Índice general

5. Aplicaciones Lineales **1**

5.1. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. 1

5.1.1. Tipos de aplicaciones 2

5.2. Propiedades de las aplicaciones lineales 2

5.3. Operaciones entre aplicaciones lineales 3

5.4. Núcleo, imagen y carácter de una aplicación lineal 4

5.5. Matriz de una aplicación lineal 8

5.5.1. Cambio de base en una aplicación lineal 9

5.6. Ejercicios 12

Tema 5

Aplicaciones Lineales

5.1. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

Sean $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Dada una aplicación

$$f : V \longrightarrow W$$

diremos que f es una **aplicación lineal** u **homomorfismo** si conserva en W las operaciones de V.

Esto se verifica si

- Conserva la suma de vectores:

$$f(v + v') = f(v) + f(v'), \quad \forall v, v' \in V.$$

- Conserva el producto de un escalar por un vector:

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v), \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos 5.1.

1. La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (2x, y + z, 3y)$ es lineal.

Solución: En efecto, respecto a la suma, se tiene que

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + (x',y',z')) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (2(x+x'), (y+y') + (z+z'), 3(y+y')) \\ &= (2x+2x', y+z+y'+z', 3y+3y') \\ &= (2x, y+z, 3y) + (2x', y'+z', 3y') = f(x,y,z) + f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Por lo que respecta al producto por un escalar,

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot (x,y,z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (2\lambda x, \lambda y + \lambda z, 3\lambda y) \\ &= (\lambda 2x, \lambda(y+z), \lambda 3y) \\ &= \lambda \cdot (2x, y+z, 3y) = \lambda \cdot f(x,y,z). \end{aligned}$$

2. La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (1, 0, 0)$ no es lineal.

   Solución: En efecto, si tomamos $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, resulta que

   $$f((x, y, z) + (x', y', z')) = (1, 0, 0),$$

   mientras que

   $$f(x, y, z) + f(x', y', z') = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) = (2, 0, 0).$$

Se pueden caracterizar las aplicaciones lineales por una sola condición, como se indica en la siguiente

Proposición 5.1. *La aplicación $f : V \longrightarrow W$ es homomorfismo si, y sólo si, $\forall v, v' \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se verifica que*

$$f(\lambda \cdot v + \mu \cdot v') = \lambda \cdot f(v) + \mu \cdot f(v').$$

Obsérvese que la definición de homomorfismo no exige que V y W deban ser espacios vectoriales distintos.

5.1.1. Tipos de aplicaciones

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo,

$$f : V \longrightarrow W$$

- Si f es inyectiva diremos que f es un **monomorfismo**.
- Si f es suprayectiva diremos que f es un **epimorfismo**.
- Si f es biyectiva diremos que f es un **isomorfismo**.

Además, en el caso particular de que $W = V$,

$$f : V \longrightarrow V$$

- Si f es una aplicación lineal diremos que f es un **endomorfismo**.
- Si f es un endomorfismo biyectivo diremos que f es un **automorfismo**.

5.2. Propiedades de las aplicaciones lineales

Si $f : V \longrightarrow W$ es aplicación lineal entre espacios vectoriales, se verifica:

- $f(0) = 0$.
- $\forall v \in V, \quad f(-v) = -f(v)$.
- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ es un sistema linelmente dependiente de vectores de V, también lo es el sistema $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)\} \subset W$.

- Si $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\} \subset W$ es un sistema libre, el sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ es también libre.

Es importante observar que la propiedad recíproca de esta última no es cierta. En efecto, hay aplicaciones para las que es posible encontrar un sistema libre $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ tal que el sistema $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\}$ sea ligado.

Por ejemplo, basta considerar la aplicación $f(x, y) = (x + y, x + y)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y el sistema libre $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Determinación de una aplicación lineal

En general, para determinar una aplicación lineal no es preciso conocer las imágenes de todos los vectores del espacio de partida; basta con disponer de las imágenes de los vectores de una base y a partir de éstos, sabiendo que la aplicación es lineal, determinar la imagen de los demás.

