Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2023, segunda semana.

En cada pregunta hay una única opción correcta. Cada pregunta acertada: 1 punto; cada pregunta incorrecta: $-0,5$ puntos. Las preguntas sin contestar no suman ni restan puntos. Entregue únicamente la hoja de respuestas.
Material permitido: un único libro de teoría de Álgebra Lineal.

1. Si A y B son dos matrices de orden n, no nulas, distintas, tales que las filas de A son combinaciones lineales de las filas de B, entonces

   (a) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$

   (b) A y B pueden tener el mismo determinante.

   (c) Si B es invertible, A también es invertible.

2. Determine cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ **no** es un subespacio vectorial:

   (a) El formado por las matrices de orden n simétricas.

   (b) El formado por las matrices de orden n de traza igual a 0.

   (c) El formado por las matrices de orden n invertibles.

3. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son dos conjuntos distintos de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V, entonces

   (a) Los subespacios $L(u_1, \ldots, u_k)$ y $L(v_1, \ldots, v_k)$ son suplementarios si $\dim(V) = 2k$.

   (b) $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}$ pueden generar un subespacio de V dimensión k.

   (c) $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}$ no puede ser una base de V.

4. Si A y B son dos matrices reales de orden n no nulas, entonces

   (a) Si A y B son idempotentes, entonces $\operatorname{tr}((A+B)(A-B)) = \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(B)$.

   (b) $\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

   (c) Si A es simétrica, entonces $\operatorname{tr}(A^2)$ puede ser igual a 0.

5. Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones y n incógnitas y $H_f(A)$ la forma de Hermite por filas de A. Entonces, el sistema es

   (a) compatible para todo B si $H_f(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, con $r < m$.

   (b) es incompatible si $A \sim_f \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline C \end{array}\right)$

   (c) puede ser compatible indeterminado si $H_f(A)$ tiene menos de n pivotes.

6. Sea $q(x) \in \mathbb{K}_2[x]$ un polinomio no nulo de grado menor o igual que 2, y $f : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = p(x) - q(x)p'(x)$, donde $p'(x)$ denota la derivada del polinomio $p(x)$ de $\mathbb{K}_2[x]$. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (a) f es inyectiva para todo $q(x)$.

   (b) Si $q(x)$ es un polinomio de grado 1, entonces f no es inyectiva.

   (c) Grado de $q(x)$ igual a 1 es una condición necesaria, pero no suficiente, para que f no sea inyectiva.

7. Sea U_b el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, formado por el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $A_b X = 0$ con

$$A_b = \begin{pmatrix} b+1 & 3-b & 0 & b+1 \\ b+2 & 3-2b & 1 & 2b+1 \\ -1 & b & 1 & -b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b \in \mathbb{K}$$

   Estudie el rango de la matriz A_b y determine la opción correcta:

   (a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces U_b es una recta de $\mathbb{K}^4$ para todo b.

   (b) Existen valores de b para los cuales U_b es un plano de $\mathbb{K}^4$.

   (c) El rango de A_b es menor que 3 para dos valores distintos del parámetro b.

8. Sea U_b el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$ dado en la pregunta anterior. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $b^2 = -3$, entonces:

   (a) U_b contiene al plano de ecuaciones $\{x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$.

   (b) U_b está contenido en el hiperplano de ecuación $x_4 = 0$.

   (c) Una base de U_b es $\{(b, 1, b, 1)\}$

9. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que cumple:

$$f(1,0,0,0) = (1,0,2,2),\ \ f(1,1,0,0) = (1+a,3,1,3) \ \ \text{y} \quad \mathrm{Ker}(f) \equiv \{x_1 = x_2 = x_3\}$$

   La matriz de f_a respecto a la base canónica es

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & a & -a & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & a & -1-a & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & a & -1-a & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal de la pregunta anterior. Si llamamos $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, se cumple que

   (a) La imagen inversa del plano $P \equiv \{2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0,\ 4x_1 + (2a-1)x_3 - (2a+1)x_4 = 0\}$ es el espacio $\mathbb{K}^4$.

   (b) Los vectores $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$ generan el subespacio de ecuación $2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0$.

   (c) El subespacio $\mathrm{Im}(f)$ tiene ecuaciones $\{-6x_1 + (2a+1)x_2 + 3x_3 = 0,\ 4x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$.

