Appunti del corso di Logica
A.A. 2023/2024

Note a cura di Niccolò Iselle
Corso della Prof. Alessandra Di Pierro

Indice

Introduzione

1.1 Logica - ‘Studio del ragionamento’

Possiamo suddividere la *logica* in due categorie: quella *formale*, ovvero *simbolica*, che è lo sudio dei passaggi del nostro ragionamento basati su connettivi nelle nostre ‘sentenze’ (*if, and, or*); e quella *informale* (non simbolica), che è lo studio del pensiero logico in un contesto informale come la critica o l’argomentazione, più inerente al campo filosofico.

1.2 ‘La barretta di cioccolata’

Consideriamo una barretta di cioccolata formata da 24 quadratini disposti in un rettangolo 6 x 4. Il nostro obbiettivo è quello di separare ogni quadratino col minor numero di tagli (sempre effettuati lungo le linee). Quanti tagli serviranno?

Soluzione: intuitivamente serviranno tanti tagli quanti sono i quadratini di cioccolata meno uno.

1.2.1 Dimostrazione per induzione

Principio di induzione:

- $P(n)$
- $P(0)$
- $P(n-1)$ ipotesi induttiva, se assumendo che P è vera su $n-1$.
- Dimostriamo che $P(n)$, allora P vale per ogni n.

Dimostrazione:

1. Se la barretta è fatta da un quadratino $\rightarrow$ banale, 0 tagli.

2. Assumendo che per una barretta composta da $1 < m < N$ quadratini abbiamo già dimostrato che servono esattamente $m-1$ tagli per una barretta composta da m quadratini.

3. Se ora abbiamo una barretta da N quadratini, e la dividiamo in due parti m_1 ed m_2. Ovviamente $m_1 + m_2 = N$. Per l'ipotesi induttiva, ci serviranno $m_1 - 1$ tagli per separare i quadratini di m_1 ed $m_2 - 1$ tagli per separare i quadratini di m_2. Il totale sarà quindi
$$1 + (m_1 - 1) + (m_2 - 1) = N - 1$$

1.2.2 Dimostrazione per invariante

Invariante: si tratta di una proprietà che non cambia il suo valore, ovvero una proposizione *vera*. Ad esempio, in un programma l'invariante è quella proprietà che rimane uguale prima, durante e dopo l'esecuzione del programma stesso.

Per dimostrare che servono $N-1$ tagli per separare la barretta di cioccolata nei singoli quadratini. Possiamo notare che ogni volta che rompiamo la barretta il numero totale di pezzi aumenta di uno (il pezzo più grande viene diviso in due pezzi più piccoli). Quando non abbiamo più pezzi da rompere, ogni pezzo è un quadratino. All'inizio, dopo 0 tagli, abbiamo 1 pezzo. Dopo aver fatto 1 taglio, otteniamo 2 pezzi. Aumentare il numero dei tagli di 1 fa aumentare il numero di pezzi di 1. Quindi il secondo numero (numero di quadratini) sarà sempre di 1 più grande del primo (numero di tagli).

1.3 Concetto di insieme

Possiamo definire un insieme in modo estensivo
$$A = \{a, b, c\}$$
elencando tutti i suoi elementi, oppure possiamo definirlo utilizzando una proprietà condivisa da tutti i suoi elementi
$$A = \{x | x \text{ è pari}\} \subseteq \mathbb{N}$$
che equivale a scrivere
$$\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è pari}\}$$
o ancora
$$\{x \in \mathbb{N} | x \text{ è pari}\}$$

1.4 Logica proposizionale (o sentenziale)

La logica proposizionale è un ramo della logica simbolica deduttiva che assume le proposizioni (sentenze) come unità fondamentali dell'analisi logica. Le preposizioni che prendiamo in esame sono le *asserzioni*.

Asserzione: è una proposizione che ha un valore di verità, cioè può assumere il valore *vero (T)* oppure il valore *falso (F)*.

Esempi di asserzioni:

- Verona è una città del Veneto
- Fuori sta piovendo
- Nel 5024 il Sole si spegnerà

Le asserzioni possono essere collegate da *connettivi logici* tra loro. Prendiamo in esempio la frase '*Se c'è il sole allora serve la protezione. Ma se serve la protezione allora non si può fare il bagno.*' Possiamo estrapolare tre asserzioni:

- S: *C'è il sole*
- P: *Serve la protezione*
- B: *Non si può fare il bagno*

e possiamo collegarle tra loro con i connettivi logici, per formare lo stesso significato espresso dalla frase, nel modo in cui segue:

$$S \to P$$
$$P \to B$$

(Dove $\to$ si legge *implica*).

1.4.1 Linguaggi formali - (automi di riconoscimento)

Nella logica dobbiamo usare un linguaggio formale, formato da un *alfabeto*. Un esempio di definizione di alfabeto potrebbe essere il seguente:

$$A = \{a, b\}$$

Un linguaggio formale, basato sull'alfabeto A potrebbe essere:

$$L(A) = \{a, b, ab, aa, ba, \dots\}$$

Notare che $ab \neq ba$, si dice che sono *parole* diverse. Un'altra notazione importante è *A-star* scritta come A^*, che sta ad indicare tutte le stringhe che si possono costruire con l'alfabeto A.

