# Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

**Segunda PEC, Sistemas Lineales y Espacios Vectoriales.**

19 de diciembre de 2023

En las preguntas 1 a 4 determine cuál es la opción correcta y justifique por qué. Todas las respuestas y resultados de los ejercicios tienen que estar suficientemente justificados. Si utiliza operaciones elementales en la resolución de los ejercicios indique explícitamente cuáles.

1. (1 punto) Sea $AX = B$ es un sistema lineal de $m > 3$ ecuaciones y $n$ incógnitas. Denotamos por $C_i(A)$ a la columna $i-$ésima de $A$. Si la forma de Hermite por filas de $(A|B)$ tiene exactamente dos filas nulas, entonces
   (a) el número de incógnitas del sistema es mayor que $m-2$.
   (b) una condición necesaria para que sea compatible es $B = a_1C_1(A) + \cdots + a_{n-1}C_{n-1}(A)$.
   (c) si $B = C_1(A) + C_n(A)$ y $n = m-2$ el sistema es compatible determinado.

2. (1 punto) Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores linealmente dependientes de un espacio vectorial $V$ de dimensión mayor que 0. Entonces, la afirmación “suprimiendo algún vector de $S$ se puede encontrar un subconjunto $\mathcal{B} \subset S$ que es una base de $V$” es
   (a) cierta pues todo conjunto de vectores linealmente dependiente contiene un subconjunto linealmente independiente.
   (b) cierta sólo si $m > \dim(V)$.
   (c) es falsa salvo el caso en que $S$ sea un sistema generador de $V$.

3. (1 punto) Si $U$ y $W$ son dos subespacios de un subespacio vectorial $V$ tales que el número de ecuaciones implícitas de $U$ es $p$ y el de $W$ es $q$, con $p < \dim(V)$ y $q < \dim(V)$; se cumple que
   (a) si $p + q < \dim(V)$, entonces $U \cap W \neq \{0\}$
   (b) si $p + q = \dim(V)$, entonces $U + W = V$
   (c) Si $U$ y $W$ son suplementarios en $V$, entonces $p + q > \dim(V)$

4. (1 punto) Sea $P$ el plano de $\mathbb{K}^4$ de ecuaciones $\{x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$ y $\mathbb{K}^4/P$ el subespacio vectorial cociente $\mathbb{K}^4$ módulo $P$. Entonces, una base de $\mathbb{K}^4/P$ es
   (a) $\{(1,1,0,0) + P,\ (0,1,0,0) + P\}$
   (b) $\{(1,1,0,0) + P,\ (0,0,1,1) + P\}$
   (c) $\{(1,0,0,0) + P,\ (0,1,0,0) + P\}$

**Ejercicio 1**.(2.5 puntos) Discutir y resolver el sistema lineal $AX = B$ para los distintos valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{K}$, siendo

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 3 & a & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & a & b \end{array}\right)$$

**Ejercicio 2.** (2 puntos) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_6\}$ una base de $\mathbb{K}^6$ y $S = \{u_1, \ldots, u_6\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{K}^6$ cuya matriz de coordenadas por columnas respecto de $\mathcal{B}$ es la matriz $A$ de orden 6 con entradas

$$a_{ii} = 0,\ a_{ij} = 1 \text{ si } i < j,\ a_{ij} = -1 \text{ si } i > j;\ \text{para } i, j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Sabiendo que $S$ es otra base de $V$, determine las coordenadas del vector $v_1 + \cdots + v_6$ respecto de $S$.

**Ejercicio 3**. (1.5 puntos) En el espacio vectorial $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios $U = L((1,0,1,1),\ (1,2,0,0))$ y $W = L((0,1,-1,0), (1,1,-1,2))$. Determine una base y unas ecuaciones implícitas de los subespacios $U + W$ y $U \cap W$.