Esto se detalla en el siguiente

Teorema 5.2. *Sean $(V, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.*

Si V es de dimensión finita n, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de V y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq W$ es un sistema cualquiera de vectores de W, existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que

$$f(e_i) = u_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Ejemplo 5.2. Si elegimos una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$ y tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$ podemos determinar una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

En nuestro caso, tomamos la base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y los vectores $(1, 2)$, $(-1, 0)$ y $(3, -1)$ de $\mathbb{R}^2$.

La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se define a partir de las igualdades

$$f(1, 0, 0) = (1, 2), \quad f(0, 1, 0) = (-1, 0), \quad f(0, 0, 1) = (3, -1),$$

y su expresión se obtiene por linealidad, pues

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(1, 2) + y(-1, 0) + z(3, -1) = (x - y + 3z, 2x - z). \end{aligned}$$

5.3. Operaciones entre aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales y denotemos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de aplicaciones lineales de V en W.

Definición 5.1 (Suma de aplicaciones)**.** Dadas $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$, se llama **suma de f y g** a la aplicación $f + g : V \longrightarrow W$ tal que

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \qquad \forall v \in V.$$

Definición 5.2 (Producto por un escalar)**.** Si $f \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se llama **producto de** λ **por** f a la aplicación $\lambda \cdot f : V \longrightarrow W$ tal que

$$(\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot f(v), \quad \forall v \in V.$$

Puede comprobarse que las operaciones definidas dotan a $\mathcal{L}(V, W)$ de estructura de espacio vectorial: $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.

Definición 5.3 (Composición de aplicaciones)**.** Dadas las aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$, la composición $g \circ f : V \longrightarrow U$ dada por

$$(g \circ f)(v) = g(f(v))$$

es lineal.

En particular, si $V = W = U$, la composición es una operación interna en el conjunto de endomorfismos de V, que denotaremos por $\mathcal{L}(V)$.

No es difícil comprobar que la composición verifica las propiedades asociativa y distributiva, así como que el homomorfismo identidad $i_V \in \mathcal{L}(V)$ es el elemento neutro de la composición en $\mathcal{L}(V)$.

Sin embargo, la composición de aplicaciones lineales no es, en general, conmutativa.

Definición 5.4 (Grupo lineal)**.** Llamamos **grupo lineal** de V, y lo denotamos por $\mathcal{GL}(V)$, al conjunto de automorfismos de V,

$$\mathcal{GL}(V) = \{f \in \mathcal{L}(V) : f \text{ es automorfismo}\} \subset \mathcal{L}(V)$$

La composición de aplicaciones es una operación interna en $\mathcal{GL}(V)$, puesto que la composición de automorfismos es de nuevo un automorfismo.

Además, para cada $f \in \mathcal{GL}(V)$ la aplicación inversa f^{-1} es también un automorfismo y verifica que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_V,$$

siendo la identidad i_V de V el elemento neutro para la composición en $\mathcal{L}(V)$, y también en $\mathcal{GL}(V)$.

Por tanto $(\mathcal{GL}(V), \circ)$ es un grupo, y de ahí que lo denominemos grupo lineal.

5.4. Núcleo, imagen y carácter de una aplicación lineal

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y consideremos $A \subseteq V$, $B \subseteq W$.

Definición 5.5. Llamaremos **imagen directa** o imagen de A por f y lo denotaremos por $f(A)$, al conjunto

$$f(A) = \{f(v) \in W : v \in A\}.$$

Definición 5.6. Al conjunto $f(V)$ se le llama **imagen de la aplicación lineal** f y se le denota por $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \in W : v \in V\}.$$

Definición 5.7. Llamamos **imagen recíproca** o antiimagen de B por f y lo denotaremos por $f^{-1}(B)$ al conjunto

$$f^{-1}(B) = \{v \in V : f(v) \in B\}.$$

Definición 5.8. Llamamos **núcleo** de f y lo denotamos por $\mathrm{Ker}(f)$, al conjunto de vectores de V cuya imagen es el vector $0 \in W$; por tanto,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Proposición 5.3. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales V y W y sean $V_1 \subseteq V$, $W_1 \subseteq W$ subespacios vectoriales. Entonces:*

- *$f(V_1) \subseteq W$ es subespacio vectorial. Por tanto, la imagen directa de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.*
- *$f^{-1}(W_1) \subseteq V$ es subespacio vectorial. Por tanto, la imagen recíproca de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.*

La proposición anterior garantiza que tanto $\mathrm{Ker}(f)$ como $\mathrm{Im}(f)$ son subespacios vectoriales, ya que

- Por ser $\{0\}$ subespacio de W se tiene que $f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}(f) \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V.
- Por otra parte, como V subespacio vectorial de V se deduce que $f(V) = \mathrm{Im}(f) \subseteq W$ es subespacio vectorial de W.