Soluciones

1. Si A y B son dos matrices de orden n no nulas, distintas, tales que las filas de A son combinaciones lineales de las filas de B, entonces $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$, pero no tienen por qué coincidir. Por ejemplo: si $F_i(A) = F_1(B)$, para todo $i = 1, \ldots, n$; con $\mathrm{rg}(B) > 1$, se cumple que $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq 1 < \mathrm{rg}(B)$. Por el mismo motivo puede ser B invertible, es decir $\mathrm{rg}(B) = n$, y A no invertible si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(B)$

   Las matrices A y B pueden tener el mismo determinante. Por ejemplo, si obtenemos A realizando a B operaciones elementales de filas de tipo II (sumar a una fila un múltiplo de otra), se cumple que $\det(A) = \det(B)$ y todas las filas de A son combinaciones lineales de las filas de B. La opción correcta es (c).

2. El subconjunto de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices invertibles no es un subespacio vectorial pues la operación suma de matrices no es cerrada en dicho subconjunto: Por ejemplo: I_n y $-I_n$ son dos matrices invertibles, pero su suma $I_n - I_n = 0_n$ no es invertible.

3. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son dos conjuntos distintos de vectores linealmente independientes, se tiene que $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k) = k$. Los vectores $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}$ generan un subespacio de dimensión igual a

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)$$

   que es igual al número máximo de vectores linealmente independientes contenidos en $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}$. Este número puede ser igual a k si cada v_i es combinación lineal de los vectores $\{u_1, \ldots, u_k\}$, lo que hace que (b) sea la opción correcta. Un ejemplo: si $v_i = -u_i$, para $i = 1, \ldots, k$.

   La opción (a) es incorrecta pues, aunque $\dim V = 2k$, los vectores $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}$ no tienen por qué ser linealmente independientes, por lo que $L(u_1, \ldots, u_k)$ y $L(v_1, \ldots, v_k)$ no serían suplementarios.

   La opción (c) es incorrecta pues, ya que los vectores $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}$ pueden ser una base de V si son linealmente independientes y $\dim V = 2k$.

4. Si A y B son dos matrices reales de orden n no nulas idempotentes, es decir $A^2 = A$ y $B^2 = B$, entonces

$$\mathrm{tr}((A+B)(A-B)) = \mathrm{tr}(A^2 - AB + BA - B^2) = \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(BA) - \mathrm{tr}(B^2)$$

   Utilizando la propiedad de la traza $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ se tiene

$$\mathrm{tr}((A+B)(A-B)) = \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(B^2) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B)$$

   Lo que hace correcta la opción (a).

   La opción (c) es falsa. Si A es simétrica, entonces

$$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

   Siendo $A \neq 0$ una matriz real, esta cantidad siempre es positiva. El resultado no sería cierto si A fuese compleja. Por ejemplo, si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ se tiene que $\mathrm{tr}(A^2) = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$.

   Un contraejemplo para la opción (b) es el caso $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = I_2$.

5. Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones y n incógnitas y $H_f(A)$ la forma de Hermite por filas de A. Si $H_f(A)$ tiene r pivotes, con $r < n$, entonces $\mathrm{rg}(A) = r$ menor que el número de incógnitas. Por tanto, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema será compatible indeterminado si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$, o bien, incompatible si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|B)$. La única opción correcta es la (c).

   Un contraejemplo para (a) es $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   La opción (c) es incorrecta pues si $A \sim_f \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline C \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right)$ y basta tomar $B = 0$ para que el sistema $AX = B$ sea equivalente al sistema con matriz ampliada $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, y por tanto compatible.

6. Sea $q(x) \in \mathbb{K}_2[x]$ un polinomio no nulo de grado menor o igual que 2, y $f : \mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = p(x) - q(x)p'(x)$. La aplicación es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

   $$\mathrm{Ker}(f) = \{p(x) : f(p(x)) = 0\} = \{p(x) : p(x) = q(x)p'(x)\}$$

   Para que se cumpla la condición $p(x) = q(x)p'(x)$ para algún polinomio no nulo $p(x)$, es necesario que el grado de $q(x)$ sea igual a 1. Entonces, si $q(x)$ es un polinomio no nulo de grado 0 o 2, f es inyectiva.

   Veamos qué pasa en el caso $q(x) = bx + c$ de grado 1. Si q tiene grado 1 ¿es f no inyectiva? ¿depende del polinomio concreto q? Lo más sencillo, sin necesidad de abordar el caso general, es experimentar con algún ejemplo. Si $q(x) = 2x$ y $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces la ecuación $p(x) = q(x)p'(x)$ es igual a

   $$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 2x(2a_2x + a_1) \Rightarrow a_2 = a_1 = a_0 = 0 \Rightarrow p(x) = 0$$

   por lo que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ y f es inyectiva. Por tanto, que $q(x)$ tenga grado 1, es una condición necesaria pero no suficiente para que f no sea inyectiva. Lo que hace (c) la opción correcta.

