Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Febrero 2024, segunda semana.

En cada pregunta hay una única opción correcta. Cada pregunta acertada: 1 punto; cada pregunta incorrecta: $-0,5$ puntos. Las preguntas sin contestar no suman ni restan puntos. Entregue únicamente la hoja de respuestas. **Material permitido**: un único libro de teoría de Álgebra Lineal.

1. Sean A una matriz no cuadrada de orden $m \times n$ que admite inversa por la derecha, y $H_f(A)$, $H_c(A)$ y $H(A)$ las formas escalonadas reducidas por filas, columnas y (filas y columnas) de A. Entonces, siempre se cumple una de las siguientes condiciones:

   (a) $H_f(A) = H_c(A)$
   (b) $H_f(A) = H(A)$
   (c) $H_c(A) = H(A)$

2. Sea $AX = B$ un sistema lineal escalonado con matriz de coeficientes A cuadrada de orden 5.

   (a) Si la matriz A tiene 15 entradas no nulas, entonces el sistema no puede ser compatible indeterminado.
   (b) Si la matriz A tiene menos de 15 entradas no nulas, entonces el sistema es siempre compatible.
   (c) Si la matriz A tiene 15 entradas no nulas, entonces el sistema puede ser tanto compatible como incompatible.

3. Si $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es una base de $\mathbb{K}^6$ y U es el subespacio generado por los vectores v_1, v_2 y v_3, entonces

   (a) Ningún suplementario de U contiene al vector $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.
   (b) Un suplementario de U no puede contener a los vectores $v_1 + v_2 + v_3 + v_5$ y $v_1 + v_2 + v_3 - v_5$.
   (c) Todos los suplementarios de U contienen al vector v_6.

4. Si A es una matriz orden n tal que $A^5 - 3A^4 + A^2 - I_n = 0$, entonces

   (a) A es invertible y $A^{-1} = AB$ con B de orden n.
   (b) A es invertible y $A^{-1} = A^2B$ con B de orden n.
   (c) A puede tener rango menor que n.

En las preguntas 5, 6, 7 y 8 considere la matriz

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & b & a \end{array}\right), \quad a, b, c \in \mathbb{K}\,.$$

5. El rango de la matriz $(A|B)$ de orden 5×6

   (a) Es igual a 5 si $a^2 = 1$ y $cb \neq 1$.
   (b) Es menor que 5 si $a^2 \neq 1$ y $b = a$.
   (c) $cb = 1$ es una condición necesaria para que se cumpla $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A)$.

6. Si A es invertible, entonces algunas entradas de A^{-1} satisfacen

   (a) $[A^{-1}]_{53} = a[A^{-1}]_{54}$

   (b) $[A^{-1}]_{45} = \dfrac{-a}{(1-a^2)(b-a)}$.

   (c) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

7. Si la forma de Hermite por filas de $(A|B)$ no tiene ningún pivote en la segunda columna, entonces el sistema $AX = B$

   (a) es compatible indeterminado.

   (b) no es compatible determinado.

   (c) es incompatible si $b = a$.

8. Si la forma de Hermite por filas de $(A|B)$ no tiene ningún pivote en la segunda columna y el sistema $AX = B$ es compatible, entonces la solución general del sistema es

   (a) $\left\{\left(-a\lambda,\ \lambda,\ 0,\ 0,\ \dfrac{b-a}{a-c}\right),\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

   (b) $\left\{\left(-a\lambda,\ \lambda,\ 0,\ 0,\ \dfrac{c}{a}\right),\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

   (c) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

En las preguntas 9 y 10 considere aplicación lineal $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ que respecto de la base canónica $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cumple las siguientes condiciones:

(1) El núcleo de f es el subespacio de ecuaciones implícitas $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$, y

(2) $f(v_1 + v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + v_3$ y $f(v_4) = v_4$.

9. La matriz de f en la base $\mathcal{B}$ es

   (a) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (c) es una matriz de rango 3.

10. Sea R la recta generada por el vector $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. La imagen inversa de R es

    (a) la recta R pues $f(R) = R$.

    (b) un hiperplano.

