Capítulo 2

Conjuntos

Hoy en día, prácticamente todos los conceptos matemáticos se definen formalmente en términos conjuntistas. Por ejemplo, las propiedades de los números naturales o las de los números reales se deducen dentro de un marco de teoría de conjuntos. Las relaciones de orden y de equivalencia, que forman parte de la teoría de conjuntos, son ubicuas en todos los campos de las matemáticas.

Introducimos los conjuntos de una manera intuitiva y sin entrar en la axiomática de conjuntos. Dentro de las operaciones básicas que se realizan con conjuntos, nos centramos en la unión, intersección, diferencia de conjuntos y complementario de un subconjunto dado.

Establecemos el nexo que existe entre los conjuntos y la lógica. La lógica proposicional vista en el capítulo 1 introduce una primera aproximación al lenguaje natural que empleamos para comunicarnos. Sin embargo, con este sistema lógico, no podemos representar expresiones tales como: *Los números naturales son pares o son impares*. Esta expresión no está referida a un objeto en particular. Alude a toda una colección de objetos que en este caso es el conjunto de los números naturales. Introducimos un sistema lógico, la lógica de predicados, en el que expresiones como la anterior puedan ser representadas sin dificultad. Como en la lógica proposicional, se tratan expresiones de las cuales tan sólo interesa su valor de verdad, y los únicos significados posibles que les otorgaremos a las expresiones son verdadero o falso, sin importar otros significados que puedan tener en lenguaje natural. La representación de ciertas expresiones nos llevará a introducir los cuantificadores.

Terminaremos el capítulo introduciendo los conceptos de producto cartesiano de conjuntos y de relación entre conjuntos.

2.1. Algunas ideas sobre conjuntos. Predicados

Posiblemente el lector tiene una idea intuitiva del significado del término *conjunto.* De hecho, el término se utiliza a menudo en el lenguaje corriente como sinónimo de los términos *colección*, *familia*, *agrupación*, etc., de objetos de cualquier naturaleza: el conjunto de los estudiantes del grado de Matemáticas de una universidad, el conjunto de letras del español (abecedario), el conjunto de meses del año, etc. En el lenguaje coloquial, los objetos que forman parte de un conjunto, se denominan *elementos*, *miembros*, *individuos*, etc. De toda esta terminología, los matemáticos han escogido los términos **conjunto** y **elementos**. El uso implícito de la intuición relativa a la teoría de conjuntos suscitó numerosas paradojas que alimentaron no pocas controversias entre matemáticos. Poco a poco, muchas de estas paradojas fueron eliminadas según se iba precisando de manera conveniente la noción de conjunto.

No resulta fácil definir rigurosamente conceptos como conjunto, elementos de un conjunto, y pertenencia de un elemento a un conjunto. Nosotros no entraremos en las sutilezas que supone el estudio de cualquier sistema de axiomas de la teoría de conjuntos. No definiremos los términos conjunto, elementos de un conjunto, y pertenencia que consideramos como términos primitivos. Simplemente, precisamos estas nociones intuitivas mediante unas reglas básicas:

- *Un conjunto C está bien definido cuando se tiene un criterio que permite determinar si un determinado elemento b pertenece al conjunto C o no pertenece al conjunto C.*

En otras palabras, la expresión "b es un elemento de C"es una proposición, en el sentido de que se le puede atribuir sin ambigüedad el valor de verdadero o falso.
Si la proposición es cierta, escribiremos $b \in C$, que se lee como "b pertenece a C","b es elemento de C" o "C contiene a b".
Si la proposición es falsa, escribiremos $b \notin C$, que se lee como "b no pertenece a C", "b no es elemento de C" o "C no contiene a b".

Observación: A menudo se utilizan letras mayúsculas para designar a los conjuntos y se reservan las minúsculas para sus elementos, aunque esto no será siempre así.

- *Un objeto no puede ser a la vez un conjunto y un elemento de este conjunto. Es decir, la proposición $b \in b$ es falsa.*

De la regla anterior, se deduce que no existe el conjunto de todos los conjuntos imaginables pues si la colección de todos los conjuntos fuera un conjunto U, éste debería ser un elemento de sí mismo. En consecuencia:

- *La colección de todos los conjuntos posibles no forman un conjunto.*

Estas reglas básicas establecen que ciertas colecciones de objetos no son conjuntos en el sentido matemático y sobre ellos no se puede, en general, aplicar las propiedades o las operaciones que se demuestran o se definen para conjuntos.

Ejemplo 2.1 Algunos ejemplos de conjuntos:

1. Los números 1 y 2.
2. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$.
3. Los países de Europa en el año 2010.
4. Las letras del abecedario.
5. Los números pares.
6. Las vocales a, e, i, o y u.
7. El conjunto formado por el número 2, la vocal i, y el museo del Prado.

Igualdad de conjuntos: Se dice que dos conjuntos A y C son iguales, y se escribe $A = C$, si y sólo si *tienen los mismos elementos*. En caso contrario, se dice que A y C son distintos y se escribe $A \neq C$.
En el ejemplo anterior, los conjuntos dados en 1, 6 y 7 están definidos dando una lista de sus elementos. Cuando un conjunto se determina mediante una lista de todos sus elementos, se dice que está **definido por extensión**. En este caso se escribe el conjunto poniendo la lista de elementos entre llaves. La escritura,

$$A = \{1, 2\}, \ B = \{\text{a,e,i,o,u}\} \quad \text{y} \quad C = \{2, \text{i}, \text{museo del Prado }\}$$

corresponde a los conjuntos de 1, 6 y 7.
Si $A = \{1, 2\}$, $D = \{1, 1, 2\}$ y $E = \{2, 1\}$ entonces $A = D = E$. Los elementos son los mismos aunque en el conjunto D el 1 se haya escrito dos veces y en el conjunto E se ha alterado el orden.

Conjuntos unitarios: Dado cualquier objeto a, se considera el conjunto cuyo único elemento es a y se escribe $\{a\}$. Se observa que $a \in \{a\}$ y que hay una distinción entre a y $\{a\}$, siendo a el objeto, mientras que $\{a\}$ es el conjunto unitario cuyo único elemento es a.

Inclusión de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B se dice que B está incluido en A si y sólo si cualquier elemento del conjunto B es un elemento del conjunto A, y se escribe $B \subset A$
También se dice que B es un **subconjunto** de A o que B **está contenido** en A. La escritura equivalente $A \supset B$ se lee como A contiene a B.

Ejemplo 2.2 El conjunto de los días del fin de semana es un subconjunto del conjunto de los días de la semana:
$\{\text{Sábado, Domingo}\} \subset \{\text{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}\}$

El conjunto de los números naturales que son potencia de 2 es un subconjunto del conjunto de los números naturales pares.

Dados dos conjuntos A y B, claramente se cumple:

$$\boxed{A = B \quad \text{si y sólo si} \quad A \subset B \ \text{ y } \ B \subset A}$$

Una manera sencilla de representar la inclusión o la pertenencia en los conjuntos se hace mediante los llamados **diagramas de Venn**. En ellos se representa cada conjunto mediante un círculo u óvalo. La posición relativa en el plano entre los círculos muestra la inclusión entre conjuntos. En la figura 2.1 se representa el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y en la figura 2.2 los conjuntos A y $B = \{a, b, d\}$ y la relación $B \subset A$.

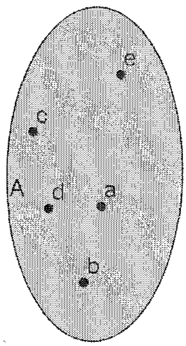

Figura 2.1: Diagrama de Venn de A

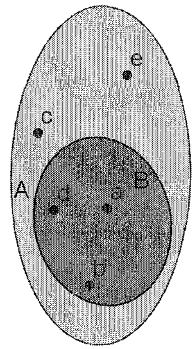

Figura 2.2: Diagrama de Venn de $B \subset A$

Predicados

Algunas expresiones sencillas en contexto matemático no pueden ser descritas como simples proposiciones. Por ejemplo: *El número natural elegido es un número par*, *Un número múltiplo de diez es un número par*, *Si una función es derivable en un punto, entonces la función es continua en ese punto* o *Un número primo es impar.*

Analicemos la primera expresión; *El número natural elegido es un número par*. Podemos decir que si bien describe la propiedad *ser número par*, no se indica el número al que se aplica esa propiedad, por eso esta expresión es cierta o falsa dependiendo del número que se elija. Como el número no está determinado en esta expresión, para hacer referencia a dicho número desconocido se suele utilizar una letra minúscula. Generalmente, se emplea alguna letra de las habituales en Matemáticas para representar a una variable, por ejemplo, x. Para representar esta expresión se emplea una simple letra mayúscula para indicar la propiedad, *ser par*, P, seguida de la letra minúscula de variable para indicar el elemento desconocido, x , es decir P_x. Así pues, la expresión *El número natural elegido es un número par* se transforma en la expresión *El número x es un número par* donde x es un número natural. El valor de P_x varía en función de x.

- **Predicado:** Dado un conjunto C, un predicado de una variable sobre C es una propiedad de un elemento genérico x de C, y que se convierte en una proposición para cada valor x de C. Al conjunto C se le denomina **universo del predicado**.

Es decir, un predicado toma uno de los dos valores, verdadero o falso, al particularizar en cada $x \in C$.
Por ejemplo, dado el universo $C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ y la propiedad P, *ser par*, para $x = 1$, P_1 es una proposición falsa mientras que para $x = 2$, P_2 es una proposición que toma el valor verdadero. Distinguiremos también los elementos que satisfacen la propiedad P que forman un subconjunto de C, $C_P = \{2, 6\}$. En definitiva:

- Dado un predicado P sobre un universo C, existe un conjunto formado por los elementos de C que satisfacen P. Escribiremos:

$$C_P = \{x \in C \mid P_x\}$$

Cuando un subconjunto A de C se determina mediante un predicado P, se dice que está **definido por comprensión**, $A = \{x \in C \mid P_x\}$. Se dice que la propiedad P es una **propiedad característica** del conjunto A en C y al conjunto A se le llama **extensión del predicado**.