Esempio: Dato l'alfabeto $A = \{a, b\}$, costruiamo un linguaggio costituito da tutte le stringhe formate da un numero pari di simboli:

$$L_p = \{aa, ab, abab, \dots\}$$

Possiamo quindi affermare che $a \notin L_p$.

1.5 Teoria dell'Aritmetica di Peano - Definizione dei numeri naturali

Per definire i numeri naturali, utilizziamo una *struttura* formata da tre elementi:

$$< \mathbb{N}, 0, succ >$$

- $\mathbb{N}$ è l'universo del discorso
- 0 è una costante, il caso base
- *succ* è una funzione su $\mathbb{N}$ definita come

$$succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

1.5.1 I ASSIOMA

$$\text{Esiste un numero } 0 \in \mathbb{N}$$

Il primo assioma dice che 0 è un elemento privilegiato di $\mathbb{N}$ detto *zero*.

1.5.2 II ASSIOMA

$$\text{Esiste una funzione } succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Il secondo assioma dice che *succ* è un'operazione unaria iniettiva su A;

1.5.3 III ASSIOMA

$$succ(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{N}$$

Il terzo assioma ci dice che 0 non è il successore di nessun numero, un altro modo di esprimerlo è $0 \notin Im(succ)$.

1.5.4 IV ASSIOMA

Se $P \subseteq \mathbb{N}$ e valgono le seguenti proprietà:

- $0 \in P$
- $\forall n \in \mathbb{N}.(n \in P \to succ(n) \in P)$,

allora $P = \mathbb{N}$.

Il quarto assioma sta ad indicare che, partendo dal fatto che 0 è un numero naturale, se n è un numero naturale allora anche $n+1$ è un numero naturale. Questo assioma è detto *assioma di induzione*.

1.6 Principio di Induzione

Dato che una proprietà P sui numeri naturali non è altro che un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, ovvero $P \subseteq \mathbb{N}$, possiamo riformulare l'assioma di induzione come principio per provare proprietà sui naturali.

1.6.1 Principio di induzione:

Sia $P(x)$ una proprietà su $\mathbb{N}$.
Se $P(0)$ e $\forall n \in \mathbb{N}.(P(n) \to P(succ(n))$ allora $\forall m \in \mathbb{N}.P(m)$.

1.6.2 Esempio

Dimostrare per induzione su n che

$$P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$$

Caso base $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{0} 2i+1 = (n+1)^2$$

$$2*0+1 = (0+1)^2 = 1$$

Ipotesi induttiva: supponiamo ora che valga

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i+1 = ((n-1)+1)^2$$

e utilizziamo questa *ipotesi induttiva* per dimostrare che vale anche per n.

Passo induttivo: Partiamo dalla formula che dobbiamo dimostrare

$$\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$$

e possiamo riscriverla come

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i+1+2n+1 = (n+1)^2$$

ora possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva, sapendo che

$$((n-1)+1)^2+2n+1 = n^2+2n+1$$

e risolviamo:

$$(n-1)^2+2(n-1)+1+2n+1 = n^2+2n+1$$

$$n^2-2n+1+2n-2+1+2n+1 = n^2+2n+1$$
$$n^2+2n+1 = n^2+2n+1$$

$\square$

1.7 Cardinalità di un insieme

La cardinalità di un insieme è il numero di elementi che esso contiene, per esempio:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

La cardinalità di $\mathbb{N}$, che si esprime in notazione come $|\mathbb{N}|$ è un *infinito numerabile*. Nel caso di un insieme con un numero finito di elementi, ad esempio $A = \{a,b,c\}$ la sua cardinalità $|A| = 3$.

Se un insieme ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ significa che può essere messo in *corrispondenza biunivoca* con $\mathbb{N}$. Ovvero

$$\forall b \in B \exists n \in \mathbb{N}$$

$$f : b \to n$$

E vale anche che

$$\forall b \in \mathbb{N} \exists b \in B$$

$$f : n \to b$$

1.8 Numeri naturali

Come precedentemente detto, i numeri naturali sono formati da

$$\langle \mathbb{N}, succ, 0 \rangle$$

$succ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione *iniettiva*, ovvero ad ogni elemento del dominio corrisponde uno e uno solo elemento dell'immagine. Presi due insiemi A e B, se $Im(f) = B$ si dice che la funzione è *surgettiva*. Se una funzione è *surgettiva* e *iniettiva* si ha una *corrispondenza biunivoca (biezione)*.