   Un contraejemplo para (b) es el caso $q(x) = x$, para el que $\mathrm{Ker}(f) = \{ax : a \in \mathbb{K}\}$, siendo f no inyectiva.

7. Sea U_b el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$ formado por el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $A_bX = 0$ con

   $$A_b = \begin{pmatrix} b+1 & 3-b & 0 & b+1 \\ b+2 & 3-2b & 1 & 2b+1 \\ -1 & b & 1 & -b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b \in \mathbb{K}$$

   La dimensión de U_b es $\dim(U_b) = 4 - \mathrm{rg}(A_b)$, por lo que tenemos que estudiar el rango de la matriz A_b para dar respuesta a esta pregunta. Además, para responder a la siguiente pregunta tenemos que resolver el sistema $A_bX = 0$, por lo que lo mejor es transformarlo en uno escalonado equivalente. Realizando operaciones elementales de filas tenemos que

   $$A_b \sim_f \begin{pmatrix} 1 & -b & 1 & b \\ 0 & 3+b^2 & -b-1 & 1-b^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A'_b$$

Entonces, Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matriz tiene 3 pivotes y su rango es 3 para todo $b \in \mathbb{R}$; por lo que U_b es una recta de $\mathbb{K}^4$ para todo b. La opción correcta es la (a).

8. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $b^2 = -3$, es decir, $b = \pm\sqrt{3}$, la matriz A_b' es

$$\begin{pmatrix} 1 & -b & 1 & b \\ 0 & 0 & -b-1 & 1-b^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ b = \pm\sqrt{3}i$$

Observamos que las filas 2 y 3 nunca van a ser proporcionales para esos valores de b, por lo que el rango de A_b sigue siendo igual a 3. Es decir, U_b es una recta de $\mathbb{C}^4$, y vendrá determinada por 3 ecuaciones implícitas. Esto permite afirmar que (a) es incorrecta. Y sustituyendo en las ecuaciones que definen U_b también podemos comprobar que (c) es incorrecta pues el vector $(b, 1, b, 1)$ no pertenece a U_b. Finalmente, si terminamos de escalonar la matriz del sistema

$$A_b' \sim_f \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b^2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

tenemos que unas ecuaciones implícitas de la recta U_b son $\{x_1 - bx_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$, por lo que está contenida en el hiperplano $x_4 = 0$. Las soluciones son $\{(b\lambda, \lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, que son unas ecuaciones paramétricas de U_b.

9. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que cumple:

$$f(1,0,0,0) = (1,0,2,2),\ f(1,1,0,0) = (1+a,3,1,3) \ \text{ y } \ \mathrm{Ker}(f) \equiv \{x_1 = x_2 = x_3\}$$

Una base de $\mathrm{Ker}(f)$ es $\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, por lo que,

$$f(1,1,1,0) = (0,0,0,0),\ f(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

Utilizamos la linealidad de f para calcular $f(0,1,0,0)$ y $f(0,0,1,0)$

$$\begin{aligned} f(0,1,0,0) &= f(1,1,0,0) - f(1,0,0,0) = (1+a,3,1,3) - (1,0,2,2) = (a,3,-1,1) \\ f(0,0,1,0) &= f(1,1,1,0) - f(1,1,0,0) = (0,0,0,0) - (1+a,3,1,3) = (-1-a,-3,-1,3) \end{aligned}$$

La matriz de f_a respecto a la base canónica es

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 1 & a & -1-a & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces los vectores $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$ generan el subespacio $\mathrm{Im}(f)$ que, además, cumple $f^{-1}(\mathrm{Im}(f)) = \mathbb{R}^4$. La fórmula de dimensiones nos permite afirmar que $\mathrm{Im}(f)$ es un plano ya que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$$

Por tanto, (b) es incorrecta, pues una única ecuación implícita determina un hiperplano, es decir un subespacio de dimensión 3. También se puede comprobar que las ecuaciones dadas en (c) no son las ecuaciones implícitas de $\text{Im}(f)$, basta sustituir los vectores (dos) de una base de $\text{Im}(f)$ y ver que no cumplen las ecuaciones. Así que, la opción correcta es (a).

En efecto, (a) es correcta pues $P = \text{Im}(f)$, lo que se comprueba viendo que los vectores $\{(1,0,2,2),\ (a,3,-1,1)\}$, que son una base de $\text{Im}(f)$, cumplen dichas ecuaciones.