Ejemplo 2.3 Los conjuntos de los apartados 2, 3, 4 y 5 del ejemplo 2.1 están definidos por comprensión; así en 2, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ o en 5, $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par}\}$.

Observemos que el conjunto $B = \{1, 2\}$ coincide con el conjunto A del apartado 1 del ejemplo 2.1. A su vez, un conjunto puede estar determinado por distintos predicados. Por ejemplo, si $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 3\}$ entonces $A = C$. Se dice que los predicados "$x^2 - 3x + 2 = 0$" y "$0 < x < 3$"son equivalentes sobre el universo $\mathbb{Z}$.

En resumen:

- Cualquier predicado sobre un conjunto C define un subconjunto de C.
- Dos predicados son **equivalentes** sobre un universo C cuando determinan un mismo subconjunto de C.
- Inversamente, cualquier subconjunto A de C, definido por extensión, puede determinarse mediante el predicado: $x \in A$.

Conjunto vacío: Sea C cualquier conjunto. Consideramos sobre C el predicado $x \notin C$. Define un subconjunto de C, que se denomina conjunto vacío y se denota por $\emptyset$. Por definición, el conjunto vacío no tiene ningún elemento y es subconjunto de cualquier conjunto.
Observación: No hay que confundir los símbolos $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$. $\emptyset$ es el conjunto vacío mientras que $\{\emptyset\}$ es el conjunto unitario cuyo único elemento es el conjunto vacío.

Lógica de predicados: Sea C un conjunto sobre el que están definidos diversos predicados, P_x, Q_x, etc. Cada vez que damos un valor a x, $x = c$ con $c \in C$, obtenemos las proposiciones P_c, Q_c, etc., a las que se les puede aplicar todo el cálculo de proposiciones establecidos en el capítulo anterior. Por tanto tienen sentido en C los predicados:

$$\neg P_x \ , \ P_x \vee Q_x \ , \ P_x \to Q_x \ , P_x \wedge Q_x \ , \ldots$$

Estos predicados, $\neg P$, $P \vee Q$, $P \to Q$, $P \wedge Q$, etc., determinan diferentes subconjuntos de C formados por los elementos de C donde son ciertos los nuevos predicados.

Ejemplo 2.4 Si C es un conjunto y P_x un predicado sobre C entonces:

$$\emptyset = \{x \in C \mid P_x \wedge \neg P_x\}$$

También es fácil ver que $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 = 9) \ \wedge (x \ \text{ es par})\}$ o que
$\{x \in \mathbb{Z} \mid (x \text{ es par}) \wedge (x \text{ es múltiplo de } 3\ )\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 6\}$.

A continuación asumimos la existencia del conjunto de los números naturales. En el capítulo 5 se hará un estudio más completo de la fundamentación de los números naturales. Nos interesan de la introducción de los números naturales dos aspectos: En primer lugar, la definición axiomática de $\mathbb{N}$ asegura la existencia de conjuntos "infinitos". El otro aspecto relevante de esta definición es la introducción del método de demostración por inducción.

Ejemplo 2.5 **Los números naturales**
Aunque intuitivamente se conocen los números naturales como los números que utilizamos para contar, y este proceso nos es familiar desde la infancia, resulta que la existencia del conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

se asegura mediante los axiomas de Peano que presentamos de manera informal.

- A_1. El elemento 0 es un número natural.
- A_2. Todo número natural n tiene un único elemento sucesor que es también un número natural.
- A_3. 0 no es el sucesor de ningún número natural.
- A_4. Dos números naturales cuyos sucesores son iguales, son iguales.
- A_5. Si un subconjunto de números naturales contiene al 0 y a los sucesores de cada uno de sus elementos entonces contiene a todos los números naturales.

Informalmente comentamos que el primer axioma permite asegurar que el conjunto de los números naturales es un conjunto no vacío. Hablar de sucesor o de siguiente en el segundo axioma refleja precisamente la idea de contar. El tercer axioma indica que hay un primer elemento. El segundo axioma junto con el tercero y el cuarto aseguran que al ir contando nunca volvemos a un mismo elemento. El quinto es el axioma utilizado en las demostraciones por inducción. Es la formulación conjuntista del siguiente principio:

Principio de inducción: Si P es una propiedad definida sobre $\mathbb{N}$ tal que:

1. 0 satisface la propiedad P. Es decir, P_0 es verdadero.
2. Si n satisface la propiedad P entonces el sucesor de n satisface también la propiedad P.

Entonces todo número natural satisface la propiedad P.

En efecto, si consideramos el subconjunto M de los elementos de $\mathbb{N}$ que satisfacen la propiedad P, tenemos que M contiene al 0 y a los sucesores de cada elemento. Se aplica por tanto el quinto axioma de Peano y resulta que $\mathbb{N} \subset M$. Por tanto, $M = \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6 Demuéstrese para todo número natural la igualdad:

$$\frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Solución: 1) La igualdad es verdadera para $n = 0$ pues $\frac{0}{2^0} = 0 = 2 - \frac{0+2}{2^0}$.
2) Supongamos que la igualdad es cierta para n, esto es:

$$\frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

y comprobemos que es cierta para el sucesor de n, $n+1$. En consecuencia hay que comprobar que;

$$\frac{0}{2^0} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{0}{2^0}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}} &= \left(\frac{0}{2^0}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)+\frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= \left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)+\frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2-\frac{n+3}{2^{n+1}} \\
&= 2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

□

El quinto axioma también se utiliza para definir términos donde intervienen los números naturales, donde se define el objeto que depende de un número natural en función de objetos que dependen de términos anteriores. Se habla de una **definición recurrente** o por **recurrencia**.

Ejemplo 2.7 **Factorial de n**

Para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ se define $(n+1)!$ en función de $n!$ mediante

$$(n+1)! = (n+1)\ n!$$

y se lee factorial de $n+1$. Es evidente que hay que conocer el valor de $0!$ para poder determinar todos los demás. Se define $0! = 1$. Es decir, la definición recurrente de factorial de n completa es: $\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)\ n! \end{cases}$

De esta definición se obtiene directamente que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, y en algunos textos se emplea este resultado como definición no recurrente.

Si n' designa el sucesor de n, los cinco axiomas de Peano permiten pensar en $\mathbb{N}$ como en el conjunto:

$$\{0, 0', (0')', ((0')')', \ldots\}$$

Observación: Existe cierta controversia sobre la inclusión de 0 en el conjunto de los números naturales, pues a veces, se excluye de este conjunto. Nosotros utilizaremos la notación:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

Algunos matemáticos no reconocen el cero como número natural mientras que otros tienen la postura opuesta. En todo lo que tratamos, no será relevante que el cero sea un número natural o no. Aquí hemos escogido seguir la opción más común a los especialistas en Teoría de Conjuntos o Lógica.

Ejemplo 2.8 **Conjuntos finitos y conjuntos infinitos:** Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Intuitivamente, un conjunto es finito si contando los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar se termina. En caso contrario, el conjunto es infinito. En los capítulos 3 y 5 se verá una definición más precisa de estos dos conceptos. En cualquier caso, los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{$a,e,i,o,u$\}$ y $C = \{2, \mathrm{i}, \text{museo del Prado}\}$ son conjuntos finitos. Los axiomas A_2, A_3 y A_4 de Peano permiten asegurar que el proceso de contar los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ no se acaba nunca. Es decir, $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Cuantificadores

Volvamos a la expresión P, *El número elegido es un número par*, donde x es un número natural. El valor semántico de P_x varía en relación a x. Sin embargo, las expresiones *Todos los números naturales son pares* o *Existe algún número natural par* son expresiones que tienen un valor falso en el primer caso y verdadero en el segundo. Hemos efectuado el proceso de cuantificar de alguna manera los elementos que satisfacen la propiedad del predicado.
En una expresión pueden aparecer implícita o explícitamente algún grupo de palabras orientativas de la cantidad de elementos que satisfacen la propiedad del predicado, tales como:
"para cualquier", "para cada", "todo", "para todo", "cada", "cualesquiera que sean", etc., o,
"para algún", "existe", "existe al menos un", etc.

Estos grupos de palabras se denominan cuantificadores. De manera más precisa: Sea C un conjunto y P un predicado sobre C. Consideremos el subconjunto donde se verifica P:

$$C_P = \{x \in C \mid P_x\}$$

Cuantificador universal: Si para cada $x \in C$ se satisface P_x, escribiremos

$$\boxed{(\forall x \in C)\ P_x}$$

que se lee, para todo x de C, P_x, o cualquiera que sea el elemento x de C, x satisface P. El símbolo $\forall$ se denomina cuantificador universal y transforma un predicado en una proposición con un valor semántico verdadero o falso. Cuando no exista ninguna ambigüedad sobre el conjunto C, o C sea siempre un conjunto determinado fijo se escribe simplemente $\forall x\ P_x$.

Obsérvese que la proposición $(\forall x \in C)\ \ P_x$ es equivalente a la proposición $C_P = C$.

El cuantificador universal es una generalización de la conjunción $\wedge$ en el sentido siguiente: Supongamos que C sea un conjunto finito, por ejemplo $C = \{1, 2, 3\}$. Entonces la proposición $(\forall x \in C)\ \ P_x$ es equivalente a la proposición $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$.

Cuantificador existencial: Si existe un elemento $a \in C$ que satisface P_a escribiremos

$$\boxed{(\exists x \in C)\ P_x}$$

que se lee, existe al menos un elemento x de C que satisface P. El símbolo $\exists$ se denomina cuantificador existencial y transforma un predicado en una proposición con un valor semántico verdadero o falso. Cuando no exista ninguna ambigüedad sobre el conjunto C, o C sea siempre un conjunto determinado fijo se escribe simplemente $\exists x\ P_x$.

