UNIVERSIDAD DE CASTILLA - LA MANCHA

Escuela de Ingenieros Industriales. Albacete

Departamento de MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA. Prueba práctica de la convocatoria ordinaria — Enero de 2011

1. Halle los números complejos que verifican

$$z - \bar{z} \geq i|z|^2$$

y represéntelos en el plano complejo.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 4x + z, ax - y - z, 2x + ay + az)$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Para esta aplicación se pide calcular en función del parámetro a:

a) Una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Im}(f)$.

b) La inagen por f del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

c) Unas ecuaciones implícitas de la variedad vectorial antiimagen del vector $(1, 4, a, 2)$.

d) La expresión de f con respecto a las bases $\{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y $\{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

3. Considérese el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que respecto de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ verifica:

$$\begin{cases} f(v_1) = rv_1 + 2v_2 + 4v_3 \\ f(v_1 - 2v_2) = rv_1 \\ v_3 \text{ es autovector asociado al autovalor } \ 1 - s \end{cases}$$

En función de los parámetros $r, s \in \mathbb{R}$:

a) Obténgase la matriz del endomorfismo f.

b) Calcúlese el rango de f, el subespacio suma $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$ y el subespacio intersección, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.

c) Discútase en qué casos es f diagonalizable.

Examen resuelto

1. Si escribimos $z = x + yi$ entonces $\bar{z} = x - yi$, de modo que $z - \bar{z} = 2yi$.

   Por otra parte, $|z|^2 = x^2 + y^2$, por lo que $i|z|^2 = (x^2 + y^2)i$.

   Ambos números son imaginarios puros, por lo que

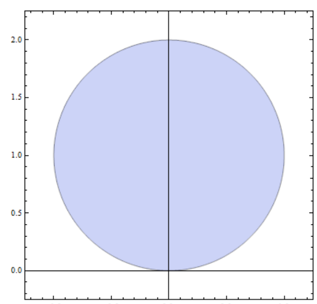
   $$z - \bar{z} \geq i|z|^2 \;\Leftrightarrow\; 2y \geq x^2 + y^2$$

   Esta última desigualdad puede escribirse como

   $$x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$

   o bien $x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 1$, que equivale a $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

   La ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 1$ es la de una circunferencia de centro $\mathrm{C}(0,1)$ y radio $r = 1$, por lo que $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ es el conjunto de puntos de dicha circunferencia junto con los que están en el interior (dentro del círculo). Se representa a continuación.

2. Dado que

   $$f(1,0,0) = (1,4,a,2), \quad f(0,1,0) = (1,0,-1,a), \quad f(0,0,1) = (1,1,-1,a)$$

   la matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$ es

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}$$

   Calculemos $\operatorname{rang}(A)$.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 4F_1 \\ F_3 - aF_1 \\ F_4 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -1-a & -1-a \\ 0 & a-2 & a-2 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas de esta última matriz son proporcionales y al menos una es siempre distinta de $(0,0,0)$ valga lo que valga a, de modo que la matriz A es equivalente a efectos del rango a

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&0&1\\a&-1&-1\\2&a&a\end{pmatrix}\ \begin{matrix}F_2-4F_1\\F_3-aF_1\\F_4-2F_1\\\longrightarrow\end{matrix}\ \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-4&-3\\0&-1-a&-1-a\\0&a-2&a-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-4&-3\\0&1&1\end{pmatrix}$$

que tiene rango 3 para cualquier valor de a.

$a)$ Sabemos que $\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(f))=3$ y que $\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{rang}(A)$.
Dado que $\mathrm{rang}(A)=3$, se tiene que

$$\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{rang}(A)=3$$

y también

$$\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-\mathrm{rang}(A)=0.$$

Entonces $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}$; es el subespacio nulo independientemente del valor de a y no tiene base.
Como $\dim(\mathrm{Im}(f))=3$, la imagen tiene una ecuación implícita, pues es un subespacio de $\mathbb{R}^4$. La ecuación se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas.
Dado que $\mathrm{Im}(f)=\langle(1,4,a,2),(1,0,-1,a),(1,1,-1,a)\rangle$, dichas ecuaciones son

$$\begin{cases}x&=&\alpha+\beta+\gamma\\y&=&4\alpha+\gamma\\z&=&a\alpha-\beta-\gamma\\t&=&2\alpha+a\beta+a\gamma\end{cases}$$

