# Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

**Septiembre 2023**

En cada pregunta hay una única opción correcta. Cada pregunta acertada: 1 punto; cada pregunta incorrecta: $-0,5$ puntos. Las preguntas sin contestar no suman ni restan puntos. Entregue únicamente la hoja de respuestas. **Material permitido**: un único libro de teoría de Álgebra Lineal.

1. Sean $A$ y $B$ dos matrices de orden $m \times n$ equivalentes, pero no equivalentes por filas (es decir, podemos transformar $A$ en $B$ utilizando operaciones elementales de filas y/o columnas, pero no utilizando sólo operaciones elementales de filas). Entonces:

   (a) Los sistemas homogéneos $AX = 0$ y $BX = 0$ son equivalentes pues $A$ y $B$ son equivalentes.

   (b) Existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $AE_1 \cdots E_k$ es equivalente por columnas a $B$.

   (c) Existe una matriz invertible $P$ tal que $PA$ es equivalente por columnas a $B$.

2. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 & 1 \\ a & a & ab & a \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{K}$$
   Se cumple que

   (a) El rango de $A$ depende del valor del parámetro $b \in \mathbb{K}$.

   (b) Si $a = 1$, entonces el rango de $A$ es el mismo para todo $b \in \mathbb{K}$.

   (c) Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces el rango de $A$ puede ser igual a 2.

3. Para la misma matriz $A$ del ejercicio anterior se considera el sistema lineal homogéneo $AX = 0$. Entonces, se cumple que

   (a) Si $a = 0$, es equivalente al sistema lineal $\{x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + \frac{1}{b}x_3 = 0\}$.

   (b) Si $a = 0$, puede ser equivalente al sistema lineal $\{x_1 + x_4 = 0,\ x_3 = 0\}$.

   (c) Si $b = 0$, entonces el conjunto de soluciones del sistema determina un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$ de dimensión 2.

4. Sean $A$ y $B$ dos matrices de orden $n$ reales. Entonces,

   (a) Si $A$ y $B$ no conmutan, $\det(AB)$ y $\det(BA)$ pueden ser distintos.

   (b) Si $A$ y $B$ son semejantes, entonces $\det(AB)$ puede ser tanto positivo como negativo o cero.

   (c) Si $A$ y $B$ son invertibles y congruentes, entonces $\det(A)$ y $\det(B)$ tienen el mismo signo.

5. Considere los tres subconjuntos de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ siguientes:

   - El formado por las matrices reales de orden $n$ singulares.
   - El formado por las matrices reales de orden $n$ ortogonales.
   - El formado por las matrices reales de orden $n$ con traza igual a 0.

   ¿Cuántos subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

   (a) Uno, (b) Dos, (c) Ninguno.