Esempio di proposizione sui numeri naturali

$$P := n \text{ è pari}$$
$$P = n \in \mathbb{N} | P(n)$$
$$= n \in \mathbb{N} | n \text{ è pari}$$

1.8.1 Definizioni induttive

Esempio

Definiamo h come segue

$$h : \mathbb{N}x\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ t.c. } h(x,y) = succ(x) * y$$

caso base

$$f(0) = 1$$
$$f(succ(n) = h(n, f(n)) = succ(n) * f(n)$$

n = 0

$$succ(0) * f(0) = 1 * 1 = 1$$

caso induttivo

$$f(succ(succ(0))) = succ(n) * f(n)$$

n = 2

$$f(succ(succ(0)) = f(2) = 2 * 1 = 2$$

n = 3

$$f(succ(succ(succ(0)))) = f(3) = 3 * 2 * 1$$
$$\ldots$$

Possiamo notare che questa è la definizione induttiva del fattoriale di un numero.

Sintassi

2.1 Simboli e significato

Simboli	**Significato**
$P \to Q$	*se* P *allora* Q
$P \leftrightarrow Q$	P *se e solo se* (*sse*) Q
$P \wedge Q$	P *and/e* Q
$P \vee Q$	P *or/oppure* Q
$\neg P$	*not* P (P è *falso*) $((\neg P) \equiv (P \to \perp))$
$\forall xP$	*per ogni elemento x P(x) è vero*
$\exists xP$	*Esiste un elemento tale che P è vero per quell'elemento*

2.2 Linguaggio formale

Il linguaggio della logica proposizionale ha un alfabeto che consiste di

1. proposizioni (o simboli proposizionali): $p_0, p_1, p_2, \ldots$
2. connettivi: $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \perp, \top$
3. simboli ausiliari: '(' e ')'

Bottom e Top

- Bottom è il falso e si indica con $\perp$, il suo valore è sempre 0.
- Top è il vero e si indica con $\top$, il suo valore è sempre 1 e viene definito come $\models \top \leftrightarrow (\perp \to \perp)$.

2.2.1 Proposizioni atomiche e proposizioni composte

Proposizioni atomiche o minimali

Le proposizioni atomiche sono quelle proposizioni che non possono essere suddivise in parti più piccole. Per esempio

$$5 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

è una proposizione atomica.

Proposizioni composte

c è razionale oppure c è irrazionale

Una proposizione si dice composta quando può essere scomposta in sotto-proposizioni più piccole, unite da connettivi logici $(\wedge, \vee, \rightarrow, \dots)$.

2.2.2 L'insieme *PROP* delle proposizioni

L'insieme *PROP* è il *più piccolo insieme X* con le seguenti proprietà:

1. $p_i \in X$ per $i \in \mathbb{N}$ e $\perp \in X$
2. $\varphi, \psi \in X \rightarrow (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in X$
3. $\varphi \in X \rightarrow (\neg\varphi) \in X$

Il connettivo *bottom* $(\perp)$ è una costante logica, con valore sempre falso.

2.2.3 Priorità dei connettivi

Le formule devono avere le parentesi, ma per poter scrivere in maniera abbreviata una formula senza le parentesi, e per poterla leggere correttamente, dobbiamo associare delle priorità ai connettivi.

1. $\neg$ è il connettivo con più priorità
2. $\wedge, \vee$
3. $\rightarrow, \leftrightarrow$

Esempi:

- $\neg\varphi \vee \varphi$ è l'abbreviazione della formula $((\neg\varphi) \vee \varphi)$
- $\neg(\neg\neg\neg\varphi \wedge \perp)$ è l'abbreviazione della formula $(\neg((\neg(\neg(\neg\varphi))) \wedge \perp))$
- $\varphi \vee \psi \rightarrow \varphi$ significa $((\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi)$

2.3 Parse Tree

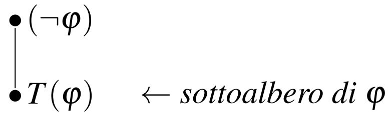
Nella definizione ricorsiva di formule si può usare la rappresentazione ad albero:

$$T(\varphi) = \varphi \text{ se } \varphi \in AT$$

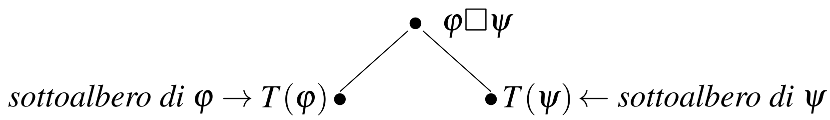
Questo è l'albero formato dal solo nodo φ:

$$\bullet\, \varphi$$

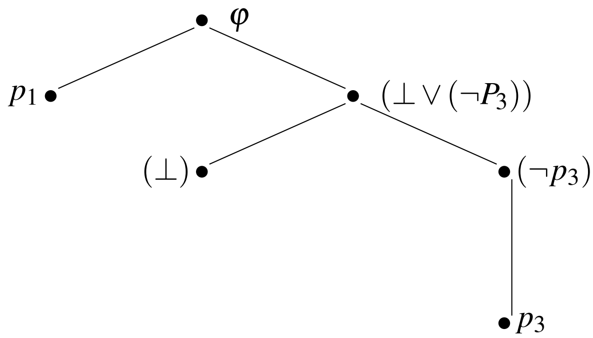
Abbiamo quindi che $T(\neg\varphi)$ è uguale a:



