Examen Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- Teorema de Rouché-Frobenius. (1.5 puntos)

2.- Probar las siguientes identidades sin calcular los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(1 punto)

3.- Discutir el sistema en función del valor de a, y calcular las soluciones para los valores de a que hacen el sistema compatible.

$$\begin{cases} ax+y+z = a \\ x+ay+z = a^2 \\ x+y+az = a^3 \end{cases}$$

(3,5 puntos)

4.- a) Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $T^2 = I$ es la aplicación identidad. Se definen $U_1 = \{v \mid T(v) = v\}$ y $U_2 = \{v \mid T(v) = -v\}$. Demostrar que la suma directa $U_1 \oplus U_2 = V$ (2 puntos).

b) Sea V el espacio vectorial real de las matrices de tamaño 2x2, en el que se considera la base formada por las matrices

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se considera la aplicación lineal f de R^3 en V, definida por

$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ b+2c & a-2c \end{pmatrix}$. Hallar la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $R^3 \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,1,0)\}$.

(2 puntos)