Ejemplo 5.3. Hallar el núcleo y la imagen de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x - y)$.

Solución: Para hallar el núcleo, hacemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{(x, y, z) : f(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) : (x + y, x - y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) : x + y = 0,\ x - y = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : x = y = 0\} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \ = \ \langle (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

En general, para hallar $\mathrm{Ker}(f)$ hay que resolver un sistema lineal homogéneo.

En cuanto a $\mathrm{Im}(f)$, está formado por los elementos $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x', y') = f(x, y, z)$ para algún $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, debe ser

$$(x', y') = (x + y, x - y) = (x, x) + (y, -y) = x(1, 1) + y(1, -1)$$

de donde resulta que

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle.$$

Los siguientes resultados son útiles para calcular $\mathrm{Im}(f)$.

Proposición 5.4. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, $U \subseteq V$ un subespacio vectorial de V y $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ un sistema generador de U.*

Entonces $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)\}$ es un sistema generador del subespacio $f(U)$.

Corolario 5.1. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V.*

Entonces $\{f(e_1),\ f(e_2),\ \ldots,\ f(e_n)\}$ es un sistema generador de $Im(f)$.

Teorema 5.5 (Fórmula de las dimensiones de una aplicación lineal)**.** *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales, siendo V de dimensión finita. Se verifica la igualdad*

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(Im(f)).$$

La igualdad que da este teorema se conoce con el nombre de **fórmula de las dimensiones de una aplicación lineal.**

Ejercicio 5.1. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x - y, y + z, 3x + z),$$

se pide:

1. Probar que f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$.
2. Hallar la dimensión y las ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Hallar la dimensión y las ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Ker}(f)$.
4. Comprobar la fórmula $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Solución:

1. f es lineal, pues dados $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) \\
&\quad = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\
&\quad = (3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z', 3(\lambda x + \mu x') + \lambda z + \mu z') \\
&\quad = (3\lambda x - \lambda y, \lambda y + \lambda z, 3\lambda x + \lambda z) + (3\mu x' - \mu y', \mu y' + \mu z', 3\mu x' + \mu z') \\
&\quad = \lambda(3x - y, y + z, 3x + z) + \mu(3x' - y', y' + z', 3x' + z') \\
&\quad = \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z').
\end{aligned}$$

   Por tanto f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$.

2. Para hallar unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Im}(f)$ tomamos una base de $\mathbb{R}^3$ (por ejemplo la canónica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$). Sabemos que las imágenes por f de los vectores de la base B constituyen un sistema generador de $\operatorname{Im}(f)$. Por tanto

$$\operatorname{Im}(f) = \langle f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\rangle = \langle(3, 0, 3), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle.$$

   Para obtener una base de $\operatorname{Im}(f)$, debemos buscar un subsistema libre en el sistema generador anterior.

$$\begin{array}{lrl}
v_1 = (-1, 1, 0) & v_1 = & (-1, 1, 0) \\
v_2 = (0, 1, 1) & v_2 = & (0, 1, 1) \\
v_3 = (3, 0, 3) & v_3' = v_3 + 3v_1 = & (0, 3, 3)
\end{array}$$

Se observa que $v_3' = v_3 + 3v_1 = 3v_2$, lo que nos indica que $v_3 = -3v_1 + 3v_2$ y por tanto depende linealmente de los otros dos, que a su vez son independientes. Por tanto $\{(-1,1,0),(0,1,1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Entonces, unas ecuaciones paramétricas de este subespacio son

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -t & & \\ y & = & t & + & s \\ z & = & & & s \end{array}\right.$$

de modo que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(-1,1,0)+s(0,1,1)\} \\ & = & \langle(-1,1,0),(0,1,1)\rangle. \end{array}$$

Así, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. El subespacio $\mathrm{Im}(f)$ tiene un número de ecuaciones cartesianas o implícitas igual a (3−nº de parámetros)=1, y se obtiene sin dificultad que

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) : x+y-z=0\}.$$

3. $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (3x-y, y+z, 3x+z) = (0,0,0)\}$.

