Pregunta 1:
Sea $U = \mathbb{Z}$ el universo de las variables x e y. Consideramos las proposiciones:
p: $\forall x \exists y$ tal que $x + y > 0$
q: $\exists x \forall y$ tal que $x + y > 0$
r: $\forall x \forall y$ se tiene $x + y > 0$
s: $\exists x \forall y$ tal que $y^2 > x$

Se tiene:
A - Ninguna de las otras respuestas.
B - q es falsa y s es verdadera. ✓
C - p y r son falsas.

Solución:
p es verdadera puesto que $\forall x$ podemos escoger cualquier $y > -x + 1$ y entonces $x + y > x - x + 1 = 1 > 0$.
q es falsa puesto que su negación es verdadera. En efecto, podemos expresar q como: $\exists x \forall y R_{xy}$, siendo R_{xy} la relación $x + y > 0$. Entonces $\neg(\exists x \forall y R_{xy}) \iff \forall x \neg(\forall y R_{xy}) \iff \forall x \exists y \neg R_{xy}$, donde $\neg R_{xy}$ es la relación $x + y \leq 0$. Esta última proposición es verdadera ya que $\forall x$ podemos escoger cualquier $y \leq -x$ y entonces $x + y \leq x - x = 0$
r es falsa puesto que su negación es verdadera. De forma similar a como hicimos con q, pordemos llegar obtener que $\neg$r : $\exists x \exists y$ tal que $x + y \leq 0$ donde, por ejemplo, $x = y = -1$ ya cumple la condición.
s es verdadera puesto que se cumple $\forall x \in \mathbb{Z}^-$.
Por lo tanto, **la respuesta correcta es la opción B**.

Pregunta 2:
Sean A, B y C subconjuntos arbitrarios no vacíos de un conjunto X, que tiene al menos dos elementos. Si $C \cup B = B \cap A$ entonces, necesariamente:

A - Ninguna de las otras respuestas.
B - $C \subset B \subset A$. ✓
C - $A \subset B \subset C$.

Solución:
$C \subset B \subset A$ es cierto (ejercicio 7.d capítulo 2 del libro base) por tanto $A \subset B \subset C$ no puede ser cierto y **la respuesta correcta es la opción B**.

Pregunta 3:
Consideramos las relaciones definidas en $\mathbb{N}^*$ por:
p: $n\mathscr{R}_1 m$ si y sólo si n divide a m.
q: $n\mathscr{R}_2 m$ si y sólo si $n^2 + m^2 = 2mn + 2n$.
r: $n\mathscr{R}_3 m$ si y sólo si $n^2 + m^2 = 2mn$.
s: $n\mathscr{R}_4 m$ si y sólo si $n^2 = m^2$.

Única y exclusivamente son relaciones de equivalencia en $\mathbb{N}^*$:
A - La de r y la de s.✓
B - La de p y la de q.
C- Ninguna de las otras.

Solución:
p no es una relación de equivalencia puesto que no cumple la propiedad simétrica. En efecto, $n\mathscr{R}_1 2n$ claramente, puesto que $\frac{2n}{n} = 2 \in \mathbb{N}^*$, sin embargo $2n \not\mathscr{R}_1 n$ ya que $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}^*$
q no es una relación de equivalencia puesto que no cumple la propiedad reflexiva: $\forall n \in \mathbb{N}^*\ n\mathscr{R}_2 n$. En efecto, si $n\mathscr{R}_2 n$ entonces $n^2 + n^2 = 2nn + 2n \iff 2n^2 = 2n^2 + 2n \iff 0 = 2n \iff n = 0 \notin \mathbb{N}^*$. Asi $n \not\mathscr{R}_2 n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
r sí es una relación de equivalenvia. Claramente cumple la propiedad reflexiva. Cumple la propiedad simétrica, veamos que si $n\mathscr{R}_3 m$ entonces $n^2 + m^2 = 2nm \iff n = m$ (esto se cumple para todo $a, b \in \mathbb{R}$, solo hay que ver que $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = 0 \iff a = b$, por lo tanto también se cumple para todo $n, m \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$), por lo tanto es simétrica porque **no incumple** la propiedad simétrica. De forma análoga **tampoco incumple** la propiedad transitiva por lo tanto es una relación de equivalencia.
s es también una relación de equivalencia y se demuestra de forma análoga a r.
Por lo tanto **la respuesta correcta es la opción A**.
Nota: Entiendo que pueda causar discrepancias la forma de demostrar que tanto r como s cumplen las propiedades simétrica y transitiva pero, si nos atenemos a la definición del libro, no veo que sea incorrecto mi razonamiento. De todas maneras la corrección del exámen marca como correcta la opción A.