Obsérvese que la proposición $(\exists x \in C)\ \ P_x$ es equivalente a la proposición $C_P \neq \emptyset$.

El cuantificador existencial es una generalización de la disyunción $\vee$ en el sentido siguiente. Supongamos que C sea un conjunto finito, por ejemplo $C = \{1, 2, 3\}$. Entonces la proposición $(\exists x \in C)\ \ P_x$ es equivalente a la proposición $P_1 \vee P_2 \vee P_3$.

La variable empleada en la sintaxis de un predicado con cuantificadores no tiene ninguna importancia, tan sólo lo tiene el universo de esa variable, pues, la proposición $(\forall x \in C)\ P_x$ es equivalente a la proposición $(\forall y \in C)\ P_y$. Análogamente, la proposición $(\exists x \in C) P_x$ es equivalente a la proposición $(\exists u \in C) P_u$.

Ejemplo 2.9 Veamos algunos ejemplos de uso de los cuantificadores.

1. El conjunto de los números pares $\{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$ denotado por $2\mathbb{N}$ se escribe con más precisión como:

$$2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})\ x = 2k\}$$

   A veces, se omite la escritura del cuantificador. De hecho, $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ o $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ son escrituras más sencillas del conjunto $2\mathbb{N}$ y que no llevan a confusión.

2. Las proposiciones $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ y $(\exists x \in \mathbb{R})\ x + 5 = 3$ son ambas verdaderas, la primera es una identidad en $\mathbb{R}$, mientras que la segunda plantea una ecuación que tiene al menos una solución. Así por ejemplo,

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \mathbb{R})\ ax + b = 0 & \iff & a = b = 0 \\ (\exists x \in \mathbb{R})\ ax + b = 0 & \iff & (a \neq 0) \vee (a = b = 0) \end{array}$$

3. Dos predicados P_x y Q_x son equivalentes sobre un universo C cuando determinan el mismo subconjunto C_P y C_Q y se expresaría mediante:

$$C_P = C_Q \quad \iff \quad (\forall x \in C)\ (P_x \leftrightarrow Q_x)$$

Observación: La forma de escribir matemáticas ha ido variando a lo largo de los años. Si hace unos años lo usual era escribir los enunciados de los resultados con el máximo de símbolos posibles, la tendencia actual es todo lo contrario. Rara vez se utilizan los símbolos de los cuantificadores, salvo en los temas de lógica o de conjuntos. Sin embargo hay un uso implícito, o explícito pero sin símbolos, de ellos. Expresiones como *Si una función real de variable real es derivable en un punto, entonces la función es continua en ese punto* o *un número primo es impar* que aparentemente son predicados sin cuantificar, desde el punto de vista matemático son dos enunciados que van cuantificados y significan: *Toda función real de variable real derivable en un punto es continua en ese punto* que es una proposición verdadera y *todo número primo es impar* que es una proposición falsa pues el número 2 es primo y no es impar.

Relaciones entre los cuantificadores $\exists$ y $\forall$

Supongamos que el universo de la variable es el conjunto C y omitimos su escritura. Buscamos la negación de las proposiciones $\forall x\ P_x$ y $\exists x\ P_x$.
La proposición $\forall x\ P_x$ es equivalente a la proposición $C_P = \{x \in C \mid P_x\} = C$. Por tanto negando ambas proposiciones nos encontramos con : $\neg(\forall x\ P_x)$ es equivalente $C_P \neq C$, es decir, existe al menos un x de C que no satisface P.
Análogamente, la proposición $\exists x\ P_x$ es equivalente a la proposición $C_P = \{x \in C \mid P_x\} \neq \emptyset$. Por tanto negando ambas proposiciones nos encontramos con : $\neg(\exists x\ P_x)$ es equivalente $C_P = \emptyset$, es decir, ningún elemento de C satisface P, o equivalentemente, todo elemento de C satisface la negación de P.
En definitiva:

Negación de predicados con cuantificadores:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x\ P_x) &\iff \exists x\ (\neg P_x). \\ \neg(\exists x\ P_x) &\iff \forall x\ (\neg P_x). \end{aligned}$$

Observación: La relación $\neg(\forall x\ P_x) \iff \exists x\ (\neg P_x)$ significa que cuando queremos demostrar que la proposición $\forall x\ P_x$ es falsa, esto equivale a demostrar que la proposición $\exists x\ (\neg P_x)$ es cierta. Es decir que existe al menos un elemento $x_0 \in C$ tal que P_{x_0} es falso. Se dice que el elemento x_0 es un **contraejemplo** de la propiedad $\forall x\ P_x$.

Ejemplo 2.10 La proposición $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leqslant x^2$ es falsa. Basta dar un contraejemplo: Si $x_0 = 1/2$, se obtiene $x_0^2 = 1/4$ y $x_0 \nleqslant x_0^2$.

Complementario y partes de un conjunto

Sea U un conjunto y sea A un subconjunto de U. Se llama complementario de A con respecto a U al conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A. Se denota usualmente por $\complement_U A$. Cuando no hay confusión posible sobre el universo U, se designa por $\complement A$, A', o $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

En el caso de que A esté definido por comprensión, $A = \{x \in U \mid P_x\}$, entonces:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid \neg P_x\}$$

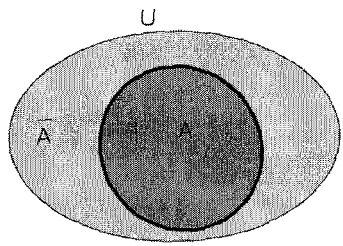

Figura 2.3: Diagrama de Venn de A y $\overline{A}$

$\boxed{\textbf{Ejemplo 2.11}}$ Dado $U = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si $A = \{a, b, c, d\}$, entonces $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Los complementarios respectivos de $\{0\}$ con relación a los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ se denotan usualmente como $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ y $\mathbb{R}^*$.

En $\mathbb{N}^*$, se tiene que el complementario del conjunto de números pares, $P = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = 2k\}$, es el conjunto de números impares $\overline{P} = I = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}^*\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = 2k - 1\}$.

Consideremos todos los subconjuntos de un conjunto dado A. Forman un nuevo conjunto que se denomina **conjunto de las partes de** A y se designa por $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$$

Cualquiera que sea el conjunto A se cumple que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.
Aunque A sea el conjunto vacío, $\mathcal{P}(A)$ no es el conjunto vacío pues contiene al elemento $\emptyset$.

Ejemplo 2.12 Dado el conjunto con cuatro elementos $A = \{a, b, c, d\}$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) &= \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},\\ &\quad \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A\Big\}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.13 Si $A = \{a, b\}$, determine $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
Solución: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) &= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{A\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, A\}, \{\{a\}, \{b\}\},\\ &\quad \{\{a\}, A\}, \{\{b\}, A\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, A\}, \{\emptyset, \{b\}, A\},\\ &\quad \{\{a\}, \{b\}, A\}, \mathcal{P}(A)\Big\}\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.14 Si el conjunto A tiene n elementos, ¿cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$? Razone por inducción.
Solución: Si $n = 0$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ tiene un elemento. Si A tiene un elemento, $A = \{a\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$ tiene dos elementos.
Supongamos que $n \geqslant 1$. Sea x_n el número de elementos del conjunto $\mathcal{P}(A)$ y sea B el conjunto que se obtiene al quitar un elemento $a \in A$. B tiene $n-1$ elementos y sea x_{n-1} el número de elementos de $\mathcal{P}(B)$.
Los subconjuntos de A se dividen en dos clases: los que no contienen al elemento a y los que lo contienen. Los que no contienen al elemento a son precisamente todos los subconjuntos de B y por tanto hay x_{n-1} subconjuntos. Ahora bien, si a todos los subconjuntos de B le añadimos el elemento a, obtenemos precisamente todos los subconjuntos de A que contienen al elemento a. Por tanto, también hay x_{n-1} subconjuntos de A que contienen al elemento a. En definitiva, $x_n = x_{n-1} + x_{n-1} = 2x_{n-1}$ y teniendo en cuenta que $x_0 = 1$, se obtiene que el número x_n de elementos de $\mathcal{P}(A)$ es 2^n. □

2.2. Operaciones con conjuntos

Unión de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, el **conjunto unión** de A y B, que se escribe $A \cup B$ y se lee A unión B, es el conjunto de los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos A o B, es decir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

En particular, si A y B son subconjuntos del conjunto U y están definidos por comprensión, entonces:

$$A \cup B = \{x \in U \mid P_x \vee Q_x\} \quad \text{si } A = \{x \in U \mid P_x\} \text{ y } B = \{y \in U \mid Q_y\}$$

Ejemplo 2.15 Si los conjuntos son $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Dados los conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 4\}$ y $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 6\}$, entonces $C \cup D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de 4 o de } 6\}$.

Ejemplo 2.16 La función real $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ está definida en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geqslant 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Véase la figura 2.4.

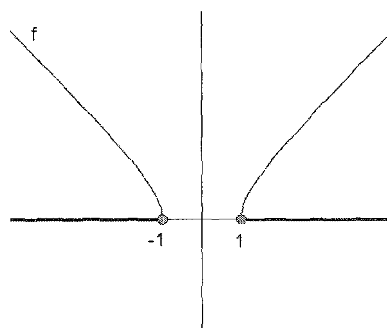

Figura 2.4: Dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Ejemplo 2.17 Teniendo en cuenta que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, el conjunto de los puntos del plano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ es la unión de los conjuntos $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ y $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$, es decir, el par de rectas de ecuación $x - y = 0$ y $x + y = 0$. Véase la figura 2.5.

La unión de conjuntos tiene las siguientes **propiedades** que se deducen fácilmente de la definición. Cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C se satisfacen:

1. $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.
2. Propiedad conmutativa: $A \cup B = B \cup A$.
3. Propiedad asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
4. $A \cup \emptyset = A$.
5. $A \cup A = A$.