    (c) el plano $L((1,1,1,1),\ (1,-1,0,0))$

Soluciones

1. Sea A una matriz no cuadrada de orden $m \times n$ que admite inversa por la derecha, entonces su rango es igual al número de filas, $\mathrm{rg}(A) = m$, y $m < n$. Todas las formas de Hermite tendrán rango m. Hay que estudiar cómo están distribuidos los m pivotes para decidir cuál es la opción correcta. La forma de Hermite por columnas de A tiene los m pivotes en las m primeras columnas (el resto de columnas son nulas). Los pivotes, además, estarán en las m únicas filas, por tanto $H_c(A) = (I_m|0)$. Esta es una matriz escalonada por columnas y también por filas, por tanto $H_c(A) = H(A)$. (similar a un ejercicio de la primera PEC)

2. (Pregunta de la Autoevaluación 2). Sea $AX = B$ un sistema lineal escalonado con matriz de coeficientes A de orden 5. Si A tiene 15 entradas no nulas, entonces todos los elementos de la diagonal principal de A son distintos de 0, es decir $\mathrm{rg}(A) = 5$. Entonces, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 5$, que es el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado. La opción correcta es la (a).

3. Si $\{v_1, \dots, v_6\}$ es una base de $\mathbb{K}^6$ y $U = L(v_1, v_2, v_3)$, entonces $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \notin U$, por lo que sí puede pertenecer a un suplementario de U. Por ejemplo, $W = L(v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_5, v_6)$ sería un suplementario de U. Es decir, (a) es incorrecta.

   Un suplementario de U no puede tener vectores en común con U salvo el 0; entonces, no puede contener a los vectores $w_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_5$ y $w_2 = v_1 + v_2 + v_3 - v_5$, ya que contendría a su suma que es $w_1 + w_2 = v_1 + v_2 + v_3 \in U$. Por tanto (b) es correcta.

   Un suplementario de U que no contiene al vector v_6 es el subespacio $L(v_4, v_5, v_6 + v_1)$, luego (c) es incorrecta.

4. Si A es una matriz de orden n tal que $A^5 - 3A^4 + A^2 - I_n = 0$, entonces $A(A^4 - 3A^3 + A) = I_n$ por lo que $A^{-1} = A^4 - 3A^3 + A = A(A^3 - 3A^2 + I_n)$. Por tanto, A es invertible y $A^{-1} = AB$ con $B = A^3 - 3A^2 + I_n$ de orden n.

Preguntas 5, 6, 7 y 8. Para abordar de forma eficiente las cuatro preguntas, hacemos sólo operaciones elementales de filas a la matriz $(A|B)$ para estudiar su rango y resolver el sistema $AX = B$, a la vez. Hacemos las siguientes operaciones elementales

$$f_2 \to f_2 - af_1,\ f_4 \to f_4 - af_3,\ f_5 \to f_5 - f_4$$

y la matriz queda escalonada

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & b & a \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a & a-c \end{array}\right) = (A'|B')$$

5. El rango de la matriz $(A|B)$ es el mismo que el de la matriz $(A'|B')$.

   Si $a^2 = 1$, entonces haciendo la operación elemental $f_5 \to f_5 - \frac{b-a}{a} f_4$ se tiene

$$(A'|B') \sim_f \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-c-\frac{b-a}{a}c \end{array}\right) = (A''|B'')$$

   Si $a = 1$, la última fila es $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ |\ 1 - cb)$.

   Si $a = -1$, la última fila es $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ |\ -1 + cb)$.

Por tanto, tenemos los siguientes casos:

- Si $a^2 = 1$ y $cb = 1$ entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 4$ (SCI).
- Si $a^2 = 1$ y $cb \neq 1$ entonces $\text{rg}(A) = 4 < \text{rg}(A|B) = 5$ (SI).
- Si $a^2 \neq 1$ y $b - a \neq 0$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 5$ (SCD).
- Si $a^2 \neq 1$, $b = a$ y $c \neq a$, entonces $\text{rg}(A) = 4 < \text{rg}(A|B) = 5$ (SI).
- Si $a^2 \neq 1$, $b = a$ y $c = a$, entonces $\text{rg}(A) = rg(A|B) = 4$ (SCI).

La respuesta correcta es la (a) $\text{rg}(A|B) = 5$ si $a^2 = 1$ y $cb \neq 1$.