## Soluciones

1. Sea $AX = B$ un sistema lineal de $m > 3$ ecuaciones y $n$ incógnitas. Denotamos por $C_i(A)$ a la columna $i-$ésima de $A$. Si la forma de Hermite por filas de $(A|B)$ tiene dos filas nulas, entonces $\text{rg}(A|B) = m - 2$ y $\text{rg}(A)$ puede ser igual a $m - 3$ o $m - 2$. Entonces, el número de columnas de $A$, cumple $n \geq \text{rg}(A) \geq m - 3$ en el primer caso, o $n \geq \text{rg}(A) \geq m - 2$ en el segundo, lo que hace (a) falsa.

   Una condición necesaria y suficiente para que $AX = B$ sea compatible es que $B$ sea combinación lineal de $C_i(A)$, pero no es necesaria una combinación lineal concreta, como se expresa en (b), que no es correcta.

   Si $B = C_1(A) + C_n(A)$, entonces el sistema es compatible, es decir, según el Teorema de Rouché-Frobenius: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = m - 2$. Si, además, $n = m - 2$, entonces es compatible determinado, es decir, (c) es la opción correcta.

2. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores linealmente dependientes de un espacio vectorial $V$ con $\dim(V) = n \geq 1$. La afirmación "suprimiendo algún vector de $S$ se puede encontrar un subconjunto $\mathcal{B} \subset S$ que es una base de $V$" es falsa salvo si $S$ es un sistema generador de $V$. Si $S$ es un sistema generador de $V$, entonces contiene una base de $V$ y si no lo es, ningún subconjunto de $S$ será sistema generador; es decir, (c) es la opción correcta y (a) falsa.

   La condición $m > \dim(V)$ es necesaria para que $S$ sea un sistema generador, pero no suficiente, es decir $S$ puede tener más de $\dim(V)$ vectores pero no ser un sistema generador, por lo que (b) también es falsa.

3. Si $U$ y $W$ son dos subespacios de un subespacio vectorial $V$ tales que el número de ecuaciones implícitas de $U$ es $p$ y el de $W$ es $q$, con $p < \dim(V)$ y $q < \dim(V)$; entonces $\dim(U) = n - p, \dim(W) = n - q$ y

   $$n \geq \dim(U+W) = \dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W) \geq (n-p)+(n-q)-\dim(U\cap W) = 2n-(p+q)-\dim(U\cap W)$$

   Si $p + q < \dim(V) = n$, entonces

   $$n \geq 2n - (p + q) - \dim(U \cap W) > n - \dim(U \cap W)$$

   de donde $\dim(U \cap W) > 0$, lo que hace (a) la opción correcta.

   La opción (b) es falsa. Si $p + q = \dim(V)$, no tiene por qué ser $U + W = V$; por ejemplo, si $U = W$, o si $U \subset W$ se tiene $U + W = U \neq V$

   Si $U$ y $W$ son suplementarios en $V$, entonces $\dim U + \dim W = \dim(V) = n$, es decir $(n-p)+(n-q) = n$, de donde $p + q = n$, lo que hace (c) falsa.

4. Sea $P$ el plano de $\mathbb{K}^4$ de ecuaciones $\{x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$. Tomamos una base de $U$, por ejemplo: $\{u_1 = (1, -1, 0, 0),\ u_2 = (0, 0, 1, -1)\}$. Una base de $\mathbb{K}^4/P$ está formada por dos vectores $\{v_1 + P,\ v_2 + P\}$ tales que $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ son una base de $\mathbb{K}^4$. Los únicos que cumplen esta condición son los vectores de la opción (b): $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 0, 1, 1)$.

**Ejercicio 1**. Transformamos el sistema lineal $AX = B$ en escalonado para la discusión y posterior resolución. Haciendo las operaciones elementales de filas a $(A|B)$: $f_2 \to f_2 - 3f_1$, $f_3 \to f_3 - f_1$, $f_2 \leftrightarrow f_3$ y $f_3 \to f_3 + \frac{a-6}{2} f_2$, se obtiene la matriz equivalente por filas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 3 & a & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & a & b \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 - \frac{5}{2}a & \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}a + 2 & 3 - 3b \end{array}\right)$$

Buscamos los valores de $a$ y $b$ que anulan entradas de la última fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2}(a-4) & \frac{(a-1)(a-4)}{2} & 3-3b \end{array}\right)$$