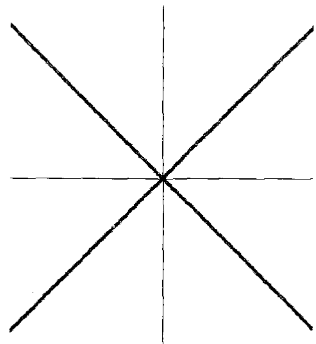

Figura 2.5: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

Ejercicio 2.18 Demuestre que para dos conjuntos cualesquiera A y B, se verifica:

$$A \cup B = B \text{ si y sólo si } A \subset B$$

Solución: Si $A \cup B = B$, entonces todo elemento de A, que es elemento de $A \cup B$, es elemento de B y en consecuencia, $A \subset B$. Recíprocamente, supongamos que $A \subset B$. Hay que ver que $A \cup B \subset B$ pues la otra inclusión es siempre cierta. Todo elemento x de $A \cup B$ es elemento de al menos uno de los dos conjuntos A o B. Si x es elemento de A, entonces x es elemento de B pues $A \subset B$. Por tanto todo elemento de $A \cup B$ es elemento de B. □

Intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, el **conjunto intersección** de A y B, que se escribe $A \cap B$ y se lee A intersección B, es el conjunto de los elementos comunes a A y a B, es decir:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

En particular, si A y B son subconjuntos del conjunto U y están definidos por comprensión, entonces:

$$A \cap B = \{x \mid P_x \wedge Q_x\} \quad \text{si} \quad A = \{x \mid P_x\} \text{ y } B = \{y \mid Q_y\}$$

Ejemplo 2.19 1. Si $A = \{a, b, c, d, e, h\}$ y $B = \{g, a, b, d, h, i, j\}$, entonces $A \cap B = \{a, b, d, h\}$. En la figura 2.6 se ha representado un diagrama de Venn de los conjuntos A y B donde se ha sombreado el conjunto $A \cup B$ intensificando el sombreado de $A \cap B$. Obviamente se tiene:

$$A \cap B \subset A \cup B$$

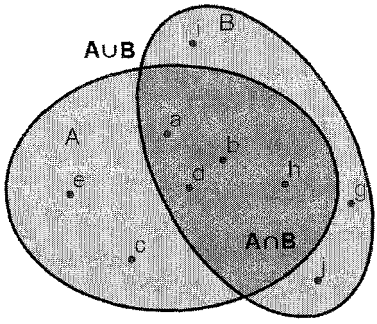

Figura 2.6: Diagrama de Venn de $A \cup B$ y $A \cap B$

2. Dados los conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ múltiplo de } 2\}$ y $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ múltiplo de } 3\}$, entonces $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ múltiplo de 2 y de } 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ múltiplo de } 6\}$.

La intersección de conjuntos tiene las siguientes **propiedades** que se deducen fácilmente de la definición. Cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C se tiene:

1. $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.
2. Propiedad conmutativa: $A \cap B = B \cap A$.
3. Propiedad asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cap A = A$.

Ejercicio 2.20 Demuestre que para dos conjuntos cualesquiera A y B, se verifica:

$$A \cap B = A \quad \text{si y sólo si} \quad A \subset B$$

Solución: Proceda de manera análoga al ejercicio 2.18. □

Conjuntos disjuntos: Dos conjuntos A y B, se dicen disjuntos si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo 2.21 Los conjuntos $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 5z + 2 = 0\}$ y $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 5z + 7 = 0\}$ son disjuntos pues el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -2 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \end{cases}$ es claramente incompatible.
Geométricamente representan dos planos paralelos del espacio, como los que se muestran en la figura 2.7.

Ejemplo 2.22 La intersección de los conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y + 2 = 0\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y + 7 = 0\}$ es un conjunto unitario pues el sistema de ecuaciones

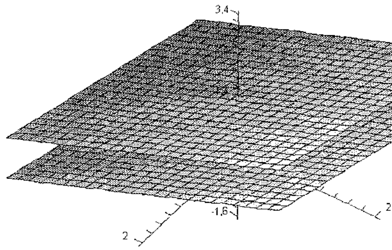

Figura 2.7: Conjuntos disjuntos: Planos paralelos

$\begin{cases} 2x + 3y &= -2 \\ 3x + y &= -7 \end{cases}$ es compatible determinado.
Geométricamente representan dos rectas del plano que se cortan en un punto, que es la intersección de los dos conjuntos, y cuyas coordenadas se hallan resolviendo el sistema, véase la figura 2.8.

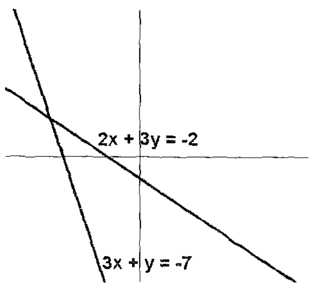

Figura 2.8: Intersección de conjuntos: Rectas secantes

La intersección es distributiva respecto de la unión y la unión es distributiva respecto de la intersección. Es decir, para tres conjuntos cualesquiera A, B, C, se tiene:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ejercicio 2.23 Halle el dominio de definición de la función real $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x - 1}}$.

Solución: La función f está definida en el conjunto

$$\begin{aligned}\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{x-1} \geqslant 0\right\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 \leqslant 0, x-1<0\} \\ &\cup \; \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 \geqslant 0, x-1>0\} \\ &= [-2,1) \cup [2,\infty)\end{aligned}$$

puesto que

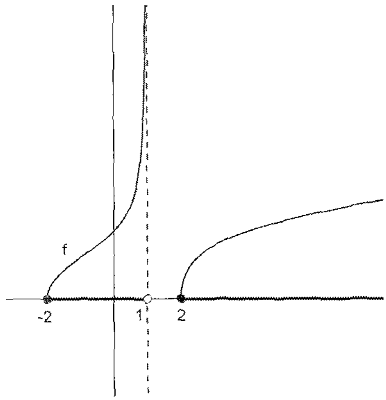

Figura 2.9: Conjunto de definición de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 \leqslant 0, x-1<0\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 \leqslant 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x-1<0\} \\ &= [-2,2] \cap (-\infty,1) = [-2,1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 \geqslant 0, x-1>0\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 \geqslant 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x-1>0\} \\ &= \big[(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)\big] \cap (1,+\infty) \\ &= \big[(-\infty,-2] \cap (1,+\infty)\big] \cup \big[\,[2,+\infty) \cap (1,+\infty)\big] \\ &= \emptyset \cup [2,+\infty) = [2,+\infty)\end{aligned}$$

□

Aunque la unión y la intersección están definidas únicamente para dos conjuntos, resulta que las propiedades asociativas permiten definir la unión y la intersección de tres o más conjuntos, y se designarán sin paréntesis:

$$A \cup B \cup C \quad \text{y} \quad A \cup B \cup C \cup D, \ldots$$

$$A \cap B \cap C \quad \text{y} \quad A \cap B \cap C \cap D, \ldots$$

Familia de conjuntos: Sea I un conjunto que supondremos no vacío. Supongamos que a cada $i \in I$ le asociamos un conjunto F_i. La colección de todos esos conjuntos se denomina **familia de conjuntos** y se denota $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$. Al conjunto I se le denomina **conjunto de índices**.
Cuando todos los conjuntos F_i son subconjuntos de un mismo conjunto U entonces $\mathcal{F}$ es un subconjunto del conjunto $\mathcal{P}(U)$. Cualquier subconjunto $\mathcal{G}$ no vacío de $\mathcal{P}(U)$ se denominará también familia de conjuntos.

Los conceptos de unión e intersección de conjuntos se extienden a familias arbitrarias de conjuntos.
Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ para un conjunto de índices I, el **conjunto unión** de todos los conjuntos de la familia $\mathcal{F}$, es el conjunto de los elementos que pertenecen al menos a un F_i, con $i \in I$. Es decir:

$$\bigcup_{i \in I} F_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in F_i\}$$

Si la familia viene dada por un subconjunto $\mathcal{G}$ no vacío de $\mathcal{P}(U)$, entonces la unión es:

$$\bigcup_{F \in \mathcal{G}} = \{x \in U \mid \exists F \in \mathcal{G},\ x \in F\}$$

Análogamente el **conjunto intersección** de todos los conjuntos de la familia $\mathcal{F}$, es el conjunto de los elementos comunes a todos los conjuntos F_i, con $i \in I$. Es decir:

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \mid x \in F_i \quad \forall i \in I\}$$

Si la familia viene dada por un subconjunto $\mathcal{G}$ no vacío de $\mathcal{P}(U)$, entonces la intersección es:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{G}} = \{x \in U \mid \ x \in F \quad \forall F \in \mathcal{G}\}$$

Ejercicio 2.24 **Intervalos encajados**

Sea $a \in \mathbb{R}$, se considera la familia de intervalos cerrados $I_n = \left[a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}^*$. Demuestre que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{a\}$ y $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = [a-1, a+1]$.

Solución:

Es evidente que $a \in \left[a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$. Luego, $\{a\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$.

Supongamos que la inclusión $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subset \{a\}$ no es cierta, entonces $\exists b \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ tal que $b \neq a$. Si tomamos $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < |b-a|$, se tiene que $b \notin \left[a - \dfrac{1}{n_0}, a + \dfrac{1}{n_0}\right]$, que está en contradicción con la suposición de que $b \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. Así pues, se verifica la inclusión $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subset \{a\}$.