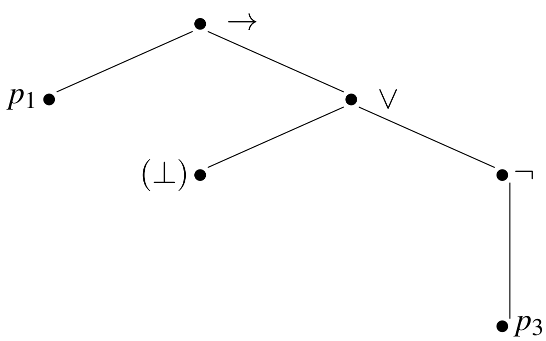
Analogamente per $T(\varphi \Box \psi)$, con $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ l'albero corrispondente sarà:



Esercizio: costruire l'albero della formula $\varphi = (p_1 \rightarrow (\perp \vee (\neg p_3)))$.



Al posto delle formule possiamo usare, in modo totalmente equivalente, i connettivi:



Possiamo definire un albero come un sottoinsieme finito dell'insieme di tutte le sequenze (*Seq*) che possiede le seguenti proprietà:

- $T \subset Seq$
- Se $t \in T$ e $s \leq t$, allora $s \in T$
- $u = s * t$ significa che se

$$s = (n_1, n_2, \ldots, n_i) \text{ e } t = (m_1, m_2, \ldots, m_j) \text{ allora}$$

$$u = (n_1, n_2, \ldots, n_i, m_{i+1}, \ldots, m_j)$$

Nota: Nella deduzione naturale gli alberi indicano derivazioni logiche e sono alebri rovesciati.

Semantica

3.1 Valutazione

Si definisce valutazione atomica v, una funzione tale che:

- $v : AT \rightarrow \{0,1\}$
- $v(\bot) = 0$

Le vlutazioni sono infinite (infinito numerabile).

3.1.1 Tabelle di verità

Or - $p_1 \vee p_2$

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

And - $p_1 \wedge p_2$

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implicazione - $p_1 \rightarrow p_2$

p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Not - $\neg p$

La negazione ($\neg$) è intesa come abbreviazione per $p \rightarrow \bot$, possiamo quindi ricavarne due tabelle di verità:

$p \rightarrow \bot$

p	$\bot$	$p \rightarrow \bot$
0	0	1
1	0	0

$\neg p$

p	$\neg p$
0	1
1	0

3.2 Valutazione su *PROP*

Dopo aver definito la valutazione per le formule atomiche, possiamo definire la valutazione per formule logiche composte.

Definizione

$$[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0,1\}$$

$[\![\varphi]\!]_v$ è una valutazione in *PROP* se:

- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = 1$ AND $[\![\psi]\!]_v = 1$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = 1$ OR $[\![\psi]\!]_v = 1$
- $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = 0$ OR $[\![\psi]\!]_v = 1$
  $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 0 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = 1$ AND $[\![\psi]\!]_v = 0$
- $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = 0$

Nota: due formule sono *equivalenti* se hanno *lo stesso valore di verità*.

3.2.1 Proposizione

Per ogni valutazione atomica v, esiste un'unica semantica $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0,1\}$ tale che $[\![\varphi]\!]_v = v(\varphi)$.

3.3 Conseguenza logica

Sia Γ (*gamma*) un'insieme di formule proposizionali, ovvero $\Gamma \subseteq PROP$, e sia $\varphi \in PROP$ una formula. La dicitura φ *è conseguenza logica di* Γ si denota con

$$\Gamma \models \varphi$$

e indica che da Γ segue logicamente φ, ovvero:

$$\forall v,\ [\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

A parole, significa che se la valutazione di tutte le formule nell'insieme Γ è vera, allora anche φ è vera.

3.3.1 Esempo di conseguenza logica

$$\{\varphi, \psi\} \models \varphi \wedge \psi$$

$$\forall v,\ \text{se}\ ^{1}[\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v = 1,\ \text{allora}$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = 1$$

$\square$

La dicitura $[\![\Gamma]\!]_v = 0$ invece significa che $\exists \gamma \in \Gamma : [\![\gamma]\!]_v = 0$ ovvero, basta che ci sia una formula in Γ che per la valutazione v non sia vera, per affermare che $[\![\Gamma]\!]_v = 0$.

Esempio: $\Gamma = \{p, \neg p\}$, $p \in AT$. Non possiamo affermare che $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ perchè $[\![p]\!]_v = 1 \implies [\![\neg p]\!]_v = 0$, e viceversa.

3.4 Tautologia

Una *tautologia* è una conseguenza logica senza premesse, quindi per ogni valutazione v, dobbiamo avere che $[\![\varphi]\!]_v = 1$. Si indica con $\models \varphi$.