y la ecuación implícita buscada es

$$\begin{vmatrix}1&1&1&x\\4&0&1&y\\a&-1&-1&z\\2&a&a&t\end{vmatrix}=0$$

Si a la tercera fila le sumamos la primera y a la cuarta le restamos la primera multiplicada por a, podemos escribir

$$\begin{vmatrix}1&1&1&x\\4&0&1&y\\a&-1&-1&z\\2&a&a&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&x\\4&0&1&y\\a+1&0&0&z+x\\2-a&0&0&t-ax\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&1&y\\a+1&0&z+x\\2-a&0&t-ax\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+1&z+x\\2-a&t-ax\end{vmatrix}$$

de donde se obtiene la ecuación

$$(a+1)t-a(a+1)x-(2-a)z-(2-a)x=0$$

o mejor,

$$(a^2+2)x+(2-a)z-(a+1)t=0$$

que es la ecuación implícita de $\mathrm{Im}(f)$ y que permite escribir

$$\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:(a^2+2)x+(2-a)z-(a+1)t=0\}$$

b) Si llamamos W al subespacio definido por las ecuaciones dadas, tenemos que

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=0,\ y+z=0\}$$

y hemos de hallar $f(W)$. Para ello necesitamos una base de W.
Las ecuaciones de W son $x=0$, $y=-z$ y por tanto

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=0,\ y=-z\}=\{(x,y,z)=(0,a,-a)\in\mathbb{R}^3\}=\langle(0,1,-1)\rangle.$$

Entonces $f(W)=\langle f(0,1,-1)\rangle=\langle(0,1,0,0)\rangle$, que es un subespacio de dimensión 1.

c) Para hallar la variedad vectorial antiimagen del vector $(1,4,a,2)$ debemos resolver el sistema $f(x,y,z)=(1,4,a,2)$, es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1\\ 4x+z & = & 4\\ ax-y-z & = & a\\ 2x+ay+az & = & 2\end{array}\right.$$

Como

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 4\\ a & -1 & -1 & a\\ 2 & a & a & 2\end{array}\right) \begin{array}{c} F_3+F_1\\ F_4-aF_1\\ \longrightarrow\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 4\\ a+1 & 0 & 0 & a+1\\ 2-a & 0 & 0 & 2-a\end{array}\right)$$

se obtiene $x=1$, $y=z=0$. Por tanto, el conjunto

$$f^{-1}(\{(1,4,a,2)\})=\{(1,0,0)\}$$

se reduce a un sólo elemento, es una variedad de dimensión 0.
Como $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}$, las ecuaciones implícitas del núcleo son (obviamente) $x=0$, $y=0$, $z=0$ y las de la variedad pedida son $x=1$, $y=0$, $z=0$.

d) Podemos hallar directamente la matriz pedida, pues

$$\begin{aligned} f(0,0,1)&=(1,1,-1,a)=(1,0,0,0)+(0,1,0,0)-(0,0,1,0)+a(0,0,0,1)\\ &=a(0,0,0,1)+(0,1,0,0)-(0,0,1,0)+(1,0,0,0)=(a,1,-1,1)_{B'}\end{aligned}$$

y, análogamente

$$\begin{aligned} f(0,1,-1)&=(0,-1,0,0)=(0,-1,0,0)_{B'}\\ f(1,-1,0)&=(0,4,a+1,2-a)=(2-a,4,a+1,0)_{B'}\end{aligned}$$

por lo que la matriz que buscamos es

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

También podríamos haber hallado B haciendo

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

donde

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin dificultad se prueba que $Q^{-1} = Q$ y el producto anterior da la matriz buscada B, como puede comprobarse fácilmente.

3. *a*) Necesitamos hallar $f(v_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Directamente del enunciado, observamos que $f(v_1) = rv_1 + 2v_2 + 4v_3 = (r, 2, 4)$.
   Como $f(v_1) - 2f(v_2) = rv_1$, se sigue que $2f(v_2) = f(v_1) - rv_1 = (0, 2, 4)$, de modo que $f(v_2) = (0, 1, 2)$.
   por último, el enunciado dice que $f(v_3) = (1-s)v_3 = (0, 0, 1-s)$.
   Así, la matriz de f es

   $$A = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1-s \end{pmatrix}$$

   b) Sabemos que $\text{rang}(f) = \text{rang}(A) = dim(\text{Im}(f))$. Como $|A| = r(1-s)$ se presentan los siguientes casos:

   - Si $r \neq 0$, $s \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$ y $\text{rang}(f) = 3$.
     En este caso $\text{Im}(f) = \langle (r, 2, 4), (0, 1, 2), (0, 0, 1-s) \rangle$. Debe ser $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, luego $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$.
     Es evidente que

     $$\text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$

     y que

     $$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}.$$

   - Si $r \neq 0$ y $s = 1$, entonces $\text{rang}(f) = 2$ como se ve directamente escribiendo la matriz resultante A.
     El subespacio imagen es $\text{Im}(f) = \langle (r, 2, 4), (0, 1, 2) \rangle$. Entonces $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ y $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) : x = 0,\ 2x - y = 0\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$. También se verifica que

     $$\text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = \langle (r, 2, 4), (0, 1, 2), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$$

     y por tanto que

     $$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}.$$

- Si $r = 0$, $s \neq 1$, también $\text{rang}(f) = 2$.
  Ahora, el subespacio imagen es $\text{Im}(f) = \langle (0,1,2),(0,0,1-s) \rangle$ que también tiene dimensión 2, luego $\text{Ker}(f) = \{(x,y,z) : 2x-y = 0 \ z = 0\} = \langle (1,2,0) \rangle$ tiene dimensión 2.
  De nuevo se verifica que
  $$\text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = \langle (0,1,2),(0,0,1-s),(1,2,0) \rangle = \mathbb{R}^3$$
  y también debe ser
  $$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}.$$
- Si $r = 0$ y $s = 1$ entonces $\text{rang}(f) = 1$.
  $\text{Im}(f) = \langle (0,1,2) \rangle$ mientras que $\text{Ker}(f) = \{(x,y,z) : 2x-y = 0\} = \langle (0,0,1),(1,2,0) \rangle$, pero sigue siendo
  $$\text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = \langle (0,1,2),(0,0,1),(1,2,0) \rangle = \mathbb{R}^3$$
  y también
  $$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}.$$

Los subespacios $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$ son suplementarios en todos los casos.

c) los valores propios se obtienen a partir de la ecuación característica,
$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} r-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & 1-s-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
y son $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1-s$. En función de los valores de r y s se presentan distintos casos.

1) Los tres autovalores son distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$ y $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Eso ocurre si $r \neq 1$, $s \neq 0$ y $r \neq 1-s$.
   En ese caso f es diagonalizable pues, al ser los tres autovalores distintos, está garantizada la existencia de un vector propio asociado a cada uno de ellos. Todos juntos determinan la base de vectores propios respecto de la que la matriz de f es diagonal.
2) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, es decir $r = 1$, $s \neq 0$. Los autovalores son $\lambda_1 = 1$, (doble) y $\lambda_2 = 1-s$.
   Para que f sea diagonalizable tiene que ser $\dim(V(1)) = 2$.
   Pero $\dim(V(1)) = 3 - \text{rang}(A - I)$ y como
   $$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1-s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -s \end{pmatrix}$$
   tiene rango 2, se verifica que $\dim(V(1)) = 1$ y f no es diagonalizable, pues no hay vectores propios suficientes para formar una base.
3) $\lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2$, es decir, $r \neq 1$, $s \neq 0$ y $r = 1-s$. Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = r$ (doble).
   En este caso, para que f sea diagonalizable debe ser $\dim(V(r)) = 2$. Dado que
   $$A - rI = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-r & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos concluir que si $r = 0$ entonces $\text{rang}(A - 0I) = \text{rang}(A) = 1$, (pues en este caso las dos filas no nulas de A son proporcionales), por lo que $\dim(V(0)) = 2$ y f es diagonalizable, mientras que si $r \neq 0$ se verifica que $\text{rang}(A-I) = 2$ y $\dim(V(r)) = 1$, por lo que f no es diagonalizable.
Por tanto, f es diagonalizable si $r = 0$ y $s = 1$.

4) $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$, es decir, si $r \neq 1$, $s = 0$. Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = r$.
De nuevo, para que f sea diagonalizable tiene que ser $\text{rang}(A - I) = 1$. Como la matriz

$$A - I = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, f no es diagonalizable en este caso.

5) Por último, si los tres valores propios son iguales, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, es decir, si $r = 1$, $s = 0$, entonces sólo hay un valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad 3.
Para que f fuese diagonalizable se debería cumplir que $\dim(V(1)) = 3$, es decir, $\text{rang}(A - I) = 0$.
Como

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene rango 0 (no es la matriz nula), f no es diagonalizable.

Como conclusión, f se diagonalizable si los tres valores propios son distintos (es decir, si $r \neq 1$, $s \neq 0$ y $r \neq 1 - s$) o bien si $r = 0$ y $s = 1$.