La igualdad $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = [a-1, a+1]$ es evidente pues la familia de intervalos verifica:

$$[a-1, a+1] \supset \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right] \supset \left[a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right] \supset \left[a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right] \cdots$$

$\square$

Ejemplo 2.25 **Diferencia de conjuntos**

Dados dos conjuntos A y B, el conjunto diferencia de A y B, que se escribe $A - B$, o $A \setminus B$ y se lee A menos B, es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Es decir:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

En particular, si A y B son subconjuntos del conjunto U y están definidos por comprensión, entonces:

$$A \setminus B = \{x \in U \mid P_x \wedge \neg Q_x\}, \text{ si } A = \{x \in U \mid P_x\} \text{ y } B = \{y \in U \mid Q_y\}$$

Se verifica que:

1. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
2. Si $A, B \subset U$ y $\overline{B}$ es el complementario de B en U entonces, $U \setminus B = \overline{B}$ y $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Ejercicio 2.26 Demuéstrese que para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(U)$, se verifica que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Solución: Para ver la igualdad, comprobaremos las dos inclusiones, $A \setminus B \subset A \cap \overline{B}$ y $A \cap \overline{B} \subset A \setminus B$.

Si $x \in A \setminus B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$, por definición de diferencia de conjuntos. Ahora bien, si $x \notin B$, entonces $x \in \overline{B}$, por definición de complementario de un conjunto. Luego, si $x \in A$ y $x \in \overline{B}$, entonces $x \in A \cap \overline{B}$, por definición de intersección de conjuntos, y por lo tanto $A \setminus B \subset A \cap \overline{B}$.

Inversamente, si $x \in A \cap \overline{B}$ se tiene que $x \in A$ y $x \in \overline{B}$, por definición de intersección de conjuntos. Ahora bien, si $x \in \overline{B}$, entonces $x \notin B$, por definición de complementario de un conjunto. Luego, si $x \in A$ y $x \notin B$, entonces $x \in A \setminus B$, y por lo tanto $A \cap \overline{B} \subset A \setminus B$. □

Ejemplo 2.27 **Diferencia simétrica de conjuntos**
Dados dos conjuntos A y B, el conjunto diferencia simétrica de A y B, que se escribe $A \triangle B$ es el conjunto de elementos que pertenecen sólo a uno de los dos conjuntos A y B. Son por tanto los elementos de $A \cup B$ que no son elementos de $A \cap B$. Es decir:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Se comprueba fácilmente, que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. En consecuencia:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\} \cup \{x \mid x \notin A \text{ y } x \in B\}$$

En particular, si A y B son subconjuntos del conjunto U y están definidos por comprensión, entonces:

$$A \triangle B = \{x \in U \mid (P_x \wedge \neg Q_x) \vee (\neg P_x \wedge Q_x)\}, \text{ si } A = \{x \in U \mid P_x\} \text{ y } B = \{x \in U \mid Q_x\}.$$

Ejercicio 2.28 Demuestre que dados dos conjuntos A y B se verifica que $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.
Solución: Para ver la igualdad, comprobaremos las dos inclusiones, $A \setminus B \subset A \triangle (A \cap B)$ y $A \triangle (A \cap B) \subset A \setminus B$.

Sea un $x \in A \setminus B$ arbitrario. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$. En consecuencia $x \notin A \cap B$. Luego $x \in A \setminus (A \cap B) \subset A \triangle (A \cap B)$ y por tanto $A \setminus B \subset A \triangle (A \cap B)$.

Inversamente, sea cualquier $x \in A \triangle (A \cap B)$. Por definición de diferencia simétrica de conjuntos, $x \in A$ y $x \notin A \cap B$, o , $x \notin A$ y $x \in A \cap B$.
En el primer caso, de $x \in A$ y $x \notin A \cap B$, se deduce que $x \notin B$ pues en caso contrario, si fuera $x \in B$, resultaría que $x \in A \cap B$, en contradicción con $x \notin A \cap B$. Por tanto, $x \notin B$ y en consecuencia $x \in A \setminus B$.
El segundo caso es imposible pues $A \cap B \subset A$.
En definitiva, se verifica la inclusión $A \triangle (A \cap B) \subset A \setminus B$. □

2.3. Álgebra de conjuntos

Todos los conjuntos que se consideran en este apartado son subconjuntos de un conjunto U, es decir, tan sólo se utilizan elementos del conjunto $\mathcal{P}(U)$. En la siguiente tabla, escribiremos las propiedades de la unión, la intersección y la complementación en $\mathcal{P}(U)$, muchas de las cuales ya han sido enunciadas. Paralelamente escribiremos las leyes lógicas correspondientes a las propiedades características o predicados que definen los conjuntos por comprensión. Se puede pues razonar sobre los subconjuntos de U directamente o sobre las propiedades que los definen por comprensión. En todo lo que sigue A, B y C son tres subconjuntos cualesquiera de U tales que $A = \{x \in U \mid P_x\}$, $B = \{x \in U \mid Q_x\}$ y $C = \{x \in U \mid R_x\}$.

	Leyes de idempotencia		
$A \cup A = A$	$P_x \vee P_x$	$\Longleftrightarrow$	P_x
$A \cap A = A$	$P_x \wedge P_x$	$\Longleftrightarrow$	P_x
	Leyes conmutativas		
$A \cup B = B \cup A$	$P_x \vee Q_x$	$\Longleftrightarrow$	$Q_x \vee P_x$
$A \cap B = B \cap A$	$P_x \wedge Q_x$	$\Longleftrightarrow$	$Q_x \wedge P_x$
	Leyes asociativas		
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(P_x \vee Q_x) \vee R_x$	$\Longleftrightarrow$	$P_x \vee (Q_x \vee R_x)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(P_x \wedge Q_x) \wedge R_x$	$\Longleftrightarrow$	$P_x \wedge (Q_x \wedge R_x)$
	Leyes distributivas		
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$P_x \vee (Q_x \wedge R_x)$	$\Longleftrightarrow$	$(P_x \vee Q_x) \wedge (P_x \vee R_x)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$P_x \wedge (Q_x \vee R_x)$	$\Longleftrightarrow$	$(P_x \wedge Q_x) \vee (P_x \wedge R_x)$
	Leyes identidad		
$A \cup \emptyset = A$	$P_x \vee \mathbf{0}$	$\Longleftrightarrow$	P_x
$A \cup U = U$	$P_x \vee \mathbf{1}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{1}$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$P_x \wedge \mathbf{0}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{0}$
$A \cap U = A$	$P_x \wedge \mathbf{1}$	$\Longleftrightarrow$	P_x
	Leyes del complementario		
$A \cup \overline{A} = U$	$P_x \vee \neg P_x$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{1}$
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$P_x \wedge \neg P_x$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{0}$
$\overline{(\overline{A})} = A$	$\neg(\neg P_x)$	$\Longleftrightarrow$	P_x
$\overline{U} = \emptyset$	$\neg(\mathbf{1})$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{0}$
$\overline{\emptyset} = U$	$\neg(\mathbf{0})$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{1}$
	Leyes de Morgan		
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\neg(P_x \vee Q_x)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg P_x \wedge \neg Q_x$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\neg(P_x \wedge Q_x)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg P_x \vee \neg Q_x$

Tabla 2.1: Propiedades del álgebra de conjuntos

Ejercicio 2.29 Demuestre, utilizando las propiedades de la tabla anterior que para todo $A, B \in \mathcal{P}(U)$ se verifica que $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Solución:

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) &= A\cap(B\cup\overline{B}) && \text{ley distributiva}\\ &= A\cap U && \text{ley del complementario}\\ &= A && \text{ley identidad}\end{aligned}$$

□

2.4. Producto de dos conjuntos

Para poder definir los predicados de dos variables, o relaciones lógicas, se tiene que establecer con anterioridad su universo compuesto por parejas de elementos. En este apartado estudiamos la estructura de estos universos de parejas.

- **Par ordenado de elementos:** Intuitivamente, un par ordenado de elementos consiste en dar dos elementos x e y, de manera que uno de ellos, x, es el primero y el otro es el segundo. Se escribe (x, y).

  Igualdad de pares: Dos pares (x, y) y (z, p) son iguales si y sólo si $\left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = p \end{array}\right.$

  No hay que confundir el conjunto de dos elementos $\{x, y\}$ con el par (x, y). Así los pares $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son distintos mientras que $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ representan el mismo conjunto. Un par ordenado puede tener los dos elementos iguales, por ejemplo el par $(1, 1)$ mientras que la escritura habitual del conjunto $\{1, 1\}$, que en realidad tiene un único elemento, es $\{1\}$.

Definición 2.30 Dados dos conjuntos A y B, se denomina **producto** de A por B, al conjunto de pares ordenados donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B. Se designa por $A \times B$ y se lee A por B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Si $A = B$, se usa también la notación $A^2 = A \times A$.

Ejemplo 2.31 **Puntos del plano euclídeo**
Un punto del plano real, dotado de un sistema de referencia, se localiza como un par ordenado de números reales, por ejemplo el par (2,4). Nótese que el par (4,2) representa a otro punto distinto. El plano euclídeo representa al conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Véase la figura 2.10.

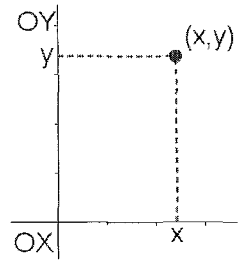

Figura 2.10: Representación cartesiana del plano euclídeo

Cuando en el sistema de referencia los ejes son perpendiculares se denominan ejes de coordenadas cartesianas. El término cartesiano es debido a que fue R. Descartes quien introdujo este sistema para representar la geometría plana. Esto dio origen al concepto de producto de conjuntos que a menudo se denomina también **producto cartesiano**.

Ejemplo 2.32 **Representación gráfica del conjunto producto**
Sólo tres jugadores de futbol $J = \{$**A**ntonio, **B**enito, **C**arlos$\}$ son considerados candidatos a ganar cada uno de los cuatro premios que se otorgan este año,
$P = \{$**g**oleador, **p**asador, **d**efensa, **j**uego limpio$\}$.