6. La matriz A es invertible si $\text{rg}(A) = 5$, es decir si $a^2 \neq 1$ y $b - a \neq 0$. No es necesario calcular la inversa para responder a esta pregunta. Sólo hace falta calcular entradas de las filas 4 y 5 haciendo operaciones elementales de filas a $(A|I_5)$ (las tres primeras son las mismas que hicimos antes)

$$(A|I_5) \sim_f \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & a & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a & 0 & 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Después, modificamos las filas 4 y 5 para conseguir las entradas de esas filas de A^{-1}

$$f_5 \to \frac{1}{b-a} f_5,\ f_4 \to \frac{1}{1-a^2} f_4 \quad \sim_f \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{1-a^2} & 0 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a}{b-a} & \frac{-1}{b-a} & \frac{1}{b-a} \end{array}\right)$$

$$f_4 \to f_4 - \frac{a}{1-a^2} f_5 \quad \sim_f \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & \frac{-a}{(1-a^2)(b-a)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a}{b-a} & \frac{-1}{b-a} & \frac{1}{b-a} \end{array}\right)$$

En este punto, ya no se van a modificar las filas 4 y 5, por lo que podemos afirmar que

$$[A^{-1}]_{45} = \frac{-a}{(1-a^2)(b-a)},\ [A^{-1}]_{53} = \frac{a}{(b-a)},\ [A^{-1}]_{54} = \frac{-1}{(b-a)}$$

por lo que la opción correcta es (b).

7. La forma de Hermite por filas de $(A|B)$ no tiene ningún pivote en la segunda columna si y sólo si la entrada $(2,2)$ de $(A'|B')$ es igual a 0, es decir $a^2 = 1$. En tal caso, el sistema $AX = B$ es equivalente al sistema escalonado $A''X = B''$, que es compatible si y sólo si $(A''|B'')$ no tiene un pivote en la última columna, es decir si $bc = 1$; e incompatible si $bc \neq 1$. Por lo que (a) es incorrecta.

   Si el sistema es compatible, es decir si $bc = 1$, se tiene $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 4$ menor que el número de incógnitas, es compatible indeterminado. La respuesta correcta es (b).

   Finalmente, la opción (c) es falsa pues la compatibilidad depende de la condición $cb = 1$, pudiendo ser b igual o distinto de a.

8. Si la forma de Hermite por filas de $(A|B)$ no tiene ningún pivote en la segunda columna y el sistema $AX = B$ es compatible, entonces $a^2 = 1$, $cb = 1$ y el sistema equivalente tiene por matriz: $(A''|B'')$ con la última fila nula

$$(A''|B'')\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A''|B'')$$

La solución general del sistema es $\left\{\left(-a\lambda,\ \lambda, 0, 0, \dfrac{c}{a}\right)\right\}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$. Luego, la opción (b) es correcta.

Preguntas 9 y 10. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^4$ y $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ una aplicación lineal tal que

(1) El núcleo de f es el subespacio de ecuaciones $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$ y

(2) $f(v_1 + v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + v_3$ y $f(v_4) = v_4$

9. La matriz de f en la base canónica es (ejercicio de examen anterior) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   Podemos construirla encontrando las imágenes de los vectores de la base canónica o simplemente comprobar si alguna de las matrices cumple las condiciones dadas:

   (1) Tomamos dos vectores linealmente independientes del núcleo y comprobamos si $f(1, -1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0),\ f(1, 0, -1, 0)$ $(0, 0, 0, 0)$.

   (2) comprobamos si $f(1, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 0)$ y $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$.

10. La recta R generada por el vector $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ tiene ecuaciones implícitas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. La imagen inversa de R es

$$\begin{aligned} f^{-1}(R) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ f((x_1, x_2, x_3, x_4)) \in R\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ 3x_4) \in R\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ x_1 + x_2 + x_3 = 3x_4\} \end{aligned}$$

   La última ecuación es una ecuación implícita de $f^{-1}(R)$, que se obtiene de la condición de pertenencia a R según la cual todas las componentes del vector $f((x_1, x_2, x_3, x_4))$ tienen que ser iguales. Por tanto, la opción correcta es la (c) $f^{-1}(R)$ es un hiperplano.