Ejercicios propuestos

1. Se define en $\mathbb{N}$ la operación interna $\star$ y, por inducción, $a^{(n)}$ mediante:

$$a \star b = a + b + ab \quad \text{y} \quad \begin{cases} a^{(1)} & = \quad a \\ a^{(n+1)} & = \quad a^{(n)} \star a \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

   a) Estudie si la operación $\star$ es conmutativa, asociativa, posee elemento neutro y en su caso, si todo elemento tiene simétrico.

   b) Calcule $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ y exprese $a^{(n)}$ por recurrencia, respecto de las operaciones usuales de $\mathbb{N}$.

   c) Demuestre que $a^{(m)} \star a^{(n)} = a^{(m+n)}$ si $m, n \in \mathbb{N}^*$. ¿Qué valor hay que dar a $a^{(0)}$ par que la regla anterior siga siendo válida?

En los siguientes ejercicios demuestre cada enunciado por inducción:

2. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para $n \geqslant 1$.

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para $n \geqslant 1$.

4. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ para $n \geqslant 1$.

5. $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para $n \geqslant 1$.

6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ para $n \geqslant 1$.

7. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n \in \mathbb{N}$.

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

9. Demuestre que $\dbinom{m-1}{n-1} + \dbinom{m-1}{n} = \dbinom{m}{n}$ si $1 \leqslant n \leqslant m - 1$. Procediendo como en el ejemplo 5.24, interprete esta fórmula teóricamente.

10. Sea un conjunto finito A tal que $n = \text{card}(A)$ y sea $B = \{0, 1\}$. De entre todas las aplicaciones de A a B, ¿cuántas son sobreyectivas?

11. Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $card(A) = 8$ y $\text{card}(B) = 7$. De entre todas las aplicaciones de A a B, ¿cuántas son sobreyectivas?

12. En la escapada final de un campeonato mundial de ciclismo hay tres corredores del equipo A, dos del equipo B, uno del equipo C, uno del equipo D y dos del equipo E.

a) ¿De cuántas formas distintas puede componerse el podium? (El podium lo componen los tres primeros en la clasificación de la carrera).

b) ¿De cuántas formas distintas puede componerse el podium de corredores teniendo sólo en cuenta los equipos?

13. ¿Cuántos números de cuatro cifras hay? ¿Cuántos de ellos son divisibles por 5? ¿Cuántos de ellos son pares? ¿Cuántos de ellos son divisibles por 10? ¿Cuántos de ellos son divisibles por 2 o por 5?

14. De una baraja española de cuarenta cartas se extraen cinco cartas.

    a) ¿Cuántas manos distintas se pueden obtener?

    b) ¿Cuántas manos distintas con dos parejas se pueden obtener? (Una pareja son dos cartas del mismo valor; la jugada se entiende como dos cartas de un valor, otras dos de otro valor, distinto del anterior, y la quinta carta no es de ninguno de los dos valores de las dos parejas?

    c) ¿Cuántas manos distintas con una pareja y un trío se pueden obtener? (Un trío son tres cartas del mismo valor).

    d) ¿Cuántas manos distintas se pueden obtener con un poker? (Un poker son cuatro cartas del mismo valor).

15. ¿Por qué todo subconjunto no acotado de $\mathbb{N}$ es numerable?

16. ¿Existe un conjunto X tal que $\mathcal{P}(X)$ sea un conjunto numerable?

17. Sea $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \geqslant n\}$. Demuestre que A es un conjunto infinito.

18. Sea $B \subset \mathbb{N}$ un conjunto infinito. Sea la función $f\colon \mathbb{N} \to B$ definida por:

$$f(n) = \text{mín}\{m \in B \mid n \leqslant m\}$$

    Demuestre que:

    a) f es creciente, es decir, si $n \leqslant n'$ entonces $f(n) \leqslant f(n')$.

    b) $n \leqslant f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    c) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = f(n)\}$.

    d) $f^2(n) = (f \circ f)(n) = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. Escriba, sin utilizar el símbolo valor absoluto, el valor de las expresiones siguientes en función del valor de x.

    a) $x^2 - 1 + |x - 1|$

    b) $x - |x - 1|$

c) $|x+1|+|x+2|+|x+3|$

d) $|(x+1)(x+2)|+|x+3|$

20. Demuestre que si q es el cociente en la división entera de a entre b, entonces q es también el cociente en la división entera de na entre nb, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

21. Sean a y $b \in \mathbb{N}^*$ y $m = \mathrm{mcm}(a,b)$ y $d = \mathrm{mcd}(a,b)$. Demuestre que $dm = ab$.

22. Sea (x_n) la sucesión de números naturales definida recurrentemente mediante:

$$x_0 = x_1 = 1 \text{ y } x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, x_n es impar.

b) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(x_n, x_{n+1}) = 1$ y $\mathrm{mcd}(x_n, x_{n+2}) = 1$.

23. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, se verifica

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

24. Se consideran en $\mathbb{Z}^2$ dos operaciones internas definidas por

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \text{y} \quad (a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd)$$

Estudie si con estas dos operaciones $\mathbb{Z}^2$ es un anillo. ¿Es unitario? ¿Es íntegro?