# Ejercicios propuestos

1. Demuestre, en forma binómica, todas las propiedades de la suma y el producto de los números complejos que hacen que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sea un cuerpo.

2. Determine el número real $a$ para que $z = \dfrac{a+6i}{2-i}$,

   *a)* sea un número real,

   *b)* sea imaginario puro,

   *c)* represente un punto de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

3. Exprese en forma binómica los siguientes números complejos:

   *a)* $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$ *b)* $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$ *c)* $\dfrac{1+ia}{2a+i(a^2-1)}$, $a \in \mathbb{R}$

4. Demuéstrese que si $z, z' \in \mathbb{C}$ son tales que $zz' \neq -1$ y $|z| = |z'| = 1$, entonces $w = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ es un número real.

5. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 = \overline{z}$.

6. Halle, en $\mathbb{C}$, las soluciones de las ecuaciones:

   *a)* $z^{10} + 2z^5 + 1 = 0$

   *b)* $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$

   *c)* $z^6 + z^3(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$.

7. Dados dos números complejos $z$ y $z'$, demuestre las identidades siguientes:

   *a)* $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z \cdot \overline{z'}) + |z'|^2$

   *b)* $|z-z'|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z \cdot \overline{z'}) + |z'|^2$

   *c)* $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interprete geométricamente esta igualdad.

   *d)* Sea $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ una constante. Demuestre que la ecuación de la circunferencia de radio $r$ centrado en un punto $\Omega$ de afijo $w$ es $|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) + |w|^2 = r^2$

8. *a)* Sean $a$, $b$ y $c$ tres números complejos tales que $a \neq 0$ . Se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación $az^2 + bz + c = 0$. Sean $z_1$ y $z_2$ las soluciones de la ecuación. Exprese la suma $z_1 + z_2$ y el producto $z_1 \cdot z_2$ de las raíces de la ecuación, en función de $a$, $b$ y $c$.

*b*) Sean $b$ y $c$ dos números complejos y la ecuación $z^2 + bz + c = 0$ en $\mathbb{C}$. Sean $z_1$ y $z_2$ las soluciones de la ecuación.

1) Demuestre que si se cumple que $|z_1| = |z_2| = 1$, entonces $|c| = 1$, $|b| \leqslant 2$ y $\arg(c) = 2\arg(b)$.

2) ¿Es cierto el recíproco?

9. Sean $P$ y $Q$ los puntos de afijos $z$ y $1 + z^2$ respectivamente, con $z \in \mathbb{C}$.

*a*) Halle el conjunto de los puntos $P$ tales que las rectas $OP$ y $OQ$ son perpendiculares.

*b*) Halle el conjunto de los puntos $P$ tales que $O$, $P$, y $Q$ están alineados.

10. Obténgase $\cos 5\alpha$ y $\operatorname{sen} 5\alpha$ en función de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$. Dedúzcase el valor de $\cos\dfrac{\pi}{10}$.

11. Demuestre, por inducción, la fórmula de Moivre.

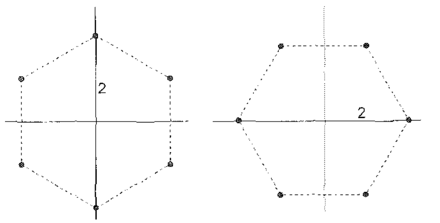
12. En el conjunto $\mathfrak{U}_n$, definido en el ejemplo 7.11, de las raíces $n$-ésimas de la unidad, compruébese que para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ se cumple que

$$z_k = (z_1)^k \ .$$

Dedúzcase que $(\mathfrak{U}_n, \cdot)$ es un grupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}/(n), +)$.
¿Tiene $(\mathfrak{U}_n, +, \cdot)$ estructura de cuerpo?

13. Halle la suma y el producto de las raíces $n$-ésimas de la unidad.

14. Halle los números complejos correspondientes a los vértices de los siguientes hexágonos.




15. Sean los puntos $A$, $B$ y $C$ de afijos respectivos $e^{i\pi}$, $2\,e^{i(\pi/2)}$ y $3\sqrt{2}\,e^{i(\pi/4)}$. Calcule las coordenadas del punto $D$ para que $ABCD$ sea un paralelogramo y halle las coordenadas del centro del paralelogramo.

16. Halle las coordenadas de los vértices de un cuadrado de centro el punto $(1, 1)$ sabiendo que uno de los vértices es el punto $(2, \sqrt{3} + 1)$.

17. Dado el punto $M$ de coordenadas $(b, c)$, le asociamos la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 2bz + c = 0 \tag{7.4}$$

Determine el conjunto de puntos tales que:

*a*) Las raíces de la ecuación (7.4) no sean reales.

*b*) Las raíces de la ecuación (7.4) sean reales y distintas.

*c*) Las raíces de la ecuación (7.4) sean iguales.

*d*) Las raíces $z_1$ y $z_2$ de la ecuación (7.4) verifican la desigualdad $|z_1 - z_2| < \varepsilon$, siendo $\varepsilon$ un número real tal que $\varepsilon > 0$.

18. **Enteros de Gauss**
Sea $\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ de $\mathbb{C}$ restringidas a $\mathcal{G}$.

*a*) Demuestre que $(\mathcal{G}, +, \cdot)$ es un anillo.

*b*) Determine el conjunto $\mathcal{J} = \{z \in \mathcal{G} \mid z \text{ es invérsible en } \mathcal{G}\}$. Demuestre que $(\mathcal{J}, \cdot)$ es un grupo.

19. Se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación polinómica

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0\,,$$

siendo $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

*a*) Demuestre que si $z_1 \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación, también es solución de la ecuación $\overline{z_1}$.

*b*) Dedúzcase, utilizando el teorema fundamental del Álgebra, que todo polinomio de coeficientes reales admite una descomposición en polinomios de grado 1 o 2 con coeficientes reales.