   Resolvemos el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ 3x+z & = & 0 \end{array}\right.$$
   cuya solución es $x=\lambda,\ y=3\lambda,\ z=-3\lambda$. Por tanto $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   Una base de $\mathrm{Ker}(f)$ es $\{(1,3,-3)\}$, y unas ecuaciones paramétricas son las que expresan la solución del sistema anterior,
$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & \lambda \\ y & = & 3\lambda \\ z & = & -3\lambda \end{array}\right.$$

4. Es inmediato que $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

A partir de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ se puede caracterizar una aplicación lineal, pues se verifican las siguientes proposiciones.

Proposición 5.6. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces f es epimorfismo si, y sólo si, su imagen es todo el espacio de llegada, es decir, $Im(f) = W$.*

Proposición 5.7. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces f es monomorfismo si, y sólo si,* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Si V es de dimensión finita y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, se verifica la siguiente

Proposición 5.8. *Sea V de dimensión finita y sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de de V. Entonces f es un monomorfismo si, y sólo si, $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ es un sistema libre de W.*

Corolario 5.2. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita y $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base de de V. Entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, $\{f(e_1),\ \dots,\ f(e_n)\}$ es una base de W.*

Teorema 5.9. *Dos espacios vectoriales V y W de dimensión finita son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.*

Se verifican por tanto las equivalencias

$$\begin{array}{lcl} f \text{ es inyectiva} & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f) = \{0\} & \Leftrightarrow & \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) = \dim(W) \\ & \Leftrightarrow & f \text{ es suprayectiva} & \Leftrightarrow & f \text{ es biyectiva.} \end{array}$$

Definición 5.9. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal.

Se llama **rango** de f al número

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Puede comprobarse que

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\langle f(e_1), \ldots, f(e_n)\rangle) = \mathrm{rang}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

siendo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de de V.

Estudio matricial de las aplicaciones lineales

Recordemos que el conjunto

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W : f \text{ es lineal}\}$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones ya conocidas. Además, si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, $\mathcal{L}(V, W)$ es de dimensión finita y verifica que $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = n \cdot m$.

Es más, los espacios vectoriales $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(V, W)$ son isomorfos. Eso permite definir las operaciones entre aplicaciones lineales a partir de las correspondientes operaciones entre matrices.

Si A y B son las matrices de las aplicaciones f y g en bases adecuadas, entonces

- La matriz de $f + g$ en esas bases es $A + B$.
- La matriz de λf es λA.
- $B \cdot A$ es la matriz de la aplicación $g \circ f$.

5.5. Matriz de una aplicación lineal

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y sea $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Si $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B' = \{u_1, \ldots, u_m\}$ son bases de V y W respectivamente, un vector $v \in V$ se expresa como

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Sea X_B la matriz columna de las coordenadas del vector v en la base B, es decir

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dicha matriz es la **representación matricial** de v en la base B.

Análogamente se obtiene la representación matricial de $w \in W$ en la base B', $Y_{B'}$.

Si se consideran las igualdades

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{m1}u_m \\ f(e_2) & = & \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \cdots + \alpha_{m2}u_m \\ \cdots & & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f(e_n) & = & \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \cdots + \alpha_{mn}u_m \end{array}$$

que expresan las imágenes de los elementos de la base de V en función de los de la base de W, entonces la expresión $f(v) = w$ puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o, en forma abreviada,

$$Y_{B'} = (f)_{BB'} \cdot X_B$$

En ocasiones escribiremos esta expresión como

$$Y = A \cdot X$$

sin hacer referencia a las bases de trabajo.

Esta igualdad se llama **expresión matricial de la aplicación lineal**.

La matriz $A = (f)_{BB'}$ es la **matriz de f respecto de las bases B y B'**.

Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo, la matriz A de f es siempre cuadrada, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ se dice **regular** cuando es isomorfismo. En caso contrario, f es **singular**.

Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice **regular** si existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. Si no existe tal matriz B se dice que la matriz A es **singular**. Esta matriz B, cuando existe, se llama **inversa** de A y se representa por A^{-1}.

5.5.1. Cambio de base en una aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y consideramos las bases $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V y $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ de W, dada la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ existe una matriz A (la matriz de f en las bases citadas), tal que

$$Y_{B_1} = A \cdot X_B \qquad (1)$$

siendo X_B las coordenadas de un vector de V en la base B e Y_{B_1} las coordenadas de su imagen en B_1.

Si consideramos otras bases, $B' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ de V y $B'_1 = \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_m\}$ de W, la matriz A' de la aplicación f en dichas bases verifica una igualdad similar,

$$Y_{B'_1} = A' \cdot X_{B'} \qquad (2)$$

Por otra parte podemos considerar las matrices del cambio de base en cada espacio vectorial, que son matrices regulares P y Q tales que

$$\begin{aligned} X_B &= P \cdot X_{B'} \qquad (3) \\ Y_{B_1} &= Q \cdot Y_{B'_1} \qquad (4) \end{aligned}$$

De todo ello resulta el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_B & \xrightarrow{A} & W_{B_1} \\ {\scriptstyle P}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Q} \\ V_{B'} & \xrightarrow{A'} & W_{B'_1} \end{array}$$

En él se observa cómo si en la ecuación (1), $Y_{B_1} = A \cdot X_B$, sustituimos Y_{B_1} y X_B (ver (4) y (3)), resulta

$$Q \cdot Y_{B'_1} = A \cdot P \cdot X_{B'}$$

.

Multiplicando por Q^{-1} a la izquierda (Q es regular) se obtiene

$$Y_{B'_1} = Q^{-1} \cdot A \cdot P \cdot X_{B'}.$$

Comparando esta última expresión con la igualdad (2) se deduce la igualdad

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

que es la **expresión matricial de un cambio de base** para un endomorfismo.

Veamos por último unas definiciones.

Definición 5.10 (Matrices equivalentes)**.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dos matrices del mismo orden.

Se dice que A y B son **equivalentes** si existen una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible y una matriz $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ invertible tales que

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Definición 5.11 (Matrices semejantes)**.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dos matrices cuadradas del mismo orden. Se dice que A y B son **semejantes** si existe una matriz P invertible, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Dos matrices semejantes tienen que ser necesariamente cuadradas y del mismo orden.

Ejercicio 5.2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que tiene por matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. ¿Cuál es la imagen del vector $(2, 1, -1)$ según f?
2. Calcular la matriz de f respecto de las bases $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Dada la base C de $\mathbb{R}^3$, $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, expresar el vector $v = (2, 1, -1)_C$ con respecto a la base B.
4. Comprobar que las matrices de cambio de base de B a C y de C a B son inversas.

Solución:

1. De la expresión matricial de f se sigue que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $f(2,1,-1) = (-1,0)$.

2. Sea $C' = \{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ y consideremos las bases B' de $\mathbb{R}^2$ y B, C de $\mathbb{R}^3$.

La matriz de f respecto de las bases C y C' es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

verifica la igualdad $A \cdot X_C = Y_{C'}$.

La matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^3$, de B a C, es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; verifica que $P \cdot X_B = X_C$.

La matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^2$, de B' a C', es $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; verifica la igualdad $Q \cdot X_{B'} = X_{C'}$.

Por tanto, la matriz buscada es $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$ y puesto que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

resulta

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sabemos que P es la matriz del cambio de la base B a la base C y verifica $P \cdot X_B = X_C$. Pero como queremos hacer el cambio inverso, entonces

$$\begin{aligned} P \cdot X_B = X_C \quad &\Rightarrow \quad P^{-1} \cdot P \cdot X_B = P^{-1} \cdot X_C \\ &\Rightarrow \quad X_B = P^{-1} \cdot X_C \end{aligned}$$

La matriz del cambio de la base C a la base B es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Entonces, se verifica

$$P^{-1} \cdot X_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por consiguiente, $(2,1,-1)_C = (2,-1,0)_B$.

