Examen de Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- A) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcular el valor de a para que $det(A.B^t) = det(B^t.A)$. (B^t es la matriz la traspuesta de B) (1 punto)

B) Si dos matrices no necesariamente cuadradas A,B cumplen que $A.B = I_n$ (matriz identidad de orden n), demostrar que entonces ambas tienen rango máximo. (1, 5 puntos)

2.- Sea $f : R^4 \to R^4$ una aplicación lineal y a un escalar que cumple las siguientes propiedades: i) $f(0,0,0,1) = (0,0,1,1)$ y $f(0,0,1,0) = (a,1,1,1)$. ii) $ker(f)$ contiene al subespacio vectorial $H = \{(x,y,z,t) \mid t = y + z = 0\}$.

A) Calcular la dimensión del núcleo y una base de la imagen de f. (2 puntos)

B) Calcular el rango en función de a de la matriz M de f respecto a la base estándar. (2 puntos)

3.- Dados tres vectores linealmente independientes u_1,u_2,u_3 en un espacio vectorial E, se considera los subespacios $V = L(u_1 - u_2, u_2 - u_3)$ y $W = L(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3)$.

A) ¿Cuál es la dimensión de $V \cap W$ y $V + W$?. (2 puntos)

B) Encontrar una base de $V \cap W$. (1,5 puntos)