Pregunta 4:
Consideremos las relaciones definidas en $\mathbb{N}$ por:
p: $n\mathscr{R}_1 m$ si y sólo si $n - m \geq 1$.
q: $n\mathscr{R}_2 m$ si y sólo si $n - m \leq 1$.
r: $n\mathscr{R}_3 m$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $m^2 = k - n^2$.
s: $n\mathscr{R}_4 m$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $m^2 = k + n^2$.

Única y exclusivamente son relaciones de orden en $\mathbb{N}$:
A - La de r y la de s.
B - La de p y la de q.
C- Ninguna de las otras. ✓

Solución:
p no es una relación de orden ya que no cumple la propiedad reflexiva. Como se puede comprobar fácilmente: $\forall n \in \mathbb{N}\ n \not\mathscr{R}_1 n$ ya que $n - n = 0 \not\geq 1$.
q no es una relación de orden ya que no cumple la propiedad antisimétrica. Observemos que $n\mathscr{R}_2(n+1)$: $n-(n+1) = -1 \leq 1$ y $(n+1)\mathscr{R}_2 n$: $(n+1)-n = 1 \leq 1$, sin embargo $n \neq n+1$
r no es una relación de orden ya que no cumple la propiedad antisimétrica. Para cualquier $n, m\ \mathbb{N}\ n \neq m$ podemos escoger $k = m^2 + n^2$ que cumpla $m^2 = k - n^2$ y trivialmente también se cumple $n^2 = k - m^2$ Así que podemos encontrar $n, m, k \in \mathbb{N}$ donde $n\mathscr{R}_3 m$ y $m\mathscr{R}_3 n$ con $n \neq m$. Por lo tanto **solo puede ser correcta la opción C** independientemente si s es o no una relación de orden.

Pregunta 5:
Se considera el anillo $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ con las operaciones:
$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ y $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', ab' + ba' + bb')$
para todo $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$. Sean $I = \mathbb{Z} \times \{0\}$ y $J = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Se tiene:

A- Ninguna de las otras respuestas.
B - J es ideal de $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$. ✓
C- I es ideal de $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$.

Solución:
Primero hay que confirmar que $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ es efectivamente un anillo conmutativo con las operaciones definidas. No lo desarrollo aquí porque es un poco tedioso, pero es sencillo de verificar. Una vez confirmado que es un anillo conmutativo hay que demostrar si J o I son ideales de $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$, es decir, se cumple que si A es un anillo conmutativo e I un subconjunto no vacio de A, entonces I es un ideal de A si:

a) $a - b \in I$ para todo $a, b \in I$

b) $ac \in I$ para todo $a \in I$ y para todo $c \in A$

J es un ideal de $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$. Claramente $J \subset (\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$. Veamos que $\forall (0, a), (0, b) \in J$ se cumple a): $(0, a) - (0, b) = (0, a - b) \in J$ ya que $a - b \in \mathbb{Z}$. Veamos que

$\forall(0,a) \in J$ y $\forall(b,c) \in \mathbb{Z}^2$ se cumple b): $(0,a)\cdot(b,c) = (0, 0b+0c+ab+ac) = (0, ab+ac) \in J$ ya que $ab+ac \in \mathbb{Z}$.
<u>I no es un ideal de $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$</u> ya que no cumple la condición b). En efecto, $\forall(a,0) \in I$ y $\forall(b,c) \in \mathbb{Z}^2$ se tiene que $(a,0)\cdot(b,c) = (ab, ab+ac+0b+0c) = (ab, ab+ac)$ donde $ab+ac = 0$ no se cumple para todo $a,b,c \in \mathbb{Z}$.
Por lo tanto **la respuesta correcta es la opción B**.

Pregunta 6:
Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ tales que el cociente y resto de la división entera de a entre b son 18 y 48 respectivamente

Cosideramos las afirmaciones:
p: El resto de la división entera de a entre 18 es 12.
q: El resto de la división entera de a entre $2b$ es 96.
r: a es múltiplo de 6.
s: El cociente de la división entera de $2a$ entre $2b$ es 96.

Las únicas afirmaciones verdaderas son:
A - p y r. ✓
B - q y s.
C - Ninguna de las otras respuestas.

Solución:
Partimos de que $a = 18b + 48$ con $48 < b$ y $a, b \in \mathbb{N}^*$
<u>p es verdadera</u> pues $a = 18b + 48 = 18b + 2 \cdot 18 + 12 = 18(b+2) + 12$ y $48 < b \to 12 < 48 < b < b+2$.
<u>q es falsa</u> pues $a = 18b + 48 = 9(2b) + 48$ y $48 < b < 2b$ por lo tanto el resto sigue siendo 48
<u>r es verdadera</u> pues $a = 18b + 48 = 6(3b) + 6 \cdot 8 = 6(3b+8)$ y como $b \in \mathbb{N}^*$ el resto de la división entera de a entre 6 es 0, por lo tanto a es múltiplo de 6.
<u>s es falsa</u> puesto que, $2a = 2(18b+48) = 18(2b) + 2 \cdot 48$ y como $48 < b \to 2 \cdot 48 < 2b$ por lo tanto el cociente es 18.
Por lo tanto **la respuesta correcta es la opción A**.

Pregunta 7:
Sean a y b dos números reales cualesquiera. Consideremos las afirmaciones:
p: Si $0 < a < b$ entonces $0 < 1/a < 1/b$.
q: Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
r: Si $a < b$ entonces $a^2 < ab$.
s: Si $a < b$ entonces $1 - a > 1 - b$.

Las siguiente afirmaciones son siempre verdaderas:
A - q y r.
B - Ninguna de las otras respuestas.✓
C - p y s.

Solución:
p es falsa. Como $0 < a < b$ entonces $ab > 0$ y, por lo tanto, $1/ab > 0$. Como se tiene que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \rightarrow xy \in \mathbb{R}^+$, podemos multiplicar la desigualdad inicial por $1/ab$, así: $0 < a < b \iff 0/ab < a/ab < b/ab \iff 0 < 1/b < 1/a$.
q es falsa. No se cumple para $a + b < 0$. Para cualquier $x < 0$ si $a < b$ entonces $ax > bx$, por lo tanto: $(a+b)a > (a+b)b \iff a^2+ab > ab+b^2 \iff a^2 > b^2$.
r es falsa. Por un razonamiento similar a r cuando $a < 0$.
Por lo tanto. **solo puede ser correcta la opción B** independientemente si s es verdadera o no (que lo es.)

Pregunta 8:
Para $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ se tiene:
A - Ninguna de las otras respuestas.✓
B - $z^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.
C - $z = 2e^{i\frac{15\pi}{8}}$.

Solución: Primero calculemos z^2. Si $z = a+ib$, $z^2 = zz = (a^2-b^2)+i(2ab)$. En el caso que nos ocupa: $a = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, entonces:
$a^2 - b^2 = 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.
$2ab = 2(-\sqrt{2+\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}}) = -2sqrt(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = -2\sqrt{4-2} = -2\sqrt{2} \neq 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, **la opción B es falsa**.
Ahora veamos su forma polar, $z = a + ib = re^{i\alpha}$, donde $r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$. En nuestro caso, $r = \sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$. Sin embargo, como la parte real es negativa y la imaginaria es positiva, el argumento de z [mod 2π] debe ser $\pi/2 < arg(z) < \pi$, por lo tanto como en la opción C el argumento es $15\pi/8 > \pi$ [mod 2π] **la opción C es falsa**.
Así, la única **opción correcta posible es la A**.

Pregunta 9:
Sea E un condjunto tal que $card(E) = n$ siendo n impar. La suma de los cardinales de todos los subconjuntos de E es:
A - Ninguna de las otras respuestas.
B - $n2^{n-1}$. ✓

C - $(n-1)2^n$.

Solución:
Este problema se resuelve fácilmente si nos damos cuenta que si un conjunto tiene n elementos su cardinalidad es n, así podemos encontrar la cardinalidad del conjunto de todos los conjuntos de E ($\mathscr{P}(E)$) contando cuantas veces aparece cada elemento de E en $\mathscr{P}(E)$. Sabemos que la cardinalidad del conjunto de las partes es: $card(\mathscr{P}(R)) = 2^{card(E)}$. Supongamos que construimos un conjunto E' eliminado un elemento a_1 a E, entonces E' tendrá $n-1$ elementos: $card(E') = n-1$ y $card(\mathscr{P}(E')) = 2^{n-1}$ y como $card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$, entonces el número de veces que el elemento a_1 aparece en $\mathscr{P}(E)$ será: $card(\mathscr{P}(E)) - card(\mathscr{P}(E')) = 2^n - 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1}$. Por lo tanto el numero de veces que aparece cada elemento sera el número de elementos de E por las veces que aparece en $\mathscr{P}(E)$, o lo que es lo mismo: $n2^{n-1}$. Por lo tanto, **la respuesta correcta es la B**

Pregunta 10:
Sea $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ la aplicación definida por

$$f(A) = \left\{ \frac{n-1}{2} | n \in A \wedge \text{n es impar} \right\}$$

para todo $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Se tiene:
A - f es una aplicación inyectiva.
B - f es una aplicación sobreyectiva. ✓
C - Ninguna de las otras respuestas.

Solución:
<u>f no es inyectiva</u>. Basta observar que para cualquier par de conjuntos de la forma $A_1 = \{n\}$ y $A_2 = \{n, n+1\}$ donde n es impar, es obvio que $A_1, A_2 \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ y $f(A_1) = \left\{\frac{n-1}{2}\right\}$ y $f(A_2) = \left\{\frac{n-1}{2}\right\}$, entonces tenemos que $f(A_1) = f(A_2)$ cuando $A_1 \neq A_2$, por lo tanto f no es inyectiva.
<u>f sí es sobreyectiva</u>. Veamos que para cualquier conjunto $B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ existe un conjunto $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tal que $f(A) = B$. Suponemos el conjunto $B = \{n_1, \ldots, n_r\}$ donde $n_i \in \mathbb{N}$ para todo $i = 1, \ldots, r$ y $n_i \neq n_j$ para $i \neq j$. Entonces para cada $n_i \in B$ podemos encontrar un conjunto $A_{ni} = \{m_i\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tal que $f(A_{ni}) = \{n_i\}$, basta tomar $m_i = 2n_i + 1$ (que por construcción es impar). Así podemos formar el conjunto A como: $A = \bigcup_{i=1,\ldots,r} A_{ni}$. Observemos que, por construcción, como $n_i \neq n_j$ entonces $A_{ni} \neq A_{nj}$ para $i \neq j$ y $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. De esta manera hemos construido un conjunto $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ tal que:

$$f(A) = \{f(A_{n1}), \ldots, f(A_{nr})\} = \{n_1, \ldots, n_r\} = B$$

para cualquier $B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Por lo tanto f es sobreyectiva. Así, **la opción correcta es la B**.