3.4.1 Esempi di tautologia

- $\models \varphi \vee \neg\varphi$

$$\forall v\ [\![\varphi \vee \neg\varphi]\!]_v = 1$$
$$\Leftrightarrow\ [\![\varphi]\!]_v = 1\ or\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1$$
$$\Leftrightarrow\ [\![\varphi]\!]_v = 1\ or\ [\![\varphi]\!]_v = 0$$

$\square$

- $\models \neg\neg\varphi \to \varphi$

$$\forall v\ [\![\neg\neg\varphi \to \varphi]\!]_v = 1$$
$$\Leftrightarrow\ [\![\neg\neg\varphi]\!]_v = 0\ or\ [\![\varphi]\!]_v = 1$$
$$\Leftrightarrow\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1\ or\ [\![\varphi]\!]_v = 1$$
$$\Leftrightarrow\ [\![\varphi]\!]_v = 0\ or\ [\![\varphi]\!]_v = 1$$

$\square$

[1]Definizione di and

- $\models (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

$$\forall v\ [\![(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)]\!]_v = 1$$

$$\Leftrightarrow [\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1\ or\ [\![\psi \to \varphi]\!]_v = 1$$

$$\Leftrightarrow ([\![\varphi]\!]_v = 0\ or\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ oppure\ ([\![\psi]\!]_v = 0\ or\ [\![\varphi]\!]_v = 1)$$

□

3.5 Soddisfacibilità

$v \models \varphi$ si legge 'v soddisfa φ, oppure 'da v segue φ, e significa che $[\![\varphi]\!]_v = 1$, ovvero

$$\exists v \text{ per cui la formula } \varphi \text{ è vera.}$$

3.5.1 Esempi di soddisfacibilità

- $v \models p_0 \Leftrightarrow v(p_0) = 1$
- $v \models p_0 \wedge p_1 \Leftrightarrow v(p_0) = 1 and v(p_1) = 1$

3.6 Teorema di correttezza e completezza

Il teorema dice che se si dimostra semanticamente una conseguenza logica, allora è possibile trovarne una derivazione nella deduzione naturale.

$$\models \leftrightarrow \vdash$$

Ovvero mette in corrispondenza *sintassi* e *semantica*.

3.7 Lemma

1. $\Gamma \vDash \psi$[1] e Δ, ψ[2]$\vDash \varphi \Rightarrow \Gamma, \Delta \vDash \varphi$

   Dimostrazione

   $$\text{Per ogni valutazione } v\text{, se } [\![\Gamma]\!]_v = [\![\Delta]\!]_v = 1, \text{ allora } [\![\varphi]\!]_v = 1$$

   Infatti:

   $$\Gamma, \Delta \vDash \varphi \begin{cases} \text{Se } \Gamma \vDash \psi & allora\, \Gamma, \Delta \vDash \psi \\ \text{Se } \Delta, \psi \vDash \varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

   $$[\![\Gamma]\!]_v = [\![\Delta]\!]_v = 1 \Rightarrow {}^1[\![\psi]\!]_v = 1 \Rightarrow {}^2[\![\varphi]\!]_v = 1$$

   □

2. $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$ e $\Delta, \psi \vDash \gamma$ e $\Sigma, \psi \vDash \gamma \Rightarrow \Gamma, \Delta, \Sigma \vDash \gamma$

   Dimostrazione

   $$\text{Per ogni } v\text{, se } [\![\Gamma]\!]_v = [\![\Delta]\!]_v = [\![\Sigma]\!]_v = 1$$
   $$\text{allora } [\![\gamma]\!]_v = 1$$
   $$\text{Se } \; [\![\Gamma]\!]_v = 1 \Rightarrow [\![\varphi \vee \psi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ or } [\![\psi]\!]_v = 1$$
   $$[\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ e } [\![\Delta]\!] = 1 \Rightarrow [\![\gamma]\!]_v = 1$$

   oppure

   $$[\![\psi]\!]_v = 1 \text{ e } [\![\Sigma]\!]_v = 1 \Rightarrow [\![\gamma]\!]_v = 1$$
   $$\Leftrightarrow \forall v \text{ t. c. } [\![\Delta]\!]_v = 1 \text{ e } [\![\Sigma]\!]_v = 1 \text{ e } [\![\varphi \vee \psi]\!]_v = 1 \Rightarrow [\![\gamma]\!]_v = 1$$
   $$\Leftrightarrow \Delta, \Sigma, \varphi \vee \psi \vDash \gamma$$
   $$\Leftrightarrow {}^3\Delta, \Sigma, \Gamma \vDash \gamma$$

   □

[1] Ipotesi A
[2] Ipotesi B
[3] Per Lemma punto 1.

3.8 Relazione di equivalenza

Definiamo una relazione di equivalenza con la notazione $\varphi \approx \psi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

3.9 Sostituzione

La sostituzione si denota con $\varphi[\psi/p_i]$ e significa che all'interno della formula φ tutte le volte che compare p_i va sostituito con ψ.