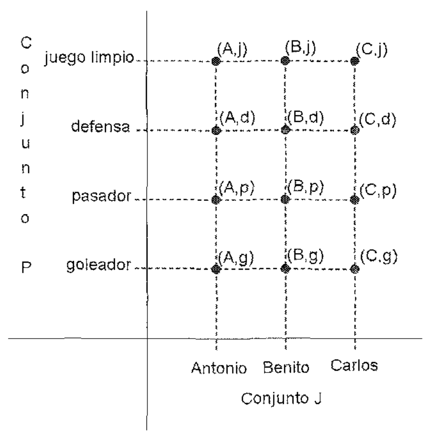

Figura 2.11: Representación cartesiana del conjunto $J \times P$

El conjunto $J \times P$ está compuesto por todas las formas de asociar a cada jugador un premio. La descripción del conjunto producto es:

$$\begin{aligned} J \times P \ = \ & \{(A,g),(A,p),(A,d),(A,j),(B,g),(B,p),(B,d), \\ & (B,j),(C,g),(C,p),(C,d),(C,j)\} \end{aligned}$$

Cuando los conjuntos no son demasiado grandes, una forma de representar el conjunto producto es similar a la utilizada para representar $\mathbb{R}^2$ mediante un par de ejes de coordenadas cartesianas como se muestra en la figura 2.11. Los elementos de J se disponen en el eje horizontal mientras que los elementos de P se disponen en el eje vertical. Las rectas verticales que contienen a los elementos de J cortan a las rectas horizontales que contienen a los de P en doce puntos que representan los elementos del producto cartesiano $J \times P$.

El producto cartesiano tiene las siguientes propiedades de las que, a modo de ejercicio, demostraremos una de ellas. Cualesquiera que sean los conjuntos A, A', B, B' y C se verifica:

1. Si $A' \subset A$ y $B' \subset B$ entonces $A' \times B' \subset A \times B$.
2. Propiedades distributivas: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
   y $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
3. Propiedades distributivas: $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
   y $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
4. $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Ejercicio 2.33 Demuestre la propiedad distributiva siguiente:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Solución: Demostramos las dos inclusiones $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$ y $A \times (B \cap C) \supset (A \times B) \cap (A \times C)$.
Sea (x, y) un elemento arbitrario de $A \times (B \cap C)$. En consecuencia, $x \in A$ e $y \in B \cap C$. Luego y es elemento de B y de C por lo que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in A \times C$. Por tanto, $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.
Inversamente, sea cualquier par $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Por tanto, $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in A \times C$. Es decir, $x \in A$ e $y \in B$, y , $x \in A$ e $y \in C$. Como y es elemento de ambos conjuntos B y C, resulta que $y \in B \cap C$. En consecuencia, $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. $\square$

Observación: El producto de dos conjuntos distintos no tiene la propiedad conmutativa puesto que $A \times B$ y $B \times A$ son dos conjuntos distintos.

El concepto de producto de dos conjuntos se puede ampliar a producto de tres o más conjuntos.

Ternas ordenadas de elementos: Dados un elemento de un conjunto, $x \in A$, un elemento de otro conjunto, $y \in B$ y otro elemento de un tercer conjunto $z \in C$, existen seis posibles ordenaciones de los tres elementos. Cada ordenación se denomina terna ordenada y se escriben como (x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y) y (z, y, x).

Igualdad de ternas: Dos ternas (x, y, z) y (p, q, r) son iguales si y sólo si $\left\{\begin{array}{l} x = p \\ y = q \\ z = r \end{array}\right.$

Definición 2.34 Producto de tres conjuntos
Dados tres conjuntos A, B y C, se denomina producto de A por B por C al conjunto de ternas ordenadas:

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$$

Si $A = B = C$, escribimos A^3 en lugar de $A \times A \times A$.

Definición 2.35 Producto de n conjuntos
Dados n conjuntos A_1, A_2 ... A_n, se denomina producto de A_1 por A_2 por... A_n al conjunto:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$$

Los elementos de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ se denominan n-uplas ordenadas.

Si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, escribimos A^n en lugar de $A \times A \times \cdots \times A$.

Ejemplo 2.36 **Puntos del espacio tridimensional euclídeo**

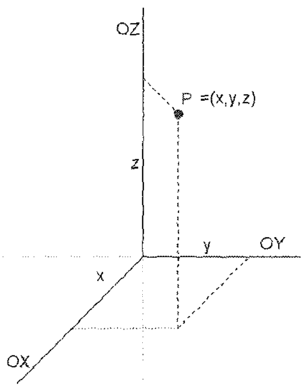

Figura 2.12: Representación cartesiana del espacio euclídeo

Un punto del espacio euclídeo, dotado de un sistema de referencia, representa una terna ordenada de números reales, por ejemplo el punto (2,3,-2). El espacio real completo representa al conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.5. Relaciones entre conjuntos

En la expresión *El número natural elegido es menor que el que he pensado*, se hace referencia a una propiedad que requiere un par de elementos para que tenga sentido. La propiedad *ser menor que* puede ser verdadera, o no, dependiendo del par de números, el elegido y el pensado. En la expresión anterior, los números no están especificados. Para representarlos, usamos dos letras minúsculas distintas, las tradicionales para variables, por ejemplo x para el número elegido, e y para el número pensado. Para representar la propiedad se emplea una letra mayúscula, por ejemplo, *ser menor que* lo representamos por M. En este caso escribimos, M_{xy}, para indicar x *es menor que* y. Obsérvese que la escritura M_{yx} describe que y *es menor que* x.

Relación lógica: Dado el producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos A y B, una relación lógica de dos variables es una propiedad, denotada por R_{xy}, de un elemento genérico (x, y) de $A \times B$ de manera que para cada par $(a, b) \in A \times B$ fijo , al sustituir x e y por a y b, se obtiene la proposición P_{ab}, que de la que no hay duda para catalogarla de verdadera o de falsa. También, se denomina **predicado simple de dos argumentos**.

Ejemplo 2.37 Si $A = B = \{1, 2, 3\}$, la propiedad M_{xy}, x *es estrictamente menor que* y, es una relación lógica pues al particularizar (x, y) en cada elemento del conjunto $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ se obtiene una proposición verdadera o falsa.

Para hacer referencia sintáctica a una relación lógica, se emplea una letra mayúscula $P, Q, R, S, \ldots$, seguida de letras que representan a los argumentos, $x, y, z, t, \ldots$. Por ejemplo, las expresiones $P_{xy}, Q_{xz}, R_{ty}, S_{zx}, \ldots$ representan relaciones lógicas.

Consideremos una relación lógica R_{xy} sobre el producto cartesiano $A \times B$. Asociado a esta relación consideramos el subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$ donde se verifica R_{xy}:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid R_{xy} \text{ es verdadera}\}$$

El conjunto $\mathcal{R}$ se denomina **grafo** de la relación lógica.
Inversamente, sea $\mathcal{G}$ un subconjunto de $A \times B$. Definimos sobre el producto cartesiano $A \times B$, la relación lógica P_{xy} mediante P_{xy} es verdadera si $(x, y) \in \mathcal{G}$ y falsa en caso contrario.
En vista de la asociación unívoca que se puede hacer entre los subconjuntos de $A \times B$ y los predicados de dos argumentos sobre $A \times B$, se define:

Definición 2.38 Dados los conjuntos A y B, todo subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$, es una **relación del conjunto** A **al conjunto** B o relación entre A y B.

Si $A = B$ diremos que $\mathcal{R} \subset A \times A = A^2$ es una relación en A.
Una relación $\mathcal{R} \subset A \times B$ también se denomina **correspondencia** entre A y B, y se emplea la notación:

$$\mathcal{R} : A \longrightarrow B$$

Se denomina **conjunto inicial** de la relación $\mathcal{R}$ al conjunto A y **conjunto final** de $\mathcal{R}$ al conjunto B.
Si un elemento $(x, y) \in \mathcal{R} \subset A \times B$, entonces se dice que el elemento $x \in A$ está relacionado con el elemento $y \in B$ mediante la relación $\mathcal{R}$, y se escribe $x\mathcal{R}y$. Análogamente si $(x, y) \notin \mathcal{R}$, se dice que x no está relacionado con y y se escribe $x\not{\mathcal{R}}y$.

Ejemplo 2.39 1. Si tomamos $A = B = \{1, 2, 3\}$ y M_{xy} es *x es estrictamente menor que y* del ejemplo anterior, entonces el grafo es una relación:

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

2. Si $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ entonces $\mathcal{R} = \{(a, 2), (a, 3)\}$ es una relación de A a B, donde $a\mathcal{R}2$ y $a\mathcal{R}3$ y sin embargo $a\not{\mathcal{R}}1$, $b\not{\mathcal{R}}1$, $b\not{\mathcal{R}}2$ y $b\not{\mathcal{R}}3$.

Dada una relación $\mathcal{R}$ entre A y B, $\mathcal{R} \subset A \times B$, se denomina **relación inversa** de $\mathcal{R}$ al subconjunto $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$ definido por

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in \mathcal{R} \subset A \times B\}.$$

Ejemplo 2.40 Volviendo al ejemplo anterior se tiene:
1. $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$
2. $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, a), (3, a)\}$

Dada una relación $\mathcal{R}$ entre A y B, $\mathcal{R} \subset A \times B$, se denomina:
Conjunto original de la relación $\mathcal{R}$ al siguiente subconjunto de A:

$$\mathcal{R}^{-1}(B) = \{x \in A \mid \exists y \in B, x\mathcal{R}y\}$$

Conjunto imagen de la relación $\mathcal{R}$ al siguiente subconjunto de B:

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A, x\mathcal{R}y\}$$

Conjunto imagen del elemento $x \in A$ mediante la correspondencia $\mathcal{R}$, o simplemente imagen de x, al conjunto:

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in B \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{y \in B \mid x\mathcal{R}y\}$$

Conjunto original del elemento $y \in B$ mediante la correspondencia $\mathcal{R}$, o simplemente original de y, al conjunto:

$$\mathcal{R}^{-1}(y) = \{x \in A \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{x \in A \mid x\mathcal{R}y\}$$

Muchas relaciones usuales están representadas por símbolos específicos, como la relación *menor o igual*, $\leqslant$, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, o la relación *pertenece*, $\in$, siendo A un conjunto y B el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A.

