden o de equivalencia. En este último caso, determine el conjunto cociente.

13. Ponga un ejemplo en cada caso de una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que sea:

    a) Inyectiva y no sobreyectiva.

    b) Sobreyectiva y no inyectiva.

c) No sobreyectiva y no inyectiva.

d) Biyectiva.

14. Identifique mediante una biyección el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos con el conjunto $\mathbb{R}^4$.

15. Determine el dominio de definición de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2} + \dfrac{1}{x^2-1}$ b) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

    c) $h(x) = \log(x^3 - x)$ d) $t(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{4-x^2}}$

16. Estudie si las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

    a) $f(x) = ax + b$, tal que $a \neq 0$ b) $g(x) = ax^2 + b$, tal que $a \neq 0$

    c) $h(x) = ax^3 + bx$, tal que $a \neq 0$ d) $t(x) = x^3$, si $x \leqslant 0$, y $t(x) = x^2$ si $0 < x$

    e) $m(x) = -\sqrt{-x}$, si $x \leqslant 0$, y $m(x) = \sqrt{x}$ si $0 < x$ f) $k(x) = \sqrt{x^2}$

17. Sean A un conjunto y $f\colon A \to A$ una aplicación tal que existe $n \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo que $f^n = I_A$. Demuestre que f es una aplicación biyectiva.

18. Se denomina:

    Circuito lógico OR a la aplicación OR : $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ definida por $\mathrm{OR}(x,y) = \text{máx}(x,y)$.

    Circuito lógico AND a la aplicación AND : $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ definida por $\mathrm{AND}(x,y) = xy$.

    Circuito lógico NOT a la aplicación NOT : $\{0,1\} \to \{0,1\}$ definida por $\mathrm{NOT}(x) = 1 - x$.

    Determine la expresión de los siguientes circuitos lógicos:

    a) $P(x,y) = \mathrm{NOT}(\mathrm{OR}(x,y))$.

    b) $\mathrm{XOR}(x,y) = \mathrm{OR}(\mathrm{AND}(x, \mathrm{NOT}(y)), \mathrm{AND}(\mathrm{NOT}(x), y))$.

    c) $\mathrm{IF}(x,y) = \mathrm{OR}(\mathrm{NOT}(x), y)$.

    d) $\mathrm{IFF}(x,y) = \mathrm{AND}(\mathrm{OR}(x, \mathrm{NOT}(y)), \mathrm{OR}(\mathrm{NOT}(x), y))$.

19. Sea el conjunto $\mathcal{P}(U)$ de las partes de un conjunto U.

    a) Determínese una aplicación inyectiva de U a $\mathcal{P}(U)$.

    b) Defina una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{P}(U)$ a U.

    c) ¿Son biyectivos $\mathcal{P}(U)$ y U?

20. Dadas dos aplicaciones $f \in \mathcal{F}(A, B)$ y $g \in \mathcal{F}(B, C)$, determine la validez de las siguientes afirmaciones, demostrándolas en caso afirmativo o poniendo un contraejemplo en caso contrario:

    a) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

    b) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

    c) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva.

    d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

21. Dada una aplicación $f \in \mathcal{F}(A, B)$, se consideran C y D dos subconjuntos de A, y E y F dos subconjuntos de B. Determine si las siguientes expresiones son ciertas:

    a) $C \subset D \Longrightarrow f(C) \subset f(D)$

    b) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$

    c) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$

    d) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$

    e) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$

    f) Si f es inyectiva, entonces$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$