Modificaciones del capítulo IV

En la segunda edición revisada del texto base (2015) hemos simplificado la definición de subanillo. Los alumnos que no tengan esta última versión del texto base deben incorporar las modificaciones que se indican al texto que tengan.

Hemos simplificado la definición de subanillo de manera que la definición que ahora adoptamos sea independiente de que el anillo sea unitario o no lo sea. Concretamente la definición de subanillo y la observación de la página 136 se reducen a:

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y sea H un subconjunto no vacío de A donde consideramos las restricciones de las operaciones de A. Se dice que H es un **subanillo** de A si $(H, +, \cdot)$ es a su vez un anillo. En particular, el subconjunto unitario $H = \{0\}$ con las operaciones restringidas de A y el propio anillo A son subanillos de A.

Observación Muchos autores engloban bajo el término "anillo" a lo que nosotros hemos llamado anillo unitario. En ese caso un subanillo en su terminología es un subanillo unitario en la nuestra.

Este pequeño cambio simplifica la proposición 4.24 de la página 137 y algunos detalles más que señalamos a continuación.

Proposición 4.24 Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo y H un subconjunto no vacío de A. H es un subanillo de A si y sólo si para todo $a, b \in H$ se cumple:

i) $a - b \in H$

ii) $ab \in H$

En el ejercicio 4.25 se simplifica la solución:

Ejercicio 4.25 Demuestre que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, con la suma y producto usuales, es un subanillo de $\mathbb{R}$.

Solución Como ya vimos en el ejercicio 4.15, $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ era un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Sólo tenemos que demostrar que el producto es interno en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. De

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2}$$

se deduce que el producto es interno en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. En consecuencia, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un subanillo de $\mathbb{R}$. Además, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un subanillo unitario pues $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. $\square$

El ejercicio 4.26 se plantea de manera distinta:

Ejercicio 4.26 ¿Es $n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ un subanillo unitario de $\mathbb{Z}$ para $n \geqslant 2$?
Solución Ya demostramos en el ejercicio 4.16 que $n\mathbb{Z}$ era un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$, y claramente si $a, b \in n\mathbb{Z}$ entonces $ab \in n\mathbb{Z}$. Sin embargo, $1 \notin n\mathbb{Z}$. En este caso, $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un subanillo no unitario del anillo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. □

Finalmente, en la resolución del ejercicio 8 de este capítulo de la página 311, hay que eliminar la última línea:
"Además, si A es un anillo unitario entonces $1 \in H_1$ y $1 \in H_2$ y así $1 \in H_1 \cap H_2$."