Ejemplo 2.41 Al considerar el conjunto de las partes de un conjunto U, $\mathcal{P}(U)$, se puede considerar el contenido de conjuntos $\subset$ como una relación en $\mathcal{P}(U)$, es decir, se define la relación $A \subset B$, donde A y B son subconjuntos de U. Es claro que dos subconjuntos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ no están relacionados entre sí.

Ejemplo 2.42 El conjunto $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 = 0\}$ es una relación en $\mathbb{R}$. Al estudiar la imagen de cada elemento se tiene que $\mathcal{R}(x) = \emptyset$ si $x < 0$, $\mathcal{R}(0) = \{0\}$ y $\mathcal{R}(x) = \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$ si $x > 0$, mientras que el original de cada $y \in \mathbb{R}$ es $\mathcal{R}^{-1}(y) = \{y^2\}$.

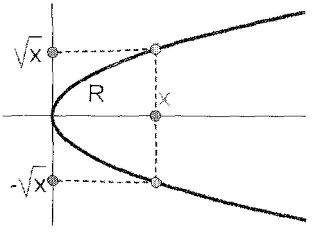

Figura 2.13: Grafo de la relación $\mathcal{R}$

Dado que $\mathbb{R}^2$ se representa como un plano, entonces la relación $\mathcal{R}$ tiene una representación gráfica en dicho plano. En este caso, se trata de una parábola cuyo eje de simetría es el eje OX, con el vértice en el punto $(0, 0)$ y abierta hacia la derecha.

Ejemplo 2.43 El conjunto $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, que en el plano se representa como una circunferencia de centro en el punto $(0, 0)$ y radio 1, es una relación en $\mathbb{R}$.

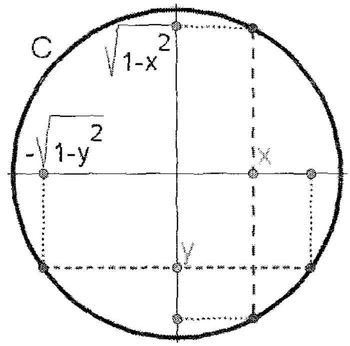

Figura 2.14: Grafo de la relación $\mathcal{G}$

Al estudiar el conjunto imagen de cada elemento se tiene: $\mathcal{G}(x) = \emptyset$ si $x < -1$, $\mathcal{G}(-1) = \{0\}$, $\mathcal{G}(x) = \{-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\}$ si $-1 < x < 1$, $\mathcal{G}(1) = \{0\}$ y $\mathcal{G}(x) = \emptyset$ si $x > 1$.
Al estudiar el conjunto original de cada elemento se tiene: $\mathcal{G}^{-1}(y) = \emptyset$ si $y < -1$, $\mathcal{G}^{-1}(-1) = \{0\}$, $\mathcal{G}^{-1}(y) = \{-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\}$ si $-1 < y < 1$, $\mathcal{G}^{-1}(1) = \{0\}$ y $\mathcal{G}^{-1}(y) = \emptyset$ si $y > 1$.

Ejemplo 2.44 En el conjunto producto del ejemplo 2.32, se considera la relación de ganadores $\mathcal{G} = \{(A,g),(A,p),(B,d),(C,j)\}$, cuya representación gráfica dentro del conjunto producto $J \times P$, o **grafo** de la relación $\mathcal{G}$, está en la figura 2.15.

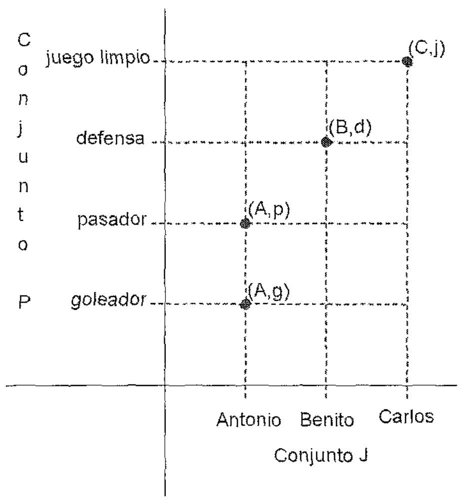

Figura 2.15: Representación de la relación $\mathcal{G}$ entre J y P

La correspondencia $\mathcal{G}$ puede representarse en términos de diagramas de flechas como en la figura 2.16.

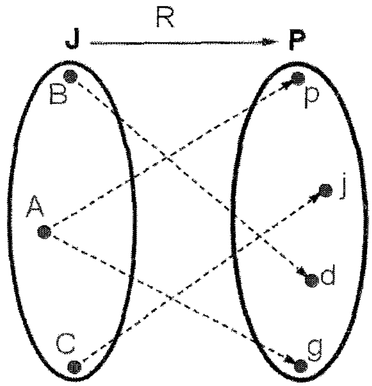

Figura 2.16: Diagrama de la relación $\mathcal{G}$ entre J y P

Además se tiene que el conjunto imagen de cada jugador es:

$$\mathcal{G}(A) = \{g, p\}, \quad \mathcal{G}(B) = \{d\} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}(C) = \{j\}$$

y que el conjunto origen de cada premio es:

$$\mathcal{G}^{-1}(g) = \{A\}, \quad \mathcal{G}^{-1}(p) = \{A\}, \quad \mathcal{G}^{-1}(d) = \{B\} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}^{-1}(j) = \{C\}$$

Observación: El conjunto de todas las relaciones entre dos conjuntos A y B es el conjunto de las partes $\mathcal{P}(A \times B)$. En consecuencia, toda relación puede darse por extensión o por comprensión.

Definición 2.45 Composición de relaciones
Dadas la relación $\mathcal{R}$ entre los conjuntos A y B y la relación $\mathcal{S}$ entre los conjuntos B y C, se define una relación entre los conjuntos A y C, denominada **composición de las relaciones** $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ o relación composición, que denotamos por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, de la forma:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in \mathcal{R} \text{ y } (y, z) \in \mathcal{S}\}$$

Lógica Relacional: Esta lógica es similar a la lógica de predicados, pero empleando relaciones lógicas simples como "palabras básicas". Se emplean las mismas reglas sintácticas y conectivas, y los mismos cuantificadores que en la lógica de predicados, si bien en este caso, se puede utilizar un cuantificador para cada argumento.
El uso de cuantificadores satisface el siguiente principio: Toda relación R_{xy} , definida sobre el producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos A y B, y precedida por un cuantificador por cada variable, como por ejemplo,

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ R_{xy},\ (\exists x \in A)(\forall y \in B)\ R_{xy} \quad \text{o} \quad (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ R_{xy}\,,$$

es una proposición en el sentido de que se le puede atribuir sin ambigüedad el valor verdadero o falso. Cuando no haya duda sobre los conjuntos A y B se escribirá simplemente $\forall x\, \forall y\ R_{xy}$, $\exists x\, \forall y\ R_{xy}$ o $\forall y\, \exists x\ R_{xy}$.

Ejemplo 2.46 Si se tiene una relación P_{xy}, donde $x \in A = \{a, b, c\}$ e $y \in B = \{1, 2\}$, entonces $\forall x\, \forall y\ P_{xy}$ es la proposición

$$P_{a1} \wedge P_{a2} \wedge P_{b1} \wedge P_{b2} \wedge P_{c1} \wedge P_{c2}.$$

La proposición $\forall x\, \exists y\ P_{xy}$ es la proposición

$$(P_{a1} \vee P_{a2}) \ \wedge\ (P_{b1} \vee P_{b2}) \ \wedge\ (P_{c1} \vee P_{c2}),$$

mientras que un intercambio en el orden de los cuantificadores , $\exists y\, \forall x\ P_{xy}$, conduce a la proposición

$$(P_{a1} \wedge P_{b1} \wedge P_{c1}) \vee (P_{a2} \wedge P_{b2} \wedge P_{c2}),$$

que no es equivalente a la anterior pues si $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$ entonces $\forall x\, \exists y\ P_{xy}$ es verdadera mientras que $\exists y\, \forall x\ P_{xy}$ es falsa.
La proposición $\exists x\, \forall y\ P_{xy}$ toma el valor de la proposición

$$(P_{a1} \wedge P_{a2}) \vee (P_{b1} \wedge P_{b2}) \vee (P_{c1} \wedge P_{c2}),$$

mientras que la proposición $\forall y\, \exists x\ P_{xy}$ es

$$(P_{a1} \vee P_{b1} \vee P_{c1}) \wedge (P_{a2} \vee P_{b2} \vee P_{c2}),$$

y $\exists x\, \exists y\ P_{xy}$ toma el valor de la proposición

$$P_{a1} \vee P_{a2} \vee P_{b1} \vee P_{b2} \vee P_{c1} \vee P_{c2}.$$

Ejemplo 2.47 En el ejemplo anterior hemos comprobado que cuando los cuantificadores son distintos, el orden de colocación de los mismos altera el valor semántico de la proposición. Analicemos otro ejemplo: La proposición

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ n > x$$

significa que para cualquier número real existe un número natural que lo supera. Esta propiedad es la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ y veremos en 6.12 que es verdadera. Un simple cambio de orden en los cuantificadores conduce a

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\ n > x$$

que significa que existe un número natural que supera a todos los números reales, que es una propiedad falsa.