Esempio:

$\varphi \equiv p_1 \wedge p_0 \to (p_0 \to p_3)$, se scriviamo $\varphi[\neg p_0 \to p_3/p_0]$, vogliamo sostituire ogni occorrenza di p_0 nella formula φ con la formula $(\neg p_0 \to p_3)$, ovvero:

$$\varphi[\neg p_0 \to p_3/p_0] = p_1 \wedge (\neg p_0 \to p_3) \to ((\neg p_0 \to p_3) \to p_3)$$

3.10 Definizione algebrica della semantica

- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v \cdot [\![\psi]\!]_v$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v + [\![\psi]\!]_v$
- $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = 1 - [\![\varphi]\!] + [\![\varphi]\!]_v \cdot [\![\psi]\!]$
- $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1 - [\![\varphi]\!]_v$
- $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]_v = 1 - |[\![\varphi]\!]_v - [\![\psi]\!]_v|$

3.11 Proprietà della Semantica

3.11.1 Associativa

La semantica gode della proprietà associativa:

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$$

Dimostrazione $\models (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

$$\forall v \; [\![(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma]\!]_v = [\![\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)]\!]_v$$
$$\iff [\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\sigma]\!]_v = 1$$
$$\iff [\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\psi]\!]_v = 1 \text{ and } [\![\sigma]\!]_v = 1$$

3.11.2 Commutativa

La semantica gode della proprietà commutativa:

$$\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$$

3.11.3 Distributiva

La semantica gode della proprietà distributiva:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$$

3.11.4 Legge di De Morgan

Valgono le seguenti leggi:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

3.11.5 Idempotenza

$$\varphi \wedge \varphi \leftrightarrow \varphi$$
$$\varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$$

3.11.6 Legge della doppia negazione

$$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$$

3.11.7 Top, la formula sempre vera ($\top$)

Si definisce la formula sempre vera come $\top \equiv \bot \to \bot$. In generale, si può dimostrare che $\models \bot \to \varphi \; \forall \varphi \in PROP$. Infatti:

$\bot$	φ	$\bot \to \varphi$
0	0	1
0	1	1

che semanticamente lo possiamo scrivere come segue:

$$[\![\bot \to \varphi]\!]_v = 1 \iff [\![\bot]\!]_v = 0 \text{ or } [\![\varphi]\!]_v = 1$$

Deduzione Naturale

4.1 Concetto di Derivazione

Nella Semantica abbiamo definito $\models$ come *conseguenze logiche* e, nel caso in cui l'insieme delle premesse sia vuoto, come *tautologie*. Nella *deduzione naturale* possiamo definire delle *derivazioni* da un insieme di ipotesi, oppure dei *teoremi*, se l'insieme delle ipotesi è vuoto.

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \text{ significa che posso trovare una derivazione dalle formule in } \Gamma \text{ a } \varphi.$$

$$\vdash \varphi \Rightarrow \text{ significa che } \varphi \text{ è un teorema.}$$

È possibile dimostrare che tautologie e teoremi coincidono.

4.2 Le regole di derivazione

$$\begin{array}{c}\text{applicazione}\\ \text{di una regola}\end{array} \longrightarrow \quad \frac{\varphi \qquad \psi}{\sigma} \quad \begin{array}{l}\longleftarrow \text{premesse e ipotesi}\\ \longleftarrow \text{conclusioni}\end{array}$$

Questo è un esempio di derivazione, ma per poter dare un senso a questa notazione sintattica si devono introdurre delle regole di eliminazione ed introduzione dei connettivi.

4.2.1 Regole di Eliminazione ed Introduzione

$\wedge I$ - AND Introduction **$\wedge E_1$ - AND Elimination** **$\wedge E_2$ - AND Elimination**

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge E_1 \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

$\rightarrow I$ - Implication Introduction

Scarico l'ipotesi

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^1\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^1$$

$\rightarrow E$ - Implication Elimination

$$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\rightarrow E$$

Regole dell'implicazione applicate al NOT ($\neg$):

$\rightarrow I$ - Implication Introduction

Scarico l'ipotesi

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^1\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\rightarrow I^1(Intr.\neg)$$

$\rightarrow E$ - Implication Elimination

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\rightarrow E$$

$\bot$ - Bottom Rule

Ex falso sequitor quodlibet, ovvero dal falso posso derivare qualsiasi cosa.

$$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \bot$$

***RAA* - Reduction Ad Absurdum**

Se assumendo $\neg\varphi$ derviamo il *bottom* allora φ.

Scarico l'ipotesi

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^1\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \mathrm{RAA}^1$$

In alcuni casi dobbiamo *scaricare le ipotesi*, ovvero l'applicazione di quella regole 'consuma' l'ipotesi che viene quindi rimossa dall'insieme delle ipotesi. Per derivare un **teorema** è importante che tutte le ipotesi siano scaricate perché un teorema ha come insieme delle ipotesi l'insieme vuoto. Lo scarico di una ipotesi si denota con delle parentesi quadre attorno ad essa e, generalmente, si usa associare un numero per collegarla alla regola che ne prevede lo scarico.