4. Ya está comprobado en el apartado anterior, donde vimos que

$$P \cdot X_B = X_C \;\Leftrightarrow\; P^{-1} \cdot X_C = X_B.$$

5.6. Ejercicios

1. Estudiar si las aplicaciones siguientes son lineales. En caso afirmativo, calcular su núcleo e imagen.

$$
\begin{array}{llccc}
a) & f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (z, x+y, -z) \\[1ex]
b) & f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x+y, 0) \\[1ex]
c) & f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x^2+y, z, x+z)
\end{array}
$$

2. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Sea $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ dada por $f(p(x)) = p(x) - p'(x)$.

   a) Demostrar que f es endomorfismo.

   b) Demostrar que f es invertible.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_3 + x_1, 2x_1 + x_2, x_2).$$

   a) Demostrar que f es lineal.

   b) Hallar la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

   c) Haciendo uso de la expresión matricial de f en estas bases, hallar $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

4. Sean E_3 y E_4 dos espacios vectoriales de dimensiones 3 y 4 y con bases respectivas $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Sea f una aplicación lineal de E_3 en E_4 de la que se sabe que

$$f(e_1 - e_3) = u_1; \qquad f(e_2 - e_3) = u_1 - u_2; \qquad f(2e_3) = 2u_1 + 2u_3.$$

   Se pide:

   a) Matriz de f en las bases B y B'.

   b) Ecuaciones implícitas y paramétricas de $\mathrm{Im}(f)$.

   c) Núcleo de f.

   d) Ampliando una base del núcleo a una de E_3, hallar la matriz de f en dicha base y en la base B' de E_4.

5. Sean E_3 y E_4 los espacios del ejercicio anterior, y sean $B^* = \{e_1 - e_2, 2e_1 + e_2, e_1 + 3e_2 + e_3\}$ y $B'^* = \{u_2 + 2u_3 + u_4, -u_1 - 2u_3 - u_4, u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4, u_2 + u_3 + u_4\}$.

   a) Demostrar que B^* es base de E_3 y que B'^* es base de E_4.

   b) Hallar las expresiones matriciales de los cambios de coordenadas de B^* a B y de B' a B'^*.

c) Hallar las coordenadas del vector $v = e_1 + e_2$ en la base B^*.

d) Si un vector w tiene coordenadas (1,1,1) en base B^*, ¿cuáles son sus coordenadas en base B?

e) Hallar la expresión matricial de f en las bases B^* y B'^*.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión n ($n > 1$) y f un endomorfismo de V tal que $f^{n-1} \neq 0$ y $f^n = 0$ (donde 0 denota el endomorfismo nulo).

   a) Demostrar que existe un elemento $x \in V$ tal que $S = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ es una base de V.

   b) Calcular la matriz de f en la base anterior.

   c) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ en la base anterior. ¿Es f inversible?

7. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   Clasificar el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(e_1) = ae_1 + e_2 + e_3, \qquad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, \qquad f(e_3) = e_1 + be_2 + e_3,$$

   según los valores de a y b.

8. Se consideran los espacios vectoriales E, F y G siendo E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1, F las matrices siétricas de orden 2 y $G = \mathbb{R}^3$. Se definen las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} f : E \longrightarrow F & \qquad & g : F \longrightarrow G \\ f(ax+b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} & \qquad & g\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a, c, a+c) \end{array}$$

   Sean $B = \{x, 1\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B'' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ las bases canónicas de E, F y G.

   a) Demostrar que f y g son lineales.

   b) Hallar las matrices de los homomorfismos f, g y $g \circ f$ en las bases anteriores.

   c) Calcular el subespacio $(g \circ f)(V)$ siendo V el subespacio de E

$$V = \{ax + a : a \in \mathbb{R}\}$$

   d) Si en F utilizamos la base $B'_* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, hallar las matrices de f, g y $g \circ f$ en las bases B, B'_* y B''.

   e) Utilizando la expresión matricial del cambio de coordenadas de B' a B'_* hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ en la base B'_*.

   f) Hallar $g^{-1}(2,2,4)$, $\quad g^{-1}(1,3,0)$, $\quad f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demostrar o negar con un contraejemplo, según corresponda.

   a) Dado E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : E \longrightarrow E$ aplicación tales que se verifican

   $$f(-\alpha x) = -\alpha f(x), \qquad f(x-y) = f(x) - f(y), \qquad \forall x, y \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

   entonces f es lineal.

   b) Si E y F son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $f : E \longrightarrow F$ y $g : E \longrightarrow F$ son monomorfismos, entonces $f + g$ es monomorfismo.