Ejemplo 2.48 Para negar una proposición con varios cuantificadores se procede de la manera siguiente. Por ejemplo, busquemos la negación de $(\exists x \in A)(\forall y \in B)P_{xy}$, que escribimos como $\exists x \forall y\ P_{xy}$.

$$\begin{aligned} \neg(\exists x \forall y\ P_{xy}) &\iff \forall x \neg(\forall y\ P_{xy}) \\ &\iff \forall x \exists y \neg P_{xy} \end{aligned}$$

Comentarios

Sobre el método de inducción

En el ejemplo 2.5 vimos el principio de inducción. Este principio proporciona un método para establecer que un predicado P_n en el que interviene una variable n de $\mathbb{N}$, es verdadero para todo n. Es decir, si se quiere demostrar que la proposición $(\forall n \in \mathbb{N})P_n$ es verdadera, basta comprobar los dos puntos siguientes:

- Para $n = 0$, la proposición P_0 es verdadera.
- Para todo n, si la proposición P_n es verdadera, entonces la proposición P_{n+1} es verdadera.

La utilización de este principio permite también construir una sucesión de elementos de un conjunto A cuando se dispone de una manera para formar el término a_n en función de términos anteriores. Este tipo de sucesiones se denominan **sucesiones recurrentes**.

Ejemplo 2.49 Una sucesión recurrente famosa es la sucesión de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. En esta sucesión, cada término es la suma de los dos anteriores. Es evidente que para que esta definición conduzca a una única sucesión, deben conocerse los dos primeros términos, que en este caso son 0 y 1.
Otros casos particulares de sucesiones recurrentes son las progresiones:

Progresión aritmética de diferencia d**:** $x_n = x_{n-1} + d$. De la definición se deduce directamente que $x_n = x_1 + d(n-1)$. Para determinar la sucesión hay que conocer el primer término.
Progresión geométrica de razón r**:** $x_n = rx_{n-1}$. De la definición se deduce directamente que $x_n = x_1 r^{n-1}$. Para determinar la sucesión hay que conocer el primer término.

Sea $a \in \mathbb{N}$. En ocasiones hay que demostrar que una determinada propiedad P_n, que no es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, sí lo es si $n \geq a$. En este caso, se cambia el primer punto en la demostración por inducción, teniendo que comprobar:

- La proposición P_a es verdadera.
- $(\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq a)$ $(P_n \Longrightarrow P_{n+1})$

para concluir que la proposición P_n es verdadera para $n \geq a$.

Lo anterior se aplica a menudo cuando se demuestran predicados donde la variable se restringe a $\mathbb{N}^*$, porque por ejemplo la proposición P_0 no tenga sentido. Se empieza pues probando que P es verdadera para $n = 1$.

Ocurre a veces que para establecer un predicado con variable en $\mathbb{N}$, el suponer que P_n es cierto no basta para demostrar la validez de P_{n+1} pero en cambio sí se demuestra si se supone cierta P_k para todo $k \leq n$. La conclusión es la misma. En este caso la inducción se denomina **inducción completa**:

- La proposición P_0 es verdadera.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, si P_k es verdadera para todo k tal que $0 \leqslant k \leqslant n$, entonces P_{n+1} es verdadera.

Entonces la proposición P_n es verdadera para $n \in \mathbb{N}$.

Sobre Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos actual, que fue desarrollada en su inicio por G. Cantor en el siglo XIX, constituye los fundamentos de las Matemáticas. El propósito de Cantor era tratar cuestiones relacionadas con el infinito, y su método allanaba dificultades. Para Cantor un conjunto es una reunión de objetos determinados y bien diferenciados de nuestra intuición o nuestro pensamiento, formando una totalidad. Cantor trataba una colección o conjunto de objetos como un todo, aceptando implícitamente lo siguiente:

1. Un conjunto es una colección de elementos que cumplen cierta propiedad. Por tanto, queda definido por dicha propiedad.

2. Un conjunto es una sola entidad matemática, de modo que puede a su vez ser contenido por otro conjunto.

3. Dos conjuntos que tengan los mismos elementos son iguales. Un conjunto está determinado por sus elementos.

Esta teoría tuvo éxito, pero necesitó ser precisada por otros matemáticos como G. Frege, B. Russell, E. Zermelo, A. Skolem y A. Fraenkel. Después de varios intentos de axiomatización, teoría de Fregel, teoría de Russell-Whitehead (PM) y otras, se destacan dos sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos: la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) (desarrollada por Zermelo-Skolem-Fraenkel) y la teoría de conjuntos de von Newman-Gödel (desarrollada por von Newman-Bernay-Gödel).

El concepto de conjunto se encuentra a un nivel tan elemental que no es posible dar una definición precisa del mismo. La utilización de palabras como colección, familia, reunión, agrupación o acumulación en un intento de definir conjuntos, no hacen nada más que emplear el objeto a definir dentro de la definición, puesto que esas palabras son sinónimos de la palabra conjunto.

Es claro que el lenguaje natural es necesario para describir los objetos matemáticos y que éste posee cierto nivel de ambigüedad, pero las definiciones matemáticas deben quedar exentas de ambigüedad aunque se formulen con un lenguaje natural.
En la teoría intuitiva de conjuntos se admite el uso de esas palabras, y se acepta la existencia de un universo de objetos, sin importar la naturaleza de los objetos. A partir de ese universo se construyen los conjuntos como entidad matemática. Un elemento posterior es introducir la relación de pertenencia de elementos a conjuntos. Al definir conjunto a partir de una propiedad determinada que deben cumplir sus elementos, se producen ciertas paradojas como la paradoja de B. Russell, y aparecen "conjuntos enormes" que producen cierto desasosiego intuitivo y lógico.

Dificultades como éstas introducen la necesidad de axiomatizar y formalizar la teoría de conjuntos para poder obtener resultados profundos. Se renuncia a una definición intuitiva de conjunto, y se establecen una serie de principios (axiomas) que describen el comportamiento del concepto conjunto. Cualquier resultado obtenido debe ser consecuencia de tales principios.

A continuación exponemos una de las axiomáticas de conjuntos más utilizada con el espíritu de que el lector se dé cuenta de la dificultad que tiene el formalizar una teoría. No se trata de que memorice los axiomas, ni siquiera que comprenda los enunciados de los mismos. Simplemente queremos que vea que establecer un lenguaje sin ambigüedad precisa un esfuerzo enorme, y que incluso, sólo comprenderlo, requiere una sólida formación matemática.

La **teoría de conjuntos de ZF** establece el concepto de conjunto como elemento primitivo, al igual que la relación de pertenencia. Dispone de los axiomas siguientes:

1. **Axioma de extensión:** Dos conjuntos A y B y son iguales si contienen los mismos elementos. Es decir, $\forall x[x \in A \leftrightarrow x \in B] \rightarrow A = B$.
2. **Axioma del conjunto vacío:** Existe un conjunto sin elementos. Es decir, $\exists\emptyset\ \forall x(x \notin \emptyset)$.
3. **Axioma de pares:** Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, existe otro conjunto cuyos elementos son únicamente A y B, $\{A, B\}$. Es decir,
$\forall A, B\ \exists C\ \forall x[x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B)]$.
4. **Axioma de la unión:** Dado cualquier conjunto de conjuntos, C, existe un conjunto que contiene todos los elementos de cada conjunto de C, $\cup C$ que denominamos unión de C. Es decir,
$\forall C\ \exists \cup C\ \forall x[x \in \cup C \leftrightarrow \exists A(A \in C \wedge x \in A)]$.
5. **Axioma del conjunto potencia:** Para cualquier conjunto A existe otro conjunto que contiene todos los subconjuntos de A, $\mathcal{P}(A)$. Es decir,
$\forall A\ \exists\mathcal{P}(A)\ \forall B[B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)]$.
6. **Axioma de especificación:** Sea $\phi(t)$ una fórmula de un lenguaje de primer orden que contenga una variable libre t. Entonces, para cualquier conjunto A existe un conjunto B cuyos elementos son aquellos elementos x de A que cumplen $\phi(x)$. Es decir,
$\forall A\ \exists B\ \forall x[x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))]$.
7. **Axioma de sustitución:** Si $\phi(x, y)$ es una sentencia tal que para cualquier elemento x de un conjunto A existe el conjunto $B = \{y \mid \phi(x, y)\}$, entonces existe una función $f : A \rightarrow B$ tal que $f(A) = B$.
8. **Axioma de infinitud:** Existe un conjunto A tal que $\emptyset \in A$ y tal que si $x \in A$, entonces $x \cup \{x\} \in A$. Es decir,
$\exists A[\emptyset \in A \wedge (\forall x\ x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A]$.
9. **Axioma de regularidad:** Para todo conjunto no vacío A existe un conjunto B que es elemento de A tal que $A \cap B = \emptyset$. Es decir,
$\forall A[A \neq \emptyset \rightarrow \exists B(B \in A \wedge \forall x[x \in B \rightarrow x \notin A])]$.

Finalmente, señalamos algunas de las paradojas que hemos citado y que motivaron el establecimiento de axiomáticas como la teoría de conjuntos de ZF:

Paradoja de Cantor: Sea C la colección de todos los conjuntos posibles. Si C es un conjunto, se verifica que $C \in \mathcal{P}(C)$ y como cualquier subconjunto A de C también es un conjunto, A será elemento de C, y por tanto resulta que $\mathcal{P}(C) \subset C$, que es una contradicción. (Se verá en el capítulo 5.)
Obsérvese que también se deduce que $C \in C$, que está en contradicción con una de las reglas básicas de las que hemos partido.
Por tanto, el concepto de conjunto de todos los conjuntos conduce a una paradoja.

Paradoja de Russel: Sea M la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir:

$$M = \{X \mid X \notin X\}$$

Si M fuera un conjunto, la pregunta que se plantea es: ¿Es M elemento de sí mismo?
Si M es elemento de M, entonces $M \notin M$ por definición de M.
Si M no es elemento de M, entonces $M \in M$ por definición de M.
En ambos casos llegamos a una contradiccción.
La paradoja de Russel es análoga a una paradoja más popular que se denomina **paradoja del barbero** que más o menos dice así: En un pueblo, hay un único barbero que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?