Se tiene los siguientes casos:

- Si $a \neq 4$ entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$ menor que el número de incógnitas, por lo que es compatible indeterminado. Llamando $x_4 = \lambda$ podemos simplificar la última ecuación multiplicándola por $\frac{2}{a-4}$ obteniendo $-5x_3 + (a-1)x_4 = \frac{6-6b}{a-4}$. Despejando las incógnitas principales obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & -\frac{1}{5}\left(\frac{6-6b}{a-4} - (a-1)\lambda\right) = \frac{6b-6}{5(a-4)} + \frac{(a-1)}{5}\lambda \\ x_2 & = & \frac{3-3b}{a-4} + \lambda \\ x_1 & = & b - \frac{6-6b}{a-4} - \lambda = \frac{ba+2b-6}{a-4} - \lambda \end{array}$$

  Nótese que el resultado es el mismo para todo $a \neq 4$, incluyendo el caso $a = 1$.

- Si $a = 4$ y $b = 1$, la matriz del sistema equivalente es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  que es compatible indeterminado. La solución general es

$$\left(1 + 5\mu - 4\,\lambda,\ -\frac{5}{2}\mu + \frac{5}{2}\,\lambda,\ \mu,\ \lambda\right), \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

- Si $a = 4$ y $b \neq 1$, entonces $\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A|B) = 4$ y el sistema es incompatible.

**Ejercicio 2.** Dadas las bases de $\mathbb{K}^6$ $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_6\}$ y $S = \{u_1, \ldots, u_6\}$, la matriz $A$ de coordenadas por columnas se $S$ respecto de $\mathcal{B}$ es la matriz de cambio de coordenadas de $S$ a $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del vector $v = v_1 + \cdots + v_6$ respecto de $\mathcal{B}$ son $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Si las coordenadas de $v$ respecto de $S$ son $(x_1, \ldots, x_6)$ se cumple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema para calcular las coordenadas y para ello lo transformamos en escalonado. Hacemos las operaciones: $f_i \to f_i - f_{i+1}$ para $i = 1,2,3,4$.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación hacemos $f_5 \to f_5 + f_1 + f_3$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

De donde ya podemos despejar fácilmente la solución:

$$(x_1, \dots, x_6) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1)$$

**Ejercicio 3**. Dados los subespacios

$$U = L(u_1 = (1,0,1,1),\, u_2 = (1,2,0,0)),\;\; W = L(w_1 = (0,1,-1,0),\, w_2 = (1,1,-1,2))$$

Un sistema generador de $U + W$ es $S = \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ y $\dim(U+W) = \mathrm{rg}\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$. Determinamos el rango y una base de $U + W$ $U \cap W$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & w_1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & w_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 - 2u_1 - 3w_1 + w_2 \end{array}\right)$$

El rango es 3, por lo que $\dim(U+W) = 3$ y una base de este hiperplano de $\mathbb{K}^4$ está formada por los tres primeros vectores de la última matriz. Los utilizamos para determinar unas ecuaciones implícitas, que se obtienen de la condición:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 3 \;\Leftrightarrow\; \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

La dimensión del subespacio intersección se obtiene de la fórmula de dimensiones

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \;\Leftrightarrow\; 3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W) \;\Leftrightarrow\; \dim(U \cap W) = 1$$

Una base de este subespacio la obtenemos de la condición $u_2 - 2u_1 - 3w_1 + w_2 = 0$ de donde

$$u_2 - 2u_1 = 3w_1 - w_2$$

es un vector que pertenece tanto a $U$ como a $W$. Se obtiene el vector $u_2 - 2u_1 = (-1, 2, -2, -2)$ y unas ecuaciones implicitas de la recta $\dim(U \cap W)$ se tienen de la condición:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 1 \;\Leftrightarrow\; \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ x_1 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Unas ecuaciones implícitas de $\dim(U \cap W)$ son $\{2x_1 + x_2 = 0,\, 2x_1 - x_3 = 0,\; 2x_1 - x_4 = 0\}$