10. Consideremos los espacios vectoriales de matrices $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Sea

   $$M(a,b,c) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

   subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   a) Hallar una base de $M(a,b,c)$.

   b) Hallar una aplicación lineal $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Im}(f) = M(a,b,c)$.

   c) Hallar una aplicación lineal $g : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(g) = M(a,b,c)$.

   d) ¿Puede algún homomorfismo de *b*) ser monomorfismo?

   e) Puede algún homomorfismo de *c*) ser epimorfismo?

11. Sea $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es aplicación}\}$. E es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y producto por un escalar usuales. Sea $S = \{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$. Se pide:

   a) Probar que S es libre y obtener el subespacio U engendrado por S.

   b) Si T es la aplicación lineal

   $$T : U \longrightarrow U \quad \text{donde} \quad T(f(x)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

   1) Obtener la matriz A de T en la base S.
   2) Hallar $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ y dar la dimensión una base una base de cada uno de ellos. Clasificar T.
   3) Dado el vector $f(x) = 2e^{3x} + 4xe^{3x} - (x^2+4)e^{3x}$, determinar su imagen utilizando la matriz A y comprobar el resultado mediante derivación.
   4) Si consideramos $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de U dada por

   $$v_1 = e^{3x} + 2x^2e^{3x}, \quad v_2 = xe^{3x}, \quad v_3 = (-1+x^2)e^{3x},$$

   hallar la matriz de T en la base B.

12. Sea $P_3(x) = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$, y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de tamaño 2 definidas sobre $\mathbb{R}$.

   Consideremos la aplicación $f : P_3(x) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por

   $$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} d & c+b \\ c-b & a \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que es lineal.

b) Demostrar que $B = \{1, 1+x, 1+x^3, x+x^2\}$ es una base de $P_3(x)$.

c) Obtener una base B' del subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ siguiente:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} d & c+b \\ c-b & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

¿Es B' una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

d) En caso de ser afirmativa la respuesta al apartado anterior, hallar la expresión matricial de f referida a las bases B y B'.

e) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

f) Clasificar f.

13. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_4, \qquad f(e_2) = 4e_2 + e_3 - 2e_4,$$
$$f(e_3) = -2e_1 - 4e_2 - 2e_3 + 2e_4, \qquad f(e_4) = -e_1 - 6e_2 - 2e_3 + 3e_4.$$

a) Hallar $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

b) Completar una base de $\mathrm{Ker}(f)$ hasta una base de $\mathbb{R}^4$.

c) Hallar la matriz de f en la base de $\mathbb{R}^4$ obtenida en el apartado anterior.

14. Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sea $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y sean B' y B'' las siguientes bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $b \in \mathbb{R}$ y f es la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y+3z & by+z \\ 3x+4y+4z & x+3y+z \end{pmatrix} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

se pide:

a) Hallar $A = (f)_{BB'}$ y $C = (f)_{BB''}$. Dar las expresiones matriciales correspondientes. ¿Qué relación hay entre las matrices A y C?

b) Hallar $f(1,1,0)$ haciendo uso de ambas expresiones matriciales y comprobar que los resultados coinciden.

c) Discutir el subespacio $\mathrm{Im}(f)$ en función del parámetro b, dando su dimensión y una base en cada caso.

d) Hallar la antiimagen por f de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es este conjunto un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

e) Para $b = -5$:

1) Hallar $T = f^{-1}((0))$, donde (0) representa la matriz nula del espacio $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. ¿Qué representa este subespacio T? Dar unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas suyas.
2) Dar un subespacio suplementario para T.
3) ¿Puedes dar un subespacio U tal que $U \cap T \neq \{(0,0,0)\}$ y $T \nsubseteq U$?