4.2.2 Esempio di derivazione

Data la tautologia $\models (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, che possiamo dimostrare semanticamente, possiamo derivare il *teorema* $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\varphi]^5 \quad [\varphi \to \psi]^1}{\psi}\,{\to E} \quad [\neg\psi]^3
}{\bot}\,{\to E}
}{\neg\varphi}\,{\to I^5}
}{\neg\psi \to \neg\varphi}\,{\to I^3}
}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}\,{\to I^1}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\neg\psi]^6 \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]^2}{\neg\varphi}\,{\to E} \quad [\varphi]^4
}{\bot}\,{\to E}
}{\psi}\,\mathrm{RAA}^6
}{\varphi \to \psi}\,{\to I^4}
}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\to I^2}
}{(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)}\,{\wedge I}
$$

Esercizio

Trovare una derivazione di $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

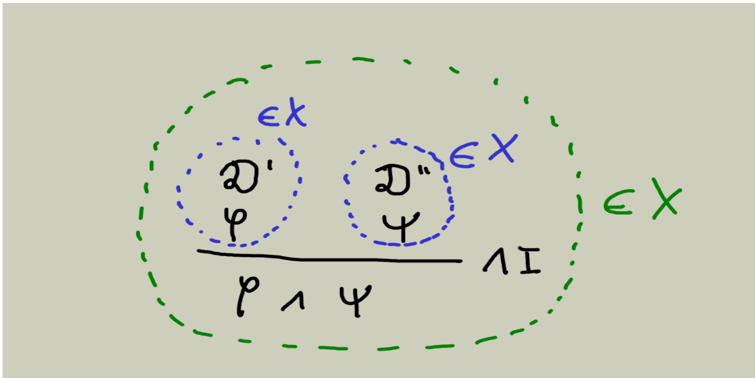
$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\psi}\,{\wedge E_1} \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,{\wedge E_2}
}{\psi \wedge \varphi}\,{\wedge I}
}{(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,{\to I^1}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\psi \wedge \varphi]^2}{\varphi}\,{\wedge E_1} \quad \dfrac{[\psi \wedge \varphi]^2}{\psi}\,{\wedge E_2}
}{\varphi \wedge \psi}\,{\wedge I}
}{(\psi \wedge \varphi) \to (\varphi \wedge \psi)}\,{\to I^2}
}{(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)}\,{\wedge I}
$$

$\square$

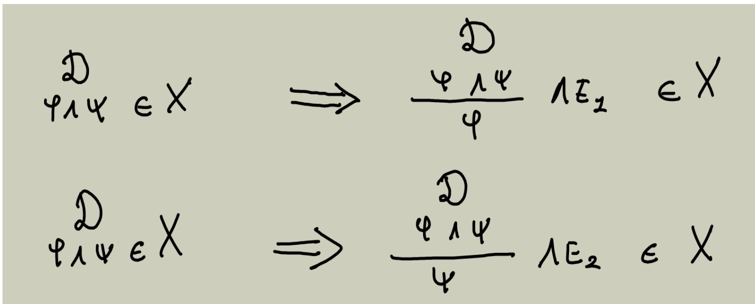
4.2.3 Definizione di derivazione

L'insieme di tutte le derivazioni del sistema di ND_p è il minimo insieme X t.c.

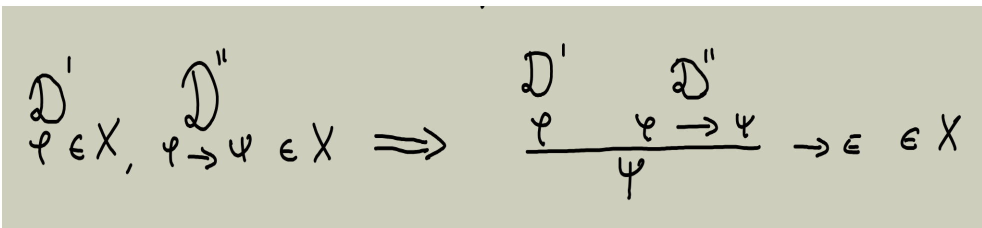
- $\varphi \in X$ se $\varphi \in PROP$ (una formula atomica è una derivazione atomica).
- Suponiamo di avere una derivazione di $\varphi \in X$ e una derivazione di $\psi \in X$, posso derivare $\varphi \wedge \psi$:



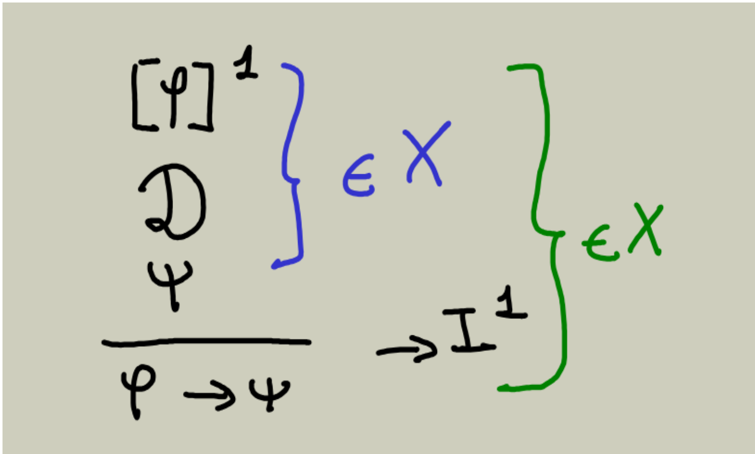
- Supponiamo di avere una derivazione di $(\varphi \wedge \psi) \in X$ allora possiamo derivare φ e ψ:



- Supponiamo di avere una derivazione di $\varphi \in X$ e una derivazione di $(\varphi \to \psi) \in X$ allora possiamo derivare ψ:

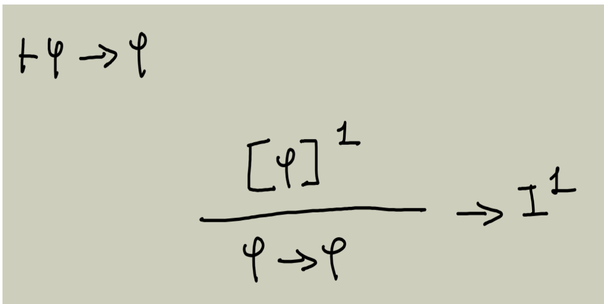


- Supponiamo di avere una derivazione da $\varphi \in X$ a $\psi \in X$, allora applicando la regola dell'introduzione dell'implicazione otteniamo che la derivazione risultante appartiene ad X:

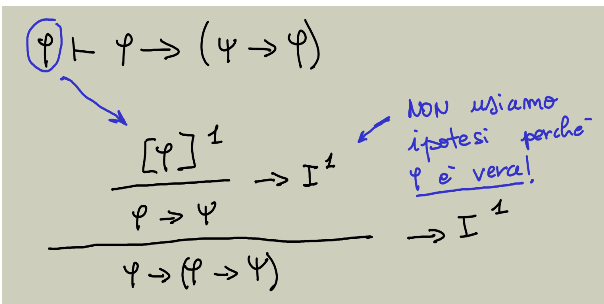


Esempi di derivazione

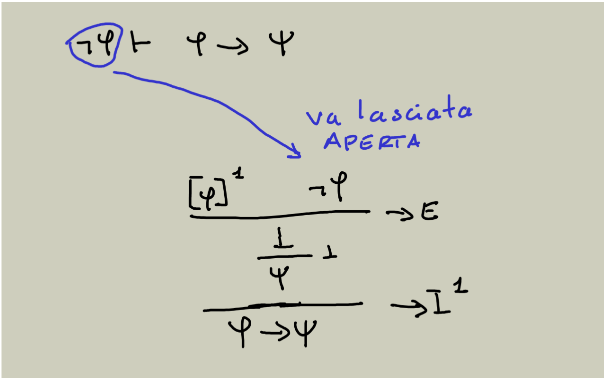
1. $\vdash \varphi \to \varphi$:



2. $\varphi \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$:



3. $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$:



4.2.4 Regole dell'OR

Come visto in precedenza, l'espressione $\varphi \vee \psi$ può essere vista come un'abbreviazione di $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, ma esistono delle regole di derivazione specifiche per il connettivo $\vee$:

$\vee E$ - Or Elimination

Scarico le ipotesi $\longrightarrow$

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^1 \\ \vdots \\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^1 \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \vee E^1$$

Notare che l'eliminazione dell'or prevede lo scarico delle ipotesi, e che la formula che si ottiene è diversa da quelle che compongono la formula contenente il connettivo $\vee$.

$\vee I_1$ - Or Introduction

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee I_1$$

$\vee I_2$ - Or Introduction

$$\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee I_2$$

4.3 Teorema di Correttezza - Soundness

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Dimostrazione

Per definizione, $\Gamma \vdash \varphi \iff$ esiste una derivazione $\mathscr{D}$ con tutte le sue ipotesi in Γ, questo è sufficiente per dimostrare: per ogni derivazione $\mathscr{D}$ con conclusione φ e ipotesi in Γ abbiamo $\Gamma \models \varphi$. Usiamo ora l'induzione su $\mathscr{D}$.

- (*p. base*) Se $\mathscr{D}$ ha un solo elemento, allora $\varphi \in \Gamma$. Perciò $\Gamma \models \varphi$.
- ($\wedge$ *I*) Ipotesi induttiva: $\begin{smallmatrix}\mathscr{D}\\ \varphi\end{smallmatrix}$ e $\begin{smallmatrix}\mathscr{D}'\\ \varphi'\end{smallmatrix}$ sono derivazioni e per ogni Γ, Γ' contenenti le ipotesi di $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ abbiamo $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma' \models \varphi'$.

  Ora, se Γ'' contiene le ipotesi di

  $$\frac{\begin{matrix}\mathscr{D}\mathscr{D}'\\ \varphi\ \varphi'\end{matrix}}{\varphi\wedge\varphi'}$$

  e scegliamo Γ e Γ' come gli insiemi di tutte le ipotesi delle derivazioni $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}'$, possiamo notare che $\Gamma'' \supseteq \Gamma \cup \Gamma'$.

  Quindi $\Gamma'' \models \varphi$ e $\Gamma'' \models \varphi'$.