Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Segunda PEC, Sistemas Lineales y Espacios Vectoriales.

19 de diciembre de 2023

En las preguntas 1 a 4 determine cuál es la opción correcta y justifique por qué. Todas las respuestas y resultados de los ejercicios tienen que estar suficientemente justificados. Si utiliza operaciones elementales en la resolución de los ejercicios indique explícitamente cuáles.

1. (1 punto) Sea $AX = B$ es un sistema lineal de $m > 3$ ecuaciones y n incógnitas. Denotamos por $C_i(A)$ a la columna $i-$ésima de A. Si la forma de Hermite por filas de $(A|B)$ tiene exactamente dos filas nulas, entonces
   (a) el número de incógnitas del sistema es mayor que $m-2$.
   (b) una condición necesaria para que sea compatible es $B = a_1C_1(A) + \cdots + a_{n-1}C_{n-1}(A)$.
   (c) si $B = C_1(A) + C_n(A)$ y $n = m-2$ el sistema es compatible determinado.

2. (1 punto) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores linealmente dependientes de un espacio vectorial V de dimensión mayor que 0. Entonces, la afirmación "suprimiendo algún vector de S se puede encontrar un subconjunto $\mathcal{B} \subset S$ que es una base de V" es
   (a) cierta pues todo conjunto de vectores linealmente dependiente contiene un subconjunto linealmente independiente.
   (b) cierta sólo si $m > \dim(V)$.
   (c) es falsa salvo el caso en que S sea un sistema generador de V.

3. (1 punto) Si U y W son dos subespacios de un subespacio vectorial V tales que el número de ecuaciones implícitas de U es p y el de W es q, con $p < \dim(V)$ y $q < \dim(V)$; se cumple que
   (a) si $p + q < \dim(V)$, entonces $U \cap W \neq \{0\}$
   (b) si $p + q = \dim(V)$, entonces $U + W = V$
   (c) Si U y W son suplementarios en V, entonces $p + q > \dim(V)$

4. (1 punto) Sea P el plano de $\mathbb{K}^4$ de ecuaciones $\{x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$ y $\mathbb{K}^4/P$ el subespacio vectorial cociente $\mathbb{K}^4$ módulo P. Entonces, una base de $\mathbb{K}^4/P$ es
   (a) $\{(1,1,0,0) + P,\ (0,1,0,0) + P\}$
   (b) $\{(1,1,0,0) + P,\ (0,0,1,1) + P\}$
   (c) $\{(1,0,0,0) + P,\ (0,1,0,0) + P\}$

Ejercicio 1.(2.5 puntos) Discutir y resolver el sistema lineal $AX = B$ para los distintos valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{K}$, siendo

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 3 & a & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & a & b \end{array}\right)$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_6\}$ una base de $\mathbb{K}^6$ y $S = \{u_1, \ldots, u_6\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{K}^6$ cuya matriz de coordenadas por columnas respecto de $\mathcal{B}$ es la matriz A de orden 6 con entradas

$$a_{ii} = 0,\ a_{ij} = 1 \text{ si } i < j,\ a_{ij} = -1 \text{ si } i > j;\ \text{para } i, j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Sabiendo que S es otra base de V, determine las coordenadas del vector $v_1 + \cdots + v_6$ respecto de S.

Ejercicio 3. (1.5 puntos) En el espacio vectorial $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios $U = L((1,0,1,1),\ (1,2,0,0))$ y $W = L((0,1,-1,0), (1,1,-1,2))$. Determine una base y unas ecuaciones implícitas de los subespacios $U + W$ y $U \cap W$.