Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Primera Prueba de Evaluación Continua, curso 2016/17

Matrices y Sistemas lineales

Ejercicio 1: (3 puntos) Determine la potencia n-ésima de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sugerencia: utilice la fórmula del binomio de Newton.

Solución: Para aplicar la fórmula del binomio de Newton, descomponemos A como suma de dos matrices que conmuten, una de ellas nilpotente: $A = 2I_3 + B$ con

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = 0 \;\Rightarrow\; B^k = 0 \text{ si } k \geq 3.$$

Como las matrices $2I_3$ y B conmutan se puede puede calcular la potencia n-ésima como sigue

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B^i \, (2I_3)^{n-i}$$

Los únicos sumandos no nulos son aquéllos en los que aparecen $B^0 = I_3,\ B$ o B^2. Es decir

$$\begin{aligned} A^n = (B + 2I_3)^n &= \binom{n}{0} B^0 \, (2I_3)^n + \binom{n}{1} B \, (2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 \, (2I_3)^{n-2} \\ &= 2^n I_3 + n \, 2^{n-1} \, B + \frac{n(n-1)}{2} \, 2^{n-2} \, B^2 \end{aligned}$$

y simplificando queda

$$A = \begin{pmatrix} 2^n & n \, 2^n & n^2 \, 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n \, 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2: (2 puntos) Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz para la cual existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tales que

$$I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_p A^p = 0$$

(a) Demuestre que A es invertible y determine su inversa.

(b) Aplique el resultado para determinar la inversa de una matriz A que cumple $I_n = A^3 + 2A^2$.

Solución: (a) Despejando I_n en la ecuación matricial dada se tiene

$$I_n = -\lambda_1 A - \lambda_2 A^2 - \ldots - \lambda_p A^p$$

y aplicando la propiedad distributiva

$$I_n = A(-\lambda_1 I_n - \lambda_2 A - \ldots - \lambda_p A^{p-1})$$

Entonces, A es invertible y $A^{-1} = -\lambda_1 I_n - \lambda_2 A - \ldots - \lambda_p A^{p-1}$.

(b) Si $I_n = A^3 + 2A^2$, entonces $I_n = A(A^2 + 2A)$, de donde $A^{-1} = A^2 + 2A$.

Ejercicio 3: (5 puntos) Discutir y resolver el siguiente sistema según los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & z & = & a+1 \\ ax & + & y & + & (a-b)z & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución: Para discutir el sistema, consideramos la matriz ampliada $(A|B)$ y la escalonamos para posteriormente aplicar el Teorema de Rouché Fröbenius.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 1 & a-b & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - af_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a & -b & -a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \end{array}\right) = (A'|B')$$

Caso 1: Si $a = 1$, la última fila es equivalente a la ecuación $0 = -1$, que hace el sistema incompatible. Visto de otro modo: habría un pivote en la última columna de $(A'|B')$, y así $\mathrm{rg}(A') < \mathrm{rg}(A'|B')$.

Caso 2: Supongamos $a \neq 1$ y continuemos escalonando el sistema:

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 + f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a & -b & -a^2 \\ 0 & 0 & -b & -a^2 - a \end{array}\right) = (A''|B'')$$

Caso 2.1: si $b \neq 0$, entonces $\mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A''|B'') = 3$ que es el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

Caso 2.2: si $b = 0$ y $-a^2 - a = 0$, entonces la última ecuación es trivial $0 = 0$, y $\mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A''|B'')) = 2$ menor que el número de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Caso 2.3: si $b = 0$ y $-a^2 - a \neq 0$, entonces hay un pivote en la última columna de $(A''|B'')$ y $\mathrm{rg}(A'') = 2 < \mathrm{rg}((A''|B'')) = 3$, luego el sistema es incompatible.

Resolución de los casos compatibles:

Caso 2.1: si $a \neq 1$ y $b \neq 0$ resolviendo el sistema escalonado equivalente $A''X = B''$ se obtiene la única solución:

$$x = \frac{a^3 - a^2 b - ab - a + b}{b(1-a)}, \quad y = \frac{a}{1-a}, \quad z = \frac{a^2 + a}{b}$$

Caso 2.2: si $a \neq 1$, $b = 0$ y $-a^2 - a = 0$, es decir, $b = 0$ y $a \in \{-1, 0\}$; la matriz del sistema equivalente (eliminando la última fila nula) es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a & 0 & -a^2 \end{array}\right)$$

Las incógnitas principales son x e y y la secundaria $z = \lambda$. Despejando las principales se obtiene la solución general:

$$\left(\frac{1}{1-a} - \lambda,\ \frac{-a^2}{1-a},